# Matemáticas
## Simplificadas

SEGUNDA EDICIÓN

ARITMÉTICA · ÁLGEBRA · GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA
GEOMETRÍA ANALÍTICA · CÁLCULO DIFERENCIAL · CÁLCULO INTEGRAL

# Matemáticas simplificadas

# Matemáticas simplificadas

Arturo Aguilar Márquez
Fabián Valapai Bravo Vázquez
Herman Aurelio Gallegos Ruiz
Miguel Cerón Villegas
Ricardo Reyes Figueroa

REVISIÓN TÉCNICA

**Ing. Carlos Lozano Sousa (M.Sc.)**
**Ing. Agustín Vázquez Sánchez (M. en C.)**
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

**Prentice Hall**

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

**Matemáticas simplificadas**
Segunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-607-442-348-8

Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 1640



Editor: Lilia Moreno Olvera
e-mail: lilia.moreno@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Alejandro Gómez Ruiz
Supervisores de producción: Juan José García Guzmán
Rodrigo Romero Villalobos
José Hernández Garduño

SEGUNDA EDICIÓN, 2009



Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031



ISBN: 978-607-442-348-8

**Prentice Hall**
es una marca de

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

Para los que enseñan y para los que aprenden

Ing. Arturo Santana Pineda

# El poder de las matemáticas

El que domina las matemáticas
piensa, razona, analiza y por ende
actúa con lógica en la vida cotidiana,
por tanto, domina al mundo.

Ing. Arturo Santana Pineda

# Prefacio

El Colegio Nacional de Matemáticas es una institución que, desde su fundación, ha impartido cursos de regularización en las áreas de Matemáticas, Física y Química, con resultados altamente satisfactorios. Es por ello que su fundador y director general, el Ingeniero Arturo Santana Pineda, decidió plasmar y compartir la experiencia adquirida en este libro que recopila lo aprendido en todos estos años y cuyo principio fundamental es que la persona que aprende matemáticas, piensa, razona, analiza y por tanto actúa con lógica.

A través de esta institución y sus docentes, se ha logrado no sólo resolver el problema de reprobación con el que llega el estudiante sino, también, cambiar su apreciación sobre la materia, de tal forma, que se va convencido de que es fácil aprender matemáticas y que puede incluso dedicarse a ellas. De ahí que jóvenes que han llegado con serios problemas en el área, una vez que descubren su potencial han decidido estudiar alguna carrera afín.

De esta forma, se decide unir a los docentes con mayor experiencia y trayectoria dentro de la institución para que conjuntamente escriban un libro que lejos de presunciones formales, muestre la parte práctica que requiere un estudiante al aprender matemáticas y que le sirva de refuerzo para los conocimientos adquiridos en el aula.

## Enfoque

El libro tiene un enfoque 100% práctico, por lo que la teoría que se trata es lo más básica posible, sólo se abordan los conceptos básicos para que el estudiante comprenda y se ejercite en la aplicación de la teoría analizada en el aula, en su libro de texto y con su profesor.

De esta manera, se pone mayor énfasis en los ejemplos, en donde el estudiante tendrá la referencia para resolver los ejercicios que vienen al final de cada tema y poder así reafirmar lo aprendido. Estamos convencidos de que es una materia en la cual el razonamiento es fundamental para su aprendizaje, sin embargo, la práctica puede lograr que este razonamiento se dé más rápido y sin tanta dificultad.

## Estructura

*Matemáticas simplificadas* está formado por seis áreas básicas de las matemáticas: Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Cada una de ellas está dividida en capítulos, los cuales llevan un orden específico, siempre tomando en cuenta que el estudio de las matemáticas se va construyendo, es decir, cada tema siempre va ligado con los conocimientos adquiridos en los apartados anteriores.

Cada capítulo está estructurado a base de teoría, ejemplos y ejercicios propuestos. Los ejemplos son desarrollados paso a paso, de tal forma que el lector pueda entender el procedimiento y posteriormente resolver los ejercicios correspondientes. La solución a los ejercicios se encuentran al final del libro organizados por área, de tal forma que el estudiante puede verificar si los resolvió correctamente y comprobar su aprendizaje. En esta edición se identifican las secciones que corresponden a los problemas de aplicación, los cuales tienen como objetivo hacer una vinculación con casos de la vida cotidiana en donde se pueden aplicar los conocimientos adquiridos en cada tema.

La primera parte del libro está dividida en once capítulos que corresponden al área de *Aritmética*, materia clave para el estudio de las demás áreas, donde se inicia con los conceptos básicos, para dar paso al estudio de

los números enteros y racionales con sus respectivas operaciones, teoría de números, potenciación y radicación, notación científica, logaritmos, razones y proporciones, sistemas de numeración y al final, un capítulo de razonamiento matemático, donde el lector podrá verificar lo aprendido en esta área.

El estudio del *Álgebra* corresponde a la segunda parte del libro, siendo fundamental para poder aprender cualquier otra materia o tema relacionado con las matemáticas. Está dividida en 17 capítulos, donde se encuentran temas como: Lógica y conjuntos, conceptos básicos de Álgebra, productos notables, factorización, fracciones algebraicas, ecuaciones de primer y segundo grado con aplicaciones, función lineal, sistemas de ecuaciones, potenciación, radicación, números complejos, desigualdades, logaritmos, progresiones, matrices y raíces de una ecuación. Cada tema está desarrollado con la teoría justa y siguiendo con la idea de brindar al lector un gran número de ejemplos para facilitar el aprendizaje de esta materia.

La tercera parte corresponde a las áreas de *Geometría Euclidiana y Trigonometría*, se divide en 17 capítulos. En Geometría se estudian conceptos básicos y temas esenciales como: ángulos, rectas, triángulos, cuadriláteros y polígonos en general, circunferencia y como tema nuevo en esta edición, se agregó el tema de transformaciones (escala, rotación simetría axial, simetría central). Cada apartado con sus respectivas definiciones, teoremas y aplicaciones. También se analiza conceptos como perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas. Para Trigonometría se estudian las funciones trigonométricas, desde su definición, su cálculo, sus gráficas, identidades, ecuaciones con dichas funciones y, aplicaciones a la solución de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Además, se da como un elemento extra la forma trigonométrica de los números complejos.

La *Geometría Analítica* se estudia en la cuarta parte de este libro, a través de trece capítulos que ofrecen las herramientas básicas para abordar los temas de distancia, punto medio, punto de división pendiente, etc., para posteriormente tratar los principales lugares geométricos como: la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Continúa con un extenso capítulo sobre coordenadas polares y finaliza con el estudio de las ecuaciones paramétricas.

*Cálculo Diferencial* e *Integral* son los dos apartados con los que concluye el libro. En el primero, se estudia todo lo correspondiente a los conceptos básicos del cálculo diferencial, analizando temas como: funciones, límites (tema que en esta edición fue modificado en su parte teórica), continuidad, la derivada y sus aplicaciones, los cuales son desarrollados de manera amplia y práctica. Algunos de estos temas han sido enriquecidos en su teoría o ejercicios. Para el apartado de Cálculo Integral se estudia desde sumas de Riemann, pasando por integrales inmediatas, métodos de integración, área bajo la curva, volúmenes y algunas aplicaciones en la economía (temas también enriquecidos en esta edición).

El libro tiene la ventaja de contener el material necesario para aprender y verificar el conocimiento adquirido, así como tener la referencia para desarrollar temas, que en el caso de no contar con los elementos necesarios, el lector podrá recurrir a ellos buscando en alguna de las áreas previas a las que está estudiando.

Todo lo anterior hace de este texto una referencia total para que el estudiante de nivel medio superior tenga un material de consulta durante todo su bachillerato, o para aquel que inicie estudios superiores, así como para los profesores que en función de necesidades especificas estén en posibilidad de realizar desde una consulta, hasta contar un apoyo para la parte práctica de su curso empleando los ejercicios propuestos.

Cabe mencionar que para esta edición se tomaron en cuenta las observaciones hechas por estudiantes y profesores que con su colaboración enriquecieron y mejoraron este material.

# Agradecimientos

Según Benjamín Franklin, invertir en conocimientos produce siempre los mejores intereses, por lo que espero que obtengas, a través de este libro, las más grandes ganancias para tu futuro profesional.

Arturo Santana
Director General de CONAMAT

A mi madre por darme la vida y enseñarme a vivirla, Andrey por ser y estar conmigo, Chema e Hiram los alumnos que se volvieron mis hermanos, a mi familia (Echeverría, Pineda y Sánchez), a la UNAM, al ingeniero Santana, Rox llegaste a tiempo, a los cuatro fantásticos: Herman, Fabián, Ricardo y Miguel, fue un placer compartir este trabajo. A mis alumnos que fueron y serán.

Arturo Aguilar

A mis padres María Elena y Álvaro, por brindarme la vida, por sus enseñanzas y consejos; a mi esposa e hijos (Ana, Liam y Daniel), porque son la razón de mi vida y mi inspiración; a mis hermanos Belem, Adalid y Tania por apoyarme incondicionalmente y sobre todo a mis compañeros y amigos: Ricardo, Miguel, Arturo y Herman.

Fabián Valapai Bravo

Una vez mi padre me dijo que "un hombre triunfador no es el que acumula riquezas o títulos, sino es aquel que se gana el cariño, admiración y respeto de sus semejantes", agradezco y dedico esta obra a la memoria de mi padre el Sr. Herman Gallegos Bartolo que me dio la vida y que por azares del destino ya no se encuentra con nosotros. A Eli y José Fernando que son el motor de mi vida.

Herman A. Gallegos Ruiz

A toda mi familia muy en especial a Lupita y Agustín, por haberme dado la vida y ser un ejemplo a seguir; a mis hermanos Elizabeth y Hugo por quererme y soportarme. Quiero además, reconocer el esfuerzo de mis amigos y compañeros Arturo, Fabián, Herman y Ricardo con quien tuve la oportunidad de ver cristalizado este sueño.

Miguel Cerón

A mis padres Rosa y Gerardo, por darme la vida; a mis hermanos Javier, Gerardo y Arturo; un especial agradecimiento a mi esposa Ma. Mercedes; a mis hijos Ricardo y Allan por su sacrificio, comprensión y tolerancia; un reconocimiento a mis amigos Herman, Arturo A., Fabián, Miguel, Roxana y Arturo S. por hacer realidad nuestro sueño.

Ricardo Reyes

Un agradecimiento especial a los alumnos que tomaron clase con alguno de nosotros, ya que gracias a ellos logramos adquirir la experiencia para poder escribir este libro.

Los autores

# Acerca de los autores

**Arturo Aguilar Márquez.** Llegó como estudiante a Colegio Nacional de Matemáticas, desarrolló habilidades y aptitudes que le permitieron incorporarse a la plantilla de docentes de la Institución. Realizó estudios de Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y ha impartido clases de Matemáticas por más de 11 años en CONAMAT.

**Fabián Valapai Bravo Vázquez.** Desde muy temprana edad, con la preparación de profesores de CONAMAT, participó en concursos de matemáticas a nivel nacional. Posteriormente, se incorporó a la plantilla docente de la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas durante 12 años. Al mismo tiempo, estudió la carrera de Diseño Gráfico en la Escuela Nacional de Artes Plásticas.

**Herman Aurelio Gallegos Ruiz.** Se inició como profesor en CONAMAT. Realizó estudios en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha impartido clases de Matemáticas y Física por más de 15 años en Colegio Nacional de Matemáticas.

**Miguel Cerón Villegas.** Es egresado de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional, realizó estudios de Ingeniería Industrial y tiene más de 15 años de experiencia en docencia.

**Ricardo Reyes Figueroa.** Inició su trayectoria en la disciplina de las Matemáticas tomando cursos en CONAMAT. Dejando ver su gran capacidad para transmitir el conocimiento, se incorpora como docente en la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas y Física durante 19 años. Realizó sus estudios de Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, y de Matemáticas Puras en la Universidad Autónoma Metropolitana.

# Contenido

## Aritmética

## GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

## CAPÍTULO 9 Perímetros y superficies



## CAPÍTULO 10 Cuerpos geométricos, áreas y volúmenes



## CAPÍTULO 11 Funciones trigonométricas



## CAPÍTULO 12 Funciones trigonométricas para ángulos notables



## CAPÍTULO 13 Representación gráfica de las funciones trigonométricas



## CAPÍTULO 14 Identidades y ecuaciones trigonométricas



## CAPÍTULO 15 Triángulos rectángulos

# Geometría analítica

## CAPÍTULO 8 Parábola



## CAPÍTULO 9 Elipse



## CAPÍTULO 10 Hipérbola



## CAPÍTULO 11 Ecuación general de cónicas



## CAPÍTULO 12 Coordenadas polares



## CAPÍTULO 13 Ecuaciones paramétricas

# Cálculo diferencial

## Cálculo integral

### Capítulo 1 Sumas



### Capítulo 2 Integrales inmediatas



### Capítulo 3 Integrales de diferenciales trigonométricas



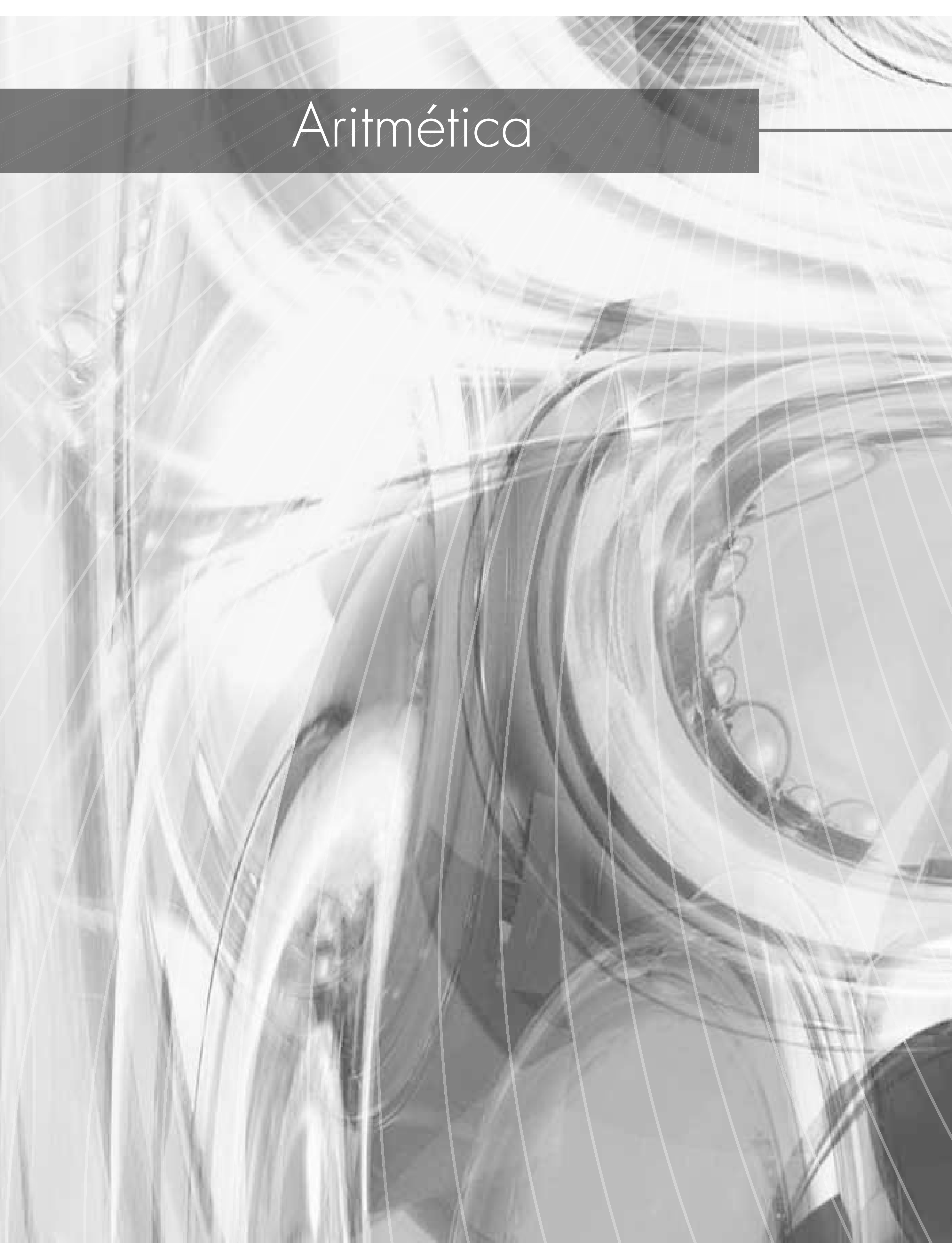
### Capítulo 4 Métodos de integración



### Capítulo 5 Aplicaciones de la integral



### Capítulo 6 Ecuaciones diferenciales



# Aritmética

# CAPÍTULO 1

## NÚMEROS REALES

### Reseña HISTÓRICA

Los números naturales tienen su origen en una necesidad tan antigua como lo son las primeras civilizaciones: la necesidad de contar.

El hombre primitivo identificaba objetos con características iguales y podía distinguir entre uno y otro; pero no le era posible captar la cantidad a simple vista. Por ello empezó a representar las cantidades mediante marcas en huesos, trozos de madera o piedra; cada marca representaba un objeto observado, así concibió la idea del número.

Para el siglo X d. C. el matemático y poeta Omar Khayyam estableció una teoría general de número y añadió algunos elementos a los números racionales, como son los irracionales, para que pudieran ser medidas todas las magnitudes.

Sólo a finales del siglo XIX se formalizó la idea de continuidad y se dio una definición satisfactoria del conjunto de los números reales; los trabajos de Cantor, Dedekind, Weierstrass, Heine y Meray, entre otros, destacan en esta labor.

Omar Khayyam
(1048-1122)

## Clasificación

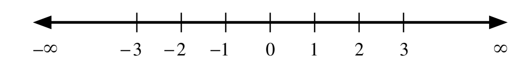
El hombre ha tenido la necesidad de contar desde su aparición sobre la Tierra hasta nuestros días, para hacerlo se auxilió de los números 1, 2, 3, 4, 5,…, a los que llamó números naturales. Números que construyó con base en el principio de adición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que este principio no aplicaba para aquellas situaciones en las que necesitaba descontar. Es entonces que creó los números negativos, así como el elemento neutro (cero), que con los números naturales forman el conjunto de los números enteros, los cuales son:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Asimismo, se percató que al tomar sólo una parte de un número surgían los números racionales, que se expresan como el cociente de 2 números enteros, con el divisor distinto de cero, ejemplo: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \frac{6}{1}, -\frac{8}{2}, \ldots$

Aquellos números que no es posible expresar como el cociente de 2 números enteros, se conocen como números irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{81}, \pi, \ldots$

Al unir los números anteriores se forman los números reales, los cuales se representan en la recta numérica.




## Propiedades

Los números reales son un conjunto cerrado para la suma y la multiplicación, lo que significa que la suma o multiplicación de números reales da como resultado otro número real. De lo anterior se desprenden las siguientes propiedades:

| Propiedad | Suma | Multiplicación | Ejemplos |
|---|---|---|---|
| Cerradura | $a + b \in R$ | $a \cdot b \in R$ | $3 + 5 = 8 \in R$<br>$(2)(-3) = -6 \in R$ |
| Conmutativa | $a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ | $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$<br>$(2)\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)(2)$ |
| Asociativa | $a + (b + c) = (a + b) + c$ | $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$ | $\sqrt{5} + (3 + 4) = (\sqrt{5} + 3) + 4$<br>$3 \cdot (2 \cdot 5) = (3 \cdot 2) \cdot 5$ |
| Elemento neutro | $a + 0 = a$ | $a \cdot 1 = a$ | $5 + 0 = 5$<br>$7 \cdot 1 = 7$ |
| Inverso | $a + (-a) = 0$ | $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ | $2 + (-2) = 0$<br>$5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ |
| Distributiva | $a(b + c) = ab + ac$ | | $2(7 + 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$<br>$5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 5(4 + 8)$ |

## EJERCICIO 1

Identifica y escribe el nombre de la propiedad a la que se hace referencia.

1. $3 + (-3) = 0$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)(4) = (4)\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $(8)(-3) = -24 \in R$
4. $7 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4\right) = \left(7 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 4$
5. $-\frac{3}{4} + 0 = -\frac{3}{4}$
6. $4(-3 + 5) = 4(-3) + 4(5)$
7. $\frac{1}{\sqrt{7}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 0$
8. $(-3) + (-8) = -11 \in R$
9. $-\frac{2}{4} + \frac{5}{9} = \frac{5}{9} + \left(-\frac{2}{4}\right)$
10. $3 + \left(-2 + \sqrt{7}\right) = \left(3 + (-2)\right) + \sqrt{7}$
11. $2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 7 = 2\left(\sqrt{3} + 7\right)$
12. $-8 \cdot 1 = -8$
13. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1$
14. $-\sqrt{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \left(-\sqrt{2}\right)$
15. $(8)(4) = (4)(8)$
16. $5 \cdot (3 \cdot 6) = (5 \cdot 3) \cdot 6$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

| Billones | | | Millares de millón | | | Millones | | | Millares | | | Unidades | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centenas de billón | Decenas de billón | Unidades de billón | Centenas de millares de millón | Decenas de millares de millón | Unidades de millares de millón | Centenas de millón | Decenas de millón | Unidades de millón | Centenas de millar | Decenas de millar | Unidades de millar | Centenas | Decenas | Unidades |

En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Lee el número 37.

**Solución**

37 se acomoda de derecha a izquierda en el periodo de las unidades.

| Unidades | | |
|---|---|---|
| Centenas | Decenas | Unidades |
| | 3 | 7 |

Al número dado lo forman 3 decenas y 7 unidades y se lee: "treinta y siete".

2 Lee el número 824.

**Solución**

824 se acomoda de derecha a izquierda en el periodo de las unidades.

| Unidades | | |
|---|---|---|
| Centenas | Decenas | Unidades |
| 8 | 2 | 4 |

Al número lo forman 8 centenas, 2 decenas y 4 unidades. Se lee: "ochocientos veinticuatro".

3 Lee el número 37 643.

**Solución**

Se acomoda en los periodos de los millares y las unidades.

| Millares | | | Unidades | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Centenas de millar | Decenas de millar | Unidades de millar | Centenas | Decenas | Unidades |
| | 3 | 7 | 6 | 4 | 3 |

El número se lee: "treinta y siete mil seiscientos cuarenta y tres".

4 Lee el número 52 384 273.

**Solución**

Se acomoda en los periodos de los millones, millares y unidades.

| Millones | | | Millares | | | Unidades | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centenas de millón | Decenas de millón | Unidades de millón | Centenas de millar | Decenas de millar | Unidades de millar | Centenas | Decenas | Unidades |
| | 5 | 2 | 3 | 8 | 4 | 2 | 7 | 3 |

Se lee: "cincuenta y dos millones trescientos ochenta y cuatro mil doscientos setenta y tres".

5 Lee el número 962 384 502 936 114.

**Solución**

Se acomodan en los periodos desde las unidades a los billones.

| Billón | | | Millar de millón | | | Millón | | | Millares | | | Unidades | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centenas de billón | Decenas de billón | Unidades de billón | Centenas de millar de millón | Decenas de millar de millón | Unidades de millar de millón | Centenas de millón | Decenas de millón | Unidades de millón | Centenas de millar | Decenas de millar | Unidades de millar | Centenas | Decenas | Unidades |
| 9 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 5 | 0 | 2 | 9 | 3 | 6 | 1 | 1 | 4 |

Se lee: "novecientos sesenta y dos billones, trescientos ochenta y cuatro mil quinientos dos millones, novecientos treinta y seis mil ciento catorce".

## EJERCICIO 2

Escribe con letras las siguientes cifras.

1. 45
2. 80
3. 523
4. 770
5. 597
6. 8 302
7. 9 016
8. 20 018
9. 11 011
10. 9 072
11. 12 103
12. 22 500
13. 34 480
14. 108 214
15. 3 084 000
16. 1 215 364
17. 5 683 040
18. 13 000 075

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para escribir numéricamente una cantidad, se identifican los periodos y las clases de dicho número como lo ilustran los siguientes ejemplos.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa cuatrocientos ochenta y siete numéricamente.

**Solución**

Este número sólo abarca el periodo de las unidades y se forma por cuatro centenas (400), ocho decenas (80) y siete unidades (7), al aplicar el principio aditivo el número es:

| | | |
|---|---|---|
| cuatrocientos | | 400 |
| ochenta | + | 80 |
| siete | | 7 |
| | | 487 |

2 Escribe con número: siete mil cuatrocientos treinta y cinco.

**Solución**

La cantidad abarca hasta el periodo de los millares, entonces:

| | | |
|---|---|---|
| siete mil | | 7 000 |
| cuatrocientos | + | 400 |
| treinta | | 30 |
| cinco | | 5 |
| | | 7 435 |

3 Expresa numéricamente: doscientos noventa y nueve millones setecientos ocho.

**Solución**

La cantidad abarca hasta el periodo de los millones, entonces:

| | | |
|---|---|---|
| doscientos millones | | 200 000 000 |
| noventa millones | | 90 000 000 |
| nueve millones | + | 9 000 000 |
| setecientos | | 700 |
| ocho | | 8 |
| | | 299 000 708 |

## EJERCICIO 3

Representa numéricamente:

1. Quinientos veintiuno.
2. Dieciséis mil.
3. Mil doscientos noventa y nueve.
4. Treinta y cinco mil.
5. Ocho mil cuatrocientos.
6. Seiscientos uno.
7. Setecientos mil ciento treinta y ocho.
8. Un millón quinientos veintisiete mil cuatrocientos veintiocho.
9. Un millón ciento ocho mil doce.
10. Ciento cuarenta y cuatro millones, ciento cuarenta y cuatro.
11. Ciento dieciséis millones, trescientos ochenta y seis mil quinientos catorce.
12. Quinientos cinco millones doscientos diez.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Orden

Este conjunto se ordena con base en las siguientes relaciones de orden:

< menor que    > mayor que    = igual que

## Ejemplos

$3 < 8$; 3 es menor que 8 $12 > -7$; 12 es mayor que $-7$ $\frac{18}{2} = 9$; $\frac{18}{2}$ es igual que 9

- **Postulado de tricotomía**
  Si $a, b \in R$, entonces al compararlos se pueden presentar los siguientes casos:

$$a > b \qquad a < b \qquad a = b$$

- **Postulado transitivo**
  Sean $a, b, c \in R$, si $a > b$ y $b > c$ entonces:

$$a > c$$

- **Postulado aditivo**
  Para $a, b, c \in R$, si $a > b$, entonces:

$$a + c > b + c$$

- **Postulado multiplicativo**
  Sean $a, b, c \in R$, con $a > b$,

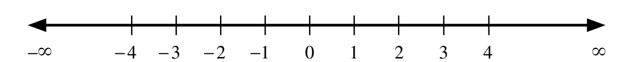
si $c > 0$ ($c$ es positivo), entonces $ac > bc$.

si $c < 0$ ($c$ es negativo), entonces $ac < bc$.

Otra forma para comparar los números reales es colocarlos en la recta numérica. Si el número $a$ se encuentra a la derecha de $b$, entonces $a > b$, pero, si se encuentra a la izquierda, entonces $a < b$.

## Ejemplos

Observe la siguiente recta numérica:




Se puede afirmar que:

$4 > 1$, "4" se encuentra a la derecha de "1"

$2 > -2$, "2" está a la derecha de "–2"

$-3 < -1$, "–3" está a la izquierda de "–1"

$-3 < 0$, "–3" está a la izquierda de "0"

En general, cualquier número negativo es menor que cero o que cualquier positivo, ya que se encuentran a la izquierda de estos números en la recta real o numérica.

## EJERCICIO 4

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos: >, < o =, según corresponda.

1. 28 y 35
2. 1 125 y 1 105
3. $-372$ y 372
4. $-483$ y $-840$
5. 5 397 y $-1\,284$
6. $-844.5$ y 0
7. $\frac{8}{4}$ y 2
8. 12 000 y 120 000
9. $-1\,000\,000$ y $-100\,000$
10. $\frac{121}{11}$ y $\frac{44}{4}$
11. $-\frac{7}{3}$ y 1.5
12. 0.5 y $-\frac{1273}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para comparar dos números racionales se realiza un producto cruzado, como se ejemplifica a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Compara $\frac{7}{8}$ y $\frac{5}{6}$.

**Solución**

Se realiza el siguiente procedimiento:

Se multiplica el numerador 7 de la primera fracción por el denominador 6 de la segunda y el producto se coloca debajo de la primera fracción; enseguida se realiza la multiplicación del denominador 8 de la primera fracción por el numerador 5 de la segunda y el producto se coloca debajo de la segunda fracción, el resultado de los productos y se coloca el signo correspondiente.

$$\frac{7}{8} \text{ y } \frac{5}{6}$$
$$(7)(6) \quad (5)(8)$$
$$42 > 40$$

El signo entre 42 y 40 es el mismo para los números racionales, por tanto: $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$

2 Compara $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{8}$.

**Solución**

Se realizan los pasos del ejemplo anterior y se obtiene:

$$-\frac{2}{3} \text{ y } -\frac{1}{8}$$
$$(8)(-2) \quad (3)(-1)$$
$$-16 < -3$$

Por tanto: $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{8}$

## EJERCICIO **5**

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos >, < o =, según corresponda.

1. $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{5}$ ___ $\frac{7}{8}$
3. $-\frac{1}{6}$ ___ $-\frac{1}{2}$
4. $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{21}{27}$
5. $\frac{11}{4}$ ___ $\frac{12}{5}$
6. $\frac{6}{4}$ ___ $\frac{18}{12}$
7. $-\frac{7}{7}$ ___ $0$
8. $-\frac{5}{10}$ ___ $\frac{13}{26}$
9. $\frac{5}{2}$ ___ $1$
10. $\frac{17}{6}$ ___ $3$
11. $-3$ ___ $-\frac{39}{13}$
12. $\frac{4}{3}$ ___ $\frac{4}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Valor absoluto de un número

Es la distancia que existe desde cero hasta el punto que representa a dicha cantidad en la recta numérica. El valor absoluto de un número $a$ se representa como $|a|$.

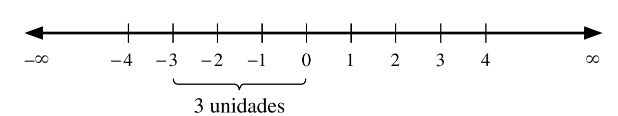
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el valor absoluto de $-3$.

**Solución**

Se representa $-3$ en la recta numérica:

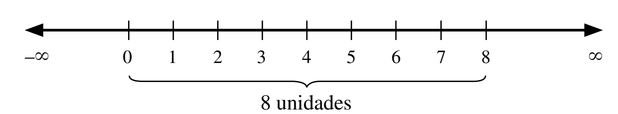



De cero a $-3$ se observa que hay 3 unidades de distancia, por tanto, el valor absoluto de $-3$ es igual a 3 y se representa como: $|-3| = 3$.

2 Encuentra el valor de $|8|$.

**Solución**

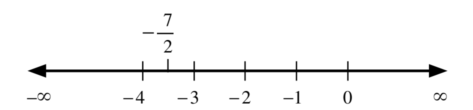
En la recta numérica la distancia entre el origen y 8 es de 8 unidades, por consiguiente, $|8| = 8$




3 ¿Cuál es el valor absoluto de $\left|-\frac{7}{2}\right|$?

**Solución**

En la recta numérica hay siete medios de distancia entre el cero y el punto dado, por tanto: $\left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$




## EJERCICIO 6

Determina:

1. $|-10|$
2. $\left|\frac{7}{4}\right|$
3. $|-9|$
4. $\left|\frac{5}{2}\right|$
5. $\left|-\frac{1}{3}\right|$
6. $|-2.5|$
7. $\left|-\frac{13}{9}\right|$
8. $\left|\frac{9}{3}\right|$
9. $|3.2|$
10. $|-6.8|$
11. $|0|$
12. $|-0.0001|$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Valor absoluto y relativo del sistema posicional decimal

El sistema decimal emplea los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que al combinarlos mediante ciertas reglas pueden representar cualquier cantidad. En este sistema las unidades se agrupan de 10 en 10, razón por la cual recibe su nombre.

Para nombrar cifras mayores que 9 se emplea el principio posicional y aditivo.

En el principio posicional el valor absoluto de un dígito es el número que representa, y su valor relativo es el que adquiere de acuerdo con la posición que tiene en el número.

**Ejemplo**

En el número 4 342, el valor absoluto y relativo de cada dígito es:

| Dígito | Valor absoluto | Valor relativo |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 4 | 4 | 40 |
| 3 | 3 | 300 |
| 4 | 4 | 4 000 |

En la tabla anterior se observa que el dígito 4 tiene distintos valores relativos, como consecuencia de la posición que ocupa en el número.

## EJERCICIO 7

Determina cuál es el valor absoluto y relativo de los dígitos que se indican en los siguientes números:

| Número | Valor absoluto | Valor relativo |
|---|---|---|
| 1. 1$\underline{3}$ | | |
| 2. $\underline{8}$9 | | |
| 3. $\underline{3}$72 | | |
| 4. 1 $\underline{5}$24 | | |
| 5. $\underline{7}$ 893 | | |
| 6. 1$\underline{5}$ 278 | | |
| 7. $\underline{4}$2 939 | | |
| 8. 153 $\underline{9}$75 | | |
| 9. 794 5$\underline{6}$8 | | |
| 10. 1 5$\underline{0}$2 734 | | |
| 11. 1$\underline{2}$ 364 568 | | |
| 12. 1$\underline{5}$7 103 000 | | |

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

De acuerdo con el principio aditivo toda cantidad o número mayor que 9, en el sistema decimal, se expresa como la suma de los valores relativos, la cual se denomina forma desarrollada. Analicemos los siguientes ejemplos.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en forma desarrollada 72 435.

**Solución**

Se obtienen los valores relativos de cada uno de los dígitos que conforman el número:

| Dígito | Valor relativo |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 3 | 30 |
| 4 | 400 |
| 2 | 2 000 |
| 7 | 70 000 |

Por lo tanto, su forma desarrollada es:

$$72\,435 = 70\,000 + 2\,000 + 400 + 30 + 5$$

2 Expresa el número 1 023 000 en forma desarrollada.

**Solución**

$$1\,023\,000 = 1\,000\,000 + 20\,000 + 3\,000$$

3 Expresa en forma desarrollada el número 373 894.

**Solución**

$$373\,894 = 300\,000 + 70\,000 + 3\,000 + 800 + 90 + 4$$

## EJERCICIO 8

Expresa en forma desarrollada los siguientes números:

1. 75
2. 132
3. 428
4. 510
5. 3 002
6. 7 491
7. 15 204
8. 32 790
9. 49 835
10. 246 932
11. 300 000
12. 475 314
13. 120 983
14. 1 320 865
15. 3 742 958

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 2

## NÚMEROS ENTEROS

**Reseña HISTÓRICA**

Durante los siglos VI y VII, los hindúes fueron los pioneros en usar las cantidades negativas como un medio para representar las deudas.

No obstante su uso en esos siglos, la aceptación del concepto de número negativo en Occidente fue un proceso de una lentitud sorprendente, ya que, por varios siglos, los números negativos no fueron considerados como cantidades verdaderas, debido a la imposibilidad de representarlos en el mundo físico.

Finalmente, y con mucha dificultad, los números negativos fueron considerados en la resolución de ecuaciones, según se refleja en los escritos del matemático italiano Gerónimo Cordano: "Olvidad las torturas mentales que esto os producirá e introducid estas cantidades en la ecuación".

En el siglo XIX aún existía entre los matemáticos de Occidente una gran desconfianza en el manejo de las cantidades matemáticas, hasta que en el mismo siglo Weierstrass hizo la construcción formal de los números enteros a partir de los números naturales.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

## Suma

En esta operación los elementos reciben el nombre de sumandos y el resultado suma o adición. La suma o adición de números enteros se efectúa sólo si los signos de los números son iguales.

**EJEMPLOS**

1 ¿Cuál es el resultado de $3 + 9$?

**Solución**

En esta operación ambos sumandos tienen el mismo signo (+), por lo tanto, se suman sus valores absolutos y el signo del resultado es el mismo (+).

$$3 + 9 = 12$$

2 Realiza $-5 - 1 - 3$.

**Solución**

Los números tienen el mismo signo (–), por consiguiente, se suman sus valores absolutos y el signo del resultado es el mismo que el de los sumandos (–).

$$-5 - 1 - 3 = -9$$

Para sumar números de dos o más dígitos, los sumandos se ordenan en forma vertical para hacer coincidir las respectivas clases y se realiza la operación, columna por columna y de derecha a izquierda.

**EJEMPLOS**

1 Efectúa la operación $325 + 63$.

**Solución**

Se acomodan de manera vertical y se realiza la operación:

$$\begin{array}{r} 325 \\ +\ \ 63 \\ \hline 388 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 388

2 El resultado de $-1\,533 - 2\,980 - 537$ es:

**Solución**

Al hacer coincidir las clases y sumar se obtiene:

$$\begin{array}{r} -1\,533 \\ -2\,980 \\ -\ \ \ 537 \\ \hline -5\,050 \end{array}$$

El resultado de la operación es $-5\,050$

## EJERCICIO 9

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 364 + 93
2. 4 050 + 2 019 + 310
3. 11 207 + 5 874 + 453 + 96
4. 102 396 + 11 375 + 1 117 + 60
5. 1 123 005 + 2 475 727 + 704 973 + 53 200
6. 7 000 000 + 648 000 + 53 047 + 4 200 + 600
7. −242 − 563
8. −1 250 − 398
9. −6 359 − 4 872 − 45
10. −372 001 − 200 000 − 50 007 − 14 304
11. −13 275 009 − 4 000 529 − 363 571 − 42 500 − 95
12. −512 013 419 − 23 642 000 − 1 253 421 − 683 125

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una empresa cobra 12% sobre los ingresos mensuales de 5 franquicias. La cantidad que paga cada una es: $45 400, $38 900, $72 300, $58 600 y $92 100, ¿qué cantidad recibió la empresa en un mes?

**Solución**

Para determinar cuánto recibió la empresa se realiza la suma de las cantidades pagadas:

$$\begin{array}{r} 45\,400 \\ 38\,900 \\ +\;\; 72\,300 \\ 58\,600 \\ \underline{92\,100} \\ 307\,300 \end{array}$$

Por consiguiente, la empresa recibió $307 300

2 Una persona le adeuda a su tarjeta de crédito $6 000 y realiza con ella un pago de $2 500, si el banco le cobra $500 de intereses y recargos, ¿cuál es el nuevo saldo de la tarjeta?

**Solución**

Los adeudos de la persona se representan con cantidades negativas; entonces, para obtener su nuevo saldo se efectúa la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} -6\,000 \\ -2\,500 \\ -\;\;\underline{500} \\ -9\,000 \end{array}$$

El signo negativo del resultado indica que la persona le adeuda al banco $9 000

# EJERCICIO 10

Resuelve las siguientes operaciones:

1. Leticia tiene 15 años actualmente, ¿qué edad tendrá dentro de 22 años?
2. Uriel se ha preparado durante toda su vida, invirtió 2 años en el nivel preescolar, 6 en primaria, 3 en secundaria, 3 en el bachillerato, 5 más en la licenciatura y, finalmente, 3 años en un posgrado. ¿Durante cuántos años estudió Uriel?
3. Luis ganó $1 500 en febrero, $3 500 en marzo, $2 800 en abril, $2 200 en el siguiente mes, ¿cuánto dinero ganó en total?
4. Carlos nació en 1978, a la edad de 26 años se graduó en la carrera de ingeniería y 2 años después se casó. ¿En qué años se verificaron estos 2 sucesos?
5. Efraín nació en 1960, se casó a los 28 años, a los 3 años de matrimonio nació su único hijo. Si Efraín falleció cuando su hijo tenía 14 años, ¿en qué año ocurrió su fallecimiento?
6. Un automóvil realiza un viaje en tres etapas para ir de una ciudad a otra: en la primera etapa recorre 210 kilómetros, en la segunda 180 y en la última 360; ¿qué distancia existe entre las ciudades?
7. En una carrera de automóviles, el automóvil que lleva la delantera ha recorrido 640 kilómetros; si para llegar a la meta le faltan 360 kilómetros, ¿cuál es la distancia que deben recorrer todos los automóviles para finalizar la competencia?
8. Una editorial publica 12 000 ejemplares de un libro de álgebra, 8 000 de uno de geometría analítica y 10 700 de uno de cálculo diferencial e integral, ¿cuántos libros de las tres áreas publica en total?
9. Una persona ingiere en el desayuno un jugo de naranja con 20 calorías de contenido energético, unos huevos fritos de 800 calorías, una rebanada de pan con 50 calorías y un cóctel de frutas de 150 calorías, ¿cuántas calorías consume en total?
10. Cierto famoso jugador de futbol nació en 1966, a los 17 años ganó el mundial juvenil, a los 24 el mundial de primera fuerza, 4 años más tarde perdió una final de campeonato mundial y 3 años después se retiró del futbol, ¿cuál fue el año de su retiro?
11. En un día en la Antártica el termómetro marca una temperatura de 35°C bajo cero y el pronóstico meteorológico indica que en las siguientes horas la temperatura descenderá 18°C más, ¿cuál es la nueva temperatura que registrará el termómetro?
12. Una empresa reporta en los últimos 4 meses las siguientes pérdidas: $330 000, $225 000, $400 000 y $155 000, ¿a cuánto asciende el monto total de las pérdidas?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Resta

Es la operación inversa de la suma o adición. Los elementos de una resta son el minuendo (+), sustraendo (–) y la diferencia.

$$\begin{array}{r l} a & \leftarrow \text{Minuendo} \\ -b & \leftarrow \text{Sustraendo} \\ \hline c & \leftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

- Cuando se restan 2 números enteros la diferencia lleva el signo del entero de mayor valor absoluto, como lo muestran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $9-7$.

**Solución**

Se efectúa la operación y el resultado lleva el signo del número con mayor valor absoluto.

$$9-7=2$$

El resultado de la operación es 2

2 ¿Cuál es el resultado de $3-4$?

**Solución**

Se realiza la operación $4-3=1$, y al resultado se le antepone el signo negativo, debido a que el número de mayor valor absoluto es negativo, por tanto:

$$3-4=-1$$

- Si los números son de dos o más dígitos, entonces se acomodan de manera vertical para que coincidan las clases y se efectúan las operaciones, columna por columna, de derecha a izquierda:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza: $289-47$.

**Solución**

Las cantidades se acomodan de manera vertical y el resultado lleva el mismo signo que 289, ya que es el número de mayor valor absoluto.

$$\begin{array}{r} 289 \\ -\ 47 \\ \hline 242 \end{array}$$

Por consiguiente: $289-47=242$

2 A qué es igual $-425+379$.

**Solución**

Se efectúa la diferencia de $425-379$ y al resultado se le antepone el signo negativo.

$$\begin{array}{r} 425 \\ -\ 379 \\ \hline 46 \end{array}$$

Por tanto, $-425+379=-46$

3 El resultado de $-6-3-2+8+1$ es:

**Solución**

Se suman las cantidades que tienen el mismo signo.

$$-6-3-2=-11 \qquad 8+1=9$$

Entonces: $-6-3-2+8+1=-11+9$

Se realiza la resta y se obtiene el resultado final: $-6-3-2+8+1=-11+9=-2$

4 Realiza: $-8 + 12 - 3 + 9 - 1 - 15 + 7$.

**Solución**

Para obtener el resultado, primero se agrupan los números del mismo signo.

$$-8 + 12 - 3 + 9 - 1 - 15 + 7 = -8 - 3 - 1 - 15 + 12 + 9 + 7$$

Los números de igual signo se suman y posteriormente se restan:

$$= -27 + 28$$
$$= 1$$

## EJERCICIO 11

Realiza las siguientes operaciones:

1. $-2 + 6$
2. $-7 + 4$
3. $-9 + 11$
4. $-20 + 15$
5. $15 - 23$
6. $49 - 35$
7. $-8 + 8$
8. $-14 + 25$
9. $105 - 143$
10. $-1\,024 + 958$
11. $-2 - 5 + 8$
12. $-13 - 15 + 6 + 11$
13. $-9 - 7 - 8 - 2 + 5 + 4 + 11$
14. $-6 - 10 - 3 + 12 + 13 + 14$
15. $13 - 2 - 5 - 9 - 1 + 8 - 11$
16. $25 + 23 - 8 - 7 - 4 - 3$
17. $14 + 15 + 18 - 7 - 3 - 20$
18. $100 - 6 - 5 - 4 - 3 - 42 - 51$
19. $47 - 12 + 7 - 9 - 1$
20. $-6 + 8 + 4 - 2 - 5 + 3 - 2 + 10$
21. $-3 + 6 - 2 + 4 - 7 + 10$
22. $5 - 6 + 9 - 7 - 3 + 10 + 11$
23. $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9$
24. $15 - 10 - 3 + 18 - 20 + 9 - 2$
25. $1 - 2 - 3 - 5 + 6 - 7 + 10 + 11 - 13$
26. $4 - 3 - 2 + 6 + 1 - 5 + 4 - 8 - 9$
27. $531 - 120 - 402 + 101$
28. $-853 + 45 + 73 + 183 + 2 - 166$
29. $9\,031 - 1\,217 - 1\,902 + 4\,701 - 18$
30. $1\,432 + 17\,913 - 19\,935 - 2\,001 - 7\,034$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Al comprar un televisor de $2 809 a crédito, hay que dar un anticipo de $748 y el resto se paga a 6 meses, ¿cuánto resta para terminar de pagar el televisor?

**Solución**

Al costo del televisor se le resta el anticipo para saber cuánto falta por pagar:

$$\begin{array}{r} 2\,809 \\ -\ \ 748 \\ \hline 2\,061 \end{array}$$

Por tanto, resta pagar $2 061

# EJERCICIO 12

Resuelve las siguientes operaciones:

1. En un colegio hay una población de 800 alumnos, de ellos 430 son varones, ¿cuántas mujeres hay en la escuela?
2. ¿Cuánto dinero le falta a Ernesto si su ahorro es de $12 000 para comprar un automóvil que cuesta $35 000?
3. Ángel al vender su casa en $250 000, obtiene una ganancia de $13 000, ¿cuánto le había costado su casa?
4. La suma de las edades de Laura y Carina es de 48 años, si Laura tiene 25 años, ¿cuál es la edad de Carina?
5. Si Fernanda tuviera 8 años menos tendría 35 y si Guillermo tuviera 10 años más tendría 25, ¿cuánto más joven es Guillermo que Fernanda?
6. Una cuenta de ahorro tiene un saldo de $2 500, si se efectúa un retiro de $1 500 y se cobra una comisión de $7 por disposición ¿cuánto queda disponible en la cuenta?
7. Un rollo de tela tiene una longitud de 40 metros, el lunes se vendieron 3, el martes 8, el miércoles 5 y el jueves 6, ¿cuántos metros de tela quedan para vender el resto de la semana?
8. Un atleta debe cubrir una distancia de 10 000 metros, si recorre 5 850, ¿qué distancia le falta recorrer?
9. Juan solicitó un préstamo de $20 000: el primer mes abonó $6 000, el segundo $4 000, y en el tercero $5 500, ¿cuánto le falta pagar para cubrir su adeudo?
10. La edad de Abigail es de 31 años, la de Mario es de 59 y la diferencia de las edades de Carmen y Clara es de 37 años, ¿en cuánto excede la suma de las edades de Abigail y Mario a la diferencia de las de Carmen y Clara?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma y resta con signos de agrupación

Al realizar sumas y restas de números enteros que tienen signos de agrupación, primero es necesario eliminar dichos signos, para hacerlo debes seguir el siguiente procedimiento:

- Si a un signo de agrupación lo precede un signo positivo, el número entero que encierra conserva su signo. Analicemos los siguientes ejemplos:

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1. ¿Cuál es el resultado de $(-8)+(-3)$?

**Solución**

Puesto que ambos signos de agrupación están precedidos por signos positivos, entonces se suprimen y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$(-8)+(-3)=-8-3=-11$$

2. Efectúa $(+6)+(-8)$.

**Solución**

Al estar precedidos por signos positivos, ambos enteros conservan su signo y se obtiene como resultado:

$$(+6)+(-8)=6-8=-2$$

- Si un signo de agrupación es precedido por un signo negativo, entonces el entero que encierra cambia su signo:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $-(14) - (-10)$.

**Solución**

A los signos de agrupación le anteceden signos negativos, entonces se deben cambiar los signos de los enteros y realizar la operación que resulta.

$$-(14) - (-10) = -14 + 10 = -4$$

El resultado de la operación es $-4$.

2 ¿Cuál es el resultado de $(-6) + (-3) - (-11)$?

**Solución**

Se aplican los procedimientos correspondientes a cada signo de agrupación y se procede a efectuar la operación con enteros:

$$(-6) + (-3) - (-11) = -6 - 3 + 11 = -9 + 11 = 2$$

3 Obtén el resultado de $(6 - 8) + (5 - 2)$.

**Solución**

Una forma de realizar la operación es efectuar las operaciones que encierran cada uno de los signos de agrupación:

$$(6 - 8) + (5 - 2) = (-2) + (3)$$

Se aplican los criterios mencionados y se realizan las operaciones pertinentes para obtener el resultado:

$$= -2 + 3 = 1$$

4 Realiza $(8 - 3) - (-4 + 6) + (2 - 7 - 3) + 5$.

**Solución**

Otra forma de obtener el resultado es aplicar los criterios para cada una de las cantidades contenidas en cada signo de agrupación y, posteriormente, las operaciones con números enteros correspondientes.

$$\begin{aligned}(8 - 3) - (-4 + 6) + (2 - 7 - 3) + 5 &= 8 - 3 + 4 - 6 + 2 - 7 - 3 + 5\\ &= 8 + 4 + 2 + 5 - 3 - 6 - 7 - 3\\ &= 19 - 19\\ &= 0\end{aligned}$$

5 ¿Cuál es el resultado de $[(-8 + 6) - (-3 - 2)] + [4 - (2 - 1)]$?

**Solución**

Se efectúan las operaciones contenidas en los paréntesis:

$$[(-8 + 6) - (-3 - 2)] + [4 - (2 - 1)] = [(-2) - (-5)] + [4 - (1)]$$

Se eliminan los paréntesis y se realizan las operaciones que encierran los corchetes:

$$\begin{aligned}&= [-2 + 5] + [4 - 1]\\ &= [3] + [3]\\ &= 3 + 3\\ &= 6\end{aligned}$$

# EJERCICIO 13

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(3) + (12)$
2. $(-6) + (-2)$
3. $-(-15) - (-9)$
4. $8 + (13)$
5. $(15) + (-8)$
6. $(-4) - (-2)$
7. $-6 - (-5)$
8. $(11) + (8)$
9. $(-9) + (-1) - (-10)$
10. $(11) - (13) + (-16)$
11. $-(-24) + (-13) - (9)$
12. $-(7) + (-3) - (-16)$
13. $9 - (-6) + (-12)$
14. $(3) - (6) + (-5) - (-8)$
15. $9 - (5) + (-3) - (11)$
16. $(8 + 5) - (-13 + 2)$
17. $(-3 - 9) - (8 + 7)$
18. $15 - (4 + 6) + (-3 - 7)$
19. $(9 + 5) - (8 - 11) - 19$
20. $(8 - 25) - (8 + 5) + (13 + 11)$
21. $-(5 - 7) + (16 + 3) - (4 + 7)$
22. $-(-7 - 2) + (6 + 4) - (-3) - 4$
23. $1 - (-3 - 2 + 8) + (2 + 3 + 1)$
24. $4 - \{6 + [-5 + (12 - 8)]\}$
25. $-5 + \{4 + [3 - (4 - 8) + (-5 - 10)]\}$
26. $-[(8 + 3) - (5 - 1)] + [(8 - 3) - (5 + 1)]$
27. $\{9 - [2 - (1 - 5)]\} - [4 - (5 - 4) + (-5)]$
28. $[(4 + 2 - 11) + (13 + 9 - 20)] - [(-3 + 5 - 21) - (18 - 15 + 6)]$
29. $12 - [(6 - 4) + (8 - 15)] - [4 - (3 + 2) - (1 - 7)]$
30. $-[-8 + (4 - 7) + (2 - 5 - 3)] + [(6 - 3) - (2 - 5 - 6) - 12]$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Multiplicación

La multiplicación es la representación de la suma de una misma cantidad varias veces. Una multiplicación se representa con los símbolos, "×" "·" o "( )".

### Ejemplo

La multiplicación de $3 \times 4$ es lo mismo que:

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \text{ o bien } 4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

Los elementos de una multiplicación reciben el nombre de factores y el resultado producto o multiplicación. Así, en el ejemplo anterior, 3 y 4 son los factores y 12 es el producto.

Para no realizar las sumas, se utilizan de forma mecánica las tablas de multiplicar.

Al multiplicar números de varios dígitos, éstos se colocan en vertical y se realiza el procedimiento que muestran los ejemplos siguientes:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $358 \times 6$?

**Solución**

Se acomodan los factores y 6 multiplica de derecha a izquierda a cada uno de los dígitos del número 358

$$\begin{array}{r} 358 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 2\,148 \end{array}$$

2 Efectúa 2 624 × 45.

**Solución**

Se multiplica 5 por 2 624

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \end{array}$$

Se multiplica 4 por 2 624 y el resultado 10 496 se coloca debajo del anterior (13 120) recorriendo el último dígito un lugar a la izquierda con respecto al primer producto.

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \\ 10496\phantom{0} \end{array}$$

Las cantidades se suman para obtener el resultado de la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 2624 \\ \times\ 45 \\ \hline 13120 \\ 10496\phantom{0} \\ \hline 118080 \end{array}$$

Por consiguiente, 2 624 × 45 = 118 080

**Leyes de los signos 1.** El producto de dos números con signos iguales da como resultado un número positivo.

**Ejemplo**

$$(8)(5) = 40 \quad ; \quad (-3)(-7) = 21$$

**Leyes de los signos 2.** El producto de dos números con signos diferentes da como resultado un número negativo.

**Ejemplo**

$$(-6)(4) = -24 \quad ; \quad (9)(-3) = -27$$

En general, la aplicación simbólica de las leyes de los signos anteriores es:

$(+)(+) = +$ $\quad (+)(-) = -$ $\quad (-)(-) = +$ $\quad (-)(+) = -$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa $(-3)(-4)(-6)$.

**Solución**

Se realiza el producto de $(-3)(-4)$ y el resultado, 12, se multiplica por $-6$, entonces:

$$(-3)(-4)(-6) = (12)(-6) = -72$$

Finalmente, el resultado de la multiplicación es $-72$

2 ¿Cuál es el resultado de $(3)(-5)(-2)(4)$?

**Solución**

Se multiplican 3 por $-5$ y $-2$ por 4, los resultados se vuelven a multiplicar para obtener el resultado final de la operación.

$$(3)(-5)(-2)(4) = (-15)(-8) = 120$$

Por tanto, el producto es 120

# EJERCICIO 14

Resuelve los siguientes productos:

1. $3 \times 567$
2. $4\,846 \times 5$
3. $85 \times 27$
4. $324 \times 53$
5. $272 \times 524$
6. $7\,236 \times 36$
7. $4\,005 \times 736$
8. $8\,236 \times 5\,274$
9. $9\,821 \times 3\,890$
10. $17\,235 \times 111$
11. $(-5)(-4)$
12. $(32)(-5)$
13. $(-14)(-23)$
14. $(-324)(48)$
15. $(-723)(-420)$
16. $(840)(-233)$
17. $(-4\,256)(-3\,023)$
18. $(-27\,845)(327)$
19. $(-82\,462)(2\,732)$
20. $(12\,734)(-4\,263)$
21. $(-5)(-3)(-7)$
22. $(3)(-2)(-5)$
23. $(6)(-1)(-3)$
24. $(5)(4)(-3)(-1)$
25. $(-9)(-8)(-3)(4)$
26. $(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)$
27. $(4)(-7)(2)(-1)(-5)(-6)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Cada tren del metro de la Ciudad de México tiene 9 vagones, cada uno con 8 puertas y cada una de dos hojas corredizas. Si se desea cambiar las hojas de los 120 trenes existentes en la ciudad, ¿cuántas hojas se van a cambiar?

**Solución**

Para obtener el número total de hojas, se multiplica el número de trenes por el número de vagones por el número de puertas y por el número de hojas:

$$\text{Número de hojas} = (120)(9)(8)(2) = 17\,280$$

Entonces, el número de hojas a cambiar son 17 280

# EJERCICIO 15

Resuelve los siguientes problemas:

1. En una caja hay 24 refrescos, ¿cuántos refrescos habrá en 9 cajas?
2. ¿Cuántos libros hay en 12 repisas, si cada una contiene 15 textos?
3. Juan tiene 3 docenas de canicas, Julio 5 docenas y Daniel tiene sólo 9 canicas, ¿cuántas canicas tienen en total los 3?
4. Se van a sembrar en un terreno 25 filas, cada una con 30 árboles, ¿cuántos árboles se van a plantar en total?
5. Rafael tiene 8 piezas de tela de 12 metros cada una, pretende vender a $10 el metro, ¿cuánto dinero puede obtener por la venta de todas las piezas?
6. ¿Cuántos minutos hay en una semana, si una semana tiene 7 días, cada día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos?
7. En un vecindario hay 28 edificios, cada uno tiene 12 departamentos, ¿cuántos departamentos hay en el vecindario?
8. Una caja de lapiceros contiene 20 paquetes, los que a su vez tienen 12 lapiceros cada uno, si hay 25 cajas, ¿cuántos lapiceros se tienen en total?
9. Rodrigo percibe un sueldo quincenal de $2 700, ¿cuánto dinero recibe al cabo de un año?
10. Un autobús tiene capacidad para 42 pasajeros y un conductor, si a un evento asisten 3 grupos de 5 autobuses y cada uno se llena a su máxima capacidad, ¿cuántas personas en total asisten a dicho evento?
11. Una empresa de productos lácteos ocupa, para vender y distribuir leche, camiones con una capacidad de carga de 250 cajas, cada una de ellas contiene 12 litros y el precio del litro es de $10, si un supermercado realiza un pedido de 4 cargas, ¿cuánto debe pagar por la compra del lácteo a la empresa?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Multiplicación con signos de agrupación

Los signos de agrupación que se utilizan son: ( ), [ ], { }, $\overline{\quad}$; cuyos nombres respectivamente son: paréntesis, corchetes, llaves y vínculo.

Para simplificar y obtener el resultado de una operación con signos de agrupación, hay que suprimir éstos y multiplicar los números del interior de los signos por el número o signo que los anteceden.

Después se agrupan y suman los números del mismo signo y los resultados se restan.

**EJEMPLOS**

1 Efectúa $3(4-2)-5(1-4)-(8+9)$.

**Solución**

Los signos de agrupación se suprimen al multiplicar por los números y signos que les anteceden.

$$3(4-2)-5(1-4)-(8+9)=12-6-5+20-8-9$$

Se agrupan y suman los números con el mismo signo, los resultados se restan:

$$=12+20-6-5-8-9$$
$$=32-28$$
$$=4$$

Por tanto, el resultado de la operación es 4

2 Realiza $-6-\overline{-2-7}+(2-1)$.

**Solución**

Se realizan las operaciones en el paréntesis y en el vínculo (barra horizontal que abarca a $-2$ y $-7$). Se suprimen los signos de agrupación y se efectúan las operaciones para obtener el resultado.

$$-6-\overline{-2-7}+(2-1)=-6-\overline{-9}+(1)$$
$$=-6-(-9)+1$$
$$=-6+9+1$$
$$=4$$

3 ¿Cuál es el resultado de $6-4\{2-5(4-3)+3(3-2)\}$?

**Solución**

En este caso, primero se suprimen los paréntesis y los números se multiplican por los números que les anteceden:

$$6-4\{2-5(4-3)+3(3-2)\}=6-4\{2-20+15+9-6\}$$

Ahora, se eliminan las llaves al multiplicar por $-4$,

$$=6-8+80-60-36+24$$

Por último, se realiza la operación al agrupar signos iguales y los resultados obtenidos se restan:

$$=6+80+24-8-60-36$$
$$=110-104$$
$$=6$$

4 Obtén el resultado de $-8-\{2-3[5-2(1-3)+4(8-10)]\}+3[2-5(1-3)-10]$.

**Solución**

Otra forma de realizar operaciones con signos de agrupación es, primero, efectuar las sumas o restas que encierran los signos con menor cantidad de números, en este caso son los paréntesis.

$$-8-\{2-3[5-2(1-3)+4(8-10)]\}+3[2-5(1-3)-10]=-8-\{2-3[5-2(-2)+4(-2)]\}+3[2-5(-2)-10]$$

Para eliminar los paréntesis se multiplica por el número que los antecede:

$$=-8-\{2-3[5+4-8]\}+3[2+10-10]$$

Ahora los signos a eliminar son los corchetes, para hacerlo se realizan las sumas y restas que encierran, y posteriormente las multiplicaciones:

$$= -8 - \{2 - 3[1]\} + 3[2]$$
$$= -8 - \{2 - 3\} + 6$$

Se sigue el mismo procedimiento para eliminar las llaves:

$$= -8 - \{-1\} + 6$$
$$= -8 + 1 + 6$$
$$= -8 + 7$$
$$= -1$$

Por consiguiente, el resultado de la operación propuesta es $-1$

## EJERCICIO **16**

Realiza las siguientes operaciones:

1. $2(7 - 4) + 3(1 - 5) + 8$
2. $-4(2 - 3 - 1) + 2(8 - 5) + 3(4 - 5)$
3. $-6 + \{3 - [4 - 2(4 - 7)]\}$
4. $8 - \{5 - 4[-6 + 7(5 - 2)] - 3\}$
5. $-\{-6 + 4[2 - 5(4 - 3(4 - 3) + 2(7 - 3))] + 2\} - 1$
6. $6 - [4 - 3(4 - 2)] - \{7 - 5\,[4 - 2(7 - 1)]\}$
7. $-2 + \{-3 - [7 + 4(-2 + 5)]\} - 4$
8. $12 + 3\,\{-6 + 2[\,5 - 4(3 - 2) + 5(7 - 8)] - 5\}$
9. $-2(-7 + 11) - 5 - \{-2 + (-3 + 5) - [4 - (2 + 3)]\}$
10. $-11 + 7 - 2\{-4 + 1 - [-2(-3 + 4) - 2 + \overline{4 + 7} - 8] - 4\}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 El costo y la disponibilidad de boletos para un concierto en el centro de espectáculos "El Huracán" es: preferente A: 224 a \$840, preferente B 184 a \$650, balcón C 125 a \$430 y balcón D 96 a \$280. Si para el día del evento se agotaron los boletos, ¿cuál es el ingreso de las entradas?

### Solución

Se multiplica el número de boletos por el costo de cada boleto de cada sección, al final se suman los resultados y se obtiene el ingreso total de entradas.

$$\text{Ingreso total} = (840)(224) + (650)(184) + (430)(125) + (280)(96)$$
$$= 188\,160 + 119\,600 + 53\,750 + 26\,880$$
$$= 388\,390$$

Por tanto, el ingreso total fue de \$388 390

2 Se desea realizar un viaje a Huatulco, 4 días y 3 noches todo incluido, y se tienen contempladas 232 personas, el costo por persona es de \$780 en habitación doble y \$865 en habitación individual. Si sólo 15 personas no realizan el viaje y se sabe que se alquilaron 75 habitaciones dobles, ¿cuántas habitaciones individuales se alquilaron y cuál fue el monto total del viaje?

**Solución**

El número de personas que realizaron el viaje son: 232 – 15 = 217

De ellas se hospedaron en habitación doble 2(75) = 150
Esto indica que en habitación individual se hospedaron 217 – 150 = 67
Luego, todos se hospedaron 3 noches,
3(780)(150) + 3(865)(67) = 351 000 + 173 865 = 524 865
Por tanto, el monto total del viaje es de $524 865

3 Una familia de 5 miembros asiste a un restaurante de comida rápida que en todos sus paquetes tiene descuentos; el padre y la madre compran cada quien paquetes de $52, con un descuento de $15. Los niños piden cada uno paquetes de $42, con un descuento de $10 por paquete. ¿Cuánto es lo que pagan por todos los paquetes?

**Solución**

Para obtener el resultado se multiplica el número de paquetes por el costo de éstos, ya incluido el descuento.

$$\begin{aligned} 2(52-15)+3(42-10) &= 2(37)+3(32) \\ &= 74+96 \\ &= 170 \end{aligned}$$

Por consiguiente, los padres pagan $170

## EJERCICIO 17

Resuelve los siguientes problemas:

1. Karen recibe un salario de $850 semanales y, por ser una buena estudiante, tiene asignada una beca de $1 000 mensuales. ¿Cuál es la cantidad de dinero que recibe en un mes? (Considera un mes igual a 4 semanas.)
2. A Maritza le da su papá $20 diarios. Si en un año ella destina para pasajes y diversión $2 300 anuales, ¿qué cantidad de dinero le sobra para sus otros gastos? (Considera un año igual a 365 días.)
3. Un cuarteto de músicos recibe como pago $240 diarios por tocar entre semana en un restaurante, mientras que por tocar en el mismo lugar los fines de semana el pago es de $480 diarios. ¿Cuánto dinero percibe cada integrante del grupo, si lo que ganan se reparte en forma equitativa? (Considera una semana igual a 7 días.)
4. El sueldo de un capturista de datos es de $150 diarios con su respectivo descuento de $30 por concepto de impuestos. ¿Qué cantidad recibe en un mes? (Considera un mes igual a 30 días.)
5. En la repartición de una herencia el abuelo designa en partes iguales un terreno de 12 hectáreas a 3 de sus nietos, si el precio por metro cuadrado es de $250, ¿cuál es el monto que recibió cada uno de los herederos? (Considera una hectárea igual a 10 000 $m^2$.)
6. Roberto tiene 12 años, Mónica es 4 años más grande que Roberto y Julián tiene el doble de la edad de Mónica. ¿Cuánto es la suma de las edades de Roberto, Mónica y Julián?
7. Pablo asistió a las ofertas de una tienda departamental y se compró 3 pantalones en $750 cada uno, con un descuento de $225 por prenda; 4 camisas de $600 la pieza con su respectivo descuento de $120 por camisa y 5 playeras cuyas etiquetas marcaban un costo de $250 y su descuento de $75 en cada pieza, ¿cuánto pagó Pablo por los artículos?
8. Un granjero realiza la venta de media docena de borregos, 8 conejos y 3 cerdos: si el precio de un borrego es de $600, el de un conejo $150 y el de un cerdo es de $450, ¿cuál es el importe que recibe por la venta de estos animales?
9. La hipoteca que contrajo Damián en enero de 2008 con un banco asciende a $425 000, si durante el primer año Damián realiza el pago de $6 500 mensuales, ¿a cuánto asciende su deuda para enero de 2009?
10. En un estadio hay 3 tipos de ubicaciones con diversos costos cada una: 25 000 en preferente especial, 15 000 lugares en la sección de preferente y 30 000 en general, si el costo de un boleto en preferente especial es de $150, el de preferente $100 y el de general de $80, ¿cuál es el ingreso de la taquilla si hay un lleno total en el estadio?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## División

Si $a$ y $b$ son números enteros, la división de $a$ entre $b$, siendo $b$ un número entero diferente de cero, consiste en encontrar a los números enteros $p$ y $r$ tales que:

$$a = b\,p + r \qquad \text{Para todo } a > b \quad \text{y} \quad b < r.$$

Donde $a$ recibe el nombre de dividendo, $b$ el de divisor, $p$ el de cociente y $r$ residuo.

**Ejemplo**

En la división de 25 entre 4, el cociente es 6 y el residuo, 1 ya que:

$$25 = 4(6) + 1$$

**Ejemplo**

En la división de 36 entre 9, el cociente es 4 y el residuo es 0, ya que:

$$36 = 9(4) + 0$$

Cuando en una división el residuo es igual a 0, entonces se dice que la división es exacta.

Las divisiones se representan con los siguientes símbolos:

Con una caja divisora $\overline{\phantom{xx}}$

Por medio de dos puntos 9 : 7

Con el signo ÷

Con una raya horizontal (fracción) $\frac{24}{8}$

### Algoritmo de la división

Para dividir $a$ entre $b$ con $a > b$, se efectúan los siguientes pasos:

1. Se acomoda el dividendo dentro de la caja divisora y el divisor fuera de ella.

$$\text{Divisor} \longrightarrow b\overline{)a} \longleftarrow \text{dividendo}$$

2. Del dividendo se toman las cifras necesarias para formar un número mayor o igual que el divisor.
3. El dividendo parcial se divide entre el divisor y resulta la primera cifra del cociente, que se coloca encima de la última cifra del dividendo parcial, enseguida se multiplica la primera cifra del cociente por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial y se escribe la diferencia debajo del dividendo parcial.
4. A la derecha de la diferencia se baja la siguiente cifra del dividendo original, con lo que se forma un nuevo dividendo parcial al que se le repite el proceso descrito.
5. Se continúa con el proceso hasta bajar todas las cifras del dividendo original.
6. Si algún dividendo parcial resulta ser menor que el divisor, se escribe cero en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividendo original.

**EJEMPLOS**

1 Divide 9 entre 4.

**Solución**

Se acomodan las cantidades en la caja divisora.

$$4\overline{)9}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se busca un número que al multiplicar por 4 se aproxime a 9 sin excederlo ($4 \times 2 = 8$), de forma que la diferencia del dividendo 9 y el producto 8 sea menor que 4

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 4 & 9 \\ & 1 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es igual a 2 y el residuo 1

2 Efectúa la división de 47 entre 3.

**Solución**

Se colocan el dividendo y el divisor en la caja divisora, en sus respectivos lugares.

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 3 & 47 \end{array}$$

Se elige un dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 3 & 4{,}7 \\ & 1 \end{array}$$

Se baja la siguiente cifra del dividendo original y se divide entre 3 nuevamente.

$$\begin{array}{r|l} & 1\ 5 \\ \hline 3 & 4{,}7 \\ & 1\ 7 \\ & \ \ \ 2 \end{array}$$

El resultado de la división es 15 y el residuo 2

3 Efectúa $23 \overline{)1\ 217}$.

**Solución**

Se elige el dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ \ \ 5 \\ \hline 23 & 121{,}7 \\ & \ \ 06 \end{array}$$

Se baja la siguiente cifra del dividendo original y se divide nuevamente para obtener el resultado de la división propuesta.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ \ \ 5\ 2 \\ \hline 23 & 121{,}7 \\ & \ \ 06\ 7 \\ & \ \ \ \ 2\ 1 \end{array}$$

Por consiguiente, el cociente es 52 y el residuo 21

4 Divide 65 975 entre 325.

**Solución**

Se acomodan los números en la caja divisora.

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 325 & 65\ 975 \end{array}$$

Se elige el dividendo parcial y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ \ 2 \\ \hline 325 & 659{,}75 \\ & 009 \end{array}$$

Al bajar la siguiente cifra, el nuevo dividendo parcial 97 es menor que el divisor 325.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 325\overline{)659{,}75} \\ 009\,7 \end{array}$$

Por lo tanto, en el cociente se escribe 0 a la derecha de 2 y se baja la última cifra del dividendo original.

$$\begin{array}{r} 2\,0 \\ 325\overline{)659{,}75} \\ 009\,75 \end{array}$$

Se efectúa la división de 975 entre 325 y se obtiene el resultado.

$$\begin{array}{r} 2\,03 \\ 325\overline{)659{,}75} \\ 009\,75 \\ 0\,00 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es 203 y el residuo 0, la división fue exacta.

## EJERCICIO 18

Realiza las siguientes divisiones.

1. $3\overline{)8}$
2. $5\overline{)16}$
3. $7\overline{)343}$
4. $9\overline{)2\,674}$
5. $12\overline{)96}$
6. $18\overline{)236}$
7. $23\overline{)485}$
8. $35\overline{)1\,216}$
9. $125\overline{)3\,724}$
10. $853\overline{)4\,296}$
11. $526\overline{)15\,396}$
12. $903\overline{)42\,874}$
13. $1\,205\overline{)63\,472}$
14. $4\,621\overline{)80\,501}$
15. $12\,503\overline{)120\,973}$
16. $42\,524\overline{)3\,123\,274}$
17. $10\,053\overline{)2\,000\,382}$
18. $22\,325\overline{)110\,121\,874}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

En el auditorio de una escuela se presenta una obra de teatro para maestros y alumnos. Si en la escuela hay 28 maestros y 585 alumnos, y el auditorio sólo tiene capacidad para 80 personas, ¿cuántas presentaciones se deben realizar para que todo el alumnado y todos los profesores la presencien?

**Solución**

En total hay 28 + 585 = 613 personas; luego, se realiza una división entre el total de personas y la capacidad del auditorio para obtener el número de presentaciones.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 80\overline{)613} \\ 53 \end{array}$$

Se observa que el cociente 7 representa al número de presentaciones con auditorio lleno, pero sobran 53, entonces se necesita una presentación más para que todos puedan asistir a la obra de teatro. Por lo tanto, se tienen que realizar 8 presentaciones.

## EJERCICIO 19

Resuelve los siguientes problemas:

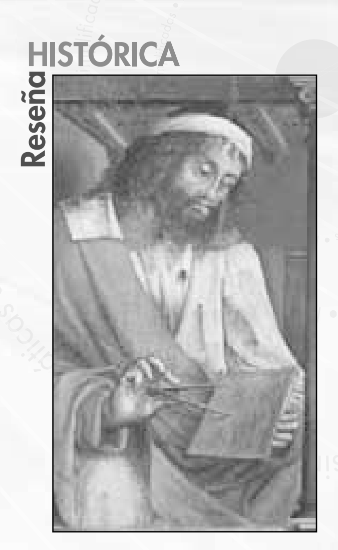
1. ¿Cuántas veces cabe el número 15 en 345?
2. Ciento ochenta y seis mil pesos es lo que ahorraron 62 alumnos del Tecnológico de ingeniería para su graduación, si cada estudiante ahorró la misma cantidad, ¿cuánto dinero ahorró cada uno?
3. El producto de 2 números es 137 196, uno de ellos es 927, ¿cuál es el otro número?
4. ¿Cuántas horas hay en 3 360 minutos, si se sabe que una hora tiene 60 minutos?
5. Se reparten 7 200 libros de matemáticas a 4 escuelas, si cada una de ellas tiene 600 alumnos, ¿cuántos libros le tocan a cada estudiante?
6. ¿En cuántas horas recorrerá 144 kilómetros un automóvil que viaja a 16 kilómetros por hora?
7. ¿Cuántos días necesitará Fabián para capturar en su computadora los datos de un libro de matemáticas que contiene 224 páginas, si copia 4 páginas en una hora y trabaja 8 horas por día?
8. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 4 horas, ¿cuánto se habrá adelantado al cabo de 20 horas?
9. Una fuente tiene capacidad para 2 700 litros de agua, ¿qué cantidad de este líquido debe echar por minuto una llave que la llena en 5 horas?
10. En una tienda de ropa, Omar compra igual número de pantalones que de chamarras con un costo total de $1 500, cada pantalón cuesta $200 y cada chamarra $550, ¿cuántos pantalones y chamarras compró?
11. Los 3 integrantes de una familia deciden repartir los gastos que se generan en su casa: el recibo bimestral de luz llega de $320; el recibo del teléfono de $240 mensuales; la televisión por cable $260 mensuales y el predio es de $3 600 anuales. ¿Cuánto dinero le toca aportar mensualmente a cada integrante, si los gastos se reparten de manera equitativa?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# Capítulo 3

## Teoría de números

### Reseña HISTÓRICA



Euclides es el matemático más famoso de la Antigüedad y quizá también el más nombrado y conocido de la historia de las matemáticas.

Su obra más importante es un tratado de geometría y aritmética que recibe el título de *Los elementos*.

Esta obra es importante, no tanto por la originalidad de sus contenidos, sino por la sistematización, el orden y la argumentación con la que fue redactada. Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométrico-matemáticos de su época, que ya eran muchos.

*Los elementos* consta de 13 libros sobre geometría y aritmética, de los cuales sólo los libros del VII al IX tratan la teoría de los números (aritmética), discuten relaciones con números primos (Euclides prueba ya en un teorema que no hay una cantidad finita de números primos), mínimo común múltiplo, progresiones geométricas, etcétera.

Euclides
(300 a. C)

## Divisibilidad

Sean $a$ y $b$ números enteros. Se dice que $a$ es divisible entre $b$ si el residuo de $a \div b$ es cero.

### Ejemplos

48 es divisible entre 16, porque 48 = (16)(3) + 0, es decir,

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\ 3\ } \\ 16 & 48 \\ & \ 0 \longrightarrow \text{Residuo} \end{array}$$

1 512 es divisible entre 42, porque 1 512 = (42)(36) + 0, entonces,

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\ \ 36\ } \\ 42 & 1\,512 \\ & \ \ 252 \\ & \ \ \ \ 0 \longrightarrow \text{Residuo} \end{array}$$

385 no es divisible entre 12, porque 385 = (12)(32)+ 1, es decir, el residuo es diferente de 0

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\ 32\ } \\ 12 & 385 \\ & \ 25 \\ & \ \ 1 \longrightarrow \text{Residuo} \end{array}$$

**Múltiplo.** El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces.

### Ejemplos

36 es múltiplo de 9, porque lo contiene 4 veces.
240 es múltiplo de 12, porque lo contiene 20 veces.
Los múltiplos de un número $k$ se obtienen al multiplicar $k$ por los números naturales.

### Ejemplos

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, … , porque 3(1) = 3, 3(2) = 6, 3(3) = 9, 3(4) = 12, 3(5) = 15, 3(6) = 18, ...
Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, … , porque 5(1) = 5, 5(2) = 10, 5(3) = 15, 5(4) = 20, 5(5) = 25, 5(6) = 30, ...
Los múltiplos de 8 son: 8, 16, 24, 32, 40, 48, … , porque 8(1) = 8, 8(2) = 16, 8(3) = 24, 8(4) = 32, 8(5) = 40, 8(6) = 48, ...

**Número compuesto.** Es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, lo es entre otro factor.

### Ejemplos

12 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
28 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

### Criterios de divisibilidad

Nos permiten visualizar cuándo un número es divisible entre otro sin efectuar la división. A continuación se enuncian algunos de ellos:

- **Divisibilidad entre 2.** Un número entero es divisible entre 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8, los números divisibles entre 2 se llaman pares.

### Ejemplo

20, 12, 114, 336, 468 son divisibles entre 2, ya que terminan en 0, 2, 4, 6 y 8, respectivamente.

- **Divisibilidad entre 3.** Un número entero es divisible entre 3, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

## Ejemplos

51 es divisible entre 3, ya que 5 + 1 = 6 y 6 es múltiplo de 3.
486 es divisible entre 3, ya que 4 + 8 + 6 = 18 y 18 es múltiplo de 3.

- **Divisibilidad entre 4.** Un número entero es divisible entre 4, si sus últimos 2 dígitos son 0 o un múltiplo de 4.

## Ejemplos

900 es divisible entre 4, porque termina en doble 0.
628 es divisible entre 4, porque 28 es múltiplo de 4.

- **Divisibilidad entre 5.** Un número entero es divisible entre 5, si su último dígito es 0 o 5.

## Ejemplo

5 215 y 340 son divisibles entre 5, ya que terminan en 5 y 0 respectivamente.

- **Divisibilidad entre 6.** Un número entero es divisible entre 6, si a su vez es divisible entre 2 y 3.

## Ejemplos

216 es divisible entre 2, ya que termina en 6, y es divisible entre 3, porque la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Por tanto, 216 es divisible entre 6.
9 000 es divisible entre 6, ya que es divisible entre 2 y 3.

- **Divisibilidad entre 7.** Un número entero es divisible entre 7, cuando al multiplicar el último dígito por 2 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o un múltiplo de 7.

## Ejemplos

315 es divisible entre 7, ya que $5 \times 2 = 10$ y $31 - 10 = 21$ y 21 es múltiplo de 7.
147 es divisible entre 7, porque $7 \times 2 = 14$ y $14 - 14 = 0$.

- **Divisibilidad entre 8.** Un número entero es divisible entre 8, cuando sus 3 últimos dígitos de la derecha son 0 o forman un múltiplo de 8.

## Ejemplos

6 000 es divisible entre 8, ya que sus últimos 3 dígitos son 0.
3 160 es divisible entre 8, porque los 3 últimos dígitos, 160, forman un múltiplo de 8.

- **Divisibilidad entre 9.** Un número entero es divisible entre 9, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

## Ejemplos

1 233 es divisible entre 9, ya que 1 + 2 + 3 + 3 = 9, y 9 es múltiplo de 9.
6 786 es divisible entre 9, ya que 6 + 7 + 8 + 6 = 27, y 27 es múltiplo de 9.

- **Divisibilidad entre 10.** Un número entero es divisible entre 10, si el último dígito es 0.

## Ejemplos

360 es divisible entre 10, porque su último dígito es 0.
2 500 es divisible entre 10, ya que termina en 0.

- **Divisibilidad entre 11.** Un número entero es divisible entre 11, si el valor absoluto de la diferencia entre la suma de los dígitos en posición par y la suma de los dígitos en posición impar es 0 o múltiplo de 11.

## Ejemplos

1 364 es divisible entre 11, ya que $|(3+4)-(1+6)| = |7-7| = |0| = 0$.

82 918 es divisible entre 11, porque $|(2+1)-(8+9+8)| = |3-25| = |-22| = 22$, y 22 es múltiplo de 11.

- **Divisibilidad entre 13.** Un número entero es divisible entre 13, si al multiplicar el último dígito por 9 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 13.

**Ejemplos**

273 es divisible entre 13, ya que $27-(3\times 9)=27-27=0$.
442 es divisible entre 13, porque $44-(2\times 9)=44-18=26$, y 26 es múltiplo de 13.

- **Divisibilidad entre 17.** Un número entero es divisible entre 17, si al multiplicar el último dígito por 5 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 17.

**Ejemplos**

357 es divisible entre 17, ya que $35-(7\times 5)=35-35=0$.
493 es divisible entre 17, porque $49-(3\times 5)=49-15=34$, y 34 es múltiplo de 17.

- **Divisibilidad entre 19.** Un número entero es divisible entre 19, si al multiplicar el último dígito por 17 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 19.

**Ejemplos**

342 es divisible entre 19, ya que $34-(2\times 17)=34-34=0$.
1 045 es divisible entre 19, porque $104-(5\times 17)=104-85=19$, y 19 es múltiplo de 19.

## EJERCICIO **20**

De los siguientes números:

1. 105, 243, 73, 2 457, 3 589, ¿cuáles son divisibles entre 3?
2. 800, 112, 324, 1 426, 13 564, ¿cuáles son divisibles entre 4?
3. 105, 3 176, 8 910, 34 615, 217 583, ¿cuáles son divisibles entre 5?
4. 80, 78, 314, 768, 1 470, ¿cuáles son divisibles entre 6?
5. 175, 157, 576, 1 645, 3 528, ¿cuáles son divisibles entre 7?
6. 700, 3 128, 5 024, 9 000, 10 018, ¿cuáles son divisibles entre 8?
7. 225, 349, 1 008, 2 925, 23 619, ¿cuáles son divisibles entre 9?
8. 66, 111, 253, 935, 540, ¿cuáles son divisibles entre 11?
9. 195, 315, 540, 713, 1 105, ¿cuáles son divisibles entre 13?
10. 1 007, 1 062, 380, 719, 1 596, ¿cuáles son divisibles entre 19?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Números primos

Un número primo sólo es divisible entre sí mismo y la unidad. El 1, por definición, no es primo.

**Ejemplos**

7 es número primo porque sólo es divisible entre sí mismo y la unidad.
15 no es número primo, ya que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, también lo es entre 3 y 5.

**Tabla de números primos.** Para obtener los primeros *n* números primos de los números naturales se puede utilizar la criba de Eratóstenes, la cual consiste en hacer una tabla con los números del 1 hasta *n*.

El procedimiento es señalar con un paréntesis los números que sean primos y tachar los que no lo sean. Se empieza por tachar el 1 y escribir entre paréntesis el 2, a continuación se tachan los múltiplos de 2, posteriormente se busca el primer número no tachado, en este caso (3), se pone entre paréntesis y se tachan todos sus múltiplos. El procedimiento se sigue hasta tener marcados todos los números.

***Criba de Eratóstenes***

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | (2) | (3) | ~~4~~ | (5) | ~~6~~ | (7) | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| (11) | ~~12~~ | (13) | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | (17) | ~~18~~ | (19) | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | (23) | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | (29) | ~~30~~ |
| (31) | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | (37) | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| (41) | ~~42~~ | (43) | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | (47) | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | (53) | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | (59) | ~~60~~ |
| (61) | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | ~~65~~ | ~~66~~ | (67) | ~~68~~ | ~~69~~ | ~~70~~ |
| (71) | ~~72~~ | (73) | ~~74~~ | ~~75~~ | ~~76~~ | ~~77~~ | ~~78~~ | (79) | ~~80~~ |
| ~~81~~ | ~~82~~ | (83) | ~~84~~ | ~~85~~ | ~~86~~ | ~~87~~ | ~~88~~ | (89) | ~~90~~ |
| ~~91~~ | ~~92~~ | ~~93~~ | ~~94~~ | ~~95~~ | ~~96~~ | (97) | ~~98~~ | ~~99~~ | ~~100~~ |

Por tanto, los números primos entre 1 y 100 son:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$$

## Descomposición de un número en sus factores primos

La descomposición de un número en sus factores primos es su expresión como el producto de sus factores primos. Para obtenerlo, se divide el número entre el menor divisor primo posible, el cociente que se obtiene se vuelve a dividir entre el menor divisor primo posible, y así hasta que el último cociente sea 1, este procedimiento también se conoce como factorización completa de un número.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa 144 como el producto de sus factores primos.

**Solución**

Se divide 144 entre 2, el cociente 72, se vuelve a dividir entre 2, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} 144 \div 2 &= 72 \\ 72 \div 2 &= 36 \\ 36 \div 2 &= 18 \\ 18 \div 2 &= 9 \\ 9 \div 3 &= 3 \\ 3 \div 3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ \hline 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto, $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

2 Expresa 105 como el producto de sus factores primos.

**Solución**

105 se divide entre 3 y se continúa con el procedimiento.

$$\begin{array}{r} 105 \div 3 = 35 \\ 35 \div 5 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ \hline 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por consiguiente, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

3 Encuentra la factorización completa de 294.

**Solución**

294 se divide entre 2 y se continúa con el procedimiento.

$$\begin{array}{r} 294 \div 2 = 147 \\ 147 \div 3 = 49 \\ 49 \div 7 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ \hline 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces, la factorización completa de 294 es $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

## EJERCICIO 21

Realiza la descomposición en sus factores primos de los siguientes números:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. 72 | 4. 576 | 7. 840 | 10. 2 376 | 13. 30 240 |
| 2. 96 | 5. 945 | 8. 2 310 | 11. 7 020 | 14. 16 200 |
| 3. 225 | 6. 210 | 9. 3 675 | 12. 29 400 | 15. 30 030 |

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Máximo común divisor (MCD)

Es el mayor de los divisores en común de 2 o más números.

**Ejemplo**

Los divisores de 18 y 24 son:

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18
Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24
Los divisores comunes son: 1, 2, 3 y 6, el mayor de los divisores en común es el 6

Por tanto, el máximo común divisor de 18 y 24 es 6

Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común. Cuando los números sólo tienen a la unidad como común divisor, los números reciben el nombre de "primos relativos".

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el máximo común divisor de 48, 36 y 60.

**Solución**

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 48 | 36 | 60 | 2 |
| 24 | 18 | 30 | 2 |
| 12 | 9 | 15 | 3 |
| 4 | 3 | 5 | |

4, 3 y 5, no tienen divisores primos en común, los números primos obtenidos se multiplican y el producto es el resultado.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 48, 36 y 60 es 12.

2 Determina el MCD(72,180).

**Solución**

Se realiza la descomposición de 72 y 180, en sus factores primos.

| | | |
|---|---|---|
| 72 | 180 | 2 |
| 36 | 90 | 2 |
| 18 | 45 | 3 |
| 6 | 15 | 3 |
| 2 | 5 | |

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Por tanto, el MCD(72,180) = 36

3 Calcula el MCD(11,23).

**Solución**

Los números sólo tienen a la unidad como común divisor, lo cual quiere decir que 11 y 23 son primos relativos.

Por consiguiente, el MCD(11,23) = 1

4 Encuentra el máximo común divisor de 234, 390 y 546.

**Solución**

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 234 | 390 | 546 | 2 |
| 117 | 195 | 273 | 3 |
| 39 | 65 | 91 | 13 |
| 3 | 5 | 7 | |

$$2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 234, 390 y 546 es 78

# EJERCICIO 22

Calcula el MCD de los siguientes números:

1. 108 y 72
2. 270 y 900
3. 243 y 125
4. 60, 72 y 150
5. 27, 25 y 28
6. 80, 675 y 900
7. 216, 300 y 720
8. 126, 210 y 392
9. 308, 1 617 y 1 925
10. 572, 4 719 y 7 865

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo es el menor de todos los múltiplos comunes de 2 o más números.

### Ejemplo

Al obtener los múltiplos de 4 y 6 se tiene:

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, …
Los múltiplos comunes son: 12, 24, 36, 48, …
El menor de todos los múltiplos en común es 12

Por tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12

Para calcular el mcm de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos hasta que los cocientes sean 1, si alguno de los números no es divisible entre el factor dado, se baja y se continúa hasta encontrar el factor primo que lo divida.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el mcm [28,42].

**Solución**

Se descomponen ambos números en factores primos

| 28 | 42 | |
|---|---|---|
| 14 | 21 | 2 |
| 7 | 21 | 2 |
| 7 | 7 | 3 |
| 1 | 1 | 7 |

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Por consiguiente, el mcm [28,42] es 84

2 Determina el mcm [25,30,150].

**Solución**

Se descomponen los números en factores primos

| 25 | 30 | 150 | |
|---|---|---|---|
| 25 | 15 | 75 | 2 |
| 25 | 5 | 25 | 3 |
| 5 | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 5 |

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$

Por tanto, el mcm [25,30,150] es 150

3 Calcula el mínimo común múltiplo de 36, 48 y 60.

**Solución**

Se descomponen simultáneamente en factores primos y los números primos que resultan se multiplican.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 48 | 60 | 2 |
| 18 | 24 | 30 | 2 |
| 9 | 12 | 15 | 2 |
| 9 | 6 | 15 | 2 |
| 9 | 3 | 15 | 3 |
| 3 | 1 | 5 | 3 |
| 1 | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | |

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$

Entonces el mcm de 36, 48 y 60 es 720

## EJERCICIO 23

Calcula el mcm de los siguientes números:

1. 108 y 72
2. 18 y 45
3. 27 y 16
4. 36, 20 y 90
5. 45, 54 y 60
6. 28, 35 y 63
7. 20, 30 y 50
8. 720, 600 y 540
9. 220, 275 y 1 925
10. 605, 1 925 y 2 695

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 En una reunión de academia del área de matemáticas se repartieron 18 bocadillos, 24 vasos con refresco y 12 rebanadas de pastel, ¿cuántos profesores asistieron a la reunión y qué cantidad de bocadillos, vasos con refresco y rebanadas de pastel recibió cada uno?

**Solución**

Se calcula el máximo común divisor de 18, 24 y 12

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 | 24 | 12 | 2 |
| 9 | 12 | 6 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | |

$\text{MCD}(18,24,12) = 2 \cdot 3 = 6$

Por consiguiente, a la reunión de academia asistieron 6 profesores y a cada uno le tocó 3 bocadillos, 4 vasos con refresco y 2 rebanadas de pastel.

2 Tres escuelas deciden hacer una colecta de dinero entre sus alumnos para donar a varias instituciones de beneficencia. Si la primera junta 120 mil, la segunda 280 mil y la tercera 360 mil pesos, ¿cuál es la mayor cantidad que recibirá cada institución de tal manera que sea la misma y cuántas instituciones podrán ser beneficiadas?

**Solución**

Se calcula el máximo común divisor de 120, 280 y 360

| | | | |
|---|---|---|---|
| 120 | 280 | 360 | 2 |
| 60 | 140 | 180 | 2 |
| 30 | 70 | 90 | 2 |
| 15 | 35 | 45 | 5 |
| 3 | 7 | 9 | |

MCD(120, 280, 360) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$

Cada institución recibirá 40 mil pesos y el número de instituciones beneficiadas será la suma de los residuos $3 + 7 + 9 = 19$.

Por tanto, 19 son las instituciones beneficiadas y cada una recibirá $40 000.

3 Al hacer el corte del día en un restaurante, el administrador hace 3 rollos de billetes de la misma denominación, en el primero hay $1 350, en el segundo $1 700 y en el tercero $3 550, ¿cuántos billetes hay en cada rollo y de qué denominación son?

**Solución**

Se calcula el máximo común divisor de 1 350, 1 700 y 3 550

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 350 | 1 700 | 3 550 | 2 |
| 675 | 850 | 1 775 | 5 |
| 135 | 170 | 355 | 5 |
| 27 | 34 | 71 | |

MCD(1 350, 1 700, 3 550) = $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$

La denominación de cada billete es de $50, en el primer rollo hay 27 billetes, en el segundo 34 y en el tercero 71.

4 Una persona viaja a la Ciudad de México cada 12 días, otra lo hace cada 20 días y una tercera cada 6 días. Si hoy han coincidido en estar las 3 en la ciudad, ¿dentro de cuántos días, como mínimo, volverán a coincidir?

**Solución**

Se calcula el mínimo común múltiplo de 12, 20 y 6

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 20 | 6 | 2 |
| 6 | 10 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 3 | 3 |
| 1 | 5 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | |

El mínimo común múltiplo es: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Por tanto, el mínimo de días que trascurrirán para que las 3 personas coincidan en la Ciudad de México es de 60 días.

5 Un médico receta a un paciente tomar una pastilla cada 6 horas y un jarabe cada 8 horas. Si al iniciar el tratamiento toma la pastilla y el jarabe a la misma hora, ¿después de cuántas horas volverá a tomar ambos medicamentos al mismo tiempo?

**Solución**

Se calcula el mínimo común múltiplo de 6 y 8

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 8 | 2 |
| 3 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | |

El mínimo común múltiplo es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Entonces transcurrirán 24 horas para que el paciente tome los medicamentos juntos.

# EJERCICIO 24

Resuelve las siguientes aplicaciones:

1. Tres cajas contienen, cada una, 12 kilogramos de carne de res, 18 de carne de cerdo y 24 de carne de pollo. La carne de cada caja está contenida en bolsas del mismo tamaño y con la máxima cantidad de carne posible, ¿cuánto pesa cada bolsa y cuántas hay por caja?
2. Gerardo fabrica un anuncio luminoso con focos de color rojo, amarillo y verde, de tal manera que los focos rojos enciendan cada 10 segundos, los amarillos cada 6 y los verdes cada 15, si al probar el anuncio encienden todos los focos a la vez, ¿después de cuántos segundos volverán a encender juntos?
3. Un ebanista quiere cortar en cuadros lo más grande posible una plancha de madera de 300 cm de largo y 80 cm de ancho, ¿cuál debe ser la longitud de los lados de cada cuadro?
4. Un ciclista da una vuelta a una pista en 6 minutos, mientras que otro tarda 4 minutos. Si ambos inician sus recorridos juntos, ¿después de qué tiempo volverán a encontrarse y cuántas vueltas habrán dado cada uno?
5. Una llave vierte 4 litros de agua por minuto, otra 3 y una tercera, 8. ¿Cuál es la cantidad menor de litros que puede tener un pozo para que se llene en un número exacto de minutos por cualquiera de las 3 llaves?
6. Tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo se quieren cortar para hacer banderas con pedazos iguales y de mayor longitud, ¿cuál será el largo de cada pedazo?
7. Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales miden 15, 9 y 6 metros, ¿cuánto deben medir los pedazos de tronco si tienen que ser del mismo tamaño?, ¿cuántos pedazos de troncos saldrán?
8. El abuelo Eduardo da dinero a 3 de sus hijos para que lo repartan a los nietos de manera equitativa. A su hijo Rubén le da $5 000, a su hijo Anselmo le da $6 000, mientras que a Horacio sólo $3 000, ¿cuál es la mayor cantidad de dinero que podrán darle a sus hijos y cuántos nietos tiene Eduardo?
9. Fabián tiene un reloj que da una señal cada 18 minutos, otro que da una señal cada 12 minutos y un tercero cada 42 minutos. A las 11 de la mañana los 3 relojes han coincidido en dar la señal, ¿cuántos minutos como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?, ¿a qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?
10. Daniel y Omar tienen 60 canicas azules, 45 verdes y 90 amarillas; quieren hacer costalitos iguales con el número mayor de canicas sin que sobren, ¿cuántos costalitos pueden hacer y cuántas canicas tendrá cada uno?
11. Ricardo tiene en su papelería los lapiceros en bolsas. En la caja “A” tiene bolsitas de 30 lapiceros cada una y no sobran, en la caja “B” tiene bolsitas de 25 lapiceros cada una y tampoco sobran. El número de lapiceros que hay en la caja “A” es igual al que hay en la caja “B”, ¿cuántos lapiceros como mínimo hay en cada caja?
12. Rosa tiene cubos de color lila de 8 cm de arista y de color rojo de 6 cm de arista. Ella quiere apilar los cubos en 2 columnas, una de cubos de color lila y otra de color rojo, desea conseguir que ambas columnas tengan la misma altura, ¿cuántos cubos, como mínimo, tiene que apilar de cada color?
13. Tres amigos pasean en bicicleta por un camino que rodea a un lago, para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 10 minutos, otro tarda 15 y el tercero, 18 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los 3 pasen simultáneamente por el punto de partida, ¿cuánto tiempo duró el paseo?, ¿cuántas vueltas dio cada uno?
14. En 1994 se realizaron elecciones para presidente y para jefe de gobierno, el periodo presidencial es de 6 años y el de jefe de gobierno de 4. ¿En qué año volverán a coincidir las elecciones?
15. El piso de una habitación tiene 425 cm de largo por 275 cm de ancho, si se desea poner el menor número de mosaicos cuadrados de mármol, ¿cuáles serán las dimensiones máximas de cada mosaico?, ¿cuántos mosaicos se necesitan?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 4

## NÚMEROS RACIONALES

**Reseña HISTÓRICA**

La idea de número racional como relación entre dos enteros fue utilizada por los pitagóricos en el siglo VI a. de C. Años antes, los babilonios y los egipcios utilizaron algunas fracciones, las que tenían como numerador 1, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, y algunas en particular como: $\frac{2}{3}$.

Después fueron los hindúes, quienes se encargaron de formalizar las reglas para ejecutar las operaciones entre números fraccionarios. Algunas reglas generales las plantearon Aryabhata, y luego Bramagupta, en los siglos VI y VII, respectivamente. Tiempo después fueron los mismos hindúes quienes se encargaron de sistematizar y ampliar estas reglas. De modo que las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones, fueron obra de Mahavira, en el siglo IX, y Bháskara, en el siglo XII.

Durante el siglo XV el matemático persa Al-kashi planteó la escritura decimal de los números fraccionarios y, al mismo tiempo, estableció las reglas de cálculo con los números decimales. En el Occidente cristiano a las fracciones decimales se les conocía como fracciones de los turcos.

Posteriormente a las fracciones equivalentes, que pueden ser simplificadas, se les denominó números racionales, mientras que la fracción siempre será un término que no tiene factores comunes entre el numerador y el denominador, es decir, es irreducible.

Al inicio del papiro de Rhind aparece una tabla en la que se expresan las fracciones de numerador 2 y de denominador impar entre 5 y 101, como suma de fracciones unitarias; con ellas efectuaban las cuatro operaciones aritméticas con fracciones.

## Fracción común

Si $a$ y $b$ son números enteros, y $b$ es diferente de cero, se llama fracción común a la expresión $\frac{a}{b}$, donde $a$ recibe el nombre de numerador y $b$ el de denominador. En una fracción común el denominador indica el número de partes iguales en que se divide la unidad y el numerador indica el número de partes que se toman de la unidad.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 La fracción $\frac{3}{4}$, indica que la unidad se divide en 4 partes iguales, de las cuales se toman únicamente 3, la representación gráfica de esta fracción es:

$$\frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}\ \Big|\ \frac{1}{4}\ \Big|\ \frac{1}{4}\ \Big|\ \frac{1}{4}}$$

La parte sombreada de la figura representa al numerador.

2 La fracción $\frac{5}{3}$ indica que la unidad se divide en 3 partes iguales, de las cuales se deben tomar 5, lo cual no es posible. Por lo tanto, se toman 2 unidades y se dividen en 3 partes iguales cada una, de la primera unidad se toman las 3 partes y de la segunda únicamente 2 para completar las 5 partes indicadas en el numerador.

$$\frac{5}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{1}{3}}$$

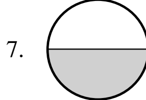
Otra manera de representar la fracción $\frac{5}{3}$ es con un número formado por una parte entera y una parte fraccionaria $1\frac{2}{3}$, este tipo de fracciones reciben el nombre de mixtas.

## EJERCICIO **25**

Representa gráficamente las siguientes fracciones:

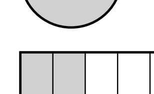
1. $\frac{3}{8}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{7}{6}$ 5. $\frac{6}{2}$ 6. $\frac{9}{4}$

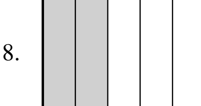
Indica la fracción que representa la parte sombreada de las figuras.

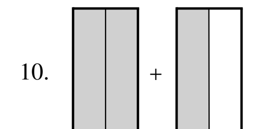
7. 

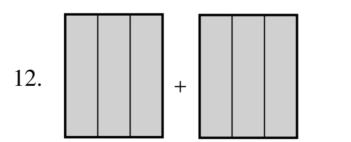
9.

11. + +



8. 

10. 


12. 


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

En la familia que forman 3 hombres y 4 mujeres, ¿qué fracción de la familia representan las mujeres?

**Solución**

En este ejemplo la unidad la representa la familia, que a su vez está formada por 7 miembros (3 + 4 = 7), la fracción de la familia que representan las mujeres es el número de ellas dividida entre el total de miembros. Por lo tanto, la fracción es igual a $\frac{4}{7}$.

## EJERCICIO 26

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una caja tiene 9 pelotas verdes y 5 azules, ¿qué porción de las pelotas que hay en la caja son azules?
2. ¿Qué fracción del día ha transcurrido cuando un reloj marca las 6:00 p.m.?
3. En una caja hay 40 listones rojos y 60 de color amarillo, ¿qué fracción del total de éstos representan los listones rojos y los amarillos?
4. Un obrero trabaja diariamente jornadas de 8 horas, ¿qué fracción del día ocupa para realizar sus otras actividades?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Clasificación

**Fracciones propias.** Son aquellas que tienen el numerador menor que el denominador.

**Ejemplo**

Las fracciones $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, -\frac{3}{4}, \frac{8}{21}, \frac{1}{3}$ tienen el numerador menor que el denominador, por lo tanto, son propias.

**Fracciones impropias.** Son aquellas cuyo numerador es mayor o igual que el denominador.

**Ejemplo**

Las fracciones $\frac{8}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{4}{3}, \frac{21}{8}, \frac{3}{1}$ son impropias, ya que el numerador es mayor que el denominador.

## EJERCICIO 27

Identifica las fracciones propias y las impropias.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. $\frac{7}{8}$ | 4. $\frac{12}{16}$ | 7. $\frac{16}{9}$ | 10. $\frac{53}{7}$ | 13. $\frac{345}{435}$ |
| 2. $\frac{8}{6}$ | 5. $\frac{5}{5}$ | 8. $\frac{2}{15}$ | 11. $\frac{38}{45}$ | 14. $\frac{229}{228}$ |
| 3. $\frac{9}{12}$ | 6. $\frac{9}{24}$ | 9. $\frac{32}{17}$ | 12. $\frac{345}{87}$ | 15. $\frac{213}{1\,028}$ |

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**Fracciones mixtas.** Son aquellas formadas por una parte entera y una parte fraccionaria.

**Ejemplo**

Las fracciones: $2\frac{1}{3}, 5\frac{3}{4}, 3\frac{2}{3}$ son ejemplos de fracciones mixtas.

## Conversiones

Para realizar la conversión de una fracción impropia a mixta se efectúa la división del numerador entre el denominador, el cociente es la parte entera, el residuo es el numerador de la fracción y el divisor es el denominador.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte a fracción mixta $\frac{43}{6}$.

**Solución**

Se efectúa la división:

$$\text{denominador} \longrightarrow 6\overline{)43}\quad 7 \longleftarrow \text{parte entera};\quad 1 \longleftarrow \text{numerador}$$

Por lo tanto, la fracción $\frac{43}{6}$ en forma mixta es $7\frac{1}{6}$

2 Expresa en fracción mixta $\frac{125}{12}$.

**Solución**

Se realiza el cociente:

$$12\overline{)125}\quad 10\quad 005$$

se obtiene que $\frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$

## EJERCICIO 28

Convierte las siguientes fracciones impropias a fracciones mixtas.

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{7}{5}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{13}{4}$
5. $\frac{12}{3}$
6. $\frac{13}{8}$
7. $\frac{41}{6}$
8. $\frac{18}{3}$
9. $\frac{27}{7}$
10. $\frac{36}{13}$
11. $\frac{28}{13}$
12. $\frac{25}{12}$
13. $\frac{19}{18}$
14. $\frac{45}{16}$
15. $\frac{131}{40}$
16. $\frac{488}{65}$
17. $\frac{539}{105}$
18. $\frac{1\,258}{305}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Para convertir una fracción mixta a impropia se multiplica la parte entera de la fracción mixta por el denominador de la parte fraccionaria y al producto se le suma el numerador.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte a fracción impropia $2\frac{3}{5}$.

**Solución**

Al aplicar el procedimiento anterior se obtiene:

$$2\frac{3}{5}=\frac{(2\times5)+3}{5}=\frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}$$

Por consiguiente, $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$

2 La fracción impropia de $1\frac{7}{9}$ es igual a:

**Solución**

Se realiza el procedimiento para obtener:

$$1\frac{7}{9}=\frac{(1\times9)+7}{9}=\frac{9+7}{9}=\frac{16}{9}$$

por tanto, $1\frac{7}{9}=\frac{16}{9}$

## EJERCICIO 29

Convierte las siguientes fracciones mixtas en fracciones impropias.

1. $3\frac{2}{5}$
2. $1\frac{2}{9}$
3. $4\frac{2}{7}$
4. $5\frac{4}{6}$
5. $7\frac{2}{3}$
6. $8\frac{3}{4}$
7. $1\frac{9}{10}$
8. $2\frac{8}{13}$
9. $5\frac{3}{16}$
10. $7\frac{6}{19}$
11. $12\frac{3}{10}$
12. $18\frac{2}{30}$
13. $15\frac{19}{20}$
14. $23\frac{1}{12}$
15. $36\frac{3}{14}$
16. $50\frac{4}{7}$
17. $121\frac{3}{5}$
18. $223\frac{1}{7}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Fracciones equivalentes

Son aquellas que se expresan de manera diferente, pero representan la misma cantidad. Para averiguar si 2 fracciones son equivalentes se efectúa la multiplicación del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y el resultado debe ser igual a la multiplicación del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$?

**Solución**

Se efectúan las multiplicaciones indicadas y se comparan los resultados:

$$(3)(20) \text{ y } (4)(15)$$
$$60 = 60$$

Por tanto, las fracciones son equivalentes.

2 ¿Son equivalentes las fracciones $1\frac{1}{4}$ y $\frac{30}{24}$?

**Solución**

Se convierte la fracción mixta en fracción impropia $1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ y entonces para comparar $\frac{5}{4}$ con $\frac{30}{24}$ se realizan los productos:

$$(5)(24) \text{ y } (4)(30)$$
$$120 = 120$$

Las fracciones, por consiguiente, son equivalentes.

## EJERCICIO 30

Indica si las siguientes fracciones son equivalentes.

1. $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$
2. $\frac{3}{8}$ y $\frac{48}{17}$
3. $\frac{1}{6}$ y $\frac{12}{72}$
4. $\frac{4}{9}$ y $\frac{28}{72}$
5. $\frac{18}{24}$ y $\frac{6}{8}$
6. $\frac{80}{15}$ y 6
7. $1\frac{3}{8}$ y $\frac{66}{48}$
8. $\frac{9}{7}$ y $1\frac{9}{35}$
9. $\frac{7}{4}$ y $1\frac{18}{24}$
10. $1\frac{1}{3}$ y $1\frac{9}{27}$
11. $\frac{13}{4}$ y $3\frac{3}{4}$
12. 6 y $5\frac{7}{8}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

### Propiedades

El valor de una fracción no se altera al multiplicar su numerador y denominador por un mismo número.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Al multiplicar por 2 al numerador y denominador de la fracción $\frac{6}{7}$, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{6}{7}=\frac{6\times 2}{7\times 2}=\frac{12}{14}$$

2 Si al numerador y denominador de la fracción $\frac{5}{3}$ se les multiplica por 4, se obtiene la fracción equivalente $\frac{20}{12}$.

$$\frac{5}{3}=\frac{5\times 4}{3\times 4}=\frac{20}{12}$$

El valor de una fracción no se altera cuando al numerador y denominador se les divide entre el mismo número. A este procedimiento se le conoce como "simplificación de una fracción".

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la fracción $\frac{12}{14}$.

**Solución**

Para simplificar la fracción $\frac{12}{14}$, se debe dividir al numerador y denominador entre 2 que es el máximo común divisor de 12 y 14

$$\frac{12}{14}=\frac{12\div 2}{14\div 2}=\frac{6}{7}$$

Por tanto, $\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$

2 ¿Cuál es la fracción que resulta al simplificar $\frac{36}{24}$?

**Solución**

Otra forma de simplificar una fracción es dividir al numerador y al denominador entre un número primo, este proceso se realiza hasta que ya no exista un divisor primo común.

$$\frac{36}{24}=\frac{36\div 2}{24\div 2}=\frac{18}{12}=\frac{18\div 2}{12\div 2}=\frac{9}{6}=\frac{9\div 3}{6\div 3}=\frac{3}{2}$$

Por consiguiente, $\frac{36}{24}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

EJERCICIO **31**

Simplifica las siguientes fracciones:

1. $\frac{20}{24}$
3. $\frac{9}{12}$
5. $\frac{25}{10}$
7. $\frac{90}{200}$
9. $\frac{132}{165}$
2. $\frac{18}{12}$
4. $\frac{28}{42}$
6. $\frac{12}{60}$
8. $\frac{42}{48}$
10. $\frac{245}{70}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Ubicación en la recta numérica

Para ubicar la fracción $\frac{a}{b}$ en la recta numérica, se divide cada unidad en el número de partes que indica el denominador $b$ y se toman las partes que indica el numerador $a$.

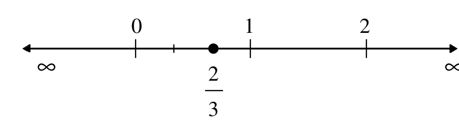
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Localiza en la recta numérica el número $\frac{2}{3}$.

**Solución**

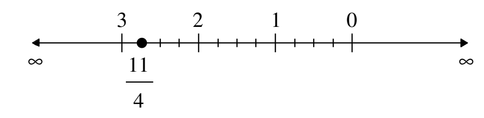
Se divide la unidad en 3 partes iguales y se toman 2



2 Grafica la fracción $-2\frac{3}{4}$ en la recta numérica.

**Solución**

Se convierte la fracción mixta a fracción impropia $-2\frac{3}{4}=-\frac{11}{4}$, ahora se divide en 4 partes iguales a las unidades que se encuentran a la izquierda del 0 y se toman 11 de esas divisiones.




# EJERCICIO 32

Grafica en la recta numérica las siguientes fracciones:

1. $\frac{5}{8}$
2. $-\frac{9}{4}$
3. $-\frac{2}{6}$
4. $\frac{9}{5}$
5. $\frac{5}{9}$
6. $\frac{8}{12}$
7. $1\frac{1}{5}$
8. $-2\frac{1}{3}$
9. $-1\frac{2}{6}$
10. $2\frac{5}{10}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma y resta con igual denominador

Se suman o restan los numeradores y se escribe el denominador en común.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa la operación $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$.

**Solución**

Se suman los numeradores, el resultado tiene como denominador 4 y la fracción resultante se simplifica.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+2+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, el resultado de la operación es $\frac{3}{2}$

2 Efectúa la siguiente operación $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}$.

**Solución**

El denominador de las fracciones es el mismo, por lo tanto, se restan únicamente los numeradores y el resultado tiene el mismo denominador.

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{2}{9}$

3 ¿Cuál es el resultado de $1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\frac{1}{5}$?

**Solución**

Se convierten las fracciones mixtas en fracciones impropias y se efectúan las operaciones.

$$1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\frac{1}{5}=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}-\frac{11}{5}=\frac{8+4-11}{5}=\frac{1}{5}$$

El resultado es $\frac{1}{5}$

## EJERCICIO 33

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}$
2. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$
3. $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$
4. $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$
5. $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}$
6. $\frac{3}{10}+\frac{7}{10}+\frac{1}{10}+\frac{5}{10}$
7. $1\frac{5}{9}+3\frac{1}{9}+\frac{7}{9}$
8. $\frac{13}{16}+2\frac{9}{16}+4\frac{1}{16}+1\frac{3}{16}$
9. $1\frac{5}{8}+\frac{13}{8}+2\frac{7}{8}+\frac{6}{8}+\frac{9}{8}$
10. $\frac{12}{5}-\frac{8}{5}$
11. $\frac{4}{9}-\frac{1}{9}$
12. $\frac{11}{15}-\frac{7}{15}$
13. $3\frac{1}{3}-\frac{8}{3}$
14. $1\frac{2}{17}-\frac{14}{17}$
15. $\frac{4}{6}+\frac{7}{6}-\frac{8}{6}$
16. $\frac{3}{12}-\frac{5}{12}+\frac{10}{12}$
17. $\frac{3}{20}+\frac{18}{20}-\frac{13}{20}-\frac{4}{20}$
18. $\frac{7}{9}-\frac{11}{9}+\frac{15}{9}-\frac{6}{9}-\frac{1}{9}$
19. $1\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-3\frac{1}{2}$
20. $2\frac{7}{9}-\frac{4}{9}-\frac{7}{9}$
21. $1\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$
22. $1\frac{3}{5}+7\frac{4}{5}-9\frac{2}{5}$
23. $3\frac{2}{7}+1\frac{3}{7}-4\frac{3}{7}$
24. $2\frac{3}{5}+1\frac{1}{5}-2\frac{4}{5}-\frac{2}{5}$
25. $2\frac{1}{8}-\frac{7}{8}-1\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$
26. $\frac{14}{13}-1\frac{7}{13}-\frac{2}{13}+1\frac{9}{13}$
27. $3\frac{2}{5}+1\frac{1}{5}+\frac{6}{5}-4\frac{4}{5}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma y resta con diferente denominador

Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, también conocido como común denominador, éste se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador. Los números que resultan se suman o se restan para obtener el resultado final.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}$.

**Solución**

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6, se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerador, posteriormente se suman los resultados de los productos.

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{(3)(3)+(2)(1)+(1)(2)}{6}=\frac{9+2+2}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$$

Por tanto, el resultado de la suma es $\frac{13}{6}$ o $2\frac{1}{6}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$?

**Solución**

El común denominador de 2 y 5 es 10, se efectúan las operaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$$

3 Realiza $3\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

**Solución**

Se convierten las fracciones mixtas a fracciones impropias, enseguida se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realiza el procedimiento para obtener el resultado.

$$3\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{19}{6}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{19-9+2}{6}=\frac{12}{6}=2$$

## EJERCICIO 34

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$
3. $\frac{5}{10}+\frac{3}{2}$
4. $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}$
5. $\frac{8}{26}+\frac{15}{39}$
6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
7. $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
8. $\frac{5}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{18}$
9. $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$
10. $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$
11. $\frac{5}{12}-\frac{7}{24}$
12. $\frac{11}{64}-\frac{5}{8}$
13. $\frac{7}{5}+\frac{8}{35}-\frac{9}{21}$
14. $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{10}$
15. $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{11}{12}$
16. $\frac{7}{12}+\frac{3}{8}-\frac{1}{20}$
17. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{20}$
18. $3+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$
19. $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}$
20. $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$
21. $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$

22. $3+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{7}{2}$

23. $\frac{7}{5}-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}-\frac{32}{20}$

24. $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

25. $4\frac{3}{10}-\frac{3}{5}$

26. $4\frac{1}{2}-6$

27. $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-2\frac{3}{4}$

28. $1\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

29. $4\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}+2$

30. $7\frac{1}{2}-1\frac{2}{5}+\frac{9}{10}$

31. $6\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}$

32. $3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}$

33. $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}+1\frac{1}{6}$

34. $1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}+1\frac{7}{12}$

35. $1\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-2\frac{1}{8}$

36. $1\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+2\frac{7}{12}-4+\frac{1}{3}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para preparar un pastel se emplean los siguientes ingredientes: $1\frac{1}{2}$ kg de harina, $\frac{1}{2}$ kg de huevo, una taza de leche que equivale a $\frac{1}{4}$ kg y azúcar $\frac{5}{8}$ kg. ¿Cuántos kilogramos pesan estos ingredientes?

**Solución**

Se suman los kilogramos de todos los ingredientes y se obtiene:

$$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{12+4+2+5}{8}=\frac{23}{8}=2\frac{7}{8}$$

Por consiguiente, los ingredientes pesan $2\frac{7}{8}$ kg

2 Miguel perdió $\frac{1}{3}$ de su dinero y prestó $\frac{1}{4}$. ¿Qué parte de su dinero le queda?

**Solución**

Se suma la porción que perdió con la que prestó y este resultado se resta a la unidad que representa lo que tenía.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12} \qquad 1-\frac{7}{12}=\frac{1}{1}-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$$

Por tanto, a Miguel le sobran $\frac{5}{12}$ de su dinero.

## EJERCICIO 35

Resuelve los siguientes problemas:

1. Juan compró en el supermercado $\frac{1}{2}$ kg de azúcar, $\frac{3}{4}$ kg de harina y 1 kg de huevo, estos productos los colocó en una bolsa, ¿cuántos kilogramos pesa dicha bolsa?
2. Dos calles tienen las siguientes longitudes: $2\frac{2}{5}$ y $1\frac{3}{4}$ de kilómetro, ¿cuál es la longitud total de ambas?
3. Al nacer un bebé pesó $2\frac{1}{4}$ kilogramos, en su primera visita al pediatra éste informó a los padres que el niño había aumentado $\frac{1}{2}$ kilogramo; en su segunda visita observaron que su aumento fue de $\frac{5}{8}$ de kilogramo. ¿Cuántos kilos pesó el bebé en su última visita al médico?

4. A Joel le pidieron que realizara una tarea de física que consistía en contestar un cuestionario y resolver unos problemas. Se tardó $\frac{3}{4}$ de hora en responder el cuestionario y $2\frac{1}{2}$ para solucionar los problemas, ¿cuánto tiempo le tomó a Joel terminar toda la tarea?
5. En su dieta mensual una persona debe incluir las siguientes cantidades de carne: la primera semana $\frac{1}{4}$ de kilogramo, la segunda $\frac{3}{8}$, la tercera $\frac{7}{16}$ y la última semana $\frac{1}{2}$ kilogramo. ¿Cuántos kilos consumió durante el mes?
6. Tres cuerdas tienen las siguientes longitudes: $3\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{10}$ y $4\frac{1}{2}$ metros, cada una. ¿Cuál es la longitud de las 3 cuerdas juntas?
7. La fachada de una casa se va a pintar de color blanco y azul, si $\frac{5}{12}$ se pintan de color blanco, ¿qué porción se pintará de color azul?
8. Un ciclista se encuentra en una competencia y ha recorrido $\frac{5}{9}$ de la distancia que debe cubrir para llegar a la meta, ¿qué fracción de la distancia total le falta por recorrer?
9. Un sastre realiza una compostura a un pantalón cuyo largo originalmente es de 32 pulgadas, si para hacer la valenciana se dobla hacia arriba $1\frac{3}{4}$ de pulgada, ¿de qué largo quedó el pantalón después de la compostura?
10. De una bolsa de 1 kilogramo de azúcar se extrae una porción que equivale a $\frac{3}{8}$ de kilogramo, ¿cuánta azúcar queda en la bolsa?
11. Un depósito contiene agua hasta $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad, si se ocupa una cantidad de agua equivalente a la mitad de la capacidad del depósito, ¿qué fracción de su máxima capacidad sobra?
12. Enrique vende $\frac{1}{4}$ de terreno de su finca, alquila $\frac{1}{6}$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca siembra?
13. De un rollo de tela se han cortado las siguientes porciones: $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$ de metro, ¿qué porción del rollo queda?
14. Luis, Jorge y Adán se organizan para realizar una tarea: Luis se compromete a hacer la mitad y Jorge hará la octava parte, ¿qué fracción de la tarea le corresponde a Adán?
15. Los $\frac{2}{5}$ de un terreno se venden, $\frac{1}{4}$ del resto se siembra de chile de árbol, ¿qué parte del terreno sobra?
16. $\frac{3}{10}$ de los alumnos de una escuela están en cuarentena debido a que se encuentran enfermos de sarampión, además $\frac{1}{5}$ de la población escolar llega tarde y las autoridades no les permiten la entrada. ¿Qué porción de alumnos asistió a la escuela?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Multiplicación

Para realizar esta operación se multiplican los numeradores y los denominadores. En caso de que existan fracciones mixtas, se deben convertir a fracciones impropias y posteriormente realizar los productos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}$.

**Solución**

Se aplica el procedimiento descrito y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2\times1}{5\times6}=\frac{2}{30}=\frac{2\div2}{30\div2}=\frac{1}{15}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{1}{15}$

2 ¿Cuál es el resultado de $3\frac{2}{4}\times4\frac{1}{6}$?

**Solución**

Se convierten las fracciones mixtas a impropias y se efectúa el producto.

$$3\frac{2}{4}\times4\frac{1}{6}=\frac{14}{4}\times\frac{25}{6}=\frac{350}{24}=\frac{350\div2}{24\div2}=\frac{175}{12}=14\frac{7}{12}$$

El resultado del producto es $\frac{175}{12}$ o $14\frac{7}{12}$

3 Realiza $\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times1\frac{1}{3}\times2$.

**Solución**

Se convierten las fracciones mixtas a impropias, se observa que existen factores iguales en el numerador y denominador, por lo tanto, es recomendable simplificar la expresión para obtener el resultado.

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times1\frac{1}{3}\times2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{3\times1\times4\times2}{4\times6\times3\times1}=\frac{1\times2}{6\times1}=\frac{2}{6}=\frac{2\div2}{6\div2}=\frac{1}{3}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{1}{3}$

## EJERCICIO 36

Efectúa los siguientes productos:

1. $\frac{2}{5}\times\frac{10}{8}$
2. $\frac{5}{4}\times\frac{2}{7}$
3. $\frac{3}{6}\times\frac{2}{9}$
4. $\frac{3}{4}\times\frac{6}{3}$
5. $\frac{3}{4}\times2\frac{3}{5}$
6. $3\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}$
7. $1\frac{2}{5}\times2\frac{5}{7}$
8. $\frac{6}{3}\times2\frac{1}{2}$
9. $1\frac{3}{5}\times4\frac{5}{8}$
10. $2\frac{2}{3}\times3\frac{1}{5}$
11. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$
12. $\frac{1}{5}\times\frac{9}{4}\times\frac{12}{6}$
13. $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$
14. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{5}$
15. $1\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}\times\frac{14}{2}$
16. $\frac{7}{9}\times\frac{8}{5}\times\frac{3}{14}\times15$
17. $2\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{1}{3}\times1\frac{3}{5}$
18. $\frac{2}{9}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{14}\times5$
19. $2\frac{4}{9}\times2\frac{1}{4}\times1\frac{3}{11}\times1\frac{1}{3}$
20. $2\times7\frac{3}{5}\times1\frac{6}{19}\times\frac{3}{4}$
21. $1\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times2\frac{2}{5}\times2\frac{1}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 En un grupo hay 40 alumnos, de ellos las tres quintas partes son mujeres, ¿cuántas mujeres hay en el grupo?

**Solución**

Para obtener el total de mujeres del grupo se multiplica el total de alumnos por la fracción que representan las mujeres.

$$40 \times \frac{3}{5} = \frac{40}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ mujeres}$$

Por consiguiente, hay 24 mujeres en el grupo.

2 Se realizó una encuesta para averiguar qué medios informativos se prefieren; de cada 10 personas, 4 prefieren el periódico; si se encuestó a 600 individuos, ¿cuántas prefieren otros medios?

**Solución**

La fracción $\frac{4}{10}$ representa a las personas que prefieren el periódico, por lo tanto, $\frac{6}{10}$ representa a las personas que prefieren otros medios, entonces, para obtener el número de personas que representa esta última fracción se multiplica por el total de la muestra.

$$\frac{6}{10} \times 600 = \frac{6}{10} \times \frac{600}{1} = \frac{3600}{10} = 360 \text{ personas prefieren otros medios.}$$

## EJERCICIO 37

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una alberca tiene capacidad para 3 000 litros de agua, si sólo se encuentra a tres cuartas partes de su capacidad, ¿cuántos litros tiene?
2. En un estadio de béisbol $\frac{2}{3}$ de los aficionados apoyan al equipo local, si el número de asistentes es de 6 300 personas, ¿cuántas apoyan al equipo visitante?
3. La tercera parte de una población de 2 100 habitantes es afectada por cierto virus, ¿cuántos habitantes no padecen el virus?
4. Se sabe que los viernes por la noche en el D.F. $\frac{1}{4}$ del total de automovilistas manejan en estado de ebriedad, si se realiza un sondeo entre 600 conductores un viernes por la noche, ¿cuántos automovilistas se espera que manejen en estado inconveniente?
5. En una caja hay 120 pelotas: verdes, rojas y azules, si las pelotas rojas son la tercera parte del total y las azules equivalen a la sexta parte, ¿cuántas hay de cada color?
6. El costo de un kilogramo de azúcar es de $8, ¿cuál es el precio de $3\frac{3}{4}$ kg?
7. Julián tenía $1 500, si compró 3 libros que le costaron dos quintas partes de su dinero, ¿cuánto le sobró?
8. La velocidad de un automóvil es de 100 kilómetros por hora, ¿qué distancia recorre en un tiempo de $2\frac{3}{4}$ horas?
9. Determina los dos tercios de los tres cuartos de la mitad de 240.

10. En un grupo de 60 alumnos, las dos terceras partes se inclinan por la física, de éstos, la mitad quieren ser físicos nucleares y la cuarta parte de ellos desea realizar una maestría en el extranjero. ¿Cuántos alumnos desean estudiar su maestría en otro país?

11. Si a 2 de cada 10 personas les gusta el rock, de una población de 4 500, ¿cuántas prefieren otros ritmos?

12. La recomendación de un doctor a un enfermo de gripe es que se tome $1\frac{1}{2}$ pastillas de ácido acetilsalicílico (aspirina) durante 4 días cada 8 horas, para contrarrestar los malestares de esta enfermedad infecciosa. Si el paciente sigue cabalmente las indicaciones del doctor, ¿cuántas pastillas de aspirina tomará?

13. Las calorías y los joules en la física son unidades de energía; además, se sabe que una caloría equivale a $\frac{21}{5}$ joules. ¿Cuánta energía en joules habrá en un alimento de 120 calorías?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## División

- Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el numerador de la fracción resultante.
- Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el producto es el denominador de la fracción resultante.

Para realizar esta operación:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

**EJEMPLOS**

1 Realiza $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$.

**Solución**

Se aplican los pasos y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}=\frac{10\div 2}{12\div 2}=\frac{5}{6}$$

Por tanto, $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{5}{6}$

2 Determina el resultado de $4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}$.

**Solución**

Se convierten las fracciones mixtas en impropias y se efectúa la división.

$$4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}=\frac{22}{5}\div\frac{11}{4}=\frac{22\times 4}{5\times 11}=\frac{88}{55}=\frac{88\div 11}{55\div 11}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

Por consiguiente: $4\frac{2}{5}\div 2\frac{3}{4}=1\frac{3}{5}$

# EJERCICIO 38

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\frac{1}{6}\div\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$
3. $\frac{6}{8}\div\frac{1}{4}$
4. $\frac{13}{9}\div\frac{4}{3}$
5. $\frac{5}{12}\div\frac{5}{6}$
6. $\frac{7}{8}\div\frac{21}{16}$
7. $\frac{4}{3}\div\frac{5}{30}$
8. $\frac{28}{7}\div\frac{4}{5}$
9. $\frac{4}{6}\div 1\frac{2}{3}$
10. $2\frac{2}{3}\div\frac{4}{15}$
11. $1\frac{4}{5}\div\frac{13}{10}$
12. $\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{4}$
13. $\frac{4}{9}\div 8$
14. $3\frac{1}{4}\div 26$
15. $1\div 1\frac{1}{4}$
16. $34\div 2\frac{5}{6}$
17. $\frac{11}{9}\div 3\frac{2}{3}$
18. $5\frac{1}{4}\div 1\frac{1}{6}$
19. $5\frac{5}{8}\div 3\frac{3}{4}$
20. $1\frac{11}{13}\div 8$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

¿Cuántas bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo se pueden llenar con 20 kilogramos de galletas?

**Solución**

Se dividen los 20 kilogramos entre la capacidad de las bolsas para obtener el número de las que se pueden llenar:

$$20\div\frac{5}{8}=\frac{20}{\frac{5}{8}}=\frac{\frac{20}{1}}{\frac{5}{8}}=\frac{20\times 8}{5\times 1}=\frac{160}{5}=32$$

Por tanto, con 20 kilos se pueden llenar 32 bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo.

# EJERCICIO 39

Resuelve los siguientes problemas:

1. El peso aproximado de una pizza familiar es de un kilogramo y si la pizza se divide en 8 porciones iguales, ¿cuánto pesa cada rebanada?
2. ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro se llenan con 60 litros de agua?
3. ¿Cuántas piezas de $2\frac{2}{3}$ de metro de longitud se obtienen de una varilla de $13\frac{1}{3}$ metros de largo?
4. Si una llave vierte $6\frac{1}{3}$ litros de agua por minuto, ¿cuánto tiempo empleará en llenar un depósito de $88\frac{2}{3}$ litros de capacidad?
5. ¿Cuál es la velocidad por hora de un automóvil que en $2\frac{1}{2}$ horas recorre 120 kilómetros?
6. Francisco compró $8\frac{2}{3}$ kilogramos de jamón con $156, ¿cuál es el costo de un kilogramo?
7. Una familia de 6 integrantes consume diariamente $1\frac{1}{2}$ litros de leche, si todos ingieren la misma cantidad, ¿cuánto toma cada uno?
8. Javier repartió 160 kilogramos de arroz entre un grupo de personas, de tal forma que a cada una le tocaron $6\frac{2}{3}$ kg, ¿cuántas personas eran?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Operaciones con signos de agrupación

Se realizan las operaciones que se encuentran dentro de un signo de agrupación, posteriormente éstos se suprimen, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$.

**Solución**

Se efectúan las operaciones que encierran los paréntesis, los resultados se multiplican por las cantidades de fuera y se simplifican para sumarse después y obtener el resultado final.

$$2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\left(\frac{5-2}{4}\right)+3\left(\frac{3-2}{6}\right)$$

$$=2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}$$

$$=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

El resultado de la operación es 2

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$?

**Solución**

Se efectúa la suma, el resultado se simplifica y después se realiza la división para obtener el resultado de la operación propuesta.

$$\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\left(\frac{2+1}{6}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\div\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}$$

$$=\frac{5\times 2}{4\times 1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{5}{2}$ o $2\frac{1}{2}$

3 Realiza $\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$.

**Solución**

Se realizan las restas, después la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{7}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{14-9}{12}\right)\left(\frac{5-2}{10}\right)$$

$$=\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{15}{120}=\frac{15\div 15}{120\div 15}=\frac{1}{8}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{1}{8}$

4 ¿Cuál es el resultado de $\left(1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$?

**Solución**

Se realizan las restas y posteriormente la división para obtener el resultado final.

$$\left(1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{8-5}{6}\right)\div\left(\frac{3-6}{8}\right)$$
$$=\frac{3}{6}\div\frac{-3}{8}=\frac{24}{-18}=-\frac{4}{3}$$

Por consiguiente, el resultado es $-\frac{4}{3}$

## EJERCICIO 40

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{3}{7}(2)-\frac{5}{14}(4)$
2. $\frac{3}{4}(3)+1\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{8}(4-2)+\frac{5}{16}(8-4)$
4. $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$
5. $\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)$
6. $\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}\right)$
7. $\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(3-2\frac{1}{2}\right)$
8. $\left(5\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{12}{17}\right)$
9. $\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{7}-\frac{3}{14}\right)$
10. $\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)$
11. $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{7}{10}\right)\div\left(\frac{3}{4}\right)$
12. $\left(1\frac{1}{9}\right)\div\left(4-2\frac{1}{3}\right)$
13. $\left(\frac{17}{22}+1\right)\div\left(2-\frac{9}{11}\right)$
14. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 La matrícula de una escuela aumentó $\frac{1}{4}$ con respecto al año pasado. Si había 400 alumnos, ¿cuántos alumnos hay este año?

**Solución**

Se obtiene la cuarta parte de 400: $\frac{1}{4}$ (400) y se suman los 400 alumnos del año pasado.

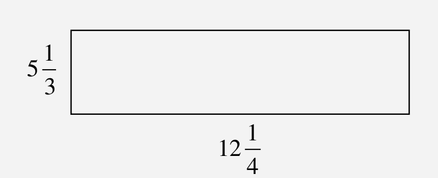
$$\frac{1}{4}(400)+400=\frac{400}{4}+400$$
$$=100+400$$
$$=500$$

Por tanto, hay 500 alumnos este año.

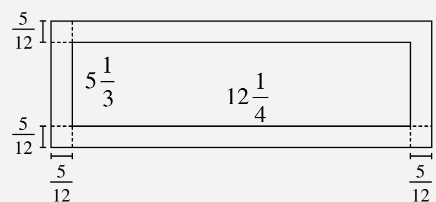
2 Una fotografía mide $5\frac{1}{3}$ pulgadas de ancho por $12\frac{1}{4}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{5}{12}$ pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

**Solución**

Fotografía:




Fotografía con marco




Entonces las dimensiones son:

ancho: $5\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{16}{3}+\frac{10}{12}=\frac{16}{3}+\frac{5}{6}=\frac{32+5}{6}=\frac{37}{6}=6\frac{1}{6}$ pulgadas.

largo: $12\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{49}{4}+\frac{10}{12}=\frac{49}{4}+\frac{5}{6}=\frac{147+10}{12}=\frac{157}{12}=13\frac{1}{12}$ pulgadas.

## EJERCICIO **41**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Se sabe que cuando un fluido se congela aumenta $\frac{1}{12}$ del volumen que ocupaba en su estado líquido, si una botella de agua tiene un volumen de 3 600 mililitros en su estado líquido, ¿cuál será el volumen del mismo fluido en estado sólido?
2. Agustín se ejercita caminando todas las tardes de la semana para mejorar su presión arterial, entre semana camina $\frac{1}{2}$ hora, mientras que el fin de semana camina $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuánto tiempo invierte Agustín en caminar?
3. Jorge y David deciden juntar parte de sus ahorros para comprar un nuevo juego de video, Jorge aporta $\frac{3}{5}$ de \$2 000 ahorrados, mientras que David decide aportar $\frac{1}{3}$ de \$3 000, ¿cuál fue el costo del juego de video?
4. Roberto divide su sueldo de la siguiente forma, $\frac{1}{3}$ a alimentación, $\frac{1}{2}$ al pago de renta y servicios y $\frac{1}{6}$ a diversión. Si Roberto percibe en un mes \$12 000, ¿cuánto dinero designa a cada rubro?
5. En una bodega hay 4 cajas de 20 bolsas de $\frac{1}{2}$ kilogramo de detergente, 6 cajas con 15 bolsas de $\frac{3}{4}$ de kilogramo y 3 cajas con 10 bolsas de un kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de detergente hay en la bodega?
6. En pruebas de manejo se ha detectado que por efecto del uso y del calor, la presión de los neumáticos de un automóvil aumenta $\frac{1}{14}$ con respecto a la presión que tienen si el automóvil se encuentra estático. ¿Cuál era la presión de unos neumáticos, que después de ser sometidos a una prueba de manejo registraron una presión de $30\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$?
7. Una fotografía mide $6\frac{1}{4}$ pulgadas de ancho por $10\frac{1}{2}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{3}{8}$ pulgadas, ¿cuáles son las nuevas dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Fracciones complejas

Se llama así a la fracción que está formada por una serie de operaciones subsecuentes con fracciones.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa $\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}}$.

**Solución**

Primero se efectúan las operaciones $1-\frac{3}{4}$ y $1+\frac{1}{8}$, sus resultados se dividen y se simplifican para obtener el resultado que se desea.

$$\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{4-3}{4}}{\frac{8+1}{8}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{8}}=\frac{8\times 1}{9\times 4}=\frac{8}{36}=\frac{8\div 4}{36\div 4}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{2}{9}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$?

**Solución**

Se inicia con la operación $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ y las subsecuentes hasta obtener el resultado.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2-1}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

Por tanto, el resultado que se buscaba es $\frac{1}{5}$

## EJERCICIO 42

Resuelve las siguientes fracciones complejas:

1. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{2}-3}}$

2. $1+\dfrac{2}{3+\frac{5}{1-\frac{1}{3}}}$

3. $3+\dfrac{2}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

4. $2-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$

5. $1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}}$

6. $\dfrac{\frac{2-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}+\frac{1+\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}}{1-\frac{1}{2}}\times\dfrac{9}{40}$

7. $\dfrac{\dfrac{1+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}}{1+\frac{2}{3}}\times\left(10\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}\right)$

10. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}}}}$

13. $\dfrac{\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1+\dfrac{2}{2-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1-\dfrac{2}{1+\frac{1}{2}}}}{7+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{7}{6}}}}$

8. $\dfrac{\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}+\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}-\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{10}}}{\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$

11. $\dfrac{\dfrac{3-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{2-\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}}{3-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{25}\right)$

14. $\dfrac{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+2}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}}$

9. $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}+\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}}{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}}$

12. $\dfrac{\dfrac{2+\frac{1}{3}}{7}+\dfrac{1-\frac{1}{4}}{3}}{\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}}\times\left(\frac{2}{7}\div\frac{4}{19}\right)$

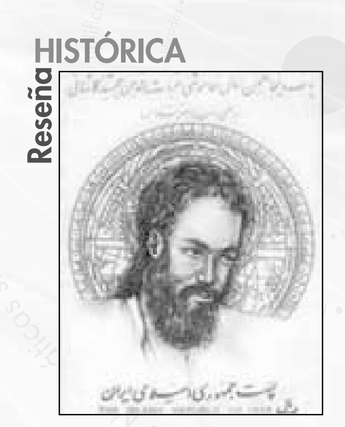
15. $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 5

## NÚMEROS DECIMALES

**Reseña HISTÓRICA**



Al-Kashi (n. 1380) contribuyó al desarrollo de las fracciones decimales no sólo para aproximar números algebraicos, sino también para números reales como *pi*. Su aporte a las fracciones decimales es tan importante que por muchos años se le consideró su inventor. Sin embargo, en la década de los ochenta del siglo pasado se halló evidencia de que el empleo de fracciones decimales se remonta al siglo X en el Islam, por al-Uqlidisi; de hecho, el sistema de notación que empleó al-Uqlidisi era superior al de al-Kashi.

Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud
al-Kashi (1380-1450)

## Definición

Un **número decimal** o **fracción decimal** es el cociente de números racionales o el resultado de una fracción común. Existen dos tipos de números decimales, los exactos y los inexactos.

**Números decimales exactos.** Son aquellos que tienen un número finito de cifras decimales.

### Ejemplos

0.25, es un número de 2 cifras decimales
0.732, tiene 3 cifras decimales
2.1, tiene una cifra entera y una decimal

**Números decimales inexactos.** Son aquellos que tienen un número infinito de cifras decimales. En estos números, los puntos suspensivos indican que existe un número infinito de cifras o que el residuo de la división nunca es cero.

### Ejemplos

$$0.96525...,\quad 0.85858585...,\quad 6.333333...$$

- **Números decimales inexactos periódicos**

Decimal que tiene una o más cifras que se repiten indefinidamente después del punto o de una cierta cifra decimal. La cifra o cifras repetidas reciben el nombre de periodo.

### Ejemplos

Los decimales periódicos se expresan de la siguiente forma:

$0.33333... = 0.\overline{3}$, en este ejemplo el periodo consta de una cifra
$0.32565656... = 0.32\overline{56}$, el periodo es 56 y la parte no periódica es 32
$5.315024024024... = 5.315\overline{024}$, 5 es la parte entera, 315 la decimal y 024 el periodo

- **Números decimales inexactos no periódicos**

Decimal que no tiene un periodo. Estos números representan a los números irracionales (no se expresan como el cociente de 2 números enteros).

### Ejemplos

$$1.7320508... = \sqrt{3},\quad 3.141592654... = \pi,\quad 2.7182818... = e$$

## Lectura y escritura

Para leer o escribir números decimales, se toma como referencia la siguiente tabla.

| Unidades | | | Decimales | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centenas | Decenas | Unidades | Décimos | Centésimos | Milésimos | Diez milésimos | Cien milésimos | Millonésimos |

## EJEMPLOS

**1** Lee el número 0.18.

**Solución**

0.18 se acomoda de izquierda a derecha haciendo coincidir el cero con el periodo de las unidades.

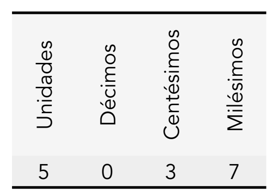
| Unidades | Décimos | Centésimos |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 8 |

El número dado está formado por 1 décimo y 8 centésimos, y se lee: "dieciocho centésimos".

**2** Lee el número 5.037.

**Solución**

5.037 se acomoda de izquierda a derecha haciendo coincidir al 5 con el periodo de las unidades.



| Unidades | Décimos | Centésimos | Milésimos |
|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 3 | 7 |

El número está formado por 5 unidades, 0 décimos, 3 centésimos y 7 milésimos. Se lee: "cinco enteros treinta y siete milésimos".

## EJERCICIO **43**

Lee los siguientes números:

1. 0.31
2. 1.098
3. 20.004
4. 2.809
5. 12.0915
6. 3.567
7. 13.0876
8. 0.00005
9. 245.06093
10. 2.040009
11. 18.040506
12. 342.000256

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Para expresar una cantidad numéricamente, se acomoda dicha cantidad en la tabla como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1 Escribe con número "un entero, veinticinco centésimos".

**Solución**

El número abarca hasta el periodo de los centésimos, se acomoda la cantidad en la tabla y queda expresada como:

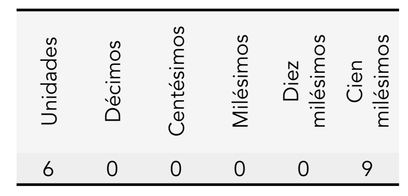
| Unidades | Décimos | Centésimos |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |

un entero, veinticinco centésimos = 1.25

2 Expresa con número "seis enteros, nueve cien milésimos".

**Solución**

La cantidad de acuerdo con la tabla inicia en las unidades y termina en el periodo de los cien milésimos, por lo tanto se expresa como:



| Unidades | Décimos | Centésimos | Milésimos | Diez milésimos | Cien milésimos |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 |

seis enteros, nueve cien milésimos = 6.00009

## EJERCICIO **44**

Expresa con números las siguientes cantidades:

1. Cinco diez milésimos.
2. Cuarenta y ocho cien milésimos.
3. Seiscientos setenta y ocho diez milésimos.
4. Dos enteros cuatro décimos.
5. Seis enteros cuarenta y tres milésimos.
6. Cinco enteros veintinueve cien milésimos.
7. Treinta y dos mil quinientos veinticuatro cien milésimos.
8. Sesenta y seis cien milésimos.
9. Un entero cuatrocientos setenta y siete millonésimos.
10. Tres millonésimos.
11. Cuatrocientos setenta y dos enteros doscientos treinta y dos mil ciento un millonésimos.
12. Cuarenta y ocho enteros treinta mil doscientos quince millonésimos.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma y resta

Se acomodan los elementos de la operación en forma vertical con el punto decimal como referencia y se hacen coincidir las clases, para después efectuar las operaciones correspondientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de 2.0098 + 0.37 + 105.4056.

**Solución**

Se acomodan las cantidades de manera vertical y se efectúan las operaciones columna por columna de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r} 2.0098 \\ +\ \ 0.37 \\ 105.4056 \\ \hline 107.7854 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la operación es 107.7854

2 ¿Cuál es el resultado de 13.284 – 5.73?

**Solución**

Se acomodan los números y se efectúa la operación.

$$\begin{array}{r} 13.284 \\ -\ \ 5.73 \\ \hline 7.554 \end{array}$$

El resultado de la resta es 7.554

## EJERCICIO **45**

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 5.7 + 39.4 + 4.0318 + 21.68
2. 28.018 + 37.42 + 4.0318 + 3.028 + 5.084
3. 4.036 + 28.032 + 586.25 + 3 146.6 + 0.078
4. 481.08 + 0.216 + 39.5 + 26.49 + 0.8347
5. 8 576 + 0.3867 + 2.64 + 38 + 0.5643 + 213
6. 4.273 – 3.16
7. 12 – 8.963
8. 123.6504 – 98.45694
9. 400 – 278.00258
10. 5 276.2369 – 4 998.269889
11. $$\begin{array}{r} 3.08 \\ 48.047 \\ 6.8 \\ +\ \ 15.16 \\ 216.37 \\ 38.415 \\ \hline \end{array}$$
12. $$\begin{array}{r} 98.765 \\ 146.38 \\ 2.675 \\ +\ \ 36.4186 \\ 2.3 \\ 158.16 \\ \hline \end{array}$$

13. 
$$\begin{array}{r} 4\,897.08 \\ 38\,926.785 \\ +\ 4\,876.845 \\ 12\,000.009 \\ \hline \end{array}$$

14. 
$$\begin{array}{r} 396.086 \\ 4\,845.6 \\ 36.0876 \\ +\ 0.318 \\ 26.031 \\ 8\,216.208 \\ \hline \end{array}$$

15. 
$$\begin{array}{r} 86\,543.32 \\ 858\,796.076 \\ +\ 29\,198.007 \\ 938\,009.108 \\ \hline \end{array}$$

16. 
$$\begin{array}{r} 48.567 \\ -\ 38.3265 \\ \hline \end{array}$$

17. 
$$\begin{array}{r} 4\,875.0086 \\ -\ 2\,356.54 \\ \hline \end{array}$$

18. 
$$\begin{array}{r} 386.08 \\ -\ 28.00486 \\ \hline \end{array}$$

19. 
$$\begin{array}{r} 38\,654.032 \\ -\ 654.087 \\ \hline \end{array}$$

20. 
$$\begin{array}{r} 2\,384.6282 \\ -\ 1\,432.4908 \\ \hline \end{array}$$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Benito estudió 1.5 horas el lunes, 2.3 el martes, 1.25 el miércoles y una hora el jueves, ¿cuántas horas estudió para presentar su examen el viernes?

**Solución**

Para obtener el tiempo total que estudió se suman las horas que dedicó por día.

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 2.3 \\ +\ 1.25 \\ 1\phantom{.00} \\ \hline 6.05 \end{array}$$

Por consiguiente, Benito estudió 6.05 horas para preparar su examen.

2 Si un corredor recorre 3.75 km de una distancia de 5 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para finalizar la ruta?

**Solución**

Se efectúa la resta y se obtiene la distancia que falta por recorrer.

$$\begin{array}{r} 5.00 \\ -\ 3.75 \\ \hline 1.25 \end{array}$$

Por tanto, le faltan 1.25 km para terminar.

3 De una bolsa de azúcar de 3.00 kg, se extraen las siguientes cantidades: 0.50, 0.20 y 0.75 kilogramos, ¿qué cantidad queda en la bolsa?

**Solución**

Se suman las cantidades de azúcar que se extrajeron de la bolsa y el resultado se resta a los 3 kg.

$$\begin{array}{r} 0.50 \\ +\ 0.20 \\ 0.75 \\ \hline 1.45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.00 \\ -\ 1.45 \\ \hline 1.55 \end{array}$$

En la bolsa quedan 1.55 kg.

# EJERCICIO 46

Resuelve los siguientes problemas:

1. En el año 2000 el número de habitantes de una población fue de 1.8 millones, para el año siguiente su incremento fue de 0.25 millones y para el tercer año aumentó 0.75 millones, ¿cuántos habitantes había al final del año 2002?
2. Jerónimo se prepara para una competencia de atletismo: el lunes recorre 3.75 km, el martes 2.85, el miércoles 3.5, el jueves 3 y el viernes 2.95 km. ¿Qué distancia recorre durante los 5 días?
3. De un saco de arroz se han tomado 23.55 kg, después 15.85 kg y más tarde 24.525 kg, si el saco quedó vacío, ¿cuántos kilogramos del cereal contenía?
4. Los lados de un terreno hexagonal irregular miden: 8.65, 12.50, 13, 12, 9.35 y 10 metros, respectivamente. ¿Cuál es su perímetro?
5. Rodrigo pintó 4 habitaciones de una casa, en la primera utilizó 1.5 galones de pintura, 2.15 en la segunda, 1.85 en la tercera y 2 en la última. ¿Cuántos galones ocupó en total?
6. Un trailer se carga con las siguientes toneladas de productos: 8 toneladas de comestibles, 3.5 de herramientas y 7.25 de material para la construcción. ¿Cuál es el peso total en toneladas si la caja del remolque pesa 6 toneladas?
7. El registro de precipitación pluvial del segundo cuatrimestre del año en la selva de Chiapas es:mayo 11.4 centímetros, junio 12.6, julio 15.8 y en agosto 18.75. ¿Cuál fue la precipitación pluvial durante este periodo?
8. En un edificio existen 5 departamentos con un gasto promedio mensual de energía eléctrica de: en el departamento 1 se consumen 120.8 kilowatts; en el 2, 135.6; en el 3, 118.5; en el 4, 233.6, y en el 5, 160.7, ¿cuál es el consumo mensual de energía eléctrica en todo el edificio?
9. Tania fue al mercado y compró 2.5 kilogramos de papa, 1.5 kilogramos de aguacate, 0.50 kilogramos de limón y 6.5 kilogramos de naranja. ¿Cuál es el peso total de la mercancía que compró Tania?
10. Delia regularmente consume en el desayuno 120.7 calorías; durante el almuerzo 190.3; en la comida 258.3 y durante la cena 97.2. ¿Cuál es su ingesta calórica en un día?
11. Durante el recreo una niña consume: una torta de $18.50, un jugo de $8, una paleta de $3.80, caramelos de $6.70 y frituras de $5.50, ¿cuánto debe pagar por su consumo?
12. Para preparar un pastel se emplean estos ingredientes en kilogramos: 0.750 de harina, 0.200 de azúcar, 0.008 de royal y 3 huevos, cuyo peso es 0.065 cada uno. ¿En total cuánto pesa el pastel?
13. Las canciones del último disco de sencillos del “Marqués de la canción”, duran en minutos: 4.56, 3.58, 4.05, 3.51 y 4.12, ¿cuál es el tiempo total de duración de la obra musical?
14. Un ciclista ha recorrido 35.55 kilómetros de una ruta de 78 kilómetros, ¿qué distancia le falta por recorrer?
15. De 897.025 restar 587.995.
16. Restar 126.78 de 302.01.
17. De un depósito de agua que contiene 5 865.325 litros, se han extraído 1 457.348 litros, ¿cuánta agua queda?
18. Una computadora tiene un disco duro de 368 MB de memoria, si varios programas ocupan 128.75 MB, ¿qué cantidad de memoria está libre?
19. En un depósito de 2 500 litros de agua hay 2 llaves de salida. La primera desaloja 1 585.175 litros por hora y la segunda, 748.235 litros en el mismo tiempo, ¿cuántos litros quedan en el depósito después de una hora?
20. Julieta fue al supermercado y compró un desodorante de $23.81, una caja de pañuelos desechables de $17.55, una caja de cereal de $32.08 y una botella de agua de $5.40; si pagó con un billete de $100, ¿cuánto fue su cambio?
21. Una carrera ciclista consta de 3 etapas: en la primera se cubre una distancia de 125.50 kilómetros y la segunda de 183.75; si la distancia total que se debe cubrir es de 450 kilómetros, ¿cuál es la longitud de la última etapa?

22. Un atleta participa en la maratón de la Ciudad de México, la cual consta de 10 km; si este participante lleva recorridos 3 560 metros, ¿cuántos kilómetros le hacen falta para concluir la carrera? (Considera que 1 kilómetro equivale a 1 000 metros).

23. La estatura de Raquel es de 1.66 metros, mientras que la de Ana es de 1.27 metros. ¿Cuánto más alta es Raquel que Ana?

24. La distancia entre las ciudades de México y Morelia es aproximadamente de 380.65 kilómetros, ¿cuántos kilómetros le falta recorrer a un turista que viaja entre ambas capitales, si lleva recorridos 176.12 kilómetros?

25. Una persona tiene en su cuenta bancaria $12 359.32, si retira $2 000 y el banco le cobra una comisión de $5.50, ¿cuál es el saldo del cuentahabiente?

26. Un paciente vestido pesa 65.765 kilogramos, si el peso de la vestimenta es de 1.8 kilogramos, ¿cuál es su peso corporal?

27. ¿Qué número hay que sumar a 2 013.507 para que el resultado sea 2 147.25?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Multiplicación

Se efectúa igual que la multiplicación de números enteros. Para ubicar el punto decimal se cuentan las cifras que contengan ambos factores a la derecha del punto decimal, lo que indica el lugar que debe ocupar el punto decimal, de derecha a izquierda, en el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $23.87 \times 5.3$.

**Solución**

Se acomodan los factores en forma vertical y se realiza la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 23.87 \\ \times\ 5.3 \\ \hline 7161 \\ 11935\phantom{0} \\ \hline 126.511 \end{array}$$

Al contar las cifras que se encuentran a la derecha del punto decimal en los factores, se observa que son 3 cifras, entonces el punto decimal del resultado se coloca 3 lugares de derecha a izquierda. Por lo tanto, el resultado final es: 126.511

2 Realiza la siguiente operación: $3.002 \times 4.56$.

**Solución**

Se acomodan los factores en forma vertical y se multiplica.

$$\begin{array}{r} 3.002 \\ \times\ 4.56 \\ \hline 18012 \\ 15010\phantom{0} \\ 12008\phantom{00} \\ \hline 13.68912 \end{array}$$

Finalmente, el resultado de $3.002 \times 4.56 = 13.68912$

**Multiplicación por múltiplos de 10**

Cuando se multiplica una cantidad por un múltiplo de 10 (10, 100, 1 000, 10 000, …), el punto decimal se recorre hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el múltiplo de 10.

## Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $3.102 \times 100$?

### Solución

El múltiplo de 10 es 100 y está formado por 2 ceros, por lo tanto, el punto decimal se recorre 2 lugares a la derecha de su posición inicial y se obtiene como resultado:

$$3.102 \times 100 = 310.2$$

## EJERCICIO 47

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $4.56 \times 3.45$
2. $42.25 \times 6.2$
3. $328.654 \times 3.02$
4. $3\,425 \times 2.005$
5. $12\,572 \times 0.0025$
6. $20\,000 \times 0.00005$
7. $4.85 \times 10$
8. $28.05 \times 100$
9. $3.8436 \times 100$
10. $3.875 \times 1\,000$
11. $5.4 \times 1\,000$
12. $28.1367 \times 1\,000$

13. $\begin{array}{r} 58.608 \\ \times\, 2.007 \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 248.67 \\ \times\, 27.08 \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 465.67 \\ \times\, 3.8506 \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 4.656 \\ \times\, 100 \\ \hline \end{array}$

21. $\begin{array}{r} 48.26 \\ \times\, 1\,000 \\ \hline \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 56.865 \\ \times\, 217.8 \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 56.861 \\ \times\, 26.310 \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 73.05 \\ \times\, 10 \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{r} 216.5 \\ \times\, 100 \\ \hline \end{array}$

22. $\begin{array}{r} 386.2 \\ \times\, 1\,000 \\ \hline \end{array}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

¿Cuál es la superficie de un terreno rectangular de 30.45 m de largo y 12.52 m de ancho?

**Solución**

Para obtener el área o la superficie del terreno, se multiplica el largo por el ancho.

Al colocar el punto decimal se obtiene como resultado: 381.2340,

$$\begin{array}{r} 30.45 \\ \times\ 12.52 \\ \hline 6090 \\ 15225\phantom{0} \\ 6090\phantom{00} \\ 3045\phantom{000} \\ \hline 381.2340 \end{array}$$

Por tanto, la superficie del terreno es de: 381.2340 $m^2$.

## EJERCICIO 48

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una pintura tiene un costo de $25.75 el litro, una persona compra 48 litros, ¿cuánto es lo que paga?
2. Si 57 litros de aceite tienen un costo de $1 850 y se vende el litro a $45.80, ¿de cuánto es la ganancia?
3. Un automóvil viaja a 85.3 kilómetros por hora en una carretera, ¿qué distancia recorre en 6 horas?
4. La señora Alcántara dispone de $1 500 para surtir su despensa, de acuerdo con la siguiente lista: 6 kilogramos de azúcar le cuestan $15.50 cada uno, 4 kilogramos de arroz a $9.80 cada uno, 16 kilogramos de harina a $18.50 cada kilogramo, 5 paquetes de jabón a $8 cada paquete. ¿Cuánto dinero le queda después de la compra?
5. Una familia de 6 personas asiste a un espectáculo y cada una de ellas realiza los siguientes gastos: $12.25 de pasaje, $53.50 de comida y $150 por boleto de entrada, ¿cuánto se gastaron en total?
6. Un grupo de 250 empleados asiste a un banquete y cada cubierto tiene un costo de $180.75, ¿cuánto debe pagarse al restaurante?
7. ¿Cuál es el área de un terreno rectangular que tiene de largo 45.30 metros y de ancho 26.45 m?
8. En una construcción se emplean 38 hombres, cada uno de ellos recibe $150.80 diarios. Si el trabajo dura 25 días, ¿a cuánto asciende la nómina total y por persona, durante ese lapso?
9. Si una librería vende durante un día 35 libros de $180.50 cada uno, 56 ejemplares más de $97.50 el ejemplar y 125 volúmenes de $65 por libro, ¿a cuánto asciende su venta?
10. Los nutriólogos recomiendan que una persona debe tomar en promedio 2.5 litros de agua en un día, para que esté bien hidratada. ¿Cuántos litros de agua debe tomar una persona en un mes para que cumpla con una buena hidratación? (Considera un mes igual a 30 días).
11. Un carpintero desea saber, ¿a cuántos centímetros equivalen 20 pulgadas? (Considera una pulgada equivalente a 2.54 centímetros).
12. A un paciente con hipertensión arterial se le recomienda que tome 1.5 pastillas diarias de un fármaco llamado metildopa, el cual controla este mal. ¿Cuántas pastillas consumirá durante 15 días, si cumple con las indicaciones?
13. El volumen de una caja se obtiene de la multiplicación del largo por el ancho y por el alto. Si se tiene una caja con 30.48 centímetros de largo, 17.78 de ancho y 12.7 de alto, ¿cuál es el volumen?

14. Una escalera tiene 26 escalones y la separación que existe entre cada uno es de 0.28 metros, ¿qué tan alta es la escalera?

15. Una gasolinera cuenta con 6 bombas expendedoras de combustible, si cada bomba vende 800 litros diarios y el litro de gasolina es de $7.40, ¿cuál es su ingreso en un día?

16. El costo del pasaje en el metrobús es de $3.50 por persona, si cada camión tiene una capacidad máxima de 82 personas, ¿cuál es el ingreso de un autobús, si éste va totalmente lleno?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## División

### División de un número decimal entre un número entero

Primero se divide la parte entera entre el divisor. Al llegar al punto decimal, éste se sube al cociente y se continúa la operación como si fueran números enteros. Las cifras subsecuentes del cociente quedarán después del punto decimal. Si la parte entera es menor que el divisor, entonces la primera cifra del cociente queda inmediatamente después del punto decimal.

**Ejemplo**

Obtén el cociente de 38.316 entre 17.

**Solución**

Al efectuar los pasos descritos, se obtiene el resultado de la división.

```
     2.253
17 | 38.316
     4 3
     0 91
       066
        15
```

Por tanto, el cociente es 2.253 y el residuo 0.015

### División de un número entero entre un número decimal

Se multiplica el divisor por 10, 100, 1 000, …, según se necesite para hacerlo entero, esta cantidad por la que se multiplicó el divisor también se multiplica por el dividendo. Y posteriormente se efectúa la división.

**Ejemplo**

Divide 325 entre 0.16.

**Solución**

Se multiplica a 325 y 0.16 por 100:

$$0.16 \times 100 = 16 \text{ y } 325 \times 100 = 32\,500$$

Entonces el cociente de 325 entre 0.16 se convierte en la división de 32 500 entre 16

```
     2 031.25
16 | 32 500
     0 50
       020
        040
         080
          00
```

Por tanto, el resultado de la división es igual a: 2 031.25

## EJERCICIO 49

Efectúa las siguientes divisiones hasta con 3 decimales:

1. 58.76 entre 12
2. 38.25 entre 216
3. 49 364 entre 12
4. 5 867.56 entre 39.6
5. 23.56 entre 10
6. 1 entre 0.005
7. 125 entre 1.25
8. 368.5476 entre 480.5
9. 1 276 entre 0.25
10. 4.008 entre 0.016
11. 658.23 entre 217
12. 4 entre 0.26
13. 4.5 entre 0.28
14. 8.46 entre 0.07
15. 38 entre 0.175
16. 38 entre 2.6
17. 496.5 entre 2.086
18. 7 856.421 entre 1 315

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un empleado percibe $3 850.20 por 6 días de trabajo. ¿Cuál es su salario por día?

**Solución**

Para obtener el salario por día del empleado, se divide el sueldo que percibe entre los 6 días de trabajo.

```
   641.70
6 |3 850.20
   25
    10
     4 2
       00
```

Por consiguiente, el salario diario del empleado es de $641.70

## EJERCICIO 50

Resuelve los siguientes problemas:

1. El precio de un artículo es de $6.25 y se pagaron $143.75 por varios de ellos, ¿cuántos se adquirieron?
2. El precio de 385 artículos comerciales es de $1 232. ¿Cuál es el precio unitario?
3. Un metro de tela tiene un precio de $15.25, si se compra un rollo de dicha tela en $915, ¿cuántos metros tiene?
4. Si se desea embotellar 4 500 litros de refresco en envases de 0.75 litros de capacidad, ¿cuántos envases se necesitan?
5. Para embotellar 847 litros de refresco se emplearon 484 botellas. ¿Cuál es la capacidad de cada una de ellas?
6. Si un automóvil recorre 850 kilómetros en 12.5 horas, ¿cuál es su velocidad?
7. Un rectángulo tiene una superficie de 60.5 $cm^2$, si su ancho mide 5 cm, ¿cuánto mide su longitud?
8. Las temperaturas que se registraron durante la semana fueron: 22.5, 18.6, 20.1, 23.4, 28, 24.2 y 23.7 grados Celsius. ¿Cuál fue el promedio de temperatura?
9. Un grupo de 42 personas va de excursión a un zoológico y en la taquilla pagan $2 457. ¿Cuál es el costo de entrada por persona?

10. Aurelio pagó $94.50 en una sala de videojuegos, en donde por esa cantidad le dieron 21 fichas para jugar. ¿Cuál es el precio que pagó por cada ficha?
11. Un sanitario es abastecido por un tinaco, cuya capacidad es de 300 litros de agua; si cada descarga del líquido es de 12.5 litros, ¿para cuántas descargas alcanza el agua?
12. Un libro que contiene 200 páginas tiene 2.5 centímetros de grosor. ¿Cuál es el grueso de cada una de sus hojas? No consideres las pastas.
13. Una naranja tiene un peso aproximado de 0.125 kilogramos, ¿cuántas naranjas habrán en una tonelada, si se considera el mismo peso para cada una?
14. El ingreso durante un día en una caseta de la autopista México-Querétaro es de $98 439; si por esta caseta cruzan 1 254 automóviles, ¿cuál es el costo de peaje por automóvil?
15. ¿Por cuál número hay que multiplicar 125.42 para que el resultado sea 2 676.4628?
16. Un empleado gubernamental percibe quincenalmente $6 641.25 por concepto de su salario. ¿Cuál es su sueldo diario?
17. Un contratista pagó por un pedido de ladrillo $29 767.50, si cada millar cuesta $850.50, ¿cuántos millares de material compró?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1** Un carpintero compra 2 kilogramos de clavos, 3 kilos de tornillos y 10 piezas de lijas, si el kilogramo de clavos tiene un costo de $12.50, el de tornillos de $14.25 y cada pieza de lija cuesta $2.25, ¿cuánto pagó en total?

**Solución**

Se calculan los precios de cada artículo y se suman para obtener el costo total.

| Clavos | Tornillos | Lijas | Costo total |
|---|---|---|---|
| 12.50 × 2 = $25.00 | 14.25 × 3 = $42.75 | 2.25 × 10 = $22.50 | 25.00 + 42.75 + 22.50 = $90.25 |

Por consiguiente, el carpintero pagó $90.25

**2** Cuatro amigos compraron en el supermercado 3 refrescos de $14.50 cada uno, 2 bolsas grandes de papas de $28.50 cada una, 3 bolsas de cacahuates de $6.75 cada una, un paquete de vasos desechables de $9.25 y un paquete de platos de $18, si el gasto se lo repartieron en partes iguales, ¿cuánto le tocó aportar a cada uno?

**Solución**

Se calcula el gasto total y se divide entre 4 para obtener la cantidad que deben aportar individualmente los amigos.

| Refrescos | Papas | Cacahuates | Vasos y platos | Total | División |
|---|---|---|---|---|---|
| 14.50 × 3 = $43.50 | 28.50 × 2 = $57.00 | 6.75 × 3 = $20.25 | 9.25 + 18.00 = $27.25 | 43.50 + 57.00 + 20.25 + 27.25 = $148.00 | 148.00 ÷ 4 = 37.00; 28; 0 00 |

Por consiguiente, a cada uno de los amigos le corresponde aportar $37

3 Javier y sus 4 amigos deciden ir a ver un partido de futbol. Para llegar toman diversos transportes que cobran por persona: \$4.50, \$2.50 y \$3.50. Si Javier pagó los pasajes con un billete de \$100, ¿cuánto le sobró?

**Solución**

Se suman los pasajes de cada persona y se multiplican por 5, el resultado se resta a \$100 y se obtiene el dinero que le sobró a Javier.

| Pasajes por persona | Total de pasajes | Cambio de Javier |
|---|---|---|
| 4.50 | | |
| + 2.50 | 10.50 | 100.00 |
| 3.50 | × 5 | − 52.50 |
| \$10.50 | \$52.50 | \$47.50 |

Por tanto, a Javier le sobraron \$47.50

## EJERCICIO 51

Resuelve los siguientes problemas:

1. Lourdes necesita fotocopiar unos manuales que contienen 180 hojas en tamaño carta y 250 hojas en tamaño oficio. El costo por fotocopia en tamaño carta es de \$0.20, mientras que la de tamaño oficio es de \$0.25. Si Lourdes paga con un billete de \$200, ¿cuánto dinero va a recibir de cambio?
2. Rebeca surte una lista de útiles escolares que contiene 5 libros, cuyo precio unitario es \$30.50, 6 lápices de \$5.60 por unidad, 3 plumas de las cuales cada pieza cuesta \$6.20 y además un millar de hojas de \$105, ¿cuánto pagó Rebeca en total?
3. Elizabeth rompe su alcancía y se da cuenta de que tiene 16 monedas de \$10, 13 de \$5, 42 de \$2, 33 de \$1, 15 monedas de \$0.50 (50 centavos) y 16 de \$0.20 (20 centavos). ¿Cuál es el monto de su ahorro?
4. Las calificaciones de Héctor son: matemáticas 8.5, español 9.0, geografía 8.2, literatura 7.5, física 8.4 y química 9.4. ¿Cuál es el promedio de sus calificaciones?
5. El perímetro de un rectángulo se define como el doble de la suma de la longitud del largo más el ancho. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo cuyo largo es 13.456 centímetros y ancho 8.044 centímetros?
6. En una tienda departamental se lleva a cabo una campaña de beneficencia por parte de una fundación civil. Ésta consiste en redondear las cuentas de los clientes, pero además por cada peso y centavo que aporta una persona la fundación pone la misma cantidad de dinero que el cliente. Si un cliente consume en la tienda \$425.82 y decide voluntariamente redondear su cuenta a \$430, ¿cuál es el monto total de lo aportado a dicha labor altruista?
7. Un vagón de tren vacío pesa 6 425 kilogramos, si este vagón se carga con 3 contenedores, cuyo peso unitario es de 845.75 kilogramos y con 2 cilindros de combustible que pesan 650.8 kilogramos, ¿cuál es el peso del vagón ya cargado?
8. Un metal sufre una deformación llamada dilatación al ser expuesto durante largos periodos al calor. Si una vía de ferrocarril mide 6.32 centímetros de ancho y se expande una décima parte, ¿cuál será su ancho en un día extremadamente caluroso?
9. Un regalo es empacado en una caja de cartón, cuyo peso es de 25.2 gramos y después se envuelve en un papel de terciopelo que pesa 6.37 gramos. Si todo el paquete pesa 800 gramos, ¿cuál es el peso del regalo?
10. Cuando un comerciante compra 50 juguetes, le cobran 15 centésimos extra del costo total por concepto de impuestos; si el pago fue de \$2 541.50 incluyendo los impuestos, ¿cuál es el costo de cada uno de los juguetes?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Conversiones

Cualquier fracción común puede representarse como un número decimal y viceversa. A continuación se explican y ejemplifican las diferentes formas.

Dada la fracción común, para convertirla en número decimal se divide el numerador entre el denominador.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Convierte $\frac{3}{4}$ a número decimal.

**Solución**

Se efectúa la división y se obtiene el número decimal.

$$\begin{array}{r|l} & 0.75 \\ 4 & 3.00 \\ & 20 \\ & 0 \end{array}$$

Por tanto, $\frac{3}{4} = 0.75$

2 Convierte $1\frac{2}{3}$ a número decimal.

**Solución**

Se transforma la fracción mixta en impropia $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, se efectúa la división para obtener el resultado.

$$\begin{array}{r|l} & 1.666 \\ 3 & 5.000 \\ & 2\;0 \\ & 20 \\ & 20 \\ & 2 \end{array}$$

Esta fracción representa un decimal periódico, por lo tanto, $1\frac{2}{3} = 1.666... = 1.\overline{6}$

## EJERCICIO 52

Convierte a número decimal las siguientes fracciones:

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{5}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{2}{5}$
5. $\frac{5}{4}$
6. $\frac{3}{5}$
7. $\frac{9}{6}$
8. $\frac{1}{10}$
9. $\frac{3}{8}$
10. $1\frac{4}{5}$
11. $1\frac{5}{8}$
12. $2\frac{5}{16}$
13. $1\frac{9}{10}$
14. $3\frac{5}{11}$
15. $2\frac{7}{8}$
16. $4\frac{7}{12}$
17. $3\frac{8}{25}$
18. $4\frac{7}{30}$
19. $5\frac{11}{30}$
20. $7\frac{5}{18}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Para convertir un número decimal exacto a fracción común, se colocan los denominadores 10, 100, 1 000, …, según corresponda la fracción decimal, el numerador se multiplica por la misma cantidad colocada en el denominador y la fracción resultante se simplifica, de ser posible.

## EJEMPLOS

1 Expresa en fracción común 0.5.

**Solución**

La fracción decimal corresponde a cinco décimos, por lo tanto, se multiplica y divide por 10

$$0.5 = \frac{0.5 \times 10}{10} = \frac{5}{10} = \frac{5 \div 5}{10 \div 5} = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, $0.5 = \frac{1}{2}$

2 Expresa en fracción común 0.003.

**Solución**

El número es tres milésimos, entonces se multiplica y divide por mil.

$$0.003 = \frac{0.003 \times 1000}{1000} = \frac{3}{1000}$$

La fracción resultante no se puede simplificar, por lo tanto, $0.003 = \frac{3}{1000}$

3 Expresa en fracción común 1.75.

**Solución**

Se multiplica y divide por 100 ya que la fracción decimal corresponde a setenta y cinco centésimos.

$$1.75 = \frac{1.75 \times 100}{100} = \frac{175}{100} = \frac{175 \div 25}{100 \div 25} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

El resultado es $\frac{7}{4}$ o $1\frac{3}{4}$

## EJERCICIO 53

Convierte las siguientes fracciones decimales a fracciones comunes.

1. 0.20
2. 0.33
3. 0.25
4. 0.44
5. 0.66
6. 1.5
7. 2.75
8. 3.08
9. 0.005
10. 1.346

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Para convertir un número decimal periódico a una fracción común se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{Número decimal periódico} = \frac{R - v}{10^h - 10^c}$$

Donde:

$R$: es el entero que resulta de recorrer el punto decimal hasta la última cifra del periodo.

$h$: lugares recorridos para obtener $R$.

$v$: es el entero que resulta de recorrer el punto hasta una cifra antes del periodo.

$c$: lugares recorridos para obtener $v$.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $0.\overline{3}$ a fracción común.

**Solución**

Al asignar los valores respectivos a cada uno de los términos.

$$R = 3,\ h = 1,\ v = 0 \text{ y } c = 0$$

Al sustituir, se obtiene:

$$0.\overline{3} = \frac{3-0}{10^1 - 10^0} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$

2 Convierte $5.3\overline{52}$ a fracción común.

**Solución**

Al asignar los valores a cada uno de los términos en la fórmula:

$$R = 5\,352,\ h = 3,\ v = 53,\ c = 1$$

Al sustituir, se obtiene:

$$5.3\overline{52} = \frac{5\,352 - 53}{10^3 - 10^1} = \frac{5\,299}{1000 - 10} = \frac{5\,299}{990}$$

El resultado de la conversión es: $5.3\overline{52} = \frac{5\,299}{990} = 5\frac{349}{990}$

La fórmula para convertir una fracción decimal periódica a fracción común, también se emplea para convertir una fracción decimal exacta a fracción común, donde el periodo de la función es cero.

## Ejemplos

$$0.36 = 0.36\overline{0}, \quad 1.375 = 1.375\overline{0}, \quad 0.0024 = 0.0024\overline{0}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte el número 0.25 a fracción común mediante la fórmula.

**Solución**

La fracción decimal es exacta, para que sea una fracción periódica agregamos un cero periódico, esto es, $0.25\overline{0}$ y de este número obtenemos valores.

$$R = 250,\ h = 3,\ v = 25 \text{ y } c = 2$$

Al sustituir en la fórmula:

$$0.25\overline{0} = \frac{250-25}{10^3-10^2} = \frac{225}{1\,000-100} = \frac{225}{900} = \frac{225 \div 225}{900 \div 225} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, $0.25 = \frac{1}{4}$

Si el periodo en una cifra es el número 9, dicha cifra se redondea al siguiente número decimal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $0.2\overline{9}$ a fracción común.

**Solución**

Se asignan los valores a las variables de la fórmula.

$$R = 29,\ h = 2,\ v = 2 \text{ y } c = 1$$

Al sustituir los valores, se determina que:

$$0.2\overline{9} = \frac{29-2}{10^2-10^1} = \frac{27}{100-10} = \frac{27}{90} = \frac{27 \div 9}{90 \div 9} = \frac{3}{10}$$

El resultado de $0.2\overline{9} = \frac{3}{10}$, se observa que $0.2\overline{9}$ se redondea a $0.3 = \frac{3}{10}$

2 ¿Cuál es el resultado de convertir $1.\overline{9}$ a fracción común?

**Solución**

Se asignan los valores a las variables:

$$R = 19,\ h = 1,\ v = 1 \text{ y } c = 0$$

Al sustituir en la fórmula:

$$1.\overline{9} = \frac{19-1}{10^1-10^0} = \frac{18}{10-1} = \frac{18}{9} = 2$$

Por consiguiente, $1.\overline{9} = 2$

## EJERCICIO **54**

Convierte a fracción común las siguientes fracciones decimales.

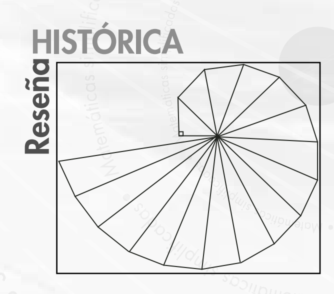
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. $0.\overline{8}$ | 3. $1.\overline{2}$ | 5. $0.\overline{2}$ | 7. $9.\overline{032}$ | 9. $5.\overline{19}$ |
| 2. $0.\overline{18}$ | 4. $4.\overline{21}$ | 6. $3.\overline{121}$ | 8. $3.12\overline{14}$ | 10. $3.\overline{47}$ |

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 6

## POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

**Reseña HISTÓRICA**



*El exponente*

El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, lo colocaba directamente al coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como $5^2$.

En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, salvo que utilizó números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$.

Sería Descartes quien sustituyó en su obra *Géométrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos. No deja de ser curioso, sin embargo, que para la potencia cuadrada no utilizase la notación elevada, sino que siguiese escribiendo, como muchos hasta entonces, $x^2$ como $xx$.

*El símbolo $\sqrt{\ }$ y los irracionales*

Al parecer fueron los griegos en el siglo V a. de C., los descubridores de la existencia de números no racionales. Este descubrimiento hizo tambalear uno de los principios de los pitagóricos, que consistía en considerar que la esencia de todas las cosas, tanto en la geometría como en los asuntos teóricos y prácticos del hombre, era explicable en términos de *arithmos*, es decir, de propiedades de los números enteros y de sus razones.

Puesto que la existencia de tales números era evidente, los griegos no tuvieron más remedio que aceptarlos con el nombre de irracionales.

De esta manera, el campo de los números se extendió para superar la incapacidad de los racionales para representar todas las medidas de magnitudes. En el siglo IX, el filósofo árabe al-Farabi generalizó el concepto de número a los racionales y a los irracionales positivos.

En 1525 el matemático alemán Christoph Rudolff introdujo el signo $\sqrt{\ }$ que indica la raíz cuadrada de un número. El mismísimo Euler conjeturó en 1775 que se trataba de una forma estilizada de la letra *r*, inicial del término latino *radix*, "radical".

Una construcción clásica que tiene que ver con los irracionales es la llamada espiral de Teodoro, la cual permite obtener las raíces cuadradas de los números enteros a partir de un triángulo rectángulo isósceles de lado 1.

La espiral de Teodoro es un método para construir geométricamente los segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$,... $\sqrt{17}$.

## Potenciación

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente. De lo anterior se define:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a...}_{n\text{-veces}}$, donde: $a$ es la base y $n$ el exponente.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $5^2$.

**Solución**

Al ser el exponente 2, la base 5 se debe multiplicar 2 veces ella misma:

$$5^2 = (5)(5) = 25$$

Por tanto, el resultado de $5^2 = 25$

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$?

**Solución**

La fracción se debe multiplicar 3 veces por ella misma.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

El resultado es $\dfrac{1}{8}$

3 Desarrolla $3^{-4}$.

**Solución**

Se aplica la definición y luego se desarrolla $3^4$ para obtener el resultado.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{(3)(3)(3)(3)} = \frac{1}{81}$$

Por consiguiente, $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$

Cuando un número negativo se eleva a una potencia par, el resultado es positivo, pero si se eleva a una potencia impar, el resultado es negativo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $(-6)^4$?

**Solución**

La potencia es par, por tanto, el resultado es positivo.

$$(-6)^4 = 6^4 = 1296$$

2 Efectúa $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

**Solución**

El exponente es impar, por consiguiente, el resultado será negativo.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

3 Desarrolla $(-4+1)^2$.

**Solución**

Se efectúa la operación encerrada en el paréntesis y después se resuelve la potencia para obtener el resultado.

$$(-4+1)^2 = (-3)^2 = 3^2 = 9$$

## EJERCICIO 55

Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(-4)^2$
2. $-5^6$
3. $(6)^{-4}$
4. $(-1)^8$
5. $(-9)^3$
6. $-2^{-5}$
7. $(-3)^4$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
9. $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$
10. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
11. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$
12. $\left(\frac{7}{3}\right)^3$
13. $\left(\frac{5}{9}\right)^5$
14. $-(1+2)^2$
15. $(3-1)^2$
16. $(5+11)^3$
17. $(0.5+3.8)^2$
18. $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^3$
19. $\left(5+\frac{1}{4}\right)^2$
20. $\left(\frac{1}{10}+1\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

### Teoremas

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

**Ejemplo**

Demuestra que se cumple $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$.

**Solución**

Se realiza la potenciación $2^3 \cdot 2^2 = (8)(4) = 32$ y $2^{3+2} = 2^5 = 32$

Por lo tanto, se demuestra que $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

**Ejemplo**

Demuestra que se cumple $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$.

**Solución**

Se realiza $\frac{3^5}{3^2} = \frac{243}{9} = 27$ y $3^{5-2} = 3^3 = 27$.

Se observa que ambos resultados son iguales, por lo tanto, se cumple que: $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$

- $\boldsymbol{a^0 = 1}$

**Ejemplo**

Demuestra que $7^0 = 1$.

**Solución**

Para esta demostración se emplea arbitrariamente que $1 = \frac{343}{343} = \frac{7^3}{7^3} = 7^{3-3} = 7^0$

Por consiguiente, $7^0 = 1$

- $\boldsymbol{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$

**Ejemplo**

Demuestra que $\left(4^3\right)^2 = 4^{(3)(2)}$.

**Solución**

Se realiza $\left(4^3\right)^2 = \left(64\right)^2 = 4\,096$, además $4^{(3)(2)} = 4^6 = 4\,096$

Por último: $\left(4^3\right)^2 = 4\,096 = 4^{(3)(2)}$

- $\boldsymbol{\left(a \cdot b \cdot c\right)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m}$

**Ejemplo**

Verifica que se cumple $\left(2 \cdot 3 \cdot 5\right)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

**Solución**

Se realiza el producto de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ y después se eleva $\left(30\right)^2 = 900$

Además: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$

Entonces, se cumple que $\left(2 \cdot 3 \cdot 5\right)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

- $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$

**Ejemplo**

Demuestra que se cumple $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$.

**Solución**

Primero se eleva $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$; por otro lado, $\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Entonces, se verifica que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

*Operaciones*

Son aquellas que se realizan con la aplicación de los teoremas de los exponentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la simplificación de $\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right)$.

**Solución**

La operación es una multiplicación, entonces los exponentes se suman:

$$\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right) = 2^{3+(-2)} \cdot 5^{-2+4} = 2^1 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$$

El resultado es 50

2 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}}$.

**Solución**

Se aplican los teoremas de exponentes:

$$\frac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}} = 2^{5-3} \cdot 3^{-4-(-3)} = 2^2 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Por tanto, el resultado de la expresión es $\dfrac{4}{3}$

3 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{27^2}{9^3}$.

**Solución**

En este ejercicio el 27 y el 9 se descomponen en factores primos para después aplicar los teoremas y finalmente obtener el resultado:

$$\frac{\left(3^3\right)^2}{\left(3^2\right)^3} = \frac{3^6}{3^6} = 3^{6-6} = 3^0 = 1$$

4 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2}$.

**Solución**

Se descomponen 6 y 9 en sus factores primos, se simplifica y se obtiene el resultado:

$$\frac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2} = \frac{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot \left(3^2\right)^2} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^4} = \frac{2^3 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^4} = 2^{3-3} \cdot 3^{5-4} = 2^0 \cdot 3^1 = 3$$

5 ¿Cuál es el resultado de $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$?

**Solución**

Se elevan ambas fracciones, se multiplican y posteriormente se dividen para obtener el resultado.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{3^{-3}}{2^{-3}} = \frac{3^{-3}}{3^2 \cdot 2^{-3}} = 3^{-3-2} \cdot 2^3 = 3^{-5} \cdot 2^3 = \frac{1}{3^5} \cdot 2^3 = \frac{8}{243}$$

6 Simplifica la expresión $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}$.

**Solución**

Se simplifica la operación que encierra el corchete y se eleva al exponente –2 para obtener el resultado final.

$$\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}=\left[\dfrac{\frac{1^3}{2^3}}{\frac{2^2}{3^2}}\right]^{-2}=\left[\frac{1^3\cdot 3^2}{2^3\cdot 2^2}\right]^{-2}=\left[\frac{3^2}{2^5}\right]^{-2}=\frac{\left(3^2\right)^{-2}}{\left(2^5\right)^{-2}}=\frac{3^{-4}}{2^{-10}}=\dfrac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{2^{10}}}=\frac{2^{10}}{3^4}=\frac{1024}{81}$$

Por tanto, el resultado final es $\dfrac{1024}{81}$

7 Simplifica $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}$.

**Solución**

En este ejercicio primero se aplica el teorema correspondiente a los números que se encuentran dentro del paréntesis, después se realizan las operaciones.

$$\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{2^3}{2^4}\right)^{-2}=\left(2^{-1}\right)^{-2}=2^2=4$$

Por consiguiente, $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}=4$

# EJERCICIO **56**

Simplifica las siguientes expresiones, emplea las definiciones y teoremas de los exponentes:

1. $5^2\cdot 5^2$
2. $3^{-5}\cdot 3^2$
3. $3^2\cdot 3^{-3}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$
4. $\left(2^7\cdot 3^{-4}\right)\left(2^{-5}\cdot 3^4\right)$
5. $\left(3^5\cdot 5^{-4}\right)\cdot\left(2^3\cdot 3^{-7}\cdot 5^6\right)$
6. $\left(4^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{-1}\cdot 3^{-\frac{7}{3}}\right)$
7. $4^2\cdot 2^3\cdot 8^2$
8. $\dfrac{6^7}{6^4}$
9. $\dfrac{5^8}{5^{10}}$
10. $\dfrac{3^{-6}}{3^{-10}}$
11. $\dfrac{5^4}{5^4}$
12. $\dfrac{2^7\cdot 3^{-5}}{2^5\cdot 3^{-4}}$
13. $\dfrac{3^5\cdot 4^{-6}}{3^7\cdot 4^{-8}}$
14. $\dfrac{7^5\cdot 3^3}{7^3\cdot 3^5}$

15. $\frac{2^{-8}\cdot 3^{5}\cdot 5^{-6}}{2^{-7}\cdot 3^{6}\cdot 5^{-5}}$

16. $\frac{2^{-4}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-6}}{2^{-6}\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-6}}$

17. $\frac{2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{7}{4}}\cdot 5^{-\frac{5}{2}}}$

18. $\frac{2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}\cdot 4^{2}}{2^{\frac{5}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{3}{2}}}$

19. $\frac{4^{-\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{8}}\cdot 6^{-3}}{4^{\frac{5}{6}}\cdot 9^{-\frac{5}{8}}\cdot 6^{-3}}$

20. $\frac{8^4}{4^4}$

21. $\frac{12^3\cdot 3^3}{6^3\cdot 2^2}$

22. $\left(2^2\right)^2$

23. $\left((-5)^2\right)^3$

24. $\left(-5^2\right)^3$

25. $(4^{\frac{1}{3}})^6$

26. $(5^{-\frac{1}{5}})^{-10}$

27. $(3\cdot 5)^2$

28. $\left(2^{-3}\cdot 3^2\right)^2$

29. $\left(2^4\cdot 3^{-6}\cdot 5^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

30. $\left(3^{-2}\cdot 5^2\right)^3\left(3^3\cdot 5^{-3}\cdot 7\right)^2$

31. $\left(\frac{2^2\cdot 3^5\cdot 4^2}{2^4\cdot 3^2}\right)^2$

32. $\left(\frac{2^{-1}\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{2^{-3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$

33. $\left(\frac{3^{-4}\cdot 5^{-1}}{3^2\cdot 5^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3^4\cdot 5^3}{3^2\cdot 5^4}\right)^{-1}$

34. $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

35. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^4$

36. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

37. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}$

38. $\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$

39. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^2$

40. $\left(-\frac{1}{3^{-3}}\right)^{-2}$

41. $\left(\frac{1}{2^{-3}}-\frac{1}{2^{-1}}\right)^{-3}$

42. $\left(\frac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Radicación

Operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando. Para lo anterior se define:

- $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, donde: $a$ es la base, $m$ el exponente y $n$ el índice.

**Ejemplo**

Verifica que se cumpla la igualdad $\sqrt[3]{8^2}=8^{\frac{2}{3}}$

**Solución**

Se descomponen ambas bases en factores primos y se aplica el teorema correspondiente de exponentes y la definición:

$$\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{\left((2)^3\right)^2}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4 \quad \text{además} \quad 8^{\frac{2}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$$

Se observa que los 2 resultados son iguales, entonces se demuestra que $\sqrt[3]{8^2}=8^{\frac{2}{3}}=4$.

Las raíces pares de números negativos no pertenecen al conjunto de los números reales ya que son cantidades imaginarias, las raíces impares de números negativos son negativas.

EJEMPLOS

1 Aplica la definición de radicación y calcula $\sqrt[4]{625}$.

**Solución**

Se descompone la base en factores primos y se aplica la definición para obtener el resultado final.

$$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5^{\frac{4}{4}}=5$$

2 Encuentra la raíz quinta de −1 024.

**Solución**

Se descompone −1 024 en sus factores primos y se aplica la definición:

$$\sqrt[5]{-1024}=-\sqrt[5]{1024}=-\sqrt[5]{2^{10}}=-2^{\frac{10}{5}}=-2^2=-4$$

Por consiguiente, el resultado es – 4

## Teoremas

Los teoremas de los exponentes también se aplican a radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

- $\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}=(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}\cdot c^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

EJEMPLOS

1 Aplica los teoremas de los exponentes y obtén el resultado de $\sqrt[3]{216}$.

**Solución**

Se descompone 216 en sus factores primos, se aplica el teorema correspondiente y la definición para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}=2^{\frac{3}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{3}}=2\cdot 3=6$$

Por tanto, $\sqrt[3]{216}=6$

2 ¿Cuál es el resultado de $\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)$?

**Solución**

Se descompone 125 es sus factores primos y el radical se expresa como exponente fraccionario, se aplican las leyes de los exponentes y se obtiene el resultado final.

$$\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)}\cdot 3^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=2^{-\frac{4}{4}}\cdot 3^{\frac{2}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{2}}$$
$$=2^{-1}\cdot 3\cdot 5=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5=\frac{15}{2}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$?

**Solución**

Se descompone la base en factores primos y se aplica el teorema de radicales para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{(3)(2)}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{6}{6}}=3$$

Por tanto, el resultado de la operación es 3

4 Simplifica la expresión $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}$.

**Solución**

Se transforman los radicales a exponentes fraccionarios y se realizan las operaciones con la aplicación de los respectivos teoremas.

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}+3}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2^{\frac{7}{4}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}}=2^{\frac{2}{2}}=2$$

Por último, el resultado es 2

# EJERCICIO 57

Aplica las definiciones y los teoremas de los exponentes y efectúa los siguientes ejercicios:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\sqrt{49}$ | 7. $\sqrt[4]{6\,561}$ | 13. $\sqrt[3]{-1\,728}$ |
| 2. $\sqrt{729}$ | 8. $\sqrt[5]{-243}$ | 14. $\sqrt[3]{3\,375}$ |
| 3. $\sqrt{289}$ | 9. $\sqrt{196}$ | 15. $\sqrt[3]{13\,824}$ |
| 4. $\sqrt[3]{-512}$ | 10. $\sqrt{441}$ | 16. $\sqrt[5]{7\,776}$ |
| 5. $\sqrt[4]{81}$ | 11. $\sqrt{576}$ | 17. $\sqrt[5]{248\,832}$ |
| 6. $\sqrt[4]{625}$ | 12. $\sqrt[3]{216}$ | 18. $\sqrt[5]{4\,084\,101}$ |

Simplifica las siguientes expresiones:

19. $\sqrt{2^2 \cdot 3^2}$
20. $\sqrt{5^2 \cdot 3^2}$
21. $\sqrt{5^2 \cdot 6^2 \cdot 3^4}$
22. $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9}$
23. $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$
24. $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^6 \cdot 3^3}$
25. $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 5^{10}}$
26. $\sqrt[6]{2^{12} \cdot 3^{24}}$
27. $\sqrt[3]{8^4 \cdot 4^3}$
28. $\dfrac{11^7 \cdot \sqrt{6}}{11^5 \cdot 6^{\frac{3}{2}}}$
29. $\sqrt{\dfrac{6^2}{3^2}}$
30. $\sqrt{\dfrac{2^2}{5^{-2}}}$
31. $\left(\sqrt{\dfrac{27}{125}}\right)\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}\right)$
32. $\left(\sqrt[8]{9}\right)^4$
33. $\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{25}\right)^2$
34. $\sqrt[3]{\sqrt{9^3}}$
35. $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$
36. $\sqrt{\dfrac{2^3 \cdot 5^5}{2^{-1} \cdot 5^3}} \cdot \left(\dfrac{2^4 \cdot 5^{-1}}{2^5 \cdot 5^{-1}}\right)$
37. $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt[12]{\dfrac{1}{27}}}$
38. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{10}}{2^{\frac{-5}{3}} \cdot 5^{\frac{-11}{3}}}}$
39. $\left(\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1} \cdot \sqrt{\dfrac{5^{-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$
40. $\sqrt{\dfrac{3^{-1} + 6^{-1}}{8^{-1}}}$
41. $\sqrt{\dfrac{1}{3^{-2}} + \dfrac{1}{2^{-4}}}$
42. $\sqrt{2^{-6} + 6^{-2}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Simplificación

Procedimiento que consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de la base debe ser mayor que el índice del radical.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica $\sqrt{8}$.

**Solución**

Se descompone el radicando en factores primos.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$$

$2^3$ se expresa como $2^2 \cdot 2$ y se aplica el teorema correspondiente de radicales.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por consiguiente, la simplificación de $\sqrt{8}$ es $2\sqrt{2}$

2 Simplifica $\sqrt{45}$.

**Solución**

Se descompone el radicando en factores primos y se procede a aplicar los teoremas.

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

3 Simplifica $\sqrt[3]{72}$.

**Solución**

Se descompone la base en factores primos y se simplifica la expresión.

$$\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{9}$$

El resultado es $2\sqrt[3]{9}$

4 Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$.

**Solución**

Se simplifica el radical y el resultado se multiplica por la fracción para obtener el resultado de la operación.

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{96} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3}$$

## EJERCICIO 58

Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{20}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt[3]{16}$
4. $\sqrt[3]{135}$
5. $\sqrt[3]{250}$
6. $\sqrt{162}$
7. $\sqrt{180}$
8. $2\sqrt[4]{405}$
9. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{686}$
10. $\frac{1}{3}\sqrt{540}$
11. $\frac{2}{5}\sqrt[4]{1250}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3600}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

### Suma y resta

Estas operaciones se pueden efectuar si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a+b-c)\ \sqrt[n]{d}$$

**EJEMPLOS**

1 Efectúa $2\ \sqrt[3]{5} + 11\ \sqrt[3]{5}$.

**Solución**

Los radicales son semejantes, por tanto se realizan las operaciones con los números que les anteceden (coeficientes del radical).

$$2\ \sqrt[3]{5} + 11\ \sqrt[3]{5} = (2+11)\sqrt[3]{5} = 13\sqrt[3]{5}$$

Entonces, el resultado es: $13\sqrt[3]{5}$

2 ¿Cuál es el resultado de la operación $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$?

**Solución**

Al ser semejantes los radicales, se efectúan las operaciones con los coeficientes.

$$3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (3+7-4)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

El resultado es: $6\sqrt{2}$

3 Efectúa $\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}$.

**Solución**

Se realizan las operaciones con las fracciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{6}=\frac{7}{12}\sqrt{6}$$

Si los radicandos son diferentes, no se pueden sumar o restar los radicales de primera instancia, entonces se simplifican; si resultan semejantes se efectúan las operaciones, de lo contrario, se dejan indicadas.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$?

**Solución**

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}=\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=(2+3-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt{5}$

2 Efectúa $\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}$.

**Solución**

Se simplifican los radicales, se realizan las operaciones y se obtiene el resultado final.

$$\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{3^3\cdot 7}+\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=3\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}=5\sqrt[3]{7}$$

3 Realiza $\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}$.

**Solución**

Se simplifican los radicales, se multiplican por las cantidades que les anteceden y se simplifican las fracciones:

$$\begin{aligned}\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}&=\frac{2}{15}\sqrt{3^4\cdot 5}-\frac{1}{6}\sqrt{2^6\cdot 2}-\frac{1}{10}\sqrt{5^2\cdot 5}+3\sqrt{2^4\cdot 2}\\&=\frac{2}{15}\left(3^2\sqrt{5}\right)-\frac{1}{6}\left(2^3\sqrt{2}\right)-\frac{1}{10}\left(5\sqrt{5}\right)+3\left(2^2\sqrt{2}\right)\\&=\frac{18}{15}\sqrt{5}-\frac{8}{6}\sqrt{2}-\frac{5}{10}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\\&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\end{aligned}$$

Se agrupan los radicales semejantes y se realizan las operaciones para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\\&=\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}+\left(12-\frac{4}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$

# EJERCICIO 59

Realiza las siguientes operaciones:

1. $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
3. $3\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$
4. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$
5. $4\sqrt{2}-9\sqrt{2}$
6. $7\sqrt{5}-3\sqrt{5}-6\sqrt{5}$
7. $\frac{5}{3}\sqrt[4]{7}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{7}$
8. $5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-16\sqrt[3]{2}$
9. $\frac{2}{5}\sqrt{6}+3\sqrt{6}-\frac{7}{4}\sqrt{6}$
10. $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
11. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$
12. $2\sqrt{5}+\sqrt{80}$
13. $4\sqrt{32}-7\sqrt{8}-3\sqrt{18}$
14. $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$
15. $3\sqrt{12}-2\sqrt{5}-7\sqrt{3}+\sqrt{125}$
16. $5\sqrt{8}-\sqrt{27}-\sqrt{32}+3\sqrt{3}+\sqrt{2}$
17. $4\sqrt{75}+6\sqrt{18}-\sqrt{128}-\sqrt{245}-\sqrt{98}-3\sqrt{125}$
18. $\sqrt{200}+\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{338}$
19. $\frac{1}{4}\sqrt{192}-\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$
20. $\frac{1}{22}\sqrt{605}+\frac{1}{30}\sqrt{1\,125}-\frac{1}{34}\sqrt{1\,445}$
21. $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}$
22. $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{192}$
23. $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$
24. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Multiplicación

**Multiplicación de radicales con índices iguales.** Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultado.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$.

**Solución**

Se multiplican ambos factores:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{(3)(5)}=\sqrt{15}$$

Por consiguiente, el resultado de la operación es $\sqrt{15}$

2 ¿Cuál es el resultado del producto $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$?

**Solución**

Se realiza el producto y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(6)(3)(2)}=\sqrt{36}=\sqrt{2^2\cdot 3^2}=\sqrt{2^2}\sqrt{3^2}=2\cdot 3=6$$

El resultado del producto es 6

3 Realiza $\left(2\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{10}\right)$.

**Solución**

Se multiplica y simplifica el resultado.

$$\left(2\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(3\sqrt[3]{10}\right)=6\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{10}=6\sqrt[3]{(4)(10)}=6\sqrt[3]{40}=6\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=6\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=6(2)\sqrt[3]{5}=12\sqrt[3]{5}$$

Por lo tanto, el resultado es $12\sqrt[3]{5}$

**Multiplicación de radicales con índices diferentes.** Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de "mínimo común índice".

## EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$ ?

**Solución**

El mínimo común índice es 6, entonces los índices de los radicales se convierten a dicho índice.

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\times 2]{(2)^2}=\sqrt[6]{2^2} \quad \text{además} \quad \sqrt{5}=\sqrt[2\times 3]{(5)^3}=\sqrt[6]{5^3}$$

Se efectúa el producto y se observa que no se puede simplificar el radical, por consiguiente se desarrollan las potencias y se realiza la multiplicación.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{2^2\cdot 5^3}=\sqrt[6]{4\cdot 125}=\sqrt[6]{500}$$

Finalmente, el resultado es $\sqrt[6]{500}$

2 Efectúa $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

**Solución**

Se descompone 8 en factores primos y el mínimo común índice es 4, por lo tanto, al transformar los radicales se obtiene:

$$\sqrt[2\times 2]{(2)^2}=\sqrt[4]{2^2} \quad \text{y} \quad \sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}$$

Se efectúa la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot 2^3}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$$

Finalmente, el resultado de la operación es $2\sqrt[4]{2}$

3 Multiplica $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$.

**Solución**

Se convierten los índices de los radicales a índice 8 y se realizan las respectivas operaciones.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[2\times 4]{2^4}\cdot\sqrt[4\times 2]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\cdot\sqrt[8]{2^4\cdot 2^2\cdot 2}=\sqrt[8]{2^7}=\sqrt[8]{128}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt[8]{128}$

# EJERCICIO 60

Realiza las siguientes multiplicaciones:

1. $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$
3. $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$
4. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}$
5. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{12}$
6. $\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
7. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$
8. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{27}$
9. $\left(3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{6}\right)\sqrt{12}$
10. $\left(2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{12}\right)\left(\frac{1}{12}\sqrt{18}\right)$
11. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)$
12. $\left(2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{20}\right)$
13. $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{9}$
14. $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{20}$
15. $\left(2\sqrt[3]{10}\right)\left(5\sqrt[3]{72}\right)$
16. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$
17. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}$
18. $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt{2}$
19. $\sqrt[5]{96}\cdot\sqrt[3]{3}$
20. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$
21. $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}$
22. $\sqrt[6]{6}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{6}$
23. $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12}\right)$
24. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{6}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## División

**División de radicales con índices iguales.** Para efectuar la división se aplica el siguiente teorema:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

**EJEMPLOS**

1 Realiza $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$.

**Solución**

Los radicales son de igual índice, entonces se dividen los radicandos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$$

El resultado de la operación es $\sqrt{5}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$?

**Solución**

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}=\frac{6\sqrt{2^2\cdot 7}}{\sqrt{3^2\cdot 7}}=\frac{6\sqrt{2^2}\sqrt{7}}{\sqrt{3^2}\sqrt{7}}=\frac{6(2)}{3}\sqrt{\frac{7}{7}}=\frac{12}{3}\sqrt{1}=4(1)=4$$

Por tanto, el cociente es 4

Para introducir una cantidad a un radical, se debe elevar la cantidad a un exponente igual al índice del radical.

**Ejemplo**

Realiza $\frac{\sqrt{48}}{2}$.

**Solución**

El divisor se expresa como $2=\sqrt{2^2}$ y se realiza la operación para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt{48}}{2}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{4}}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

**División de radicales con índices diferentes.** Se transforman los radicales a un índice común y después se realiza la división.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el cociente de $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$.

**Solución**

Se transforman los índices de los radicales a 12 y se realiza la operación.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[4\times 3]{\left(2^3\right)^3}}{\sqrt[3\times 4]{\left(2^2\right)^4}}=\frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}}=\sqrt[12]{2^{9-8}}=\sqrt[12]{2}$$

El resultado de la operación es $\sqrt[12]{2}$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}$?

**Solución**

Se divide cada término del numerador entre el denominador y se obtiene:

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{\sqrt[3\times 2]{(2\cdot 3)^2}}{\sqrt[2\times 3]{3^3}}=3\sqrt{4}+\frac{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2}}{\sqrt[6]{3^3}}$$

$$=3(2)+\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2}{3^3}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot 3^{-1}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot\frac{1}{3}}=6+\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

# EJERCICIO 61

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{5\sqrt{120}}{6\sqrt{40}}$
4. $\frac{7\sqrt{140}}{8\sqrt{7}}$
5. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$
6. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)\div\left(2\sqrt{2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\right)\div\left(2\sqrt[3]{2}\right)$
8. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$
9. $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{4}}$
10. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$
11. $\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{16}}$
12. $\frac{\sqrt[7]{6}}{\sqrt[14]{3}}$
13. $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
14. $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{6}}{\sqrt{2}}$
15. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$
16. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[5]{16}}{\sqrt{8}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Racionalización

Racionalizar es representar una fracción en otra equivalente que contenga una raíz en el numerador, cuyo numerador o denominador sea un número racional respectivamente.

**Racionalización del denominador.** Dada una expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$, se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}=\frac{c}{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Transforma $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en otra expresión equivalente que carezca de raíz en el denominador.

**Solución**

La fracción $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3^{2-1}}=\sqrt{3}$ tanto denominador como numerador.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, la expresión equivalente a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 Racionaliza la expresión $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

**Solución**

Se debe separar la expresión en raíces y se multiplican por $\sqrt{5^{2-1}}=\sqrt{5}$ tanto numerador como denominador, para obtener el resultado:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Finalmente, el resultado de la racionalización es $\frac{\sqrt{10}}{5}$

**Racionalización de un denominador binomio.** Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio $(a\pm b)$ y alguno o ambos elementos tienen una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado del binomio $(a\mp b)$.

$$\frac{c}{a\pm b}=\frac{c}{a\pm b}\cdot\frac{a\mp b}{a\mp b}=\frac{c\cdot(a\mp b)}{a^2-b^2}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Racionaliza la expresión $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$.

**Solución**

Se multiplica el numerador y el denominador de la expresión por $1-\sqrt{2}$, que es el conjugado del denominador $1+\sqrt{2}$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}}=\frac{3}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3-3\sqrt{2}}{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{1-2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{-1}=3\sqrt{2}-3$$

La expresión equivalente a la propuesta es $3\sqrt{2}-3$

2 Racionaliza la expresión $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

**Solución**

Se multiplica por el conjugado del denominador y se simplifica para obtener el resultado.

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{5-3}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{2}$$

3 Racionaliza $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

**Solución**

Se multiplica al numerador y denominador por $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, y se efectúa la simplificación.

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-2\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{18-\sqrt{6}-4}{12-2}=\frac{14-\sqrt{6}}{10}$$

## EJERCICIO 62

Racionaliza los siguientes denominadores:

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$
4. $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$
5. $\frac{12}{\sqrt{6}}$
6. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
7. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$
8. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$
9. $\frac{10}{\sqrt{20}}$
10. $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$
11. $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$
12. $\frac{8}{3+\sqrt{7}}$
13. $\frac{4}{\sqrt{6}+2}$
14. $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
15. $\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$
16. $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$
17. $\frac{1}{1-\sqrt{7}}$
18. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
19. $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
20. $\frac{2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**Racionalización de un numerador.** Dada una expresión de la forma $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}$, el numerador se racionaliza de la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador de $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

**Solución**

Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por $\sqrt{2^{2-1}}=\sqrt{2}$ y se obtiene el resultado.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2^2}}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

2 ¿Cuál es la expresión equivalente que resulta al racionalizar el numerador de $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}$?

**Solución**

Se multiplica por $\sqrt[4]{3^{4-1}} = \sqrt[4]{3^3}$ ambos elementos de la fracción para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{5 \cdot 3^3}} = \frac{3}{\sqrt[4]{5 \cdot 27}} = \frac{3}{\sqrt[4]{135}}$$

**Racionalización de un numerador binomio.** Para racionalizar un numerador binomio que contenga 1 o 2 raíces cuadradas en el numerador, se efectúa el mismo procedimiento que se empleó para racionalizar un denominador.

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \cdot \frac{a \mp b}{a \mp b} = \frac{a^2 - b^2}{c \cdot (a \mp b)}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador de $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

**Solución**

Se multiplican los elementos de la fracción por $1-\sqrt{2}$ que es el conjugado del numerador.

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{1-2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{-1}{3\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{-1}{3-3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}-3}$$

Por consiguiente, el resultado de la racionalización es $\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$

2 Racionaliza el numerador de $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

**Solución**

Se multiplica numerador y denominador por $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ que es el conjugado del numerador, se efectúan las multiplicaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}{4\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{15} + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4(3)-5}{4(3)-4\sqrt{15}+5}$$

$$= \frac{12-5}{12-4\sqrt{15}+5} = \frac{7}{17-4\sqrt{15}}$$

## EJERCICIO 63

Racionaliza el numerador en los siguientes radicales:

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
3. $\frac{1}{5}\sqrt{7}$
4. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
5. $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$
6. $\frac{3\sqrt[5]{2}}{4}$
7. $\sqrt{\frac{5}{12}}$
8. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$
9. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
10. $\frac{5+\sqrt{7}}{4}$
11. $\frac{2-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
13. $2-\sqrt{7}$
14. $3+\sqrt{5}$
15. $\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Raíz cuadrada

La raíz cuadrada es un número que multiplicado por sí mismo es igual al radicando.

**Radicando.** Es el número del que se desea obtener su raíz y se escribe dentro del símbolo $\sqrt{\ }$

**Algoritmo para el cálculo de la raíz cuadrada.** Para obtener la raíz cuadrada exacta o aproximada de un número se realiza el siguiente procedimiento:

### Ejemplo

Determina la raíz cuadrada de 426 409.

**Solución**

$\sqrt{42,64,09}$ Se divide el número dado en periodos de 2 cifras de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 6 \\ \hline -36 & \\ 6 & \end{array}$$

Se busca la raíz entera más próxima al primer periodo, en este caso es 6. Se anota a la derecha del radical y su cuadrado 36 se resta al primer periodo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 6 \\ -36 & 12 \\ 6\ 64 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 64. Se duplica 6 y el resultado 12 se coloca en el siguiente renglón.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 65 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & \end{array}$$

De 664 se separa el dígito 4 y el número que queda, 66, se divide entre 12 (66 ÷ 12 = 5), el cociente 5 se anota como la siguiente cifra en ambos renglones (si el cociente excede a 9, entonces se anota 9 o un número menor).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 65 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & \\ -6\ 25 & \\ 39 & \end{array}$$

Se multiplica 5 por el número que se encuentra en el segundo renglón 125, el producto 625 se resta a 664 (si el producto excede al número que está dentro del radical, entonces se prueba con un número menor).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42,64,09} & 653 \\ -36 & 125 \\ 6\ 64 & 1\ 303 \\ -6\ 25 & \\ 39\ 09 & \\ -39\ 09 & \\ 0 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 09, la raíz parcial 65 se duplica para obtener 130, para determinar la siguiente cifra de la raíz, se divide (390 ÷ 130 = 3), el cociente es la siguiente cifra de la raíz y también se coloca en el tercer renglón, a continuación se efectúa el paso anterior para obtener el resultado.

Por tanto, la raíz cuadrada de 426 409 es 653

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{345.7260}$?

**Solución**

$\sqrt{3,45.72,60}$ Se divide el número dado en periodos de 2 cifras de derecha a izquierda para la parte entera, y de izquierda a derecha para la parte decimal.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{3,45.72,60} & 1 \\ \hline -1 & \\ 2 & \end{array}$$

Se busca la raíz entera más próxima al primer periodo (en este caso 1). Se anota a la derecha del radical y su cuadrado 1 se resta al primer periodo.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{3{,}45.72{,}60} & 1 \\ -1 & 2 \\ \;\;2\,45 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 45. Se duplica 1 y el resultado 2 se coloca en el siguiente renglón.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{3{,}45.72{,}60} & 19 \\ -1 & 29 \\ \;\;2\,45 & \\ \;\;2\,61 & \end{array}$$

Se separa el último dígito 5 de la cifra 245 y el número que queda 24, se divide entre 2 (24 ÷ 2 = 12), el cociente 12 excede a 9, por consiguiente, se coloca 9 como segunda cifra en ambos renglones y se realiza el producto.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{3{,}45.72{,}60} & 18 \\ -1 & 28 \\ \;\;2\,45 & \\ -2\,24 & \\ \;\;\;\;21 & \end{array}$$

El producto 261 es mayor que 245, entonces se reemplaza a 9 por 8, y se multiplica por 28, el resultado 224 se resta a 245.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{3{,}45.72{,}60} & 18.59 \\ -1\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; & 28 \\ 2\,45\;\;\;\;\;\;\;\; & 365 \\ -2\,24\;\;\;\;\;\;\;\; & 3\,709 \\ 21\,72\;\;\;\; & \\ -18\,25\;\;\;\; & \\ 3\,47\,60 & \\ -3\,33\,81 & \\ 13\,79 & \end{array}$$

Se baja el siguiente periodo 72 que está después del punto decimal, la raíz parcial 18 se duplica para obtener 36 que se coloca en el tercer renglón; para determinar la siguiente cifra de la raíz, se divide (217 ÷ 36 = 6), pero el producto del cociente 6 por 366 es mayor que 2 172, por lo tanto, 5 es la siguiente cifra de la raíz que se coloca después del punto decimal a la derecha de 8 en la raíz parcial, y también en el tercer renglón, y se efectúan los mismos pasos hasta bajar el último periodo para obtener el resultado final.

Entonces, $\sqrt{345.7260} = 18.59$ con un residuo de 0.1379

## EJERCICIO 64

Obtén las siguientes raíces:

1. $\sqrt{225}$
2. $\sqrt{625}$
3. $\sqrt{729}$
4. $\sqrt{324}$
5. $\sqrt{23.43}$
6. $\sqrt{63.4365}$
7. $\sqrt{564.8}$
8. $\sqrt{324.542}$
9. $\sqrt{4\,321.87}$
10. $\sqrt{5\,432.65}$
11. $\sqrt{2\,343.659}$
12. $\sqrt{78\,588\,225}$
13. $\sqrt{61\,230\,625}$
14. $\sqrt{32\,381\,790.25}$
15. $\sqrt{18\,706\,749.52}$
16. $\sqrt{435\,573\,597.06}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**Raíz cuadrada (método babilónico).** Este método se basa en obtener por aproximación la raíz cuadrada del número propuesto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula la raíz cuadrada de 72 por medio del método babilónico.

**Solución**

$\frac{72}{8}=9$ Se busca un número, cuyo cuadrado se aproxime a 72; en este caso es 8, luego se realiza la división de 72 entre 8

$\frac{8+9}{2}=8.5$ Ocho y el cociente 9, se promedian.

$\frac{72}{8.5}=8.47$ Se realiza el cociente de 72 y 8.5

$\frac{8.5+8.47}{2}=8.485$ Se promedia 8.47 y 8.5

$\frac{72}{8.485}=8.4855$ Se divide el radicando 72 entre este último cociente.

$\frac{8.485+8.4855}{2}=8.48525$ Este procedimiento se repite sucesivamente, hasta que los cocientes que se deben promediar sean muy aproximados, entonces el cociente que resulta será la raíz más próxima al número dado.

Finalmente, la raíz cuadrada aproximada de 72 es 8.48525

2 Aplica el método babilónico y calcula: $\sqrt{500}$.

**Solución**

$\frac{500}{22}=22.7272$ El número, cuyo cuadrado se aproxima a 500 es 22, entonces se efectúa la división.

$\frac{22.7272+22}{2}=22.3636$ Se promedia el cociente y el divisor.

$\frac{500}{22.3636}=22.3577$ Se divide 500 entre el promedio.

$\frac{22.3577+22.3636}{2}=22.3606$ Se promedia nuevamente el cociente y el divisor.

$\frac{500}{22.3606}=22.3607$ Se observa que el cociente es muy aproximado al divisor; por lo tanto, la raíz que se busca es aproximadamente igual a 22.3607

## EJERCICIO 65

Aplica el método babilónico y determina las siguientes raíces cuadradas:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. 35 | 3. 126 | 5. 1 263 | 7. 65 994 | 9. 456 200 |
| 2. 60 | 4. 553 | 6. 4 200 | 8. 80 000 | 10. 875 403 |

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Raíz cúbica

La raíz cúbica es un número que multiplicado por sí mismo 3 veces es igual al radicando. La raíz cúbica de una cantidad puede obtenerse por aproximación de un número, cuyo resultado se aproxime a la cantidad, siempre y cuando éste sea menor que 100.

### Ejemplo

Determina la raíz cúbica de 732.

**Solución**

$\sqrt[3]{732}$ | 9
−729
3

El número cuyo cubo se aproxima a 732 es 9

Por consiguiente, la raíz cúbica de 732 es 9 con un residuo de 3 unidades.

Para obtener raíces cúbicas de cantidades mayores de 3 cifras, se realiza el siguiente procedimiento:

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Calcula $\sqrt[3]{1728}$ .

**Solución**

$\sqrt[3]{1,728}$ | 1
−1
0

Se separa 1 728 en periodos de 3 dígitos, a partir del punto decimal de derecha a izquierda, y se busca un número cuyo cubo se aproxime o dé como resultado 1.

$\sqrt[3]{1,728}$ | 12
−1 | $3 \times 1^2 = 3$
0 728 | $7 \div 3 = 2$
−0 728
0

Se baja el siguiente periodo 728, la raíz parcial 1 se eleva al cuadrado y se multiplica por 3 ($3 \times 1^2 = 3$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 728 y se divide entre 3 ($7 \div 3 = 2$), 2 se coloca a la derecha del 1 y se realiza la siguiente prueba:

$$\begin{array}{r} 3 \times 1^2 \times 2 \times 100 = 600 \\ + \; 3 \times 1 \times 2^2 \times 10 = 120 \\ 2^3 = \phantom{00}8 \\ \hline 728 \end{array}$$

El resultado 728 es menor o igual que 728, se efectúa la resta

El resultado de la raíz cúbica del número dado es 12.

Si al efectuar el cociente resulta un número de 2 dígitos, entonces para hacer la prueba se debe tomar a 9 o un número menor que 9.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la raíz cúbica de 9 663 597.

**Solución**

$\sqrt[3]{9,663,597}$ | 2
−8
1

Se separa el radicando en periodos de 3 dígitos, a partir del punto decimal de derecha a izquierda, y se busca un número cuyo cubo se aproxime o dé como resultado 9, en este caso es 2, ya que $2^3 = 8$ y se resta a 9.

(*continúa*)

(*continuación*)

| | |
|---|---|
| $\sqrt[3]{9,663,597}$ | 21 |
| $-8$ | $3 \times 2^2 = 12$ |
| 1 663 | $16 \div 12 = 1$ |
| $-1\,261$ | |
| 402 | |

Se baja el siguiente grupo de dígitos y el resultado 2 se eleva al cuadrado y se multiplica por tres ($3 \times 2^2 = 12$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 1 663 y se divide entre 12 ($16 \div 12 = 1$), el 1 se coloca a la derecha del 2 para después realizar las siguientes pruebas:

$$\begin{array}{rr} 3 \times 2^2 \times 1 \times 100 = & 1\,200 \\ + \; 3 \times 2 \times 1^2 \times \; 10 = & 60 \\ 1^3 = & 1 \\ \hline & 1\,261 \end{array}$$

El resultado 1 261 se sustrae de 1 663

| | |
|---|---|
| $\sqrt[3]{9,663,597}$ | 213 |
| $-8$ | $3 \times 2^2 = 12$ |
| 1 663 | $16 \div 12 = 1$ |
| $-1\,261$ | $3 \times 21^2 = 1\,323$ |
| 402 597 | $4\,025 \div 1\,322 = 3$ |
| $-402\,597$ | |
| 0 | |

Se baja el siguiente periodo 597, el nuevo resultado 21 se eleva al cuadrado y se multiplica por 3 ($3 \times 21^2 = 1\,323$), se separan los 2 dígitos de la derecha de 402 597 y 4 025 se divide entre 1 323 ($4\,025 \div 1\,323 = 3$), 3 se coloca a la derecha de 21 y se realizan las pruebas anteriores:

$$\begin{array}{rr} 3 \times 21^2 \times 3 \times 100 = & 396\,900 \\ + \; 3 \times 21 \times 3^2 \times \; 10 = & 5\,670 \\ 3^3 = & 27 \\ \hline & 402\,597 \end{array}$$

Como $402\,597 \leq 402\,597$, entonces se puede efectuar la resta.

En este caso el residuo es 0; por lo tanto, el resultado de la raíz cúbica es 213

## EJERCICIO **66**

Obtén la raíz cúbica de los siguientes números:

1. 512
2. 729
3. 3 375
4. 4 913
5. 10 648
6. 54 872
7. 300 763
8. 857 375
9. 2 460 375
10. 35 287 552
11. 78 953 589
12. 220 348 864

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Jerarquía de operaciones

Indica el orden en el que se deben realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz, así como signos de agrupación. De esta forma se garantiza que se obtendrá el resultado correcto.

**Orden de las operaciones.** Dada una expresión que involucre diferentes operaciones, se realizan en el siguiente orden:

- Potencias y raíces. Si se tiene la potencia o la raíz de una suma o resta, estas operaciones se resuelven primero.
- Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Sumas y restas de izquierda a derecha.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la operación $6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5$.

**Solución**

Se desarrolla la potencia y se extrae a la raíz:

$$6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5 = 36 \div 9 \times 4 + 4 \times 3 - 10 \div 5$$

Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, finalmente se efectúan las sumas y restas de izquierda a derecha y se obtiene el resultado.

$$= 4 \times 4 + 12 - 2$$
$$= 16 + 12 - 2 = 26$$

2 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8}$?

**Solución**

Se desarrollan las potencias, se realizan las operaciones dentro de los radicales y se extraen las raíces:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8} = \sqrt{25 - 9} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= \sqrt{16} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= 4 \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + 12$$

Se efectúan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha. Finalmente, se suman las cantidades y se obtiene el resultado.

$$= 16 + 18 \div 18 + 12$$
$$= 16 + 1 + 12$$
$$= 29$$

3 Realiza $-\sqrt{9} - \left\{ 4^2 + 3 \left[ \sqrt[3]{27} + 4 \times 6 \right] - 2^3 \right\}$.

**Solución**

Se desarrollan las potencias y se extraen las raíces:

$$-\sqrt{9} - \left\{ 4^2 + 3 \left[ \sqrt[3]{27} + 4 \times 6 \right] - 2^3 \right\} = -3 - \{16 + 3\ [3 + 4 \times 6] - 8\}$$

Se realiza la multiplicación:

$$= -3 - \{16 + 3\ [3 + 24] - 8\}$$

Se efectúan los pasos correspondientes para eliminar los signos de agrupación y obtener el resultado:

$$= -3 - \{16 + 3\ [27] - 8\}$$
$$= -3 - \{16 + 81 - 8\} = -3 - \{89\}$$
$$= -3 - 89 = -92$$

El resultado de la operación es –92

4 ¿Cuál es el resultado de $(5-3)^4 \div 4 + \left\{ \sqrt{6^2 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (8-4)^2 \times 3 \right\}$?

**Solución**

Se realizan las operaciones que encierran los paréntesis:

$$= (5-3)^4 \div 4 + \left\{ \sqrt{6^2 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (8-4)^2 \times 3 \right\}$$
$$= (2)^4 \div 4 + \left\{ \sqrt{36 - 20} + \sqrt{5 \times 4 + 16} + (4)^2 \times 3 \right.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se desarrollan las potencias:

$$=16\div 4+\left\{\sqrt{16}+\sqrt{36}+16\times 3\right\}$$

Se extraen las raíces:

$$=16\div 4+\{4+6+16\times 3\}$$

Se efectúan las multiplicaciones y divisiones:

$$=4+\{4+6+48\}$$

Finalmente, se realiza la simplificación del signo de agrupación:

$$=4+\{58\}=4+58=62$$

Por tanto, el resultado es 62

5 Realiza $\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{17}{27}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{13}{8}\right)$.

**Solución**

Se realizan las operaciones encerradas en los paréntesis:

$$\frac{17}{27}-\frac{1}{3}=\frac{17-9}{27}=\frac{8}{27}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{4-1}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{8}+\frac{13}{8}=\frac{7+13}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

Los valores obtenidos se sustituyen y se realizan las multiplicaciones y divisiones:

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{8}{27}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{8}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{54}{24}+\frac{8}{2}}-\frac{15}{10}$$

Pero $\frac{54}{24}=\frac{9}{4}$, $\frac{8}{2}=4$ y $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$, entonces:

$$=\sqrt{\frac{9}{4}+4}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{9+16}{4}}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}$$

Se obtiene la raíz cuadrada y se realiza la resta:

$$=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Por tanto, el resultado es 1

# EJERCICIO 67

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $7\times2+8\div4-3\times2=$
2. $12\div4\times3+18\div9\times3-4\times3=$
3. $(10-2)\div2\times3+(8+6)(7-2)-12\times2\div8=$
4. $(6+2)\times(7-4)\div(14-2)+(12-8)\times(7+3)\div(10-2)=$
5. $12^2\div\sqrt{16}\div\sqrt{81}+5^2\times6\div3=$
6. $\sqrt{13^2-12^2}+(6-4)^2\times8-\sqrt{(10-8)^2}=$
7. $2+\{8\times(8-6)+[(3+4)\div7-5\times6\div10]-5\}=$
8. $\sqrt{2\times36+576\div8}+\left\{\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)^2-[7+(8-2)-(5-4)]+6\right\}=$
9. $3\times\left\{\sqrt{(5-2)\times(7-4)}-(5-3)+(8-3)-[6-(7-2)+8]-6\right\}=$
10. $-6+(8-3)-[4+(6-3)\times5-8]+3-\{9-(6-4)\}=$
11. $\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\div\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\div\frac{1}{6}=$
12. $\sqrt{\frac{9}{4}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}-\left[\frac{5^2-4^2}{9}-\frac{3}{4}\right]=$
13. $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\times\frac{3}{2}\div\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}=$
14. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-12\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\div6+\frac{3}{8}\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\right)-\frac{25}{36}\right\}=$
15. $\left(\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{1}{36}}\right)^2\div\frac{1}{3}-2\left[\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right]^2=$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 7

## Notación científica y logaritmos

**Reseña HISTÓRICA**

*La notación científica*

Se emplea para simplificar cálculos y tiene dos propósitos: uno es la representación concisa de números muy grandes o muy pequeños y, el otro, la indicación del grado de exactitud de un número que representa una medición.

Para los dos propósitos se usan potencias de 10, por ejemplo: podemos decir que la velocidad de la luz es de trescientos millones de metros por segundo, o también de 300 000 000 m/seg. Si hablamos de grandes cantidades de bytes, se puede decir que la capacidad de almacenamiento de datos de una gran computadora es de 500 Terabytes, lo que equivale a 500 000 000 000 000 bytes. Si nos referimos a la longitud de onda de los rayos cósmicos, se podría decir que es inferior a 0,000000000000001 metros.

En textos de ciencia y técnica estas cifras se escriben de la forma siguiente: "La velocidad de la luz es de $3 \times 10^8$ m/seg...". "La capacidad de almacenamiento de datos de la gran computadora es de $5 \times 10^{14}$ bytes..." y "la longitud de onda de los rayos cósmicos es inferior a $1 \times 10^{-14}$ metros..."

*Los logaritmos*

En 1614 John Napier publicó el *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*… donde, mediante una aproximación cinemática, pone en relación una progresión geométrica con una progresión aritmética. La primera es de las distancias recorridas con velocidades proporcionales a ellas mismas, la segunda, la de las distancias recorridas con velocidad constante; éstas son entonces los "logaritmos" de las primeras (el neologismo es de NAPIER).

En 1619 apareció una segunda obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.... donde el autor explica cómo calcular los logaritmos.

Henry Briggs (matemático de Londres), había descubierto la importancia de estos trabajos y retomó la idea fundamental, pero consideró una progresión geométrica simple, la de las potencias de 10, en 1617 publica una primera tabla con 8 decimales. El logaritmo de un número $x$ es, por lo tanto, definido como el exponente $n$ de 10, tal que $x$ sea igual a 10 elevado a $n$.

Sistema solar

La Vía Láctea tiene forma de lente convexa. El núcleo tiene una zona central de forma elíptica y unos $8 \times 10^3$ años luz de diámetro.

## Notación científica

La notación científica se utiliza para expresar cantidades en función de potencias de 10 y por lo regular se usa para cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Potencias de 10

| | |
|---|---|
| $0.1 = 10^{-1}$ | $10 = 10^{1}$ |
| $0.01 = 10^{-2}$ | $100 = 10^{2}$ |
| $0.001 = 10^{-3}$ | $1\,000 = 10^{3}$ |
| $0.0001 = 10^{-4}$ | $10\,000 = 10^{4}$ |
| $0.00001 = 10^{-5}$ | $100\,000 = 10^{5}$ |

Para expresar una cantidad en notación científica el punto se recorre una posición antes de la primera cifra, si la cantidad es grande, o un lugar después de la primera cifra si la cantidad es pequeña. El número de lugares que se recorre el punto decimal es el exponente de la base 10.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Expresa en notación científica 2 345 000.

**Solución**

Se coloca el 2 como cifra entera, 345 como parte decimal (2.345) y se indica la multiplicación por 10 con exponente 6, ya que fue el número de cifras que se recorrió el punto a la izquierda.

$$2\,345\,000 = 2.345 \times 10^{6}$$

2 Expresa en notación científica 25 300.

**Solución**

El punto decimal se recorre cuatro posiciones a la izquierda, por tanto,

$$25\,300 = 2.53 \times 10^{4}$$

3 Un satélite gira en una órbita circular de 820 000 km sobre la superficie terrestre. Expresar esta cantidad en notación científica.

**Solución**

La órbita del satélite expresada en notación científica es:

$$820\,000 = 8.2 \times 10^{5} \text{ km}$$

Cuando los números son pequeños, el punto decimal se recorre hacia la derecha hasta dejar como parte entera la primera cifra significativa y el exponente del número 10 es de signo negativo.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Escribe en notación científica 0.043.

**Solución**

El punto decimal se recorre 2 lugares hacia la derecha y el resultado se expresa como:

$$0.043 = 4.3 \times 10^{-2}$$

2 Representa en notación científica 0.000000386.

**Solución**

Se recorre el punto decimal 7 lugares de izquierda a derecha, por consiguiente,

$$0.000000386 = 3.86 \times 10^{-7}$$

3 La longitud de una bacteria es de 0.000052 m, expresa esta longitud en notación científica.

**Solución**

La longitud de la bacteria expresada en notación científica es:

$$0.000052 \text{ m} = 5.2 \times 10^{-5} \text{ m}$$

## EJERCICIO 68

Expresa en notación científica las siguientes cantidades:

1. 4 350
2. 16 000
3. 95 480
4. 273 000
5. 670 200
6. 350 000 000
7. 5 342 000
8. 18 600 000
9. 0.176
10. 0.0889
11. 0.00428
12. 0.000326
13. 0.000000462
14. 0.00000003
15. 0.0000000879
16. 0.0000000012
17. 0.000000000569
18. 0.0000000000781

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**Escritura en forma desarrollada.** El número $a \times 10^n$ se expresa en forma desarrollada de las siguientes formas:

- Si el exponente $n$ es positivo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la derecha y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.

**EJEMPLOS**

1 Expresa en su forma desarrollada $3.18 \times 10^3$.

**Solución**

El exponente 3 indica que el punto se deberá recorrer 3 lugares hacia la derecha, esto es:

$$3.18 \times 10^3 = 3\ 180$$

2 Escribe en su forma desarrollada $25.36 \times 10^6$.

**Solución**

El exponente 6 indica el número de lugares que se recorren hacia la derecha y los lugares que no tengan cifra serán ocupados por ceros.

$$25.36 \times 10^6 = 25\ 360\ 000$$

- Si el exponente $n$ es negativo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la izquierda y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en notación desarrollada $7.18 \times 10^{-4}$.

**Solución**

En este número, el punto decimal se recorre 4 lugares hacia la izquierda.

$$7.18 \times 10^{-4} = 0.000718$$

2 Escribe en su forma desarrollada $8 \times 10^{-2}$.

**Solución**

Se recorren 2 lugares hacia la izquierda, por lo tanto,

$$8 \times 10^{-2} = 0.08$$

Otra forma de convertir un número en notación científica a notación desarrollada, es realizar la multiplicación por la potencia de 10 desarrollada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en su forma desarrollada $3.012 \times 10^{5}$.

**Solución**

Se desarrolla la potencia de 10 y luego se realiza la multiplicación, entonces;

$$3.012 \times 10^{5} = 3.012 \times 100\,000 = 301\,200$$

2 Expresa en su forma desarrollada $8.0015 \times 10^{-3}$.

**Solución**

Se desarrolla la potencia de 10 y se obtiene: $10^{-3} = \frac{1}{10^{3}} = \frac{1}{1\,000}$ entonces,

$$8.0015 \times 10^{-3} = 8.0015 \times \frac{1}{1\,000} = \frac{8.0015}{1\,000} = 0.0080015$$

Por consiguiente, $8.0015 \times 10^{-3} = 0.0080015$

3 Desarrolla $2.1056 \times 10^{-2}$.

**Solución**

Al desarrollar la potencia de 10 se obtiene que: $10^{-2} = \frac{1}{10^{2}} = \frac{1}{100}$ entonces,

$$2.1056 \times 10^{-2} = 2.1056 \times \frac{1}{100} = \frac{2.1056}{100} = 0.021056$$

En consecuencia $2.1056 \times 10^{-2} = 0.021056$

# EJERCICIO 69

Escribe en su forma desarrollada las siguientes cifras:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $1.6 \times 10^{4}$ | 5. $4.2 \times 10^{2}$ | 9. $1.05 \times 10^{7}$ | 13. $2.3 \times 10^{-12}$ |
| 2. $0.1 \times 10^{-2}$ | 6. $72.4 \times 10^{-5}$ | 10. $2.34 \times 10^{-1}$ | 14. $3.01 \times 10^{-4}$ |
| 3. $37.6 \times 10^{5}$ | 7. $1 \times 10^{-6}$ | 11. $3.264 \times 10^{2}$ | 15. $4.14501 \times 10^{8}$ |
| 4. $6 \times 10^{-3}$ | 8. $8.3 \times 10^{-4}$ | 12. $62.34 \times 10^{-1}$ | 16. $3.002 \times 10^{-7}$ |

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma y resta

Para efectuar estas operaciones es necesario que la base 10 tenga el mismo exponente.

$$a \times 10^{n} + c \times 10^{n} = (a + c) \times 10^{n}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Efectúa $3.5 \times 10^{-6} + 1.83 \times 10^{-6}$.

**Solución**

Como los exponentes de la base 10 son iguales, se suman las cifras y la potencia de 10 permanece constante.

$$3.5 \times 10^{-6} + 1.83 \times 10^{-6} = (3.5 + 1.83) \times 10^{-6} = 5.33 \times 10^{-6}$$

**2** ¿Cuál es el resultado de $2.73 \times 10^{-4} - 1.25 \times 10^{-4}$?

**Solución**

Como los exponentes de la base 10 son iguales, se realiza la operación de la siguiente manera:

$$2.73 \times 10^{-4} - 1.25 \times 10^{-4} = (2.73 - 1.25) \times 10^{-4} = 1.48 \times 10^{-4}$$

Cuando los exponentes de la base 10 sean diferentes, se recorre el punto decimal para igualarlos y después se efectúa la operación.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Efectúa $1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5}$.

**Solución**

Se escoge una de las cifras para igualar los exponentes, en este caso se expresa a exponente 5.

$$1.34 \times 10^{6} = 1\,340\,000 = 13.4 \times 10^{5}$$

Luego, la operación resulta:

$$1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5} = 13.4 \times 10^{5} + 2.53 \times 10^{5} = (13.4 + 2.53) \times 10^{5} = 15.93 \times 10^{5}$$

Esta misma operación se realiza convirtiendo a exponente 6 y el resultado no se altera, entonces,

$$2.53 \times 10^{5} = 253\,000 = 0.253 \times 10^{6}$$

Luego, al sustituir:

$$1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5} = 1.34 \times 10^{6} + 0.253 \times 10^{6} = (1.34 + 0.253) \times 10^{6} = 1.593 \times 10^{6}$$

Por consiguiente, $1.34 \times 10^{6} + 2.53 \times 10^{5} = 1.593 \times 10^{6}$

2 Halla el resultado de $2.82\times10^{-5}-1.1\times10^{-6}$.

**Solución**

Se convierte a exponente $-6$, y el resultado

$$2.82\times10^{-5}-1.1\times10^{-6}=28.2\times10^{-6}-1.1\times10^{-6}=(28.2-1.1)\times10^{-6}=27.1\times10^{-6}$$

Ahora bien, si se convierte a exponente $-5$, entonces,

$$2.82\times10^{-5}-1.1\times10^{-6}=2.82\times10^{-5}-0.11\times10^{-5}=(2.82-0.11)\times10^{-5}=2.71\times10^{-5}$$

Por consiguiente, $2.82\times10^{-5}-1.1\times10^{-6}=27.1\times10^{-6}$ o $2.71\times10^{-5}$

## EJERCICIO **70**

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $3.18\times10^{6}+1.93\times10^{6}$
2. $8.1\times10^{-4}+2.3\times10^{-4}$
3. $4.3\times10^{-5}-3.2\times10^{-5}$
4. $1.1\times10^{4}-0.91\times10^{4}$
5. $13.1\times10^{6}-0.29\times10^{7}$
6. $25.34\times10^{-3}+1.82\times10^{-2}$
7. $3.83\times10^{4}+5.1\times10^{3}-0.2\times10^{5}$
8. $8.72\times10^{-3}-0.3\times10^{-2}+0.1\times10^{-4}$
9. $4\times10^{6}-0.23\times10^{6}-25\times10^{5}$
10. $1.18\times10^{-5}+3.4\times10^{-5}-0.12\times10^{-4}$
11. $2.03\times10^{3}+3.02\times10^{2}-0.021\times10^{5}$
12. $1.02\times10^{-2}+0.023\times10^{-1}+2.34\times10^{-3}$
13. $7.023\times10^{3}+1.03\times10^{2}-4.002\times10^{3}-0.023\times10^{2}$
14. $8.2\times10^{-4}+2.003\times10^{-3}-2.89\times10^{-4}+7.23\times10^{-3}$
15. $5.04\times10^{-2}+12\times10^{-3}-2.04\times10^{-2}+852\times10^{-4}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Multiplicación y división

- Para multiplicar o dividir un número en notación científica por o entre un número real cualquiera, se afecta sólo a la primera parte del número.

$$a(b\times10^{n})=(a\times b)\times10^{n}\quad;\quad\frac{b\times10^{n}}{a}=(b\div a)\times10^{n}\quad\text{con } a\neq0 \text{ para la división}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $3(5.2\times10^{7})$?

**Solución**

Se efectúa el producto de 3 por 5.2, la base 10 y su exponente no se alteran.

$$3(5.2\times10^{7})=3(5.2)\times10^{7}=15.6\times10^{7}=1.56\times10^{8}$$

2 Efectúa $\frac{3.5\times10^{-6}}{5}$.

**Solución**

Se realiza la división de 3.5 entre 5 mientras que la base 10 y su exponente no se alteran.

$$\frac{3.5\times10^{-6}}{5}=\frac{3.5}{5}\times10^{-6}=0.7\times10^{-6}=7\times10^{-7}$$

Para multiplicar o dividir números escritos en notación científica, se efectúa la multiplicación o división en las primeras partes y para la base 10 se aplican las leyes de los exponentes.

$$(a\times10^{m})\,(b\times10^{n})=(a\times b)\times10^{m+n} \qquad \frac{a\times10^{m}}{b\times10^{n}}=a\div b\times10^{m-n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación $(8.2\times10^{-5})\,(4.1\times10^{-3})$.

**Solución**

Se multiplican 8.2 por 4.1 y los exponentes de la base 10 se suman.

$$(8.2\times10^{-5})\,(4.1\times10^{-3})=(8.2\times4.1)\times10^{-5+(-3)}=33.62\times10^{-8}=3.362\times10^{-7}$$

2 Determina el resultado de $\frac{\left(4.25\times10^{6}\right)\left(2.01\times10^{-2}\right)}{2.5\times10^{8}}$.

**Solución**

Se realiza la multiplicación y posteriormente la división para obtener el resultado.

$$\frac{(4.25\times10^{6})(2.01\times10^{-2})}{2.5\times10^{8}}=\frac{\left(4.25\times2.01\right)\left(10^{6}\times10^{-2}\right)}{2.5\times10^{8}}=\frac{8.5425\times10^{4}}{2.5\times10^{8}}=\frac{8.5425}{2.5}\times10^{4-8}$$
$$=3.417\times10^{-4}$$

Por tanto, el resultado de la operación es $3.417\times10^{-4}$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{3.2\times10^{-5}\left(4.1\times10^{-7}-21\times10^{-8}\right)}{2.3\times10^{-13}+0.27\times10^{-12}}$?

**Solución**

Se realizan las sumas y restas, posteriormente la multiplicación y la división para obtener el resultado final.

$$\frac{3.2\times10^{-5}\left(4.1\times10^{-7}-21\times10^{-8}\right)}{2.3\times10^{-13}+0.27\times10^{-12}}=\frac{3.2\times10^{-5}\left(4.1\times10^{-7}-2.1\times10^{-7}\right)}{2.3\times10^{-13}+2.7\times10^{-13}}=\frac{\left(3.2\times10^{-5}\right)\left(2\times10^{-7}\right)}{5\times10^{-13}}$$
$$=\frac{\left(3.2\right)\left(2\right)\times10^{-5+(-7)}}{5\times10^{-13}}=\frac{6.4\times10^{-12}}{5\times10^{-13}}=\frac{6.4}{5}\times10^{-12-(-13)}$$
$$=1.28\times10^{1}=12.8$$

Por consiguiente, el resultado de la operación es 12.8

# EJERCICIO 71

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $3\left(7.2\times10^{-6}\right)$
2. $4.2\left(3.52\times10^{8}\right)$
3. $\dfrac{1.13\times10^{5}}{2}$
4. $\dfrac{1}{4}\left(4.83\times10^{-6}\right)$
5. $\dfrac{3.27\times10^{8}}{3}$
6. $5\left(3\times10^{-4}+2.6\times10^{-5}\right)$
7. $3.8\left(6.25\times10^{13}-42\times10^{12}\right)$
8. $\left(2.73\times10^{-2}\right)\left(1.16\times10^{4}\right)$
9. $\left(4.25\times10^{-8}\right)\left(1.2\times10^{-6}\right)$
10. $\left(3.1\times10^{5}\right)\left(2.3\times10^{6}\right)$
11. $1.25\times10^{-6}\left(7\times10^{9}+1.2\times10^{10}\right)$
12. $5.4\times10^{8}\left(1.3\times10^{-11}-5\times10^{-12}\right)$
13. $\dfrac{1.16\times10^{-5}}{2\times10^{-3}}$
14. $\dfrac{4.25\times10^{-2}}{5\times10^{3}}$
15. $\dfrac{\left(1.32\times10^{-4}\right)\left(2.5\times10^{-3}\right)}{3\times10^{-12}}$
16. $\dfrac{\left(3.78\times10^{-3}\right)\left(4.26\times10^{-5}\right)}{2.7\times10^{-3}}$
17. $\dfrac{3.5\times10^{7}+2.3\times10^{7}}{5.9\times10^{5}-30\times10^{4}}$
18. $\dfrac{1.73\times10^{-2}-0.3\times10^{-3}}{2\times10^{-6}}$
19. $\dfrac{\left(1.26\times10^{-5}\right)\left(1.04\times10^{-3}\right)}{\left(2.73\times10^{-3}\right)\left(1.2\times10^{-4}\right)}$
20. $\dfrac{4.2\times10^{5}\left(1.7\times10^{-4}+0.003\times10^{-2}\right)}{8.4\times10^{-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Potencias y raíces

**Potencia de un número en notación científica.** Al elevar un número en notación científica a un exponente dado, se elevan cada una de sus partes, como se ilustra a continuación:

$$(a\times10^{m})^{n}=a^{n}\times10^{m\times n}$$

### EJEMPLOS

**1** Realiza $\left(1.2\times10^{-6}\right)^{2}$.

**Solución**

Se elevan ambas partes del número al exponente 2

$$\left(1.2\times10^{-6}\right)^{2}=\left(1.2\right)^{2}\times\left(10^{-6}\right)^{2}=1.44\times10^{-12}$$

El resultado de la operación es $1.44\times10^{-12}$

**2** ¿Cuál es el resultado de $\left(4.4\times10^{5}\right)^{3}$?

**Solución**

Se elevan ambas partes del número.

$$\left(4.4\times10^{5}\right)^{3}=\left(4.4\right)^{3}\times\left(10^{5}\right)^{3}=85.184\times10^{15}=8.5184\times10^{16}$$

Por tanto, el resultado es: $8.5184\times10^{16}$

**Raíz de un número en notación científica.** Para obtener la raíz de un número en notación científica se escribe el exponente de la base 10 como múltiplo del índice del radical, luego se extrae la raíz de ambas partes.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el resultado de $\sqrt{1.69\times10^{-4}}$.

**Solución**

El exponente de la base 10 es múltiplo de 2, entonces se procede a extraer la raíz del número.

$$\sqrt{1.69\times10^{-4}}=\sqrt{1.69}\times\sqrt{10^{-4}}=1.3\times10^{-\frac{4}{2}}=1.3\times10^{-2}$$

El resultado de la raíz es: $1.3\times10^{-2}$

2 Efectúa $\sqrt[3]{8\times10^{14}}$.

**Solución**

Debido a que el exponente de la base 10 no es múltiplo de 3, se transforma el exponente de la siguiente manera:

$$8\times10^{14}=0.8\times10^{15}$$

Por tanto,

$$\sqrt[3]{8\times10^{14}}=\sqrt[3]{0.8\times10^{15}}=\sqrt[3]{0.8}\times\sqrt[3]{10^{15}}=0.92831\times10^{5}=9.2831\times10^{4}$$

Por consiguiente, el resultado es: $9.2831\times10^{4}$

3 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{\dfrac{3.2\times10^{-7}+0.43\times10^{-6}}{1.2\times10^{-3}}}$?

**Solución**

Se efectúan las operaciones dentro del radical y se extrae la raíz.

$$\sqrt{\frac{3.2\times10^{-7}+0.43\times10^{-6}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{3.2\times10^{-7}+4.3\times10^{-7}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{7.5\times10^{-7}}{1.2\times10^{-3}}}=\sqrt{6.25\times10^{-7-(-3)}}$$

$$=\sqrt{6.25\times10^{-4}}=\sqrt{6.25}\times\sqrt{10^{-4}}=2.5\times10^{-2}$$

## EJERCICIO 72

Realiza las siguientes operaciones.

1. $\left(1.7\times10^{-2}\right)^{2}$
2. $\left(8\times10^{-6}\right)^{-2}$
3. $\left(2.5\times10^{-6}+1.3\times10^{-6}\right)^{2}$
4. $\left(4.3\times10^{8}-25\times10^{7}\right)^{3}$
5. $\dfrac{\left(1.3\times10^{5}-4\times10^{5}+3.5\times10^{5}\right)^{-2}}{2.0\times10^{-4}}$
6. $\left(\dfrac{2.3\times10^{-4}+5.7\times10^{-4}}{3.24\times10^{-6}-1.64\times10^{-6}}\right)^{2}$
7. $\sqrt{9.61\times10^{-8}}$
8. $\sqrt[3]{2.16\times10^{8}}$
9. $\sqrt{32.4\times10^{-9}}$
10. $\sqrt[3]{1.6\times10^{7}+1.1\times10^{7}}$
11. $\sqrt[5]{5.26\times10^{-14}-2.06\times10^{-14}}$
12. $\left(1.2\times10^{-3}\right)^{3}\cdot\sqrt[3]{1.331\times10^{-6}}$
13. $\sqrt[5]{\dfrac{4.1\times10^{7}+1.9\times10^{7}}{3.5\times10^{-9}-1.625\times10^{-9}}}$
14. $\sqrt[3]{\dfrac{9.91\times10^{3}-36.6\times10^{2}}{3.25\times10^{10}+1.75\times10^{10}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Logaritmo de un número

El logaritmo con base $b$ de un número $N$, es el exponente $a$, al cual se eleva la base $b$ para obtener el resultado o argumento $N$.

$$\log_b N = a \Leftrightarrow N = b^a \text{ con } N > 0$$

### Ejemplos

Utiliza la definición de logaritmo para transformar a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

1. $\log_3 243 = 5 \Rightarrow 243 = 3^5$
2. $\log_{10} 10\,000 = 4 \Rightarrow 10\,000 = 10^4$
3. $\log_2 64 = 6 \Rightarrow 64 = 2^6$
4. $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \Rightarrow 25 = \left(\sqrt{5}\right)^4$

**Logaritmos comunes** o **de Briggs.** Son logaritmos cuya base es 10, el logaritmo de cualquier número está formado por una parte que corresponde a un número entero llamado *característic*a y otro decimal que recibe el nombre de *mantisa*. Estos logaritmos se representan de la siguiente manera:

$$\log_{10} N = \log N$$

**Cálculo del logaritmo de un número.** La característica del logaritmo de un número se obtiene de la siguiente manera:

- Si la parte entera del número es mayor que cero, la característica es el número de cifras enteras menos uno.
- Si la parte entera del número es cero, la característica es negativa y resulta de contar el número de lugares que existe del punto decimal hasta el lugar que ocupa la primera cifra significativa.
- Para obtener la mantisa se buscan las 2 primeras cifras del número en la primera columna de las tablas, se sigue sobre el mismo renglón hasta llegar al cruce con la columna encabezada por la tercera cifra; si es necesario se sumará la parte proporcional que corresponde a la cuarta cifra, que se encuentra sobre el mismo renglón en el cruce con la columna correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el log 7.

**Solución**

La característica = número de cifras enteras − 1 = 1 − 1 = 0

Se toma 70 en vez de 7 y para calcular la mantisa se ubica 70 en la primera columna y se toma la cifra que se encuentra sobre el renglón y la intersección con la columna 0

| $N$ | **0** | 1 | 2 | 3.................................................. | 9 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ |
| **70** | **8451** | 8457 | 8463 | 8470............................................... | 8506 | 1 | 1 | 2 |

Por tanto, log 7 = 0.8451

2 Obtén el log 689.

**Solución**

La característica = número de cifras enteras − 1 = 3 − 1 = 2

Para calcular la mantisa se ubica 68 en la primera columna y se toma la cifra que se encuentra sobre el renglón y la intersección con la columna 9

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3.......................................... | **9** | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ |
| **68** | 8325 | 8331 | 8338 | 8344.......................................... | **8382** | 1 | 1 | 2 |

Por tanto, log 689 = 2.8382

3 Encuentra el valor de: log 25.43.

**Solución**

Característica = 2 − 1 = 1

Cálculo de la mantisa:

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | **4** ................................... | 9 | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ |
| **25** | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | **4048** ................................. | 4133 | 2 | 3 | **5** |

El resultado final de la mantisa se obtiene de la suma de 4048 y 5

Finalmente, log 25.43 = 1.4053

4 Calcula el valor de: log 0.00457.

La parte entera es cero, por tanto la característica es negativa y corresponde a la posición que ocupa el número 4, que es la primera cifra significativa después del punto decimal.

Característica = −3 y se denota como $\bar{3}$

La mantisa se obtiene de la misma manera que en los ejemplos anteriores:

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4................ | **7**.................... | 9 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ |
| **45** | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571............ | **6599**............ | 6618 | 1 | 1 | 2 |

Por tanto, log 0.00457 = $\bar{3}$.6599

# EJERCICIO 73

Emplea tablas y obtén el logaritmo de Briggs de las siguientes cantidades:

1. log 1 349
2. log 134.9
3. log 13.49
4. log 0.001349
5. log 32.1
6. log 7.28
7. log 0.689
8. log 0.049
9. log 0.0078
10. log 5 685
11. log 3 233
12. log 53 000
13. log 1.364
14. log 5.032
15. log 0.41
16. log 30
17. log 7.032
18. log 1 000

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Antilogaritmo

Dado el $\log_b N = a$, el antilogaritmo con base $b$ de $a$ es $N$.

**Cálculo del antilogaritmo de un número.** La característica positiva más uno indica el número de cifras enteras que tiene el número N.

La característica negativa indica el lugar que ocupa la primera cifra significativa a la derecha del punto decimal.

Para obtener el antilogaritmo se buscan las 2 primeras cifras del número en la primera columna de la tabla de antilogaritmos, se sigue sobre el mismo renglón hasta llegar al cruce con la columna encabezada por la tercera cifra; si es necesario se suma la parte proporcional que corresponde a la cuarta cifra, que se encuentra sobre el mismo renglón en el cruce con la columna correspondiente.

### EJEMPLOS

1 Determina el antilogaritmo de: 2.5469.

**Solución**

Característica = 2, entonces el número tiene 2 + 1 = 3 cifras enteras.

Mantisa:

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4.................**6**.................... 9 | 1............**9** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ ≈ ≈ | ≈ ≈ ≈ |
| **.54** | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499............**3516**............3540 | 1............**7** |

El resultado de la mantisa se obtiene de sumar el 3516 y la parte proporcional que es 7 obteniendo 3523. Por tanto, el resultado es:

$$\text{antilog } 2.5469 = 352.3$$

2 Obtén el antilogaritmo de: 3.4237.

**Solución**

Característica = 3 + 1 = 4

Mantisa:

| *N* | 0 | 1 | 2 | **3** | 4 ................................... 9 | 1 .....**7**.....9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ ≈ | ≈ ≈ ≈ |
| **.42** | 2630 | 2636 | 2642 | **2649** | 2655 ............................2685 | 1 .....**4**.....6 |

Mantisa = 2649 + 4 = 2653
Finalmente, antilog 3.4237 = 2653

3 Obtén el antilogaritmo de: $\bar{2}.0401$.

Como la característica del logaritmo de referencia es $\bar{2}$ la primera cifra significativa debe ocupar el segundo lugar a la derecha del punto decimal; en consecuencia, se debe poner un cero entre dicha cifra y el punto decimal.

Característica = – 2 + 1 = – 1

Mantisa:

| *N* | **0** | 1 | 2 | 3 | 4 .....................................9 | **1**............9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ | ≈ ≈ | ≈ ≈ ≈ |
| **.04** | **1096** | 1099 | 1102 | 1104 | 1107..............................1119 | **0**............2 |

Por tanto:

$$\text{antilog } \bar{2}.0401 = 0.01096$$

## EJERCICIO 74

Mediante las tablas de antilogaritmos calcula el valor de *N*:

1. $\log N = 1.8674$
2. $\log N = 3.8046$
3. $\log N = 1.4950$
4. $\log N = 2.4683$
5. $\log N = 0.5611$
6. $\log N = 0.7322$
7. $\log N = 0.0065$
8. $\log N = 2.6545$
9. $\log N = 0.4718$
10. $\log N = 3.0017$
11. $\log N = 3.5766$
12. $\log N = \bar{2}.2618$
13. $\log N = \bar{1}.4022$
14. $\log N = \bar{4}.7163$
15. $\log N = \bar{1}.6310$
16. $\log N = \bar{2}.7047$
17. $\log N = \bar{3}.7514$
18. $\log N = \bar{2}.034$
19. $\log N = \bar{1}.7949$
20. $\log N = \bar{4}.10$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Propiedades de los logaritmos

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b M^n = n \log_b M \qquad M > 0$
4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_b M \qquad M > 0$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N \qquad M > 0 \text{ y } N > 0$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N \qquad M > 0 \text{ y } N > 0$
7. $\log_e M = \ln(M)$, ln = logaritmo natural, $e = 2.718\ldots$

---

Nota: $\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N \qquad \log_b \left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$

Las propiedades de los logaritmos se utlizan para resolver operaciones aritméticas, como se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor aproximado de: $N = (5.130)\ (3.134)$.

**Solución**

Se aplican logaritmos a ambos miembros de la igualdad,

$$\log N = \log\ (5.130)(3.134)$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos:

$$\log N = \log\ (5.130) + \log\ (3.134) = 0.7101 + 0.4961 \qquad \text{(propiedad 5)}$$
$$\log N = 1.2062$$

Se despeja "$N$",

$$N = \text{antilog } 1.2062$$

Entonces, $N = 16.08$

2 Calcula el valor aproximado de: $N = \sqrt[3]{71.47}$.

**Solución**

$$\log N = \log \sqrt[3]{71.47}$$
$$\log N = \frac{1}{3}\log\ (71.47) = \frac{1}{3}(1.8541) = 0.6180 \qquad \text{(propiedad 4)}$$
$$N = \text{antilog } 0.6180$$

Por tanto, $N = 4.150$

3 Halla el valor aproximado de: $M = \frac{7.65}{39.14}$.

**Solución**

$$\log M = \log \frac{7.65}{39.14}$$
$$\log M = \log\ (7.65) - \log\ (39.14) = 0.8837 - 1.5926 \qquad \text{(propiedad 6)}$$
$$\log M = -0.7089 = -1 + (1 - 0.7089) = -1 + 0.2911 = \bar{1}.2911$$
$$M = \text{antilog } \bar{1}.2911$$

Entonces, $M = 0.1954$

4 Halla el valor aproximado de: $R = (18.65)^4$.

**Solución**

$$\log R = 4\log\ (18.65) \qquad \text{(propiedad 3)}$$
$$\log R = 4(1.2707) = 5.0828$$
$$R = \text{antilog } 5.0828$$

Finalmente, $R = 121\ 000$

Otras aplicaciones de las propiedades de los logaritmos se ilustran en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

5 Si log 5 = 0.6989 y log 7 = 0.8450, encontrar el valor de log 35.

**Solución**

Se expresa 35 como: 35 = (5)(7)

Se aplica la propiedad de los logaritmos y se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned}\log 35 &= \log (5)(7)\\ &= \log 5 + \log 7\\ &= 0.6989 + 0.8450 = 1.5439\end{aligned}$$

Por consiguiente, el resultado es 1.5439

6 ¿Cuál es el resultado de log 12, si log 2 = 0.3010 y log 3 = 0.4771?

**Solución**

Se expresa 12 como:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos y efectuar las operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}\log 12 &= \log 2^2 \cdot 3\\ &= \log 2^2 + \log 3\\ &= 2\log 2 + \log 3\\ &= 2(0.3010) + 0.4771\\ &= 0.6020 + 0.4771\\ &= 1.0791\end{aligned}$$

Por consiguiente, log 12 = 1.0791

7 Halla el resultado de $\log \sqrt{2.5}$ si log 2 = 0.3010 y log 5 = 0.6989.

**Solución**

Se expresa el logaritmo del número de la siguiente manera:

$$\log \sqrt{2.5} = \log \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se aplican las propiedades correspondientes y se obtiene el resultado.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2)\\ &= \frac{1}{2}(0.6989 - 0.3010)\\ &= \frac{1}{2}(0.3979)\\ &= 0.19895\end{aligned}$$

El resultado del logaritmo es 0.19895

# EJERCICIO 75

Utiliza las propiedades y las tablas de los logaritmos que se encuentran al final del libro, para obtener el valor aproximado de las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{9985}$
2. $\sqrt[3]{874.2}$
3. $\sqrt[4]{2893000}$
4. $\sqrt{42.87}$
5. $\sqrt[3]{51190}$
6. $\sqrt[4]{0.06349}$
7. $\sqrt[3]{0.06349}$
8. $\sqrt{6.248}$
9. $\sqrt[3]{0.4285}$
10. $(9.45)(0.536)(0.714)$
11. $(-88.5)(0.1123)(10.5)$
12. $\dfrac{-382.1}{543}$
13. $\dfrac{(286.5)(4.714)}{-67.84}$
14. $\dfrac{143}{(-5.13)(7.62)}$
15. $\sqrt[4]{596}$
16. $(3.271)^5$
17. $\left(\dfrac{53.21}{8.164}\right)^3$
18. $\sqrt[3]{375\times 83.9}$
19. $\sqrt[4]{4096}$
20. $\sqrt[3]{\dfrac{9604}{3.5}}$
21. $\sqrt{\dfrac{(675)(3.151)}{(65.34)}}$
22. $\sqrt[3]{\dfrac{(34)^2\times 52.1}{543}}$
23. $\left[\dfrac{(6.53)(81.51)}{\sqrt[3]{8015}}\right]^2$

Si log 2 = 0.3010, log 3 = 0.4771, log 5 = 0.6989 y log 7 = 0.8450, calcula los siguientes logaritmos:

24. log 14
25. log 15
26. log 30
27. log 42
28. log 105
29. log 20
30. log 36
31. log 150
32. log 294
33. log 343
34. log 7.5
35. log 4.2
36. $\log\sqrt[6]{28}$
37. $\log\sqrt[3]{350}$
38. $\log\sqrt[5]{11.2}$
39. $\log\sqrt{52.5}$
40. $\log\sqrt[3]{\dfrac{14}{15}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Cambios de base

Si se conoce el logaritmo base *b* de un número, se puede hallar el logaritmo en otra base *a* con la fórmula:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración:

Sea $\log_b N = x$, entonces mediante la definición, se obtiene:

$$N = b^x$$

Al aplicar logaritmo base *a*, en ambos miembros de la igualdad:

$$\log_a N = \log_a b^x$$

por la propiedad 3,

$$\log_a N = x \log_a b$$

al dividir ambos miembros por $\log_a b$,

$$x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Se obtiene:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa utilizando logaritmos en base 4, $\log_2 32$.

**Solución**

Del logaritmo se tiene que:

$$N = 32,\ b = 2,\ a = 4$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$\log_2 32 = \frac{\log_4 32}{\log_4 2}$$

2 Halla el valor de $\log_7 343$, transformando a base 10.

**Solución**

De la expresión $\log_7 343$ se tiene que:

$$b = 7,\ N = 343 \text{ y } a = 10$$

Al sustituir en la fórmula,

$$\log_7 343 = \frac{\log 343}{\log 7} = \frac{2.5353}{0.8451} = 3$$

Finalmente, $\log_7 343 = 3$

3 Encuentra el $\log_8 326$.

**Solución**

Se realiza el cambio a base 10,

$$\log_8 326 = \frac{\log 326}{\log 8} = \frac{2.5132}{0.9031} = 2.7828$$

Finalmente, $\log_8 326 = 2.7828$

4 Encuentra el valor de: $\log_2 354.1$.

**Solución**

Se aplica un cambio a base 10,

$$\log_2 354.1 = \frac{\log 354.1}{\log 2} = \frac{2.5491}{0.3010} = 8.4687$$

Por tanto, $\log_2 354.1 = 8.4687$

5 Encuentra el valor de: $\log_3 2\,526$.

**Solución**

Se aplica un cambio a base 10,

$$\log_3 2\,526 = \frac{\log 2\,526}{\log 3} = \frac{3.4024}{0.4771} = 7.1314$$

Por consiguiente, $\log_3 2\,526 = 7.1314$

# EJERCICIO 76

Encuentra el valor de los siguientes logaritmos:

1. $\log_6 31$
2. $\log_9 10.81$
3. $\log_5 3.625$
4. $\log_{12} 643.3$
5. $\log_8 1.86$
6. $\log_{20} 124$
7. $\log_{13} 7.32$
8. $\log_{15} 21.7$
9. $\log_3 8.642$
10. $\log_2 8\,435$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 8

## Razones y proporciones

### Reseña HISTÓRICA

***La Teoría de proporciones (Libros V a VI)***

En la obra de Euclides *Los elementos*, los Libros V y VI tratan de la proporcionalidad y la semejanza de acuerdo con los fundamentos propuestos por Eudoxo.

El Libro V, da 18 definiciones y 25 proposiciones, expone la teoría general de la proporcionalidad, independiente de la naturaleza de las cantidades proporcionales. Le ocurre otro tanto que al Libro II con relación a su sustitución actual por las reglas correspondientes del álgebra simbólica.

Una vez desarrollada la teoría de proporciones en el Libro V, Euclides la aplica en el Libro VI, da 5 definiciones y 33 proposiciones, para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.

Eudoxo de Cnidos
(en torno a 400-347 a.n.e.)

## Cantidades proporcionales

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número, o al dividir una de ellas la otra queda dividida por el mismo número, se dice que las cantidades son directamente proporcionales.

### Ejemplos

Si 18 lápices cuestan \$28, entonces 54 lápices costarán el triple, es decir, \$84; al multiplicar el número de lápices por 3 el costo también quedó multiplicado por 3. Por lo tanto, las cantidades son directamente proporcionales.

Un automóvil recorre 360 km en 4 horas a velocidad constante; entonces, en 2 horas recorrerá la mitad, esto es 180 km, ambas cantidades quedaron divididas por 2, entonces se dice que son directamente proporcionales.

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número y viceversa, entonces, las cantidades se dice que son inversamente proporcionales.

### Ejemplo

Si 18 hombres construyen una barda en 12 días, entonces 6 hombres construirán la misma barda en el triple de tiempo, es decir, 36 días. Al dividir el número de hombres por 3, el número de días quedó multiplicado por 3, por consiguiente las cantidades son inversamente proporcionales.

**Razón.** Es el cociente entre 2 cantidades, donde el numerador recibe el nombre de antecedente y el denominador de consecuente.

Para las cantidades $a$, $b$ en la razón $\frac{a}{b}$ o $a:b$ con $b \neq 0$, $a$ recibe el nombre de antecedente y $b$ el de consecuente.

### Ejemplos

En la razón $\frac{7}{4}$, 7 es el antecedente y 4 es el consecuente.

En la razón $2:3$ (se lee 2 es a 3), 2 es el antecedente y 3 es el consecuente.

**Razón de proporcionalidad.** Si $a$ y $b$ son 2 cantidades directamente proporcionales, la razón $\frac{a}{b}$ recibe el nombre de razón de proporcionalidad, la cual siempre es constante.

### Ejemplo

Si 18 libros de ciencia cuestan \$1260, la razón de proporcionalidad es de 70, ya que $\frac{1260}{18} = 70$.

## Proporción

Es la igualdad entre 2 razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ o bien } a:b::c:d \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

La expresión se lee $a$ es a $b$ como $c$ es a $d$, $a$ y $d$ son los extremos, $b$ y $c$ son los medios.

### Ejemplo

3 es a 6 como 8 es a 16, se escribe $\frac{3}{6} = \frac{8}{16}$.

Al simplificar cada fracción se obtiene $\frac{1}{2}$, la razón de proporcionalidad

En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } a \cdot d = b \cdot c \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

**Ejemplo**

Para la proporción $\frac{5}{4}=\frac{20}{16}$ se tiene que $(5)(16)=(4)(20)=80$.

En una proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } a=\frac{b\cdot c}{d} \text{ o } d=\frac{b\cdot c}{a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ se tiene que $2=\frac{(3)(10)}{15}$ y $15=\frac{(3)(10)}{2}$.

2 Halla el valor de $m$ en la siguiente proporción $\frac{m}{5}=\frac{24}{30}$.

**Solución**

$m$ es un extremo en la proporción, entonces:

$$m=\frac{(5)(24)}{30}=\frac{120}{30}=4$$

Por tanto, $m=4$

3 ¿Cuál es el valor de $b$ en la siguiente proporción $\frac{7}{2}=\frac{10}{b}$?

**Solución**

$b$ es uno de los extremos en la proporción, por lo tanto:

$$b=\frac{(2)(10)}{7}=\frac{20}{7}$$

Por consiguiente, $b=\frac{20}{7}$

En una proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el medio restante, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } b=\frac{a\cdot d}{c} \text{ o } c=\frac{a\cdot d}{b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$, se tiene que:

$$7=\frac{(2)(21)}{6} \text{ y } 6=\frac{(2)(21)}{7}$$

2 ¿Cuál es el valor de $c$ en la proporción $\frac{5}{4}=\frac{c}{28}$?

**Solución**

$c$ es un medio de la proporción, entonces:

$$c=\frac{(5)(28)}{4}=\frac{140}{4}=35$$

Por tanto, $c=35$

# EJERCICIO 77

Determina el valor del elemento que falta en cada una de las siguientes proporciones:

1. $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$
2. $\frac{2}{n}=\frac{8}{32}$
3. $\frac{4}{5}=\frac{12}{m}$
4. $\frac{a}{5}=\frac{6}{15}$
5. $\frac{20}{x}=\frac{6}{15}$
6. $\frac{7}{14}=\frac{y}{10}$
7. $\frac{x}{4}=\frac{6}{2}$
8. $\frac{2}{3}=\frac{12}{n}$
9. $\frac{7}{8}=\frac{56}{p}$
10. $\frac{x}{8}=\frac{9}{12}$
11. $\frac{3}{7}=\frac{z}{28}$
12. $\frac{y}{5}=\frac{8}{20}$
13. $\frac{3}{9}=\frac{x}{27}$
14. $\frac{x}{100}=\frac{150}{75}$
15. $\frac{15}{70}=\frac{30}{x}$
16. $\frac{5}{m}=\frac{15}{9}$
17. $\frac{3}{5}=\frac{12}{m}$
18. $\frac{90}{x}=\frac{15}{85}$
19. $\frac{8}{a}=\frac{16}{12}$
20. $\frac{4}{12}=\frac{x}{3}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Media proporcional (media geométrica)

A una proporción de la forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad b\neq 0\;,\; c\neq 0$$

Se le llama proporción geométrica y se dice que $b$ es media proporcional (geométrica) entre $a$ y $c$. La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 En la proporción $\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$, se tiene que:

$$\sqrt{(4)(16)}=\sqrt{64}=8$$

2 Calcula el valor de $m$ en la proporción $\frac{9}{m}=\frac{m}{4}$.

**Solución**

$m$ es la media proporcional de 9 y 4, entonces:

$$m=\sqrt{(9)(4)}=\sqrt{36}=6$$

Por tanto, $m=6$

3 ¿Cuál es la media proporcional entre 4 y 6?

**Solución**

La proporción es $\frac{4}{b}=\frac{b}{6}$ donde $b$ es la media proporcional, por lo tanto:

$$b=\sqrt{(4)(6)}=\sqrt{24}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}=2\sqrt{2\cdot 3}=2\sqrt{6}$$

Por consiguiente, la media proporcional entre 4 y 6 es $2\sqrt{6}$

4 Encuentra la media geométrica entre 0.375 y 0.5.

**Solución**

Se convierten las fracciones decimales a fracción común.

$$0.375 = \frac{3}{8},\ 0.5 = \frac{1}{2}$$

Se halla la media proporcional $c$ en:

$$\frac{\frac{3}{8}}{c} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \text{ de donde } c = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Por tanto, la media proporcional entre 0.375 y 0.5 es $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

# EJERCICIO 78

Encuentra la media proporcional (geométrica) entre los números dados:

1. 12 y 3
2. 6 y 24
3. 9 y 25
4. 4 y 12
5. 2 y 7
6. 9 y 18
7. 10 y 25
8. 0.1 y 0.5
9. 0.2 y 0.8
10. 0.8 y 1.6

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Cuarta proporcional

Se le llama cuarta proporcional a cualquiera de los 4 términos en una proporción.

**EJEMPLOS**

1 ¿Una cuarta proporcional de 6, 4 y 3?

**Solución**

Se forma la proporción $\frac{6}{4} = \frac{3}{x}$ tomando a $x$ como el último extremo.

El extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante.

$$x = \frac{(4)(3)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Por tanto, una cuarta proporcional de 6, 4 y 3 es 2

2 ¿Una cuarta proporcional de $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$?

**Solución**

Se realiza la operación:

$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}}{x} \quad \text{donde} \quad x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Por consiguiente, una cuarta proporcional de $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ es $\frac{1}{25}$

# EJERCICIO 79

Encuentra la cuarta proporcional de los siguientes números:

1. 2, 5 y 15
2. 6, 8 y 24
3. 2, 5 y 14
4. 4, 3 y 32
5. 7, 5 y 63
6. 2, 4 y 5
7. 3, 6 y 8
8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$
9. $\frac{5}{4}, \frac{7}{2}$ y $\frac{1}{4}$
10. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{2}$
11. $\frac{2}{5}, \frac{4}{3}$ y $\frac{1}{3}$
12. $\frac{3}{7}, \frac{5}{2}$ y $\frac{1}{4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Tercera proporcional

Se llama así a cualquiera de los extremos de una proporción geométrica, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \text{ con } b \neq 0, d \neq 0$$

*a* es tercera proporcional entre *b* y *d*, en su defecto *d* es tercera proporcional entre *a* y *b*.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina una tercera proporcional entre 4 y 12.

**Solución**

Se forma una proporción al tomar como medio a uno de los números dados y como último extremo a *x*

$$\frac{4}{12} = \frac{12}{x} \text{ entonces } x = \frac{(12)(12)}{4} = \frac{144}{4} = 36$$

Por tanto, una tercera proporcional es 36

Ahora, si se toma como medio el 4, entonces la proporción queda:

$$\frac{12}{4} = \frac{4}{x} \text{ entonces } x = \frac{(4)(4)}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Finalmente, otra tercera proporcional es $\frac{4}{3}$

# EJERCICIO 80

Calcula una tercera proporcional.

1. 18 y 6
2. 24 y 4
3. 8 y 4
4. 18 y 9
5. 54 y 18
6. $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$
7. $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$
8. $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{18}$
9. $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}$
10. 9 y $\frac{3}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Regla de tres simple

Es la operación que se utiliza para encontrar el cuarto término en una proporción. A la parte que contiene los datos conocidos se le llama *supuesto* y a la que contiene el dato no conocido se le llama *pregunta*.

**Directa.** Se utiliza cuando las cantidades son directamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si 12 discos compactos cuestan $600, ¿cuánto costarán 18?

**Solución**

Supuesto: 12 discos cuestan $600
Pregunta: 18 discos cuestan $x$

Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de discos el precio también se incrementa. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

$$\frac{12}{18}=\frac{600}{x} \text{ donde } x=\frac{(600)(18)}{12}=\frac{10\,800}{12}=900$$

Por tanto, 18 discos compactos cuestan $900

2 Una llave que se abre 4 horas diarias durante 5 días, vierte 5 200 litros de agua, ¿cuántos litros vertirá en 12 días si se abre 4 horas por día?

**Solución**

Se calcula el número de horas totales; es decir, en 5 días la llave ha estado abierta 20 horas y en 12 días la llave permaneció abierta 48 horas.

Supuesto: en 20 horas la llave ha vertido 5 200 litros.
Pregunta: en 48 horas la llave ha vertido $x$ litros.

Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de horas también se incrementa el número de litros vertidos. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

$$\frac{20}{48}=\frac{5\,200}{x} \text{ donde } x=\frac{(5\,200)(48)}{20}=\frac{249\,600}{20}=12\,480$$

Por consiguiente, en 48 horas la llave vierte 12 480 litros.

**Inversa.** Se utiliza cuando las cantidades son inversamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Se ha planeado que una barda sea construida por 24 hombres en 18 días; sin embargo, sólo se logró contratar a 12 hombres, ¿en cuántos días la construirán?

**Solución**

Supuesto: 24 hombres construyen la barda en 18 días.
Pregunta: 12 hombres la construirán en $x$ días.

Las cantidades son inversamente proporcionales, ya que al disminuir el número de hombres, los contratados tardarán más días en construirla.

Se forman las razones entre las cantidades.

Razón entre el número de hombres: $\frac{24}{12}$

Razón entre el número de días: $\frac{18}{x}$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{18}=\frac{24}{12} \text{ donde } x=\frac{(18)(24)}{12}=\frac{432}{12}=36$$

Por tanto, 12 hombres construyen la barda en 36 días.

2 Las ruedas traseras y delanteras de un automóvil tienen un diámetro de 1.5 m y 1 m, respectivamente, cuando las primeras han dado 350 vueltas, ¿cuántas han dado las segundas?

**Solución**

Supuesto: las ruedas traseras tienen un diámetro de 1.5 m y dan 350 vueltas.
Pregunta: las ruedas delanteras tienen un diámetro de 1 m y dan $x$ vueltas.

Razón entre los diámetros: $\frac{1.5}{1}$

Razón entre el número de vueltas: $\frac{350}{x}$

Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{350}=\frac{1.5}{1} \text{ donde } x=\frac{(350)(1.5)}{1}=\frac{525}{1}=525$$

Por consiguiente, las delanteras dan 525 vueltas.

# EJERCICIO 81

Resuelve los siguientes problemas:

1. El precio de 25 latas de aceite es de $248, ¿cuántas latas se podrán comprar con $1 240?
2. Liam escucha la radio durante 30 minutos, lapso en el que hay 7 minutos de anuncios comerciales; si escucha la radio durante 120 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios escuchará?
3. Durante 70 días de trabajo Ana ganó $3 500, ¿cuánto ganaría si trabajara 12 días más?
4. Una llave abierta 6 horas diarias durante 7 días arrojó 6 120 litros de agua, ¿cuántos litros arrojará durante 14 días si se abre 4 horas diarias?
5. Un automóvil gasta 9 litros de gasolina cada 120 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?
6. En un libro de 80 páginas cada una tiene 35 líneas, ¿cuántas páginas tendrá el mismo libro si en cada una se colocan 40 líneas?
7. Una bodega se llena con 3 500 sacos de 6 kg de papas cada uno y otra de la misma capacidad se llena con sacos de 5 kg, ¿cuántos sacos caben en la segunda bodega?
8. Un leñador tarda 8 segundos en dividir en 4 partes un tronco de cierto tamaño, ¿cuánto tiempo tardará en dividir un tronco semejante en 5 partes?
9. Si un automóvil hizo 9 horas durante un recorrido de 750 kilómetros, ¿qué tiempo empleará en recorrer 2 250 kilómetros si su velocidad es constante?

10. Teresa tiene en su tienda varios sacos de harina de 18 kg y va a vender cada uno en $108, pero como nadie quiere comprar por saco decide venderla por kilo. Su primer cliente le pidió 4 kg, ahora ella quiere saber cuánto debe cobrarle.
11. Don Arturo tiene una pastelería y sabe que para hacer un pastel de fresas para 8 personas utiliza 2 kg de azúcar, ¿qué cantidad de azúcar utilizará si le encargan un pastel, también de fresas, que alcance para 24 personas?
12. Ana, Fabián y Liam han ido a comprar discos compactos; Ana compró 2 de música grupera; Fabián 3 de rock alternativo y Liam compró 5 de heavy metal. Si en total se pagaron $1 620 y todos cuestan lo mismo, ¿cuánto deberá pagar cada uno?
13. El valor de 25 $m^2$ de azulejo es de $3 125. ¿Cuántos $m^2$ se comprarán con $15 625?
14. Si 9 tarros tienen un precio de $450, ¿cuántos tarros se comprarán con $ 7 200?
15. Se compraron 40 kg de dulces para repartirlos equitativamente entre 120 niños. ¿Cuántos kilogramos se necesitarán para un grupo de 90 pequeños?
16. Un albañil gana $1 500 mensuales. ¿Cuánto recibe por 20 días?
17. Fernando, Josué y Martín cobraron por resolver una guía de problemas de cálculo de varias variables $975; Fernando trabajó 6 horas, Josué 4 horas y Martín 3 horas, ¿cuánto recibirá cada uno por hora de trabajo?
18. Un microbús cobra a una persona $17.50 de pasaje por una distancia de 21 kilómetros, ¿cuánto pagará otra persona, cuyo destino está a 51 kilómetros de distancia?
19. Una piscina se llena en 10 horas con una llave que arroja 120 litros de agua por minuto, ¿cuántos minutos tardará para llenarse si esta llave arrojara 80 litros del líquido?
20. Un grupo de 45 estudiantes de CONAMAT contrata un autobús para ir a un evento y calculan que cada uno debe pagar $50; finalmente sólo asisten 30 estudiantes, ¿cuánto deberá pagar cada uno?
21. Si 18 metros de alambre cuestan $63. ¿Cuál será el precio de 42 m?
22. Si una docena de pañuelos cuesta $200, ¿cuánto se pagará por 9 de ellos?
23. Una decena de canicas cuesta $18, ¿cuántas podrá comprar un niño con $5.40?
24. Un automóvil recorre 240 kilómetros con 60 litros de gasolina. ¿Cuántos litros necesita para recorrer 320 kilómetros?
25. Si 3 decenas de pares de zapatos cuestan $18 000, ¿cuál será el precio de 25 pares?
26. Si 15 hombres hacen una obra de construcción en 60 días, ¿cuánto tiempo emplearán 20 hombres para realizar la misma obra?
27. Si 4 hombres terminan un trabajo en 63 días, ¿cuántos más deben de añadirse a los primeros para concluir el mismo trabajo en 28 días?
28. Un ciclista recorrió cierta distancia en 4 horas con una velocidad de 60 km/h, ¿qué velocidad deberá llevar para recorrer la misma distancia en 5 horas?
29. Si se llenan 24 frascos con capacidad para 250 gramos, con mermelada de fresa, ¿cuántos frascos de 300 gramos se pueden llenar con la misma cantidad de mermelada?
30. Un ejército de 900 hombres tiene víveres para 20 días; si se desea que las provisiones duren 10 días más, ¿cuántos hombres habrá que dar de baja?
31. Se desea plantar árboles dispuestos en 30 filas, de modo que cada fila tenga 24 de éstos. Si se colocan los mismos árboles en 18 filas, ¿cuántos se tendrán por fila?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Regla de tres compuesta

Se utiliza cuando se tienen más de 4 cantidades directa o inversamente proporcionales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una guardería con 250 niños proporciona 4 raciones de alimentos diarios a cada pequeño durante 18 días. Si la población aumenta a 50 niños, ¿cuántos días durarán los alimentos si se disminuyen a 3 raciones diarias?

**Solución**

Se forman las razones entre las cantidades.
A más niños los alimentos duran menos días, por tanto la proporción es inversa.
A menos raciones los alimentos duran más días, por tanto la proporción es inversa.

| | | |
|---|---|---|
| 250 niños | 4 raciones | 18 días |
| 300 niños | 3 raciones | $x$ días |
| **Inversa** | **Inversa** | |

Las razones $\frac{250}{300}$ y $\frac{4}{3}$ se invierten y multiplican, la razón $\frac{18}{x}$ se iguala con el producto.

$$\left(\frac{300}{250}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{18}{x}$$

Entonces, $x=\frac{(18)(250)(4)}{(300)(3)}=\frac{18\,000}{900}=20$

Por tanto, los alimentos durarán 20 días.

2 15 cajas de aceite con 18 galones cuestan \$960, ¿cuánto cuestan 9 cajas con 20 galones?

**Solución**

Se forman las razones entre las cantidades.
Si el número de cajas disminuye el precio disminuye, por tanto es una proporción directa.
Si el número de galones aumenta el precio aumenta, por tanto es una proporción directa.

| | | |
|---|---|---|
| 15 cajas | 18 galones | \$960 |
| 9 cajas | 20 galones | $x$ |
| **Directa** | **Directa** | |

Las razones $\frac{15}{9}$ y $\frac{18}{20}$ se multiplican sin invertir porque son directas y la razón $\frac{960}{x}$ se iguala con el producto.

$$\left(\frac{15}{9}\right)\left(\frac{18}{20}\right)=\frac{960}{x}$$

Entonces, $x=\frac{(960)(9)(20)}{(15)(18)}=\frac{172\,800}{270}=640$

Por consiguiente, 9 cajas de 20 galones cuestan \$640

3 Se calcula que para construir una barda de 600 m en 18 días, trabajando 8 horas diarias, se necesitan 12 hombres, ¿cuántos días tardarán 8 hombres trabajando 6 horas diarias para construir una barda de 400 m?

**Solución**

Se forman las razones entre las cantidades.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 hombres | 8 horas | 600 m | 18 días |
| 8 hombres | 6 horas | 400 m | $x$ días |
| **Inversa** | **Inversa** | **Directa** | |

$$\left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{600}{400}\right)=\frac{18}{x}$$

Donde $x=\dfrac{(18)(12)(8)(400)}{(8)(6)(600)}=\dfrac{691200}{28\,800}=24$

Por tanto, 8 hombres tardarán 24 días trabajando 6 horas diarias.

# EJERCICIO 82

Resuelve los siguientes problemas:

1. Andrea lee un libro de 500 páginas en 20 días y lee 1 hora diaria, ¿cuántos minutos debe leer diariamente para que en condiciones iguales lea un libro de 800 páginas en 15 días?
2. El padre de Alejandro contrató a 15 obreros que, al trabajar 40 días durante 10 horas diarias, construyeron en su casa una alberca con capacidad para 80 000 litros de agua; si Alejandro contrata a 10 de esos obreros para que trabajen 6 horas diarias y construyan otra alberca con capacidad para 40 000 litros de agua, ¿cuántos días tardarán en construirla?
3. Una fábrica proporciona botas a sus obreros, si 4 obreros gastan 6 pares de botas en 120 días, ¿cuántos pares de botas gastarán 40 obreros en 300 días?
4. La tripulación de un barco la forman el capitán, 5 ayudantes y 6 investigadores. El capitán programa las raciones de agua a razón de 8 litros diarios para toda la tripulación en un viaje de 6 días, pero a la hora de zarpar 2 de los investigadores deciden quedarse. Debido a esto se decide que el viaje dure 2 días más, ¿cuál debe ser la ración diaria de agua?
5. Si 24 motocicletas repartidoras de pizzas gastan $27 360 en gasolina durante 30 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuánto dinero se deberá pagar por concepto de gasolina para 18 motocicletas que trabajan 10 horas diarias durante 6 meses? (considera meses de 30 días).

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Tanto por ciento

El tanto por ciento de una cantidad es el número de partes que se toman, de las cien en las que se divide dicha cantidad. Se representa con el símbolo % o en forma de fracción.

**Ejemplo**

El 8% de 48, equivale a tomar 8 centésimas $\left(\frac{8}{100}=0.08\right)$ de 48, es decir, se divide 48 en 100 partes y se toman 8.

# EJERCICIO 83

Representa en forma decimal los siguientes por cientos:

1. 3%
2. 4%
3. 6%
4. 8%
5. 15%
6. 1%
7. 5%
8. 25%
9. 30%
10. 50%
11. 75%
12. 32%
13. 4.5%
14. 0.08%
15. 0.03%

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Para obtener un tanto por ciento se construye una regla de tres simple.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el 25% de 150?

**Solución**

Se forma la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 150
Pregunta: 25% es a $x$.

$$\frac{100}{25}=\frac{150}{x} \text{ donde } x=\frac{(150)(25)}{100}=\frac{3\,750}{100}=37.5$$

Por consiguiente, 37.5 es el 25% de 150

2 Calcula el 12% de 1 500.

**Solución**

Otra forma de obtener un porcentaje es hallar la fracción decimal $\frac{12}{100}=0.12$ y multiplicarla por 1 500, es decir:

$$(0.12)(1500)=180$$

Entonces, 180 es el 12% de 1 500

3 Obtén el $\frac{2}{3}$% de 2 400.

**Solución**

Se forma la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 2 400

Pregunta: $\frac{2}{3}$% es a $x$.

$$\frac{100}{\frac{2}{3}}=\frac{2\,400}{x} \text{ donde } x=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)(2\,400)}{100}=\frac{1600}{100}=16$$

Entonces, 16 representa el $\frac{2}{3}$% de 2 400

## EJERCICIO 84

Calcula los siguientes porcentajes:

1. 6% de 300
2. 8% de 1 250
3. 35% de 715
4. 3.5% de 150
5. $\frac{1}{5}$% de 385
6. 3% de 50
7. 35% de 4 500
8. 75% de 30
9. 12% de 3 856
10. $\frac{1}{2}$% de 8 750
11. 4% de 120
12. 25% de 5 000
13. 48% de 6 520
14. 9.8% de 2 857
15. $\frac{19}{6}$% de 1 958
16. 5% de 163
17. 50% de 2 800
18. 28% de 5 848
19. 20.3% de 372
20. $\frac{12}{5}$% de 345

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para obtener el 100% de una cantidad, se emplea una regla de tres.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿De qué número 480 es el 30%?

**Solución**

Se quiere encontrar el 100%

Supuesto: 30% es a 480
Pregunta: 100% es a $x$.

Se forma la proporción.

$$\frac{30}{100}=\frac{480}{x} \text{ entonces } x=\frac{(480)(100)}{30}=\frac{48\,000}{30}=1\,600$$

Por consiguiente, 480 es el 30% de 1 600

## EJERCICIO 85

Encuentra el número del que:

1. 200 es el 4%
2. 1 585 es el 20%
3. 2 850 es el 30%
4. 125 es el 8%
5. 1 285 es el 80%
6. 213.75 es el 7.5%
7. 300 es el 5%
8. 1 485 es el 75%
9. 748.25 es el 20.5%

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para que obtengas el porcentaje que representa un número de otro, observa los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Qué porcentaje de 985 representa 443.25?

**Solución**

Se establecen las proporciones:

Supuesto: 100% es a 985
Pregunta: $x$ es a 443.25

$$\frac{100}{x}=\frac{985}{443.25} \text{ entonces } x=\frac{(100)(443.25)}{985}=\frac{44\,325}{985}=45$$

Por tanto, 443.25 es el 45% de 985

2 ¿Qué porcentaje de 6 000 es 1 200?

**Solución**

Se establecen las proporciones:

Supuesto: 100% es a 6 000
Pregunta: $x$ es a 1 200

$$\frac{100}{x}=\frac{6\,000}{1200} \text{ entonces } x=\frac{(100)(1200)}{6\,000}=\frac{120\,000}{6\,000}=20$$

Por tanto, 1 200 es el 20% de 6 000

## EJERCICIO 86

Calcula el porcentaje que representa:

1. 54 de 270
2. 180 de 600
3. 956 de 3 824
4. 13 618.5 de 32 425
5. 5 616 de 15 600
6. 6 720 de 28 000
7. 8 142 de 54 280
8. 6 128.22 de 36 000
9. 29 399.29 de 127 823
10. 54 000 de 160 000

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una tienda de aparatos electrónicos decide dar 30% de descuento en toda su mercancía; si el precio normal de un televisor es de $6 000, ¿cuánto se pagará en caja?

**Solución**

Se obtiene el 30% de $6 000

$$(0.30)(6\,000) = 1800$$

El resultado se resta de 6 000

$$6\,000 - 1\,800 = 4\,200$$

Otra forma de obtener el precio es:

Como hay un descuento del 30%, al comprar el televisor sólo se pagará en caja el 70% del precio normal, es decir:

$$\left(\frac{70}{100}\right)(6\,000) = (0.70)(6\,000) = 4\,200$$

Por tanto, el precio del televisor con el descuento será de $4 200

2 Un ganadero tiene 240 reses de las cuales 25% se enferma. De las reses enfermas sólo 5% sobrevive y 30% de las que no enfermaron se vendieron, ¿cuántas reses le quedaron al ganadero?

**Solución**

Se obtiene 25% de 240

$$(0.25)(240) = 60 \text{ (0.2reses enfermas}$$

$$240 - 60 = 180 \text{ reses no se enfermaron}$$

De las 60 reses enfermas sólo 5% sobreviven.

$$(0.05)(60) = 3 \text{ reses sobreviven}$$

El ganadero vende 30% de las 180 que no enfermaron.

$$(0.30)(180) = 54 \text{ reses vendidas}$$

Le quedan $180 - 54 = 126$

Por tanto, el ganadero tiene 126 + 3 = 129 reses.

3 Laura compró un refrigerador en \$3 500, el precio incluía 30% de descuento, ¿cuál era el costo sin descuento?

**Solución**

3 500 representa 70% del precio normal, se calcula qué número representa 100%, es decir, se construye una regla de tres.

$$\frac{3500}{x}=\frac{70}{100} \text{ entonces, } x=\frac{(3500)(100)}{70}=\frac{350\,000}{70}=5\,000$$

Por consiguiente, \$5 000 es el precio sin descuento.

4 Un estanque con capacidad para 600 litros contiene tres cuartas partes de agua, si se le agregan 100 litros más, ¿qué porcentaje del estanque está lleno?

**Solución**

Se obtienen las tres cuartas partes de 600

$$\left(\frac{3}{4}\right)(600)=\frac{1800}{4}=450$$

El estanque tenía 450 litros, al agregarle 100 litros más ahora contiene 550
Luego se divide 550 por 600 y el resultado se multiplica por 100

$$\left(\frac{550}{600}\right)(100)=\frac{55\,000}{600}=91.66$$

El estanque está lleno en 91.66% de su capacidad.

5 La casa de María está valuada en 25% más que la de Alejandro, si la de Alejandro tiene un precio de \$600 000, ¿cuánto costará la de María?

**Solución**

Si la casa de María está valuada en 25% más, es decir, 100% + 25% = 125% de la de Alejandro, se construye una regla de tres.

$$\frac{600\,000}{x}=\frac{100}{125} \text{ entonces, } x=\frac{(600\,000)(125)}{100}=\frac{75\,000\,000}{100}=750\,000$$

Por tanto, la casa de María costará \$750 000

6 Luis recibe un ultimátum por parte de la empresa donde trabaja, de que si vuelve a tener un retraso el siguiente mes cobrará 15% menos de su sueldo mensual, el cual asciende a \$12 000, no obstante Luis faltó, ¿cuánto cobrará el siguiente mes?

**Solución**

Su sueldo será 15% menos entonces Luis cobrará 85% de su salario, se construye una regla de tres:

$$\frac{12\,000}{x}=\frac{100}{85} \text{ entonces, } x=\frac{(12\,000)(85)}{100}=\frac{1020\,000}{100}=10\,200$$

Por tanto, Luis cobrará \$10 200

7 Patricia le pidió un préstamo de $24 000 a un amigo y éste le dice que debe pagarle mensualmente 20% de la deuda. En 3 meses, ¿cuánto le habrá pagado?

**Solución**

Se obtiene 20% de 24 000

$$(0.20)(24\,000) = 4\,800 \text{ pagará por mes}$$

En 3 meses

$$(3)(4\,800) = 14\,400$$

Por consiguiente, Patricia después de 3 meses habrá pagado $14 400

8 En una caja hay 6 canicas azules, 5 rojas y 7 verdes, ¿cuál es el porcentaje de canicas azules?

**Solución**

El número total de canicas es 18, se construye la regla de tres:

Supuesto: 100% es a 18
Pregunta: $x$ es a 6

Se forma la proporción.

$$\frac{100}{x} = \frac{18}{6} \text{ entonces } x = \frac{(6)(100)}{18} = \frac{600}{18} = 33.33$$

Entonces, en la caja hay 33.33% de canicas azules.

## EJERCICIO **87**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un salón tiene capacidad para 80 alumnos, 20% se presenta puntualmente. ¿Cuántos estudiantes son impuntuales?
2. Una licuadora costó $500, pero al comprarla se hizo un descuento de 12% al cliente. ¿Cuál es el precio que se pagó?
3. El precio de una máquina de coser es de $ 3 500 y se pagó un enganche de 15%. ¿Cuánto se adeuda?
4. Se compró una guitarra de $12 500 al contado y se hizo un descuento de 8.5%. ¿Cuánto se pagó?
5. ¿Cuál es el enganche de un televisor que costó $5 500 si se pidió de anticipo 21% del precio?
6. Una persona vende una aspiradora en $851, venta por la que obtuvo una utilidad de 15% sobre el precio. ¿De cuánto fue su ganancia?
7. Una bicicleta de $6 800 se compró con un enganche de 12% y a pagar el saldo en 4 abonos mensuales. ¿De cuánto es cada pago?
8. Si un televisor cuesta $10 500 y se da un enganche de 8%, ¿cuánto se pagará en cada letra si el saldo es a cubrirse en 8 pagos?
9. Si Juan Carlos ganó 12% al vender una bicicleta que le costó $1 120, ¿en cuánto la vendió?
10. El valor de una casa es de $655 000 al contado, pero al venderla a plazos se le carga 25.5% de su precio. ¿Cuál es el costo final de la casa si se vende a plazos?
11. Javier pagó $2 550 por una consola de videojuegos, la cual tenía un descuento de 15%, ¿cuál era su precio sin descuento?
12. Antonio compró un reproductor de DVD en $2 125, el aparato tenía 20% de descuento; sin embargo, la persona que le cobró sólo le descontó 15%, ¿cuánto tenía que haber pagado Antonio?

13. Un equipo de básquetbol tuvo 29 derrotas durante 80 juegos, ¿cuál fue el porcentaje de victorias?
14. Alejandro contestó 90 de 120 preguntas de un examen. Si está seguro de haber contestado correctamente 70% de las 90, ¿cuántas preguntas de las restantes deberá contestar acertadamente para tener 70% del examen bien contestado?
15. Adrián compró un automóvil en $120 000, el precio incluía entre seguro, impuestos y accesorios 25% más, ¿cuál era el precio del automóvil sin contar con seguro, impuestos y accesorios?
16. Paola compró una bicicleta de montaña en $800, si el precio incluía una rebaja de 20%, ¿cuál era el precio normal de la bicicleta?
17. Jaime tiene una deuda de $180 000, si 30% de esa cantidad se la debe a su hermano y el resto a su tío Alberto, ¿cuánto le debe a su tío?
18. Un fraccionamiento está dividido en lotes, arriba y en la parte inferior de un cerro. Un lote en la parte superior del cerro cuesta 15% menos que en la parte inferior, si el precio de este último es de $224 000, ¿cuál es el costo de un lote en la parte superior?
19. Un proveedor compra cajas con aguacates en $60 cada una y las vende con una ganancia de 60% por caja, ¿cuánto ganará si compra 80 cajas?
20. Para aprobar un examen de 60 reactivos, Mónica tiene que contestar correctamente 75% de éste, ¿cuál es el mínimo de preguntas que deberá contestar acertadamente para aprobarlo?
21. En una liga de futbol se juegan 49 partidos; si el equipo de Juan al final de la temporada tiene 20 victorias y 6 empates, ¿cuál es el porcentaje de derrotas?
22. Un contenedor de leche con capacidad para 800 litros está lleno en sus dos quintas partes, si se agregan 80 litros más, ¿qué porcentaje del contenedor se encuentra lleno?
23. En un partido de baloncesto, Ricardo encestó 4 tiros de 3 puntos, 6 de tiro libre y 8 de cualquier otra parte. Si en total hizo 40 tiros a la canasta, ¿cuál es el porcentaje de efectividad?
24. En un librero hay 8 libros de cálculo diferencial, 5 de cálculo integral, 6 de álgebra y 10 de geometría, ¿cuál es el porcentaje de libros de geometría?
25. Si en una escuela hay 320 alumnos, de los cuales 135 son mujeres, ¿cuál es el porcentaje de hombres?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Interés simple

Para analizar este tema, es necesario describir algunos conceptos:

**Interés.** Es la cantidad de dinero que se obtiene por prestar o invertir cierta cantidad de dinero. El interés simple es el que se obtiene al final de un periodo, el cual es constante durante el tiempo que el dinero se encuentra en préstamo o en inversión.

**Tasa.** Es el tanto por ciento que se cobra en uno o varios periodos.

**Capital.** Cantidad de dinero que se presta o invierte.

### Fórmulas para determinar el interés simple

Supongamos que queremos prestar un capital $C$ a una tasa de $r\%$ para que en 1 año obtengamos un capital $I$, entonces se obtiene el $r\%$ de $C$ mediante una regla de tres, es decir:

Supuesto: 100% es a $C$
Pregunta: $r\%$ es a $I$

Se forma la proporción.

$$\frac{100}{r}=\frac{C}{I} \text{ entonces } I=\frac{C\cdot r}{100}$$

Como el interés ganado es constante, entonces, si queremos el interés $I$ en $t$ años, se tiene que:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)(t)=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$$

Si el tiempo es en meses, entonces el tiempo será: $\frac{t}{12}$, por lo tanto el interés será:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)\left(\frac{t}{12}\right)=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$$

Si el tiempo está representado en días, entonces el tiempo será: $\frac{t}{360}$, por consiguiente el interés será:

$$I=\left(\frac{C\cdot r}{100}\right)\left(\frac{t}{360}\right)=\frac{C\cdot r\cdot t}{36000}$$

En resumen, si se quiere obtener el interés simple $I$ de un capital $C$ a una tasa de $r\%$, en cierto periodo, las fórmulas son:

| **Si el tiempo está en años** | **Si el tiempo está en meses** | **Si el tiempo está en días** |
|---|---|---|
| $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$ | $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$ | $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{36000}$ |

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el interés simple que se obtendrá en 10 años si se invierten \$25 000 a una tasa de interés de 18%?

**Solución**

| Datos | Fórmula | Sustitución | Resultado |
|---|---|---|---|
| $C$ = 25 000<br>$r$ = 18%<br>$t$ = 10 años<br>$I$ =? | $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$ | $I=\frac{(25000)(18)(10)}{100}$<br>$I=\frac{4500000}{100}$<br>$I=45000$ | $I$ = 45 000 |

Por tanto, se obtendrán \$45 000 de interés al cabo de 10 años.

2 Andrés pide un préstamo al banco de \$240 000 con un interés de 32% anual, ¿qué interés le cobrarán en 8 meses?

**Solución**

| Datos | Fórmula | Sustitución | Resultado |
|---|---|---|---|
| $C$ = 240 000<br>$r$ = 32%<br>$t$ = 8 meses<br>$I$ =? | $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$ | $I=\frac{(240\,000)(32)(8)}{1200}$<br>$I=\frac{61\,440\,000}{1200}$<br>$I=51\,200$ | $I$ = 51 200 |

Por consiguiente, el banco le cobrará a Andrés \$51 200 por concepto de interés.

## Fórmulas para el cálculo del capital, el tiempo y la tasa

**Si el tiempo está en años**

| **Capital** | **Tiempo** | **Tasa** |
|---|---|---|
| $C = \frac{100 \cdot I}{t \cdot r}$ | $t = \frac{100 \cdot I}{C \cdot r}$ | $r = \frac{100 \cdot I}{C \cdot t}$ |

**Si el tiempo está en meses**

| **Capital** | **Tiempo** | **Tasa** |
|---|---|---|
| $C = \frac{1200 \cdot I}{t \cdot r}$ | $t = \frac{1200 \cdot I}{C \cdot r}$ | $r = \frac{1200 \cdot I}{C \cdot t}$ |

**Si el tiempo está en días**

| **Capital** | **Tiempo** | **Tasa** |
|---|---|---|
| $C = \frac{36\,000 \cdot I}{t \cdot r}$ | $t = \frac{36\,000 \cdot I}{C \cdot r}$ | $r = \frac{36\,000 \cdot I}{C \cdot t}$ |

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Qué capital se debe invertir para obtener un interés de $60 000 a una tasa de 10% en 6 años?

**Solución:**

| Datos | Fórmula | Sustitución | Resultado |
|---|---|---|---|
| $I$ = 60 000<br>$r$ = 10%<br>$t$ = 6 años<br>$C$ =? | $C = \frac{100 \cdot I}{t \cdot r}$ | $C = \frac{(100)(60\,000)}{(6)(10)}$<br>$C = \frac{6\,000\,000}{60}$<br>$C = 100\,000$ | $C$ = $100 000 |

Por tanto, se deben invertir $100 000

2 ¿Cuánto tiempo estuvo impuesto un capital de $250 000 a 25% anual, si generó un interés de $31 250 y se pagó antes del primer año?

**Solución**

Como se pagó antes de terminar el primer año, el tiempo está dado en meses.

| Datos | Fórmula | Sustitución | Resultado |
|---|---|---|---|
| $C$ = 250 000<br>$r$ = 25%<br>$I$ = 31 250<br>$t$ =? | $t = \frac{1200 \cdot I}{C \cdot r}$ | $t = \frac{(1200)(31250)}{(250\,000)(25)}$<br>$t = \frac{37\,500\,000}{6\,250\,000}$<br>$t = 6$ | $t$ = 6 meses |

Por tanto, estuvo impuesto durante 6 meses.

3 ¿Cuál es la tasa de interés anual que un banco estableció a un capital de \$300 000, si después de 10 años se obtuvieron intereses por \$60 000?

**Solución:**

| Datos | Fórmula | Sustitución | Resultado |
|---|---|---|---|
| $C = 300\,000$<br>$t = 10$ años<br>$I = 60\,000$<br>$r = ?$ | $r = \frac{100 \cdot I}{C \cdot t}$ | $r = \frac{(100)(60\,000)}{(300\,000)(10)}$<br>$r = \frac{6\,000\,000}{3\,000\,000}$<br>$r = 2$ | $r = 2\%$ |

Entonces, la tasa de interés fue de 2%.

## EJERCICIO 88

Resuelve los siguientes problemas:

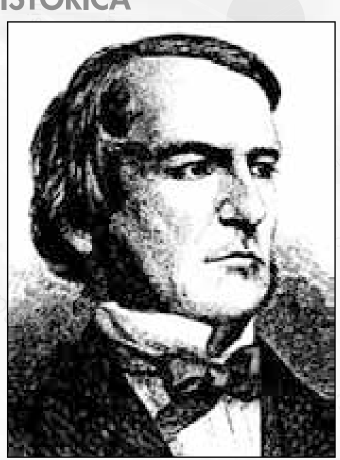
1. ¿Qué interés anual producirá un capital de \$50 000 en 6 años a 11%?
2. ¿Qué interés por año producirá un capital de \$380 000 en 5 años a 28%?
3. ¿Qué interés anual produce un capital de \$220 000 en 8 años a 8%?
4. Determinar cuánto de intereses produce un capital de \$56 800 en 3 años a 13.125% anual.
5. Calcular el interés que produce un capital de \$480 000 a 6.3% anual en 2 años.
6. Una persona paga 14.5% anual de interés por un préstamo hipotecario de \$385 000. ¿Cuánto tiene que pagar por concepto de intereses, si liquida su deuda al cabo de 10 años?
7. Víctor tiene ahorrados \$280 000 en el Banco de Comercio. Si esta institución bancaria paga por concepto de intereses 6.2% anual, ¿qué interés ganará su capital a los 6 años?
8. Precisar el interés que produce un capital de \$132 000 a 18.5% durante 8 meses.
9. ¿Qué interés producirá un capital de \$12 857 en 16 meses a 21.5% anual?
10. Por un préstamo de \$16 800 el padre de Carlos tiene que pagar 18% de interés anual. ¿Cuánto pagará durante 9 meses?
11. Un capital de \$80 000 produce un interés de \$12 000 al cabo de 5 años. ¿A qué tasa de interés anual se invirtió?
12. Calcular el interés que producen \$50 000 a una tasa del 12.5% durante 4 años.
13. ¿Qué capital se debe invertir para obtener una ganancia de \$24 000 a 12% de interés anual en 4 años?
14. ¿A qué tasa de interés anual quedó impuesto un capital de \$48 000, si generó \$12 000 de intereses en 10 meses?
15. ¿Cuánto tiempo estuvo impuesto un capital de \$160 000 a 20% de interés anual, si generó \$48 000 de intereses?
16. Si un capital de \$980 000 generó \$199 920 de intereses en 20 años, ¿cuál fue la tasa de interés a la que se impuso?
17. ¿Cuánto se debe invertir para que en 90 días un capital impuesto a 24% anual genere un interés de \$27 000?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 9

## SISTEMAS DE NUMERACIÓN

### Reseña HISTÓRICA



*Sistema binario*

George Boole fue un matemático inglés que en 1854 publicó *Las leyes del pensamiento*, las cuales sustentan las teorías matemáticas de la lógica y la probabilidad. Boole llevó a la lógica en una nueva dirección al reducirla a una álgebra simple, las matemáticas, así incorporó la lógica. Estableció la analogía entre los símbolos algebraicos y aquellos que representan las formas lógicas. Su álgebra consiste en un método para resolver problemas de lógica que recurre solamente a los valores binarios 1 y 0 y a tres operadores: AND (y), OR (o) y NOT (no). Comenzó el álgebra de la lógica llamada álgebra booleana, la cual ahora encuentra aplicación en la construcción de computadoras, circuitos eléctricos, etcétera.

Los sistemas de cómputo modernos trabajan a partir de la lógica binaria. Las computadoras representan valores mediante dos niveles de voltaje (generalmente 0V y 5V), con estos niveles podemos representar exactamente dos valores diferentes, que por conveniencia son cero y uno, los cuales representan apagado y encendido.

*Sistemas de numeración antiguos*

El hombre para contar empezó por utilizar su propio cuerpo: los dedos de la mano, los de los pies, los brazos, las piernas, el torso y la cabeza, las falanges y las articulaciones.

Mucho tiempo después, hacia 3300 a.n.e., apareció la representación escrita de los números, en paralelo al nacimiento de la escritura, en Sumeria (Mesopotamia). En las primeras tablillas de arcilla que han revelado la escritura, aparecen signos específicos destinados a representar los números.

En cada cultura se empleó una forma particular de representar los números. Por ejemplo, los babilonios usaban tablillas con varias marcas en forma de cuña y los egipcios usaban jeroglíficos, que aún aparecen en las paredes y columnas de los templos. Las cifras que hoy utilizamos tienen su origen en las culturas hindú y árabe.

George Boole (1815-1864)

## Definición

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos (números) que se relacionan para expresar cantidades. A través de la historia del hombre aparecen varios sistemas de numeración, que dependen de la época o la cultura. Los sistemas de numeración se clasifican en posicionales y no posicionales.

**Sistema posicional.** Cada símbolo que se utiliza en este sistema se llama dígito, el número de dígitos corresponde al número de base, es fundamental la existencia del cero. Estos sistemas se basan en la posición que ocupa cada dígito (valor relativo) en el número, esto permite que se puedan representar números mayores a la base.

En los sistemas posicionales los números se representan con la siguiente fórmula:

$$N_{(B)} = A_n \cdot B^n + A_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + A_1 \cdot B^1 + A_0 \cdot B^0 + A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + \ldots + A_{-n} \cdot B^{-n}$$

Donde: $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-n}$ son los dígitos.
$B$ es el número de base
$n$ posición

Para identificar el sistema se coloca la base $B$ como subíndice $N_{(B)}$. Los sistemas más utilizados son: el decimal (base 10), binario (base 2), octal (base 8) y hexadecimal (base 16), entre otros.

**Sistema decimal ($N_{(10)}$).** Se utilizan los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 los que, como ya se dijo, no representan sólo esos 10 números, sino que al acomodarlos en determinada posición representarán diferentes cantidades. La posición nos indica la magnitud de la cantidad representada, a cada posición se le asigna una potencia de 10 la cual se llama peso.

### Ejemplo

Representa el número $573_{(10)}$ en potencia de 10 con la fórmula:

$$573_{(10)} = 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

### Ejemplo

La representación en potencia de 10 del número $424.32_{(10)}$ es:

$$424.32_{(10)} = 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

El subíndice 10 se omite la mayoría de las veces, ya que al ser el sistema decimal que utilizamos, se sobrentiende que la base es 10.

**Sistema binario ($N_{(2)}$).** Sistema posicional que utiliza 2 dígitos (base 2), el 0 y el 1, los pesos de la posición son potencias de 2.

### Ejemplo

Representa el número $11101.11_{(2)}$ en potencia de 2 con la fórmula:

$$N_{(10)} = 11101.11_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

Cada dígito del sistema se conoce como dígito binario o bit (*binary digit*). Este sistema que puede ser un poco engorroso para nosotros, no lo es para una computadora, ya que ésta sólo admite 2 estados posibles, encendido o apagado, que equivale a decir pasa corriente o bien no pasa corriente. De tal forma que cuando pasa se asigna el 1 y cuando no pasa se asigna el 0.

**Sistema octal ($N_{(8)}$).** Sistema posicional que utiliza 8 dígitos (base 8), el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, así la posición de cada dígito tendrá como peso una potencia de 8.

### Ejemplo

Representa el número $234_{(8)}$ en potencia de 8 con la fórmula:

$$N_{(10)} = 234_{(8)} \quad = 2\times 8^2 + 3\times 8^1 + 4\times 8^0$$

Una de las aplicaciones de este sistema es que la conversión de binario a octal es muy sencilla, como se verá más adelante, ya que por cada 3 dígitos en binario se utiliza un solo dígito en octal.

**Sistema hexadecimal ($N_{(16)}$).** Sistema posicional que utiliza 16 símbolos (base 16), el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y las letras A, B, C, D, E, F, así la posición de cada dígito tendrá como peso una potencia de 16.

### Ejemplos

Representa los números $2405_{(16)}$ y $3AB.2D_{(16)}$ en potencia de 16 con la fórmula

$$N_{(10)} = 2405_{(16)} \quad = 2\times 16^3 + 4\times 16^2 + 0\times 16^1 + 5\times 16^0$$

$$N_{(10)} = 3AB.2D_{(16)} = 3\times 16^2 + A\times 16^1 + B\times 16^0 + 2\times 16^{-1} + D\times 16^{-2}$$

La utilidad de este sistema radica en que al igual que en el octal, la conversión de binario a hexadecimal es muy sencilla, ya que por cada 4 bits se utiliza solamente un dígito hexadecimal.

Un byte es la unidad de memoria usada por una computadora y equivale a 8 bits, de tal forma que 2 bytes ocupan 4 dígitos hexadecimales, 4 bytes (32 bits) 8 dígitos hexadecimales y así sucesivamente.

**Sistemas en otra base.** Hasta aquí sólo se nombraron algunos sistemas, sin embargo existen otros que aunque no son comunes cumplen con las características de un sistema posicional.

- **Sistema ternario ($N_{(3)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 3 dígitos (base 3): 0, 1, 2
- **Sistema cuaternario ($N_{(4)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 4 dígitos (base 4): 0, 1, 2, 3
- **Sistema quinario ($N_{(5)}$)**
  Sistema posicional que utiliza 5 dígitos (base 5): 0, 1, 2, 3, 4

## EJERCICIO 89

Transforma los siguientes números en potencias de acuerdo con la base:

1. $48_{(10)}$
2. $153_{(10)}$
3. $96.722_{(10)}$
4. $101011_{(2)}$
5. $1001.101_{(2)}$
6. $102.11_{(3)}$
7. $423.0142_{(5)}$
8. $1746.235_{(8)}$
9. $60007.51_{(8)}$
10. $2AF_{(16)}$
11. $1BA.4E_{(16)}$
12. $C.24AB_{(16)}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Conversiones

Dado un número en un sistema de numeración en base B, el número se puede representar en otro sistema. A continuación se explican diversos métodos.

### Conversión de un número en base "B" a base 10 $N_{(B)} \longrightarrow N_{(10)}$

Existen 2 métodos utilizando la fórmula y en el caso de números enteros el de "multiplicar por la base".

- **Método por fórmula**

$$N_{(10)} = A_n \cdot B^n + A_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + A_1 \cdot B^1 + A_0 \cdot B^0 + A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + \ldots + A_{-n} \cdot B^{-n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $1231_{(4)}$ a base decimal.

**Solución**

$$\begin{aligned} N_{(10)} = 1231_{(4)} &= 1\times 4^3 + 2\times 4^2 + 3\times 4^1 + 1\times 4^0 \\ &= 1\times 64 + 2\times 16 + 3\times 4 + 1\times 1 \\ &= 64 + 32 + 12 + 1 \\ &= 109_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $1231_{(4)}$ equivale a $109_{(10)}$

2 Convierte $20143_{(5)}$ a base 10.

**Solución**

$$\begin{aligned} N_{(10)} = 20143_{(5)} &= 2\times 5^4 + 0\times 5^3 + 1\times 5^2 + 4\times 5^1 + 3\times 5^0 \\ &= 2\times 625 + 0\times 125 + 1\times 25 + 4\times 5 + 3\times 1 \\ &= 1250 + 0 + 25 + 20 + 3 \\ &= 1298_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $20143_{(4)}$ equivale a $1\,298_{(10)}$

3 Cambia $N_{(2)} = 1011101.101_{(2)}$ a $N_{(10)}$.

**Solución**

$$\begin{aligned} 1011101.101_{(2)} &= 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} \\ &= 1\times 64 + 0\times 32 + 1\times 16 + 1\times 8 + 1\times 4 + 0\times 2 + 1\times 1 + 1\times 0.5 + 0\times 0.25 + 1\times 0.125 \\ &= 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 \\ &= 93.625_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $N_{(2)} = 1011101.101_{(2)}$ equivale a $N_{(10)} = 93.625_{(10)}$

4 Convierte $34AC_{(13)}$ a base 10.

**Solución**

Las letras se utilizan para números mayores de 2 dígitos, es decir A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, …, etc. Al aplicar la fórmula se tiene:

$$\begin{aligned} N_{(10)} &= 3\times13^3+4\times13^2+A\times13^1+C\times13^0 \\ &= 3\times2197+4\times169+10\times13+12\times1 \\ &= 6\,591+676+130+12 \\ &= 7\,409_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $34AC_{(13)}$ equivale a $7\,409_{(10)}$

5 Convierte $274.32_{(8)}$ a base 10.

**Solución**

$$\begin{aligned} 274.32_{(8)} &= 2\times8^2+7\times8^1+4\times8^0+3\times8^{-1}+2\times8^{-2} \\ &= 2\times64+7\times8+4\times1+3\times0.125+2\times0.015625 \\ &= 128+56+4+0.375+0.03125 \\ &= 188.40625_{(10)} \end{aligned}$$

Por tanto, $274.32_{(8)}$ equivale a $188.40625_{(10)}$

6 Transforma $N_{(16)} = 5AF.84_{(16)}$ a $N_{(10)}$.

**Solución**

$$\begin{aligned} 5AF.84_{(16)} &= 5\times16^2+A\times16^1+F\times16^0+8\times16^{-1}+4\times16^{-2} \\ &= 5\times256+10\times16+15\times1+8\times0.0625+4\times0.00390625 \\ &= 1280+160+15+0.5+0.015625 \\ &= 1455.515625_{(10)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $N_{(10)}$ equivale a $1\,455.515625_{(10)}$

- **Método de la multiplicación por la base y suma del siguiente dígito.** Este método sólo se utiliza para números enteros y consiste en multiplicar el primer dígito (de izquierda a derecha), por la base y sumar el dígito siguiente, el resultado de la suma se multiplica por la base y el resultado se suma con el dígito que le sigue, así hasta el último dígito. El resultado final será el número decimal equivalente.

EJEMPLOS

1 Transforma $11011_{(2)}$ a base 10.

**Solución**

Al seguir los pasos se obtiene:

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{1}\times2+\mathbf{1}=$ | 3 | Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito. |
| $3\times2+\mathbf{0}=$ | 6 | Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito. |
| $6\times2+\mathbf{1}=$ | 13 | Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito. |
| $13\times2+\mathbf{1}=$ | 27 | Producto del resultado anterior por la base, más el quinto dígito. |
| | **27** | Valor equivalente. |

Por tanto, $11011_{(2)}$ equivale a $27_{(10)}$

2 Convierte $25713_{(8)}$ a base 10.

**Solución**

Al seguir los pasos se obtiene:

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{2} \times 8 + \mathbf{5} =$ | 21 | Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito. |
| $21 \times 8 + \mathbf{7} =$ | 175 | Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito. |
| $175 \times 8 + \mathbf{1} =$ | 1 401 | Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito. |
| $1401 \times 8 + \mathbf{3} =$ | 11 211 | Producto del resultado anterior por la base, más el quinto dígito. |
| | **11 211** | Valor equivalente. |

Por tanto, $25713_{(8)}$ equivale a $11\,211_{(10)}$

3 Transforma $2A1F_{(16)}$ a base 10.

**Solución**

Al seguir los pasos se obtiene:

| | | |
|---|---|---|
| $2 \times 16 + \boldsymbol{A} =$<br>$2 \times 16 + \mathbf{10} =$ | 42 | Producto del primer dígito por la base, más el segundo dígito. |
| $42 \times 16 + \mathbf{1} =$ | 673 | Producto del resultado anterior por la base, más el tercer dígito. |
| $673 \times 16 + \boldsymbol{F} =$<br>$673 \times 16 + \mathbf{15} =$ | 10 783 | Producto del resultado anterior por la base, más el cuarto dígito. |
| | **10 783** | Valor equivalente. |

Por consiguiente, $2A1F_{(16)}$ equivale a $10\,783_{(10)}$

# EJERCICIO **90**

Transforma los siguientes números a forma decimal:

1. $1100_{(2)}$
2. $10111_{(2)}$
3. $11011011_{(2)}$
4. $111001.1101_{(2)}$
5. $10011.1011_{(2)}$
6. $2102_{(3)}$
7. $11120_{(3)}$
8. $100101_{(3)}$
9. $21101.201_{(3)}$
10. $2110112.212_{(3)}$
11. $3220_{(4)}$
12. $12003.223_{(4)}$
13. $3201.\ 231_{(4)}$
14. $343_{(5)}$
15. $10134_{(5)}$
16. $234_{(5)}$
17. $43210_{(5)}$
18. $3210.341_{(5)}$
19. $20014.4431_{(5)}$
20. $314.1003_{(5)}$
21. $45_{(6)}$
22. $4531_{(6)}$
23. $55.342_{(6)}$
24. $7612_{(8)}$
25. $5671_{(8)}$
26. $753.1041_{(8)}$
27. $820_{(9)}$
28. $765_{(9)}$
29. $2AD_{(16)}$
30. $AB2C_{(16)}$
31. $B3A_{(16)}$
32. $F2A.1DC_{(16)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Conversión de un número en base 10 a otra base $N_{(10)} \longrightarrow N_{(B)}$

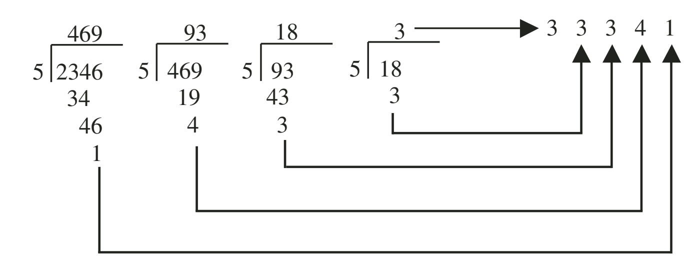
- **Método de los residuos.** Se divide el número decimal entre la base a la que se quiere convertir, el cociente se vuelve a dividir entre la base y así sucesivamente, hasta obtener un cociente menor a la base. Se toma el último cociente y cada uno de los residuos para formar el número.

**EJEMPLOS**

1 Cambia 2 $346_{(10)}$ a base 5.

**Solución**

Se divide 2 346 por 5 y con cada cociente se realiza lo mismo.

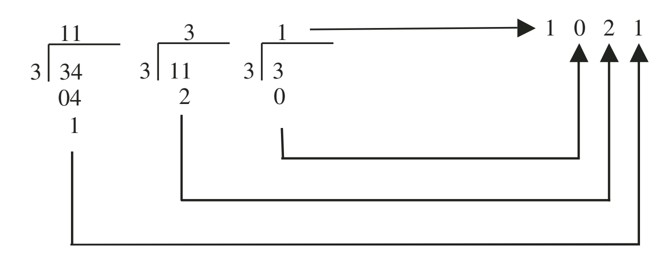



Por tanto, 2 $346_{(10)}$ equivale a $33341_{(5)}$

2 Cambia $34_{(10)}$ a base 3.

**Solución**

Se divide 34 entre 3 y con cada cociente se realiza lo mismo.




Entonces, $34_{(10)}$ equivale a $1021_{(3)}$

3 Transforma 44 $275_{(10)}$ a base 16.

**Solución**

Se divide 44 $275_{(10)}$ entre 16 y con cada cociente se realiza lo mismo.

```
        2 767        172          10 ──────────► A  C  F  3
16 |44275    16 |2767    16 | 172
    122          116           12
     107          047
      115          15
        3
```

Por tanto, 44 $275_{(10)}$ equivale a ACF3 $_{(16)}$

Cuando un número en base 10 tiene decimales, se procede de la misma manera con la parte entera, la parte fraccionaria se multiplica por la base hasta obtener cero en la parte fraccionaria o un suficiente número de decimales.

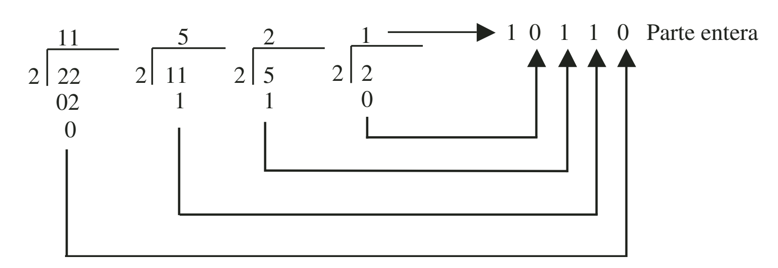
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $22.75_{(10)}$ a binario.

**Solución**

Se divide $22_{(10)}$ por 2 y con cada cociente se realiza lo mismo.



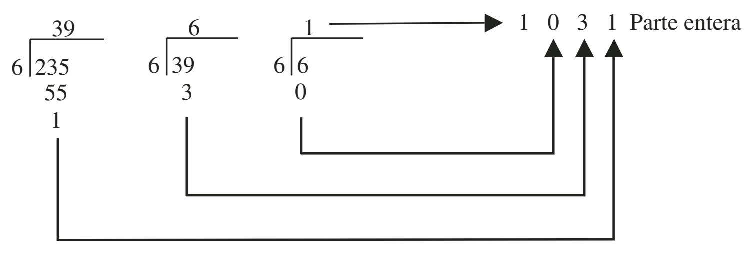

La parte decimal (0.75) se multiplica por 2, la parte fraccionaria se multiplica también por 2, así sucesivamente, hasta obtener 0 en la parte decimal, con los enteros en el orden de aparición se obtiene la parte decimal.

| | 1er. entero | 2do. entero | Resultado |
|---|---|---|---|
| $0.75 \times 2 = 1.5$ | **1** | | |
| $0.5 \times 2 = 1.0$ | | **1** | |
| | | | **.11** |

Por consiguiente, $22.75_{(10)}$ equivale a $10110.11_{(2)}$

2 Transforma $235.45_{(10)}$ a base 6.

**Solución**




| | 1er. entero | 2do. entero | 3er. entero | 4to. entero | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|
| $0.45 \times 6 = 2.7$ | **2** | | | | |
| $0.7 \times 6 = 4.2$ | | **4** | | | |
| $0.2 \times 6 = 1.2$ | | | **1** | | |
| $0.2 \times 6 = 1.2$ | | | | **1** | |
| | | | | | **.2411…** |

Por tanto, $235.45_{(10)}$ equivale a $1031.24\bar{1}_{(6)}$

- **Método de extracción de potencias.** Se elabora una tabla de potencias según la base y después se busca el número de veces que cabe alguna de las potencias en el número, se resta de dicho número, y así sucesivamente hasta que la diferencia sea 0.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cambia $925_{(10)}$ a base 4.

**Solución**

Se construye la tabla de potencias de 4

| |
|---|
| $4^{-2} = 0.0625$ |
| $4^{-1} = 0.25$ |
| $4^{0} = 1$ |
| $4^{1} = 4$ |
| $4^{2} = 16$ |
| $4^{3} = 64$ |
| $4^{4} = 256$ |
| $4^{5} = 1024$ |

| | | |
|---|---|---|
| **3** veces $4^4$ | 768 | 925 – 768 = 157 |
| **2** veces $4^3$ | 128 | 157 – 128 = 29 |
| **1** vez $4^2$ | 16 | 29 – 16 = 13 |
| **3** veces $4^1$ | 12 | 13 – 12 = 1 |
| **1** vez $4^0$ | 1 | 1 – 1 = 0 |

Por consiguiente, $925_{(10)}$ equivale a $32131_{(4)}$

## EJERCICIO 91

Convierte los siguientes números en forma decimal a la base indicada.

1. $15_{(10)}$ a base 2
2. $315_{(10)}$ a base 2
3. $13.75_{(10)}$ a base 2
4. $19.5_{(10)}$ a base 2
5. $0.625_{(10)}$ a base 2
6. $121.875_{(10)}$ a base 2
7. $10_{(10)}$ a base 3
8. $721_{(10)}$ a base 3
9. $53_{(10)}$ a base 4
10. $427_{(10)}$ a base 5
11. $37.84_{(10)}$ a base 5
12. $386.432_{(10)}$ a base 5
13. $213_{(10)}$ a base 6
14. $411_{(10)}$ a base 6
15. $97_{(10)}$ a base 7
16. $715_{(10)}$ a base 7
17. $63_{(10)}$ a base 8
18. $104_{(10)}$ a base 8
19. $350.1875_{(10)}$ a base 8
20. $28\,779.75_{(10)}$ a base 8
21. $140_{(10)}$ a base 9
22. $1\,075_{(10)}$ a base 9
23. $97021_{(10)}$ a base 9
24. $196_{(10)}$ a base 16
25. $358.0625_{(10)}$ a base 16
26. $21\,468.5_{(10)}$ a base 16

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**Relación entre el sistema binario, octal y hexadecimal.** La relación entre los sistemas, binario y octal es de 3, ya que $8 = 2^3$, esto quiere decir que a cada tres dígitos en el binario le corresponde un dígito del octal.

**Tabla de valores equivalentes**

| Decimal | Binario | Octal |
|---|---|---|
| 0 | 000 | 0 |
| 1 | 001 | 1 |
| 2 | 010 | 2 |
| 3 | 011 | 3 |
| 4 | 100 | 4 |
| 5 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 6 |
| 7 | 111 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 |

## Conversión de un número binario a octal $N_{(2)} \longrightarrow N_{(8)}$

Para hacer la conversión se separan los dígitos en grupos de 3 a partir del punto decimal (hacia la izquierda en la parte entera y a la derecha en la parte decimal), y se sustituye cada grupo por su equivalente en octal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte $11110011_{(2)}$ a base 8.

**Solución**

Se separan grupos de 3 dígitos de derecha a izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en octal.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 011 | 110 | 011 | Binario |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 3 | 6 | 3 | Octal |

Por tanto, $1111001_{(2)} = 363_{(8)}$

2 Cambia $1101111.110100_{(2)}$ a base 8.

**Solución**

Se separan grupos de 3 dígitos de derecha a izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en octal.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 001 | 101 | 111 | . | 110 | 100 | Binario |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| 1 | 5 | 7 | . | 6 | 4 | Octal |

Entonces, $1101111.110100_{(2)} = 157.64_{(8)}$

## Conversión de un número octal a binario $N_{(8)} \longrightarrow N_{(2)}$

Para convertir se sustituye cada dígito octal por sus 3 dígitos binarios equivalentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma $235_{(8)}$ a base 2.

**Solución**

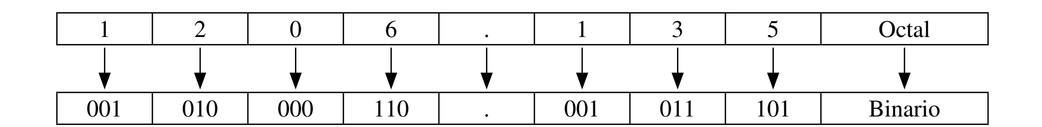
Se busca la equivalencia de cada dígito en base 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | Octal |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 010 | 011 | 101 | Binario |

Por consiguiente, $235_{(8)} = 10011101_{(2)}$

2 Transforma $1206.135_{(8)}$ a base 2.

**Solución**



| 1 | 2 | 0 | 6 | . | 1 | 3 | 5 | Octal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 001 | 010 | 000 | 110 | . | 001 | 011 | 101 | Binario |

Por tanto, $1206.135_{(8)} = 1010000110.001011101_{(2)}$

La relación entre el sistema binario y el hexadecimal es de 4, ya que $16 = 2^4$ esto quiere decir que a cada 4 dígitos en el binario le corresponde un dígito en el hexadecimal.

**Tabla de valores equivalentes**

| Decimal | Binario | Hexadecimal |
|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0 |
| 1 | 0001 | 1 |
| 2 | 0010 | 2 |
| 3 | 0011 | 3 |
| 4 | 0100 | 4 |
| 5 | 0101 | 5 |
| 6 | 0110 | 6 |
| 7 | 0111 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 |

| Decimal | Binario | Hexadecimal |
|---|---|---|
| 9 | 1001 | 9 |
| 10 | 1010 | *A* |
| 11 | 1011 | *B* |
| 12 | 1100 | *C* |
| 13 | 1101 | *D* |
| 14 | 1110 | *E* |
| 15 | 1111 | *F* |
| 16 | 10000 | 10 |
| 17 | 10001 | 11 |

## Conversión de un número binario a hexadecimal $N_{(2)} \longrightarrow N_{(16)}$

Para convertir se separan los dígitos en grupos de 4 a partir del punto decimal (hacia la izquierda en la parte entera y a la derecha en la parte fraccionaria), y se sustituyen por su equivalente en hexadecimal.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Convierte $110111110_{(2)}$ a hexadecimal.

**Solución**

Se separan grupos de 4 dígitos de derecha a izquierda, si para el último grupo hacen falta dígitos se colocan ceros a la izquierda y se busca en la tabla su equivalencia en hexadecimal.

| 0001 | 1011 | 1110 | Binario |
|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 1 | *B* | *E* | Hexadecimal |

Por tanto, $110111110_{(2)} = 1BE_{(16)}$

2 Cambia $11110011.011110101_{(2)}$ a base 16.

**Solución**

Se separan grupos de 4 dígitos de derecha a izquierda en la parte entera y en la parte decimal de izquierda a derecha, si faltan dígitos se colocan ceros a la derecha y se busca en la tabla su equivalencia en hexadecimal.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1111 | 0011 | . | 0111 | 1010 | 1000 | Binario |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| *F* | 3 | . | 7 | *A* | 8 | Hexadecimal |

Entonces, $11110011.011110101_{(2)} = F3.7A8_{(16)}$

## Conversión de un número hexadecimal a binario $N_{(16)} \longrightarrow N_{(2)}$

Para convertir se sustituye cada dígito hexadecimal por sus respectivos 4 dígitos binarios.

**EJEMPLOS**

1 Transforma $821.57_{(16)}$ a binario.

**Solución**

Se busca la equivalencia en base 2 de cada dígito.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 | . | 5 | 7 | Hexadecimal |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| 1000 | 0010 | 0001 | . | 0101 | 0111 | Binario |

Por consiguiente, $821.57_{(16)} = 100000100001.01010111_{(2)}$

2 Transforma $A5C.D4_{(16)}$ a binario.

**Solución**

Se busca la equivalencia en base 2 de cada dígito.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 5 | *C* | . | *D* | 4 | Hexadecimal |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| 1010 | 0101 | 1100 | . | 1101 | 0100 | Binario |

Por consiguiente, $A5C.D4_{(16)} = 101001011100.11010100$

- **Método del múltiplo.** Para explicar este método, analicemos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo**

Transforma $11110101_{(2)}$ a base 8.

**Solución**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Se separan en grupos de 3 en 3 de derecha a izquierda. | **011** | **110** | **101** |
| Se dan los dígitos 1, 2, 4, de derecha a izquierda a cada grupo. | 21 | 421 | 421 |

(*continúa*)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Se suman los dígitos que se encuentran en las posiciones de los unos. | 2 + 1 = 3 | 4 + 2 = 6 | 4 + 1 = 5 |
| Los resultados forman el número equivalente en base 8. | **3** | **6** | **5** |

Por tanto, $11110101_{(2)} = 365_{(8)}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cambia $534_{(8)}$ a binario.

**Solución**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Se colocan los dígitos que forman el número octal. | **5** | **3** | **4** |
| Se dan los dígitos 1, 2, 4, de derecha a izquierda a cada grupo, se busca que los dígitos al sumarlos den el dígito de la columna. | 421<br>4 + 1 = 5 | 421<br>2 + 1 = 3 | 421<br>4 + 0 = 4 |
| Se asigna 1 a los valores utilizados en la suma y ceros a los que no se utilizaron, y se forman grupos de 3 dígitos. | 421<br>101 | 421<br>011 | 421<br>100 |
| La unión de los grupos forman el equivalente a binario. | **101** | **011** | **100** |

Por consiguiente, $534_{(8)} = 101011100_{(2)}$

2 Cambia $1101101010_{(2)}$ a base 16.

**Solución**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Se separan en grupos de 4 en 4 de derecha a izquierda. | **0011** | **0110** | **1010** |
| Se dan los dígitos 1, 2, 4, 8, de derecha a izquierda, a cada grupo. | 8421 | 8421 | 8421 |
| Se suman los dígitos que se encuentran en las posiciones de los unos. | 2 + 1 = 3 | 4 + 2 = 6 | 8 + 2 = 10 = ***A*** |
| Los resultados forman el número equivalente en base 16 | **3** | **6** | ***A*** |

Entonces, $1101101010_{(2)} = 36A_{(16)}$

3 Convierte $AB5_{(16)}$ a binario.

**Solución**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Se colocan los dígitos que forman el número octal. | ***A*** | ***B*** | **5** |
| Se dan los dígitos 1, 2, 4, 8, de derecha a izquierda a cada grupo, se busca que los dígitos al sumarlos den el dígito de la columna. | 8421<br>8 + 2 = 10 | 8421<br>8 + 2 + 1 = 11 | 8421<br>4 + 1 = 5 |
| Se asigna 1 a los valores utilizados en la suma y ceros a los que no se utilizaron, y se forman grupos de 4 dígitos. | 8421<br>1010 | 8421<br>1011 | 8421<br>0101 |
| La unión de los grupos forman el equivalente a binario. | **1010** | **1011** | **0101** |

Por tanto, $AB5_{(16)} = 101010110101_{(2)}$

# EJERCICIO 92

Cambia los siguientes números a la base indicada.

1. $1110001111_{(2)}$ a base 8
2. $11011100011_{(2)}$ a base 8
3. $111001111.110101_{(2)}$ a base 8
4. $735_{(8)}$ a base 2
5. $1463_{(8)}$ a base 2
6. $45213_{(8)}$ a base 2
7. $56.43_{(8)}$ a base 2
8. $72.16_{(8)}$ a base 2
9. $412.67_{(8)}$ a base 2
10. $6017.2004_{(8)}$ a base 2
11. $10001101000_{(2)}$ a base 16
12. $100110110001.111010100011_{(2)}$ a base 16
13. $111110111000.01100010_{(2)}$ a base 16
14. $13AC_{(16)}$ a base 2
15. $D2F.AB_{(16)}$ a base 2
16. $7E8F.C5_{(16)}$ a base 2

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma con números en base distinta de 10

En la siguiente tabla los números remarcados indican el cambio de orden.

| Decimal | Binario | Base 3 | Base 4 | Base 5 | Octal | Hexadecimal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0001 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | **0010** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 0011 | **10** | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | **0100** | 11 | **10** | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 0101 | 12 | 11 | **10** | 5 | 5 |
| 6 | 0110 | **20** | 12 | 11 | 6 | 6 |
| 7 | 0111 | 21 | 13 | 12 | 7 | 7 |
| 8 | **1000** | 22 | **20** | 13 | **10** | 8 |
| 9 | 1001 | **100** | 21 | 14 | 11 | 9 |
| 10 | 1010 | 101 | 22 | **20** | 12 | *A* |
| 11 | 1011 | 102 | 23 | 21 | 13 | *B* |
| 12 | 1100 | 110 | **30** | 22 | 14 | *C* |
| 13 | 1101 | 111 | 31 | 23 | 15 | *D* |
| 14 | 1110 | 112 | 32 | 24 | 16 | *E* |
| 15 | 1111 | 120 | 33 | **30** | 17 | *F* |
| 16 | **10000** | 121 | **100** | 31 | **20** | **10** |
| 17 | 10001 | 122 | 101 | 32 | 21 | 11 |
| 18 | 10010 | **200** | 102 | 33 | 22 | 12 |
| 19 | 10011 | 201 | 103 | 34 | 23 | 13 |
| 20 | 10100 | 202 | 110 | **40** | 24 | 14 |

Para sumar 2 o más números se ubica el primer sumando en la tabla y se cuenta el número de unidades que representa el siguiente sumando, el número al cual se llega es el resultado.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de la operación $3_{(5)} + 4_{(5)}$.

**Solución**

En la tabla se ubica el $3_{(5)}$ y se cuentan 4 unidades.

| Base 5 | 0 | 1 | 2 | **3** | 4 | 10 | 11 | **12** | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

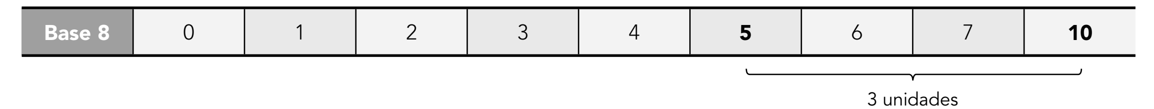
4 unidades

Después de 4 unidades se llega al número $12_{(5)}$ que es el resultado de la suma.
Por tanto, $3_{(5)} + 4_{(5)} = 12_{(5)}$

2 El resultado de $5_{(8)} + 3_{(8)}$ es:

**Solución**

En la tabla se ubica el $5_{(8)}$ y se cuentan 3 unidades.



| Base 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 | 7 | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|



Entonces, $5_{(8)} + 3_{(8)} = 10_{(8)}$

3 El resultado de $8_{(16)} + 5_{(16)}$ es:

**Solución**

En la tabla se ubica el $8_{(16)}$ y se cuentan 5 unidades

| Base 16 | ... | 6 | 7 | **8** | 9 | *A* | *B* | *C* | ***D*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

5 unidades

Por consiguiente, $8_{(16)} + 5_{(16)} = D_{(16)}$

4 El resultado de $3_{(5)} + 2_{(5)} + 1_{(5)}$ es:

**Solución**

En la tabla se ubica el $3_{(5)}$ y se cuentan 2 unidades.

| Base 5 | 0 | 1 | 2 | **3** | 4 | **10** | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

2 unidades

A partir del $10_{(5)}$ se cuenta una unidad.

| Base 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **10** | **11** | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

una unidad

Por tanto, $3_{(5)} + 2_{(5)} + 1_{(5)} = 11_{(5)}$

Para sumar números de 2 o más dígitos se procede de la misma forma que en el sistema decimal, se toma en cuenta el cambio de orden para contar las unidades que se acarrean.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve $234_{(5)} + 3_{(5)}$.

**Solución**

Se colocan los sumandos en forma vertical.

| | | |
|---|---|---|
| $234_{(5)}$<br>$+ \quad 3_{(5)}$<br>$2_{(5)}$ | $4_{(5)} + 3_{(5)} = 12_{(5)}$ | Se pone 2 y se acarrea **1** |
| **1**<br>$234_{(5)}$<br>$+ \quad 3_{(5)}$<br>242 | $3_{(5)} + 1_{(5)} = 4_{(5)}$ | Se pone 4 y se baja el 2 |

Por tanto, $234_{(5)} + 3_{(5)} = 242_{(5)}$

2 Resuelve $101_{(2)} + 11_{(2)}$.

**Solución**

Se colocan los sumandos en forma vertical.

| | | |
|---|---|---|
| $101_{(2)}$<br>$+ \quad 11_{(2)}$<br>0 | $1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$ | Se pone 0 y se acarrea **1** |
| **1**<br>$101_{(2)}$<br>$+ \quad 11_{(2)}$<br>00 | $\mathbf{1}_{(2)} + 0_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$ | Se pone 0 y se acarrea **1** |
| **11**<br>$101_{(2)}$<br>$+ \quad 11_{(2)}$<br>$1000_{(2)}$ | $\mathbf{1}_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$ | Se pone 10 |

Por consiguiente, $101_{(2)} + 11_{(2)} = 1000_{(2)}$

**3** Resuelve $234_{(5)} + 421_{(5)}$.

**Solución**

Se colocan los sumandos en forma vertical.

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{array}{r} \mathbf{1}\phantom{0} \\ 234_{(5)} \\ +\ 421_{(5)} \\ \hline 0 \end{array}$ | $4_{(5)} + 1_{(5)} = 10_{(5)}$ | Se pone 0 y se acarrea **1** |
| $\begin{array}{r} \mathbf{1}\phantom{00} \\ 234_{(5)} \\ +\ 421_{(5)} \\ \hline 10 \end{array}$ | $3_{(5)} + 2_{(5)} = 10_{(5)}$<br>$10_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 11_{(5)}$ | Se pone 1 y se acarrea **1** |
| $\begin{array}{r} \mathbf{1}\phantom{000} \\ 234_{(5)} \\ +\ 421_{(5)} \\ \hline 1210_{(5)} \end{array}$ | $2_{(5)} + 4_{(5)} = 11_{(5)}$<br>$11_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 12_{(5)}$ | Se pone 12 |

Por tanto, $234_{(5)} + 421_{(5)} = 1210_{(5)}$

**4** Resuelve $537_{(8)} + 45_{(8)}$.

**Solución**

Se colocan los sumandos en forma vertical.

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{array}{r} 537_{(8)} \\ +\ 45_{(8)} \\ \hline 4 \end{array}$ | $7_{(8)} + 5_{(8)} = 14_{(8)}$ | Se pone 4 y se acarrea **1** |
| $\begin{array}{r} \mathbf{1}\phantom{0} \\ 537_{(8)} \\ +\ 45_{(8)} \\ \hline 04 \end{array}$ | $3_{(8)} + 4_{(8)} = 7_{(8)}$<br>$7_{(8)} + \mathbf{1}_{(8)} = 10_{(8)}$ | Se pone 0 y se acarrea **1** |
| $\begin{array}{r} \mathbf{11}\phantom{0} \\ 537_{(8)} \\ +\ 45_{(8)} \\ \hline 604_{(8)} \end{array}$ | $5_{(8)} + \mathbf{1}_{(8)} = 6_{(8)}$ | Se pone 6 |

Por consiguiente, $537_{(8)} + 45_{(8)} = 604_{(8)}$

5 Determina la suma de: $3AC_{(16)} + 236_{(16)}$

**Solución**

Se colocan los sumandos en forma vertical.

| | | |
|---|---|---|
| $3AC_{(16)}$<br>$+\ 236_{(16)}$<br>$2_{(16)}$ | $C_{(16)} + 6_{(16)} = 12_{(16)}$ | Se pone 2 y se acarrea **1** |
| **1**<br>$3AC_{(16)}$<br>$+\ 236_{(16)}$<br>$E2$ | $A_{(16)} + 3_{(16)} = D_{(16)}$<br>$D_{(16)} + \mathbf{1}_{(16)} = E_{(16)}$ | Se pone *E* |
| $3AC_{(16)}$<br>$+\ 236_{(16)}$<br>$5E2_{(16)}$ | $3_{(16)} + 2_{(16)} = 5_{(16)}$ | Se pone 5 |

Entonces, $3AC_{(16)} + 236_{(16)} = 5E2_{(16)}$

6 Calcula la suma de: $4762_{(8)} + 1304_{(8)} + 546_{(8)}$

**Solución**

Se colocan los sumandos en forma vertical.

| | | |
|---|---|---|
| $4762_{(8)}$<br>$1304_{(8)}$<br>$+\ 546_{(8)}$<br>4 | $2_{(8)} + 4_{(8)} + 6_{(8)} = 14_{(8)}$ | Se pone 4 y se acarrea **1** |
| **1**<br>$4762_{(8)}$<br>$1304_{(8)}$<br>$+\ 546_{(8)}$<br>34 | $1_{(8)} + 6_{(8)} + 0_{(8)} + 4_{(8)} = 13_{(8)}$ | Se pone 3 y se acarrea **1** |
| **11**<br>$4762_{(8)}$<br>$1304_{(8)}$<br>$+\ 546_{(8)}$<br>034 | $1_{(8)} + 7_{(8)} + 3_{(8)} + 5_{(8)} = 20_{(8)}$ | Se pone 0 y se acarrea **2** |
| **211**<br>$4762_{(8)}$<br>$1304_{(8)}$<br>$+\ 546_{(8)}$<br>$7034_{(8)}$ | $\mathbf{2}_{(8)} + 4_{(8)} + 1_{(8)} = 7_{(8)}$ | Se pone 7 |

Entonces, $4762_{(8)} + 1304_{(8)} + 546_{(8)} = 7034_{(8)}$

# EJERCICIO 93

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $$\begin{array}{r} 10111_{(2)} \\ +\,11100_{(2)} \\ 11001_{(2)} \\ \hline \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} 11011101_{(2)} \\ +\quad 11011_{(2)} \\ 1111101_{(2)} \\ \hline \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} 1011111_{(2)} \\ +\quad 10011_{(2)} \\ 1101101_{(2)} \\ \hline \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} 11011111_{(2)} \\ +\,1000111_{(2)} \\ 1110111_{(2)} \\ 11101_{(2)} \\ \hline \end{array}$$

5. $$\begin{array}{r} 1022_{(3)} \\ +\,2012_{(3)} \\ 211_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

6. $$\begin{array}{r} 21022_{(3)} \\ +\quad 2202_{(3)} \\ 211_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

7. $$\begin{array}{r} 221122_{(3)} \\ +\quad 12010_{(3)} \\ 1212_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

8. $$\begin{array}{r} 22011022_{(3)} \\ +\quad 112012_{(3)} \\ 200211_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

9. $$\begin{array}{r} 33213_{(4)} \\ +\,23012_{(4)} \\ 321_{(4)} \\ \hline \end{array}$$

10. $$\begin{array}{r} 33213_{(4)} \\ +\quad 312_{(4)} \\ 101_{(4)} \\ \hline \end{array}$$

11. $$\begin{array}{r} 223013213_{(4)} \\ +\quad 1023012_{(4)} \\ 31322_{(4)} \\ \hline \end{array}$$

12. $$\begin{array}{r} 2133213_{(4)} \\ +\quad 23322_{(4)} \\ 30321_{(4)} \\ \hline \end{array}$$

13. $$\begin{array}{r} 432_{(5)} \\ +\,301_{(5)} \\ 111_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

14. $$\begin{array}{r} 1432_{(5)} \\ +\,2312_{(5)} \\ 31_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

15. $$\begin{array}{r} 21402_{(5)} \\ +\quad 4302_{(5)} \\ 1011_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

16. $$\begin{array}{r} 412342_{(5)} \\ +\quad 30122_{(5)} \\ 1133_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

17. $$\begin{array}{r} 60704_{(8)} \\ +\quad 5077_{(8)} \\ 222_{(8)} \\ \hline \end{array}$$

18. $$\begin{array}{r} 74532_{(8)} \\ +\,64301_{(8)} \\ 52413_{(8)} \\ \hline \end{array}$$

19. $$\begin{array}{r} 56721_{(8)} \\ +\quad 4576_{(8)} \\ 756421_{(8)} \\ \hline \end{array}$$

20. $$\begin{array}{r} 463721_{(8)} \\ +\quad 75624_{(8)} \\ 421756_{(8)} \\ \hline \end{array}$$

21. $$\begin{array}{r} 472_{(16)} \\ +\,591_{(16)} \\ 65_{(16)} \\ \hline \end{array}$$

22. $$\begin{array}{r} 512_{(16)} \\ +\,AC1_{(16)} \\ 4F_{(16)} \\ \hline \end{array}$$

23. $$\begin{array}{r} 1576_{(16)} \\ +\,A9F1_{(16)} \\ 54CF_{(16)} \\ \hline \end{array}$$

24. $$\begin{array}{r} A4FB2_{(16)} \\ +\,131BC_{(16)} \\ 150F9_{(16)} \\ \hline \end{array}$$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Resta con números en base distinta de 10

En la resta se recomienda usar la tabla de equivalencias y se procede a resolver como una resta en base 10.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina el resultado de la operación $24_{(5)} - 14_{(5)}$.

**Solución**

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $14_{(5)}$ a $24_{(5)}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base 5** | ... | 13 | **14** | 20 | 21 | 22 | 23 | **24** | 30 |

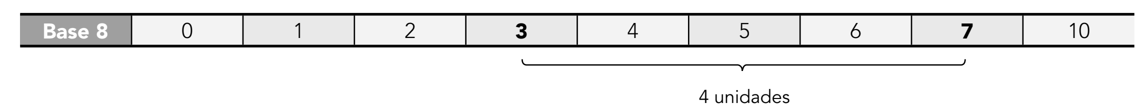
5 unidades

Por tanto, $24_{(5)} - 14_{(5)} = 10_{(5)}$

2 Encuentra el resultado de la operación $7_{(8)} - 3_{(8)}$.

**Solución**

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(8)}$ a $7_{(8)}$



| Base 8 | 0 | 1 | 2 | **3** | 4 | 5 | 6 | **7** | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

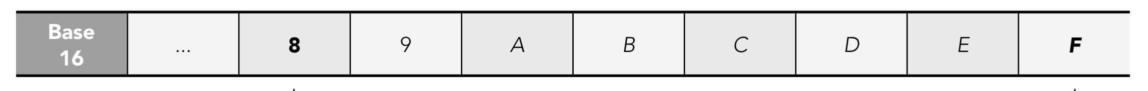
4 unidades

Por tanto, $7_{(8)} - 3_{(8)} = 4_{(8)}$

3 El resultado de $F_{(16)} - 8_{(16)}$ es:

**Solución**

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $8_{(16)}$ a $F_{(16)}$



| Base 16 | ... | **8** | 9 | A | B | C | D | E | **F** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

7 unidades

Por consiguiente, $F_{(16)} - 8_{(16)} = 7_{(16)}$

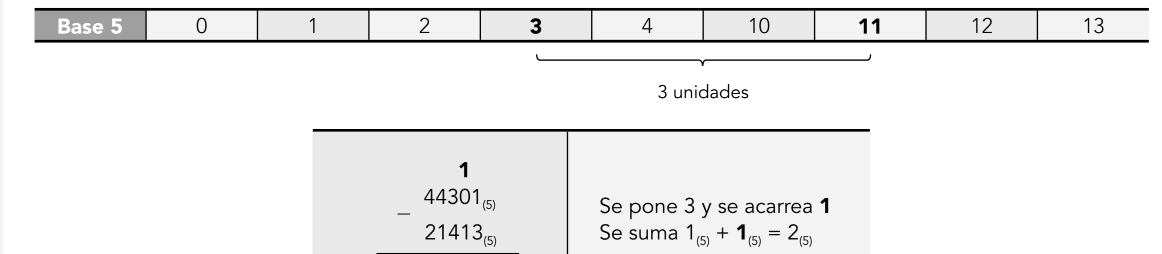
Para restar números de 2 o más dígitos se colocan las cantidades en forma vertical y se procede como en la resta en base 10.

EJEMPLOS

1 El valor de la diferencia $44301_{(5)} - 21413_{(5)}$ es:

**Solución**

Se colocan los números en forma vertical.



$$\begin{array}{r} 44301_{(5)} \\ -\ 21413_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

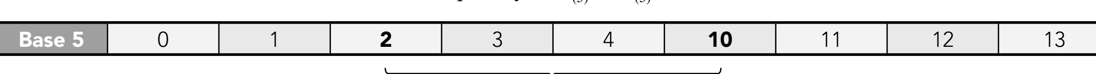
Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(5)}$ a $11_{(5)}$

| Base 5 | 0 | 1 | 2 | **3** | 4 | 10 | **11** | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

3 unidades

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 44301_{(5)} \\ -\ 21413_{(5)} \\ \hline 3 \end{array}$ | Se pone 3 y se acarrea **1**<br>Se suma $1_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 2_{(5)}$ |

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $10_{(5)}$

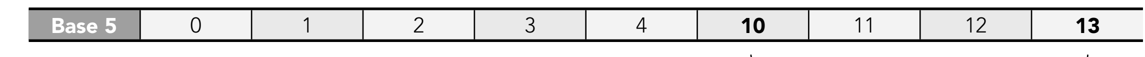


| Base 5 | 0 | 1 | **2** | 3 | 4 | **10** | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

3 unidades

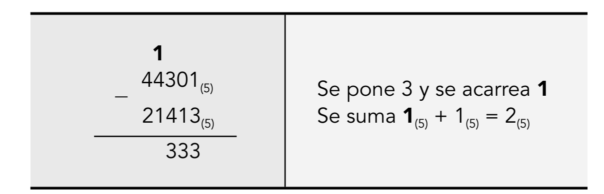
| | |
|---|---|
| **1**<br>$44301_{(5)}$<br>$-\ 21413_{(5)}$<br>33 | Se pone 3 y se acarrea **1**<br>Se suma $\mathbf{1}_{(5)} + 4_{(5)} = 10_{(5)}$ |

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $10_{(5)}$ a $13_{(5)}$



| Base 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **10** | 11 | 12 | **13** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

3 unidades

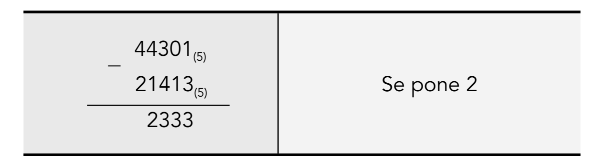


| | |
|---|---|
| **1**<br>$44301_{(5)}$<br>$-\ 21413_{(5)}$<br>333 | Se pone 3 y se acarrea **1**<br>Se suma $\mathbf{1}_{(5)} + 1_{(5)} = 2_{(5)}$ |

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $4_{(5)}$

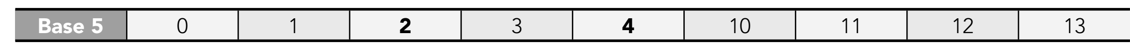
| Base 5 | 0 | 1 | **2** | 3 | **4** | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

2 unidades



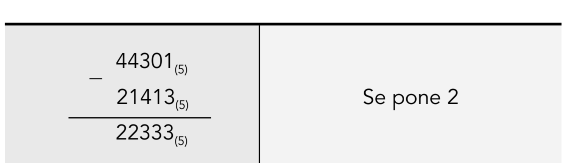
| | |
|---|---|
| $44301_{(5)}$<br>$-\ 21413_{(5)}$<br>2333 | Se pone 2 |

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $2_{(5)}$ a $4_{(5)}$



| Base 5 | 0 | 1 | **2** | 3 | **4** | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

2 unidades



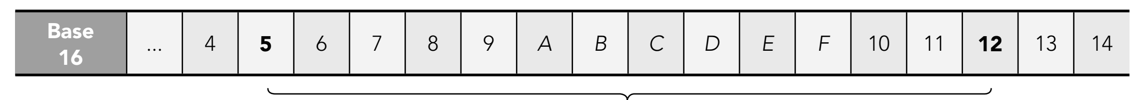
| | |
|---|---|
| $44301_{(5)}$<br>$-\ 21413_{(5)}$<br>$22333_{(5)}$ | Se pone 2 |

Por tanto, $44301_{(5)} - 21413_{(5)} = 22333_{(5)}$

2 ¿Cuál es la diferencia de: $DE2_{(16)} - A25_{(16)}$?

**Solución**

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $5_{(16)}$ a $12_{(16)}$

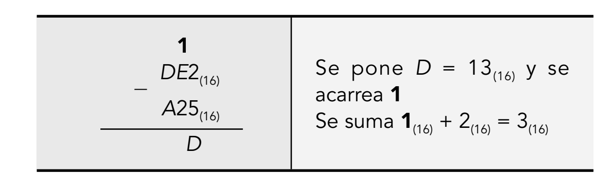


| Base 16 | ... | 4 | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | **12** | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

13 unidades

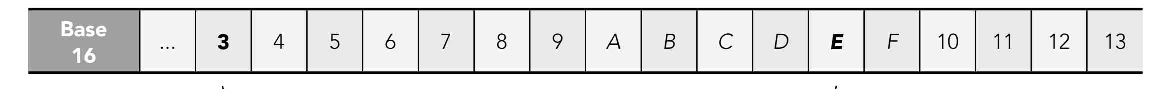
(*continúa*)

(*continuación*)



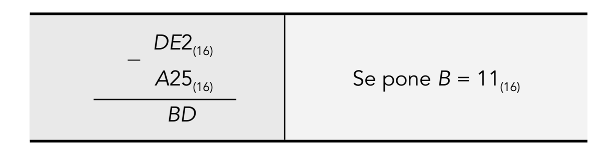
| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline D \end{array}$ | Se pone $D = 13_{(16)}$ y se acarrea **1**<br>Se suma $\mathbf{1}_{(16)} + 2_{(16)} = 3_{(16)}$ |

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $3_{(16)}$ a $E_{(16)}$



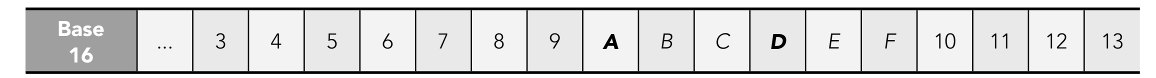
| Base 16 | ... | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | **E** | F | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

11 unidades



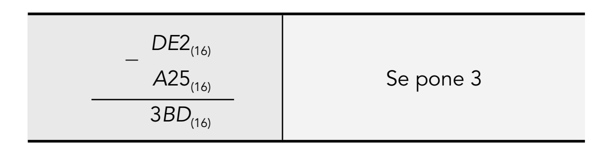
| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline BD \end{array}$ | Se pone $B = 11_{(16)}$ |

Se busca en la tabla el número de unidades que hay de $A_{(16)}$ a $D_{(16)}$



| Base 16 | ... | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | **A** | B | C | **D** | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

3 unidades



| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} DE2_{(16)} \\ -\ A25_{(16)} \\ \hline 3BD_{(16)} \end{array}$ | Se pone 3 |

Por consiguiente, $DE2_{(16)} - A25_{(16)} = 3BD_{(16)}$

## EJERCICIO **94**

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $\begin{array}{r} 111000_{(2)} \\ -\ 10101_{(2)} \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 34213_{(5)} \\ -\ 4432_{(5)} \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 75451_{(8)} \\ -\ 57627_{(8)} \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 110111011_{(2)} \\ -\ 110001_{(2)} \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 420444_{(5)} \\ -\ 4433_{(5)} \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 769_{(16)} \\ -\ 3AB_{(16)} \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 11011101_{(2)} \\ -\ 1111011_{(2)} \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 5436_{(8)} \\ -\ 333_{(8)} \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 3ABC_{(16)} \\ -\ 2AB_{(16)} \\ \hline \end{array}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Multiplicación con números en base distinta de 10

Así como el sistema decimal tiene sus tablas de multiplicar, a cada sistema se le puede construir su tabla.

**Base 2 (Binario)**

| × | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

**Base 3 (Ternario)**

| × | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 11 |

**Base 4 (Cuaternario)**

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 10 | 12 |
| 3 | 0 | 3 | 12 | 21 |

**Base 5 (Quinario)**

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 11 | 13 |
| 3 | 0 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 4 | 0 | 4 | 13 | 22 | 31 |

**Base 8 (Octal)**

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 11 | 14 | 17 | 22 | 25 |
| 4 | 0 | 4 | 10 | 14 | 20 | 24 | 30 | 34 |
| 5 | 0 | 5 | 12 | 17 | 24 | 31 | 36 | 43 |
| 6 | 0 | 6 | 14 | 22 | 30 | 36 | 44 | 52 |
| 7 | 0 | 7 | 16 | 25 | 34 | 43 | 52 | 61 |

**Base 16 (Hexadecimal)**

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | *A* | *C* | *E* | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 1*A* | 1*C* | 1*E* |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | *C* | *F* | 12 | 15 | 18 | 1*B* | 1*E* | 21 | 24 | 27 | 2*A* | 2*D* |
| 4 | 0 | 4 | 8 | *C* | 10 | 14 | 18 | 1*C* | 20 | 24 | 28 | 2*C* | 30 | 34 | 38 | 3*C* |
| 5 | 0 | 5 | *A* | *F* | 14 | 19 | 1*E* | 23 | 28 | 2*D* | 32 | 37 | 3*C* | 41 | 46 | 4*B* |
| 6 | 0 | 6 | *C* | 12 | 18 | 1*E* | 24 | 2*A* | 30 | 36 | 3*C* | 42 | 48 | 4*E* | 54 | 5*A* |
| 7 | 0 | 7 | *E* | 15 | 1*C* | 23 | 2*A* | 31 | 38 | 3*F* | 46 | 4*D* | 54 | 5*B* | 62 | 69 |
| 8 | 0 | 8 | 10 | 18 | 20 | 28 | 30 | 38 | 40 | 48 | 50 | 58 | 60 | 68 | 70 | 78 |
| 9 | 0 | 9 | 12 | 1*B* | 24 | 2*D* | 36 | 3*F* | 48 | 51 | 5*A* | 63 | 6*C* | 75 | 7*E* | 87 |
| *A* | 0 | *A* | 14 | 1*E* | 28 | 32 | 3*C* | 46 | 50 | 5*A* | 64 | 6*E* | 78 | 82 | 8*C* | 96 |
| *B* | 0 | *B* | 16 | 21 | 2*C* | 37 | 42 | 4*D* | 58 | 63 | 6*E* | 79 | 84 | 8*F* | 9*A* | *A*5 |
| *C* | 0 | *C* | 18 | 24 | 30 | 3*C* | 48 | 54 | 60 | 6*C* | 78 | 84 | 90 | 9*C* | *A*8 | *B*4 |
| *D* | 0 | *D* | 1*A* | 27 | 34 | 41 | 4*E* | 5*B* | 68 | 75 | 82 | 8*F* | 9*C* | *A*9 | *B*6 | *C*3 |
| *E* | 0 | *E* | 1*C* | 2*A* | 38 | 46 | 54 | 62 | 70 | 7*E* | 8*C* | 9*A* | *A*8 | *B*6 | *C*4 | *D*2 |
| *F* | 0 | *F* | 1*E* | 2*D* | 3*C* | 4*B* | 5*A* | 69 | 78 | 87 | 96 | *A*5 | *B*4 | *C*3 | *D*2 | *E*1 |

Para multiplicar números de 2 o más dígitos se procede de igual forma que en el sistema decimal se toma en cuenta la tabla correspondiente a la base.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $12_{(3)} \times 2_{(3)}$.

**Solución**

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline 1 \end{array}$ | $2_{(3)} \times 2_{(3)} = 11_{(3)}$ | Se pone 1 y se acarrea **1** |
| $\begin{array}{r} 12_{(3)} \\ \times \quad 2_{(3)} \\ \hline 101_{(3)} \end{array}$ | $2_{(3)} \times 1_{(3)} = 2_{(3)}$<br>$2_{(3)} + \mathbf{1}_{(3)} = 10_{(3)}$ | Se pone 10 |

Por tanto, $12_{(3)} \times 2_{(3)} = 101_{(3)}$

2 Encuentra el resultado de $1234_{(5)} \times 3_{(5)}$.

**Solución**

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 2 \end{array}$ | $3_{(5)} \times 4_{(5)} = 22_{(5)}$ | Se pone 2 y se acarrea **2** |
| $\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 12 \end{array}$ | $3_{(5)} \times 3_{(5)} = 14_{(5)}$<br>$14_{(5)} + \mathbf{2}_{(5)} = 21_{(5)}$ | Se pone 1 y se acarrea **2** |
| $\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 312_{(5)} \end{array}$ | $3_{(5)} \times 2_{(5)} = 11_{(5)}$<br>$11_{(5)} + \mathbf{2}_{(5)} = 13_{(5)}$ | Se pone 3 y se acarrea **1** |
| $\begin{array}{r} 1234_{(5)} \\ \times \quad 3_{(5)} \\ \hline 4312_{(5)} \end{array}$ | $3_{(5)} \times 1_{(5)} = 3_{(5)}$<br>$3_{(5)} + \mathbf{1}_{(5)} = 4_{(5)}$ | Se pone 4 |

Por tanto, $1234_{(5)} \times 3_{(5)} = 4312_{(5)}$

3 El resultado de $324_{(16)} \times 5_{(16)}$ es:

**Solución**

Se colocan los factores en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 324_{(16)} \\ \times \quad 5_{(16)} \\ \hline \end{array}$$

| | | |
|---|---|---|
| $324_{(16)}$<br>$\times\ 5_{(16)}$<br>$4$ | $5_{(16)} \times 4_{(16)} = 14_{(16)}$ | Se pone 4 y se acarrea **1** |
| $324_{(16)}$<br>$\times\ 5_{(16)}$<br>$B4$ | $5_{(16)} \times 2_{(16)} = A_{(16)}$<br>$A_{(16)} + 1_{(16)} = B_{(16)}$ | Se pone *B* |
| $324_{(16)}$<br>$\times\ 5_{(16)}$<br>$FB4_{(16)}$ | $5_{(16)} \times 3_{(16)} = F_{(16)}$ | Se pone *F* |

Por tanto, $324_{(16)} \times 5_{(16)} = FB4_{(16)}$

4 Resuelve $527_{(8)} \times 423_{(8)}$.

**Solución**

Se multiplica del mismo modo que en el sistema decimal, sólo que con la tabla de multiplicar del sistema octal.

$$\begin{array}{r} 527_{(8)} \\ \times\, 423_{(8)} \\ \hline 2005\phantom{_{(8)}} \\ 1256\phantom{0_{(8)}} \\ 2534\phantom{00_{(8)}} \\ \hline 270165_{(8)} \end{array}$$

Por consiguiente, $527_{(8)} \times 423_{(8)} = 270165_{(8)}$

5 Realiza el producto de: $3AC_{(16)} \times B2_{(16)}$.

**Solución**

$$\begin{array}{r} 3AC_{(16)} \\ B2_{(16)} \\ \hline 758\phantom{_{(16)}} \\ 2864\phantom{0_{(16)}} \\ \hline 28D98_{(16)} \end{array}$$

Finalmente, $3AC_{(16)} \times B2_{(16)} = 28D98_{(16)}$

# EJERCICIO 95

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $11011_{(2)} \times 111_{(2)}$

2. $110101_{(2)} \times 101_{(2)}$

3. $2112_{(3)} \times 21_{(3)}$

4. $23013_{(4)} \times 302_{(4)}$

5. $23012_{(4)} \times 321_{(4)}$

6. $2301_{(5)} \times 344_{(5)}$

7. $5401_{(8)} \times 543_{(8)}$

8. $5641_{(8)} \times 546_{(8)}$

9. $67124_{(8)} \times 315_{(8)}$

10. $1047_{(8)} \times 7601_{(8)}$

11. $A4C_{(16)} \times 2B_{(16)}$

12. $AB2_{(16)} \times 3A_{(16)}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## División con números en base distinta de 10

Se utilizan las tablas de multiplicar y se procede de la misma forma que en el sistema decimal.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Resuelve $312_{(4)} \div 2_{(4)}$.

**Solución**

| | |
|---|---|
| Cociente: 1; $2_{(4)}\overline{)312_{(4)}}$; −2; 11 | $2_{(4)} \times 1_{(4)} = 2_{(4)}$<br>Se resta de la primera cifra del dividendo y se baja la siguiente cifra |
| Cociente: 12; $2_{(4)}\overline{)312_{(4)}}$; −2; 11; −10; 012 | $2_{(4)} \times 2_{(4)} = 10_{(4)}$<br>Se resta de $11_{(4)}$ y se baja la siguiente cifra |
| Cociente: 123; $2_{(4)}\overline{)312_{(4)}}$; −2; 11; −10; 012; −12; 0 | $2_{(4)} \times 3_{(4)} = 12_{(4)}$<br>Se resta de $12_{(4)}$ |

Entonces, $312_{(4)} \div 2_{(4)} = 123_{(4)}$

2 Resuelve $421_{(5)} \div 3_{(5)}$.

**Solución**

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r\|l} & 1 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \end{array}$ | $3_{(5)} \times 1_{(5)} = 3_{(5)}$ Se resta de la primera cifra del dividendo y se baja la siguiente cifra |
| $\begin{array}{r\|l} & 12 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \\ & -11 \\ \hline & 011 \end{array}$ | $2_{(5)} \times 3_{(5)} = 11_{(5)}$ Se resta de $12_{(5)}$ y se baja la siguiente cifra |
| $\begin{array}{r\|l} & 122 \\ \hline 3_{(5)} & 421_{(5)} \\ & -3 \\ \hline & 12 \\ & -11 \\ \hline & 011 \\ & -11 \\ \hline & 0 \end{array}$ | $2_{(5)} \times 3_{(5)} = 11_{(5)}$ Se resta de $11_{(5)}$ |

Entonces, $421_{(5)} \div 3_{(5)} = 122_{(5)}$.

3 Resuelve $5272_{(8)} \div 24_{(8)}$

**Solución**

$$\begin{array}{r|l} & 211 \\ \hline 24_{(8)} & 5272_{(8)} \\ & -50 \\ \hline & 27 \\ & -24 \\ \hline & 32 \\ & -24 \\ \hline & 06 \end{array}$$

Por tanto, $5272_{(8)} \div 24_{(8)} = 211_{(8)}$ y el residuo es $6_{(8)}$

4 Resuelve $4D0D_{(16)} \div 19_{(16)}$.

**Solución**

$$\begin{array}{r|l} & 315 \\ \hline 19_{(16)} & 4D0D_{(16)} \\ & -4B \\ \hline & 020 \\ & -19 \\ \hline & 07D \\ & -7D \\ \hline & 0 \end{array}$$

Por tanto, $4D0D_{(16)} \div 19_{(16)} = 315_{(16)}$

# EJERCICIO 96

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $10_{(2)}\overline{)1100_{(2)}}$
2. $11_{(2)}\overline{)100111_{(2)}}$
3. $101_{(2)}\overline{)100100111_{(2)}}$
4. $10_{(3)}\overline{)2110_{(3)}}$
5. $21_{(3)}\overline{)102221_{(3)}}$
6. $23_{(4)}\overline{)20123_{(4)}}$
7. $31_{(4)}\overline{)322322_{(4)}}$
8. $23_{(5)}\overline{)21233_{(5)}}$
9. $43_{(5)}\overline{)1104240_{(5)}}$
10. $6_{(8)}\overline{)56026_{(8)}}$
11. $32_{(8)}\overline{)6666_{(8)}}$
12. $37_{(8)}\overline{)7345_{(8)}}$
13. $11_{(16)}\overline{)154_{(16)}}$
14. $23_{(16)}\overline{)B36_{(16)}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Sistemas antiguos de numeración

Hemos visto los sistemas de numeración que más se utilizan en la actualidad; sin embargo, la necesidad que el hombre ha tenido de contar desde que existe, lo llevó a inventar otros sistemas, los cuales en su mayoría ya no se utilizan.

### Sistema de numeración maya

Sistema posicional en el que se utiliza el principio aditivo, tiene agrupamientos de 20 en 20 (vigesimal), utiliza el cero y se considera muy avanzado para su época.

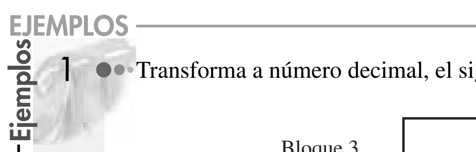
**Simbología**

= **cero** = **uno** = **Cinco**

Los números del 0 al 19 se representan de la siguiente manera:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |

Para representar números mayores que 20 se utilizan bloques acomodados verticalmente, de tal forma que las cantidades en cada bloque se multiplican por potencias de 20, es decir, el primer bloque por $20^0 = 1$, el segundo bloque por $20^1 = 20$, el tercer bloque por $20^2 = 400$, etcétera.



## EJEMPLOS

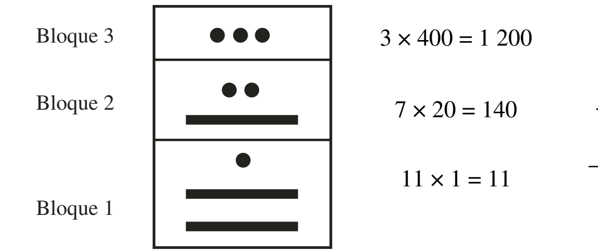
1 Transforma a número decimal, el siguiente arreglo de bloques:

| | |
|---|---|
| Bloque 3 | $6 \times 400 = 2\,400$ |
| Bloque 2 | $0 \times 20 = 0$ |
| Bloque 1 | $7 \times 1 = 7$ |

$$2\,400 + 0 + 7 = 2\,407$$

Por tanto, el resultado es 2 407

2 ¿Qué número decimal representa el siguiente arreglo de bloques?



| | |
|---|---|
| Bloque 3 | $3 \times 400 = 1\,200$ |
| Bloque 2 | $7 \times 20 = 140$ |
| Bloque 1 | $11 \times 1 = 11$ |

$$1\,200 + 140 + 11 = 1\,351$$

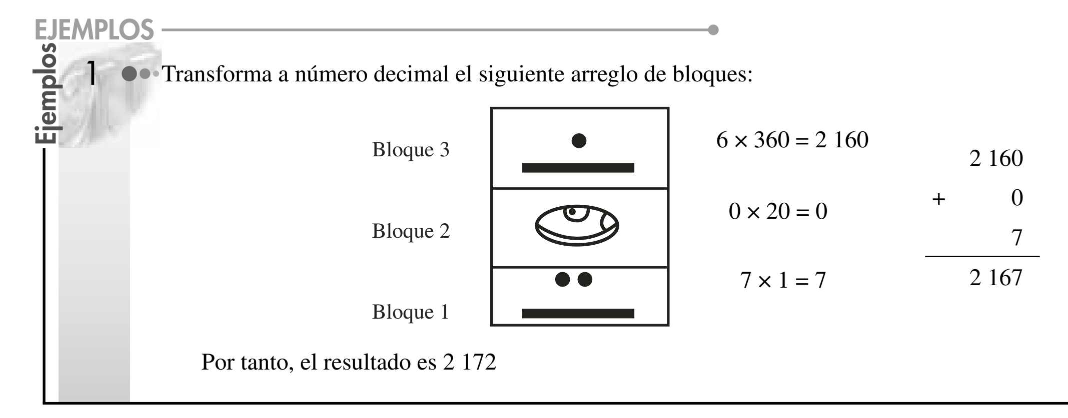
Finalmente, el resultado es 1 351

El sistema de numeración maya tiene una relación astronómica, que tomaba como unidad más simple un día (kin), 20 kines formaban un uinal (mes), 18 uinales formaban un tun (360 días = 1 año), 20 tunes un katún, un ciclo 144 000 días y 20 ciclos formaban un gran ciclo (2 880 000 días).

Lo anterior indica que cada bloque se tenía que multiplicar por 1, 20, 360, 7 200,… respectivamente.

EJEMPLOS

1 Transforma a número decimal el siguiente arreglo de bloques:

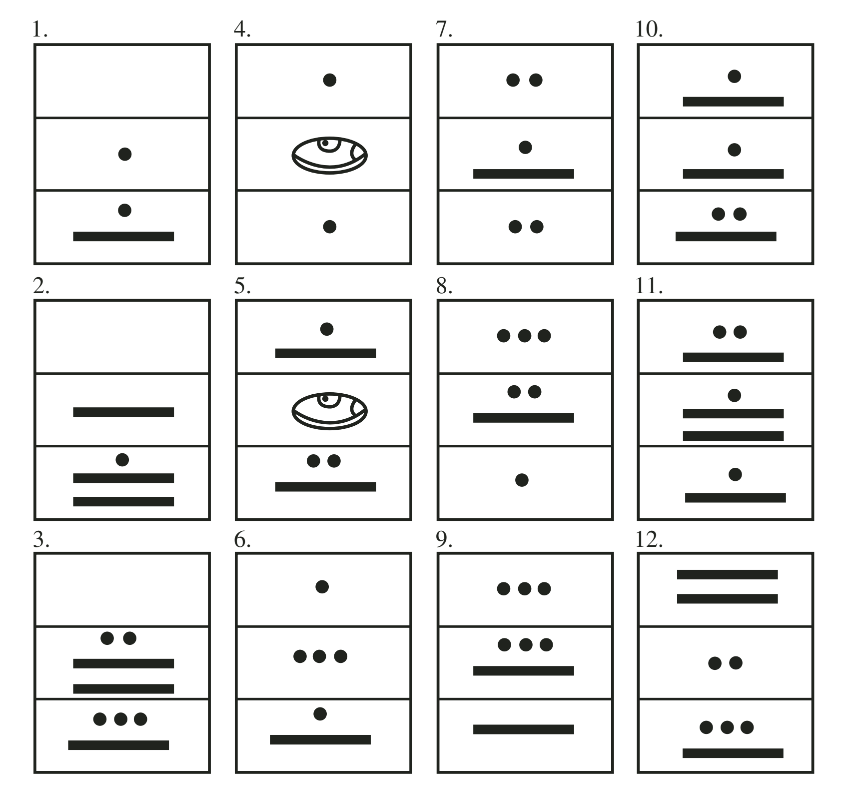



Por tanto, el resultado es 2 172

Sin embargo, para efectos prácticos, se multiplica por potencias de 20, es decir, $20^0 = 1$, $20^1 = 20$, $20^2 = 400$, $20^3 = 8\ 000$, etcétera.

## EJERCICIO 97

Transforma los siguientes números mayas a numeración decimal, emplea potencias de 20:




Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**Ejemplo**

Convierte 3 528 a número maya.

**Solución**

Bloque 3: se obtiene al dividir 3 528 entre 400 y el cociente se transforma a número maya.

$$400\,\overline{\big)\,3\,528}\quad \text{cociente } 8,\ \text{residuo } 328$$

8 = ●●● con una barra

Bloque 2: el residuo 328 se divide entre 20 y el cociente se transforma a número maya.

$$20\,\overline{\big)\,328}\quad \text{cociente } 16;\ 128;\ \text{residuo } 8$$

16 = ● con tres barras

Bloque 1: el residuo 8 se transforma a número maya.

8 = ●●● con una barra

El resultado final se obtiene al acomodar los bloques

3 528 =

| | |
|---|---|
| Bloque 3 | ●●● con una barra |
| Bloque 2 | ● con tres barras |
| Bloque 1 | ●●● con una barra |

## EJERCICIO 98

Transforma los siguientes a numeración maya, emplea potencias de 20:

1. 25
2. 146
3. 200
4. 223
5. 467
6. 540
7. 727
8. 1 492
9. 2 006
10. 6 857
11. 9 435
12. 12 007

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Sistema de numeración babilónico

Es un sistema aditivo en base 10 hasta el 60 y posicional con base 60 para cantidades superiores. Sus símbolos se llaman cuñas.

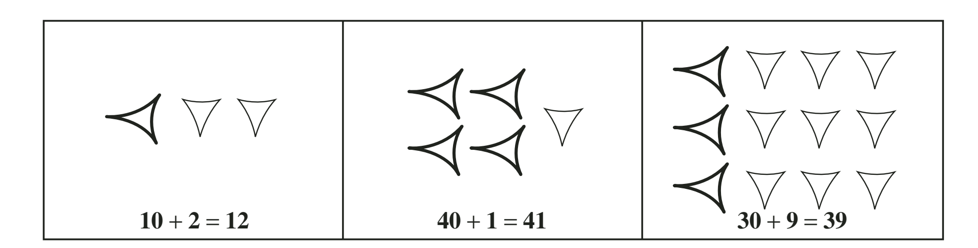
- **Simbología**

= **1** = **10**

Como el sistema era aditivo se podían formar los números del 1 al 9

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| **5** | **6** | . . . | **9** |

Para números mayores de 10




A partir de 60 se utilizaba el sistema posicional, en donde cada grupo de signos representaba el número de unidades.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

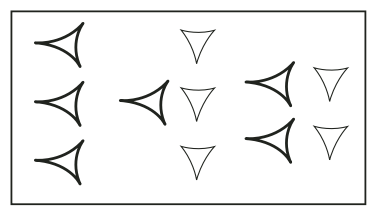
1 Transforma el siguiente bloque a número decimal.

(20 × 3 600) + (21 × 60) + (12)

$$\begin{array}{r} 72\,000 \\ +\quad 1\,260 \\ 12 \\ \hline 73\,272 \end{array}$$

Por tanto, el número que representa al bloque es 73 272

2 Transforma el siguiente bloque a número decimal.



(30 × 3 600) + (13 × 60) + (22)

| | |
|---|---|
| | 108 000 |
| + | 780 |
| | 22 |
| | 108 802 |

Por consiguiente, el número que representa al bloque es 108 802

## EJERCICIO **99**

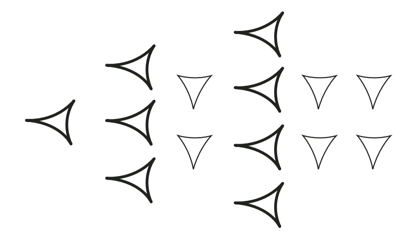
Convierte a numeración decimal.

1.

4.

2.

5.



3.

6.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa el número 134 en numeración babilónica.

**Solución**

Se divide 134 por 60

$$60\,\overline{)\,134\,}\quad \text{cociente } 2,\ \text{residuo } 14$$

El número 134 = 60 × **2** + **14**

Con el cociente y el último residuo se forma el bloque de símbolos.

| 2 | 14 |
|---|---|
| ▽ ▽ | ◁ ▽ ▽ ▽ ▽ |

2 Representa el número 4 532 en numeración babilónica.

**Solución**

Se divide 4 532 por 3 600, el residuo se divide por 60

$$3\,600\,\overline{)\,4\,532\,}\quad \text{cociente } 1,\ \text{residuo } 932 \qquad 60\,\overline{)\,932\,}\quad 332,\ \text{cociente } 15,\ \text{residuo } 32$$

El número 4 532 = 3 600 × **1** + 60 × **15** + **32**

Con los cocientes y el último residuo se forma el bloque de símbolos.

| 1 | 15 | 32 |
|---|---|---|
| ▽ | ◁ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ | ◁ ◁ ◁ ▽ ▽ |

## EJERCICIO **100**

Convierte a numeración babilónica.

1. 5
2. 15
3. 80
4. 125
5. 890
6. 2 006
7. 7 981
8. 40 815
9. 44 102
10. 73 874

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Sistema de numeración romano

Sistema que se basa en 3 principios: aditivo, sustractivo y multiplicativo.

- **Simbología**

| *I* | *V* | *X* | *L* | *C* | *D* | *M* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **5** | **10** | **50** | **100** | **500** | **1 000** |

- **Principio aditivo.** Si se tienen 2 símbolos distintos y el de menor valor está a la derecha, entonces se suman.

### Ejemplos

***VI*** = 5 +1 = 6

***XII*** = 10 + 2 = 12

***CL*** = 100 + 50 = 150

- **Principio sustractivo.** Si se tienen 2 símbolos distintos y el de mayor valor está a la derecha, entonces se resta.

### Ejemplos

***IV*** = 5 – 1 = 4 ***XL*** = 50 – 10 = 40 ***CM*** = 1 000 – 100 = 900

Los símbolos ***I***, ***X***, ***C***, sólo se pueden restar una vez.

- ***I*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***V*** y ***X***

### Ejemplos

***IV*** = 5 – 1 = 4 ***IX*** = 10 – 1 = 9

- ***X*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***L*** y ***C***

### Ejemplos

***XL*** = 50 – 10 = 40 ***XC*** = 100 – 10 = 90

- ***C*** sólo se resta de los símbolos que le siguen ***D*** y ***M***

### Ejemplos

***CD*** = 500 – 100 = 400 ***CM*** = 1 000 – 100 = 900

Los símbolos ***I***, ***X***, ***C*** y ***M*** no pueden repetirse más de 3 veces.

### Ejemplos

***III*** = 3 ***XXX*** = 30 ***CCXXVI*** = 226 ***CD*** = 400

***IV*** = 4 ***XL*** = 40 ***CCC*** = 300 ***MMM*** = 3 000

- **Principio multiplicativo.** Si un número es mayor que ***MMM*** **= 3 000**, se utiliza un segmento horizontal sobre el número, así se indica que el número queda multiplicado por 1 000.

### Ejemplos

$\overline{IV} = 4 \times 1\,000 = 4\,000$ $\overline{\overline{IV}} = 4 \times 1\,000 \times 1\,000 = 4\,000\,000$

$\overline{XV} = 15 \times 1\,000 = 15\,000$

Al seguir los principios se puede convertir de numeración decimal a romana.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representar en numeración romana 368.

**Solución**

El número 368 se expresa de la siguiente manera en número romano.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 368 = | 300 | 60 | 8 |
| 368 = | ***CCC*** | ***LX*** | ***VIII*** |

Por tanto, 368 = ***CCCLXVIII***

2 Representa el número 123 457 en numeración romana.

**Solución**

123 457 se escribe de la siguiente forma:

$$123\,457 = 123 \times 1\,000 + 400 + 50 + 7$$

Cada sumando representa un número romano

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 123 457 = | $123 \times 1\,000$ | 400 | 50 | 7 |
| 123 457 = | $\overline{CXXIII}$ | ***CD*** | ***L*** | ***VII*** |

Por tanto, 123 457 = $\overline{CXXIII}$ ***CDLVII***

3 Convierte el número 245 305 379 a numeración romana.

**Solución**

245 305 379 se escribe de la siguiente forma:

$$245\,305\,679 = 245 \times 1\,000 \times 1\,000 + 305 \times 1\,000 + 600 + 70 + 9$$

Cada sumando representa un número romano.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 245 305 679 = | $245 \times 1\,000 \times 1000$ | $305 \times 1\,000$ | 600 | 70 | 9 |
| 245 305 679 = | $\overline{\overline{CCXLV}}$ | $\overline{CCCV}$ | ***DC*** | ***LXX*** | ***IX*** |

Finalmente, 245 305 679 = $\overline{\overline{CCXLV}}$ $\overline{CCCV}$ ***DC LXX IX***

## EJERCICIO 101

Representa en numeración romana:

1. 89
2. 99
3. 376
4. 786
5. 957
6. 1 004
7. 1 492
8. 1 589
9. 1 621
10. 1 810
11. 1 997
12. 12 345
13. 15 432
14. 23 007
15. 43 879
16. 89 000
17. 123 000
18. 230 005
19. 2 345 000
20. 8 340 020

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Al seguir los principios se puede convertir de numeración romana a decimal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa el número ***MDCLXVI*** en sistema decimal.

**Solución**

Se indica la equivalencia de cada símbolo y se suman:

| ***M*** | ***D*** | ***C*** | ***L*** | ***X*** | ***V*** | ***I*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 000 | 500 | 100 | 50 | 10 | 5 | 1 |

$$1\,000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1\,666$$

Por consiguiente, ***MDCLXVI*** = 1 666

2 Representa el número $\overline{\overline{XI}}\ \overline{CM}\ L$ en sistema decimal.

**Solución**

Se indica la equivalencia de cada símbolo y se suman:

| $\overline{\overline{XI}}$ | $\overline{CM}$ | $L$ |
|---|---|---|
| $11 \times 1\,000 \times 1\,000$ | $900 \times 1\,000$ | 50 |

$$11\,000\,000 + 900\,000 + 50 = 11\,900\,050$$

Por tanto, $\overline{\overline{XI}}\,\overline{CM}\,L = 11\,900\,050$

# EJERCICIO **102**

Representa en sistema decimal.

1. LXXXII
2. LXXIV
3. LVI
4. XCIII
5. XXXIX
6. LXVIII
7. DLXIV
8. DCCXIX
9. CDLII
10. CMXCI
11. DCCCIII
12. CCXLIV
13. MDCCCL
14. MDCCLII
15. MDCCCVI
16. MDXXV
17. MMDCCCXIV
18. MCDXXIX
19. $\overline{XXIII}$ CDLVII
20. $\overline{XIX}$ XX
21. $\overline{CCXLV}$
22. $\overline{MMMCDLVII}$ CMXCVIII
23. $\overline{\overline{IX}}$ $\overline{DLXXV}$ CMLXXIII
24. $\overline{\overline{IV}}$ $\overline{CMXLV}$ CMXII

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Sistema de numeración egipcio

Los egipcios utilizaron un sistema en base 10, bajo el principio aditivo.

**Simbología**

| Vara | Talón | Cuerda enrollada | Flor de loto | Dedo | Pez | Hombre asustado |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| **1** | **10** | **100** | **1 000** | **10 000** | **100 000** | **1 000 000** |

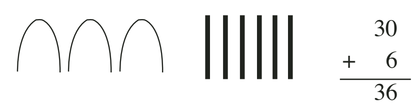
**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Transforma a número decimal.

**Solución**

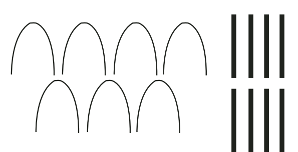
Se multiplica el número de símbolos por su respectivo valor y los resultados se suman.



$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ \ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

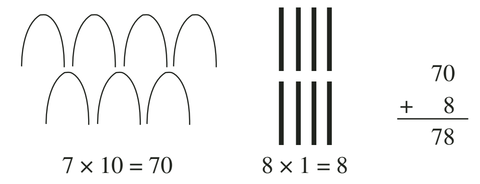
Por tanto, el resultado es 36

2 Transforma a número decimal.



**Solución**

Se multiplica el número de símbolos por su respectivo valor y los resultados se suman.

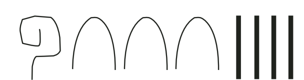


$7 \times 10 = 70$ $\quad$ $8 \times 1 = 8$

$$\begin{array}{r} 70 \\ +\ \ 8 \\ \hline 78 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 78

3 Transforma a número decimal.



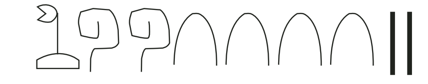
**Solución**

$1 \times 100 = 100$ $\quad$ $3 \times 10 = 30$ $\quad$ $4 \times 1 = 4$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 30 \\ +\ \ 4 \\ \hline 134 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es 134

4 Transforma a número decimal.



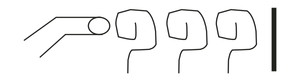
**Solución**

$1 \times 1\,000 = 1\,000$ $2 \times 100 = 200$ $4 \times 10 = 40$ $2 \times 1 = 2$

$$\begin{array}{r} 1\,000 \\ 200 \\ +\quad 40 \\ 2 \\ \hline 1\,242 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es 1 242

5 Transforma a número decimal.



**Solución**

$1 \times 10\,000 = 10\,000$ $3 \times 100 = 300$ $1 \times 1 = 1$

$$\begin{array}{r} 10\,000 \\ +\quad 300 \\ 1 \\ \hline 10\,301 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es 10 301

## EJERCICIO **103**

Transforma a numeración decimal.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Para representar un número decimal en numeración egipcia se siguen los siguientes pasos:

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa 243 en sistema de numeración egipcia.

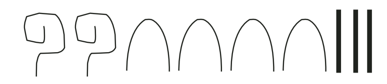
**Solución**

Se escribe el número 243 de la siguiente forma:

$$243 = \mathbf{2} \times 100 + \mathbf{4} \times 10 + \mathbf{3}$$

| $2 \times 100 = 200$ | $4 \times 10 = 40$ | $3 \times 1 = 3$ |
|---|---|---|
| | | |

Por tanto, el equivalente de 243 en numeración egipcia es:



2 Convierte 1 422 a sistema de numeración egipcia.

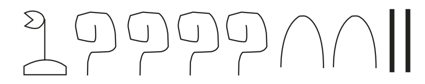
**Solución**

Se escribe el número 1 422 de la siguiente forma:

$$1\,422 = \mathbf{1} \times 1\,000 + \mathbf{4} \times 100 + \mathbf{2} \times 10 + \mathbf{2}$$

| $1 \times 1\,000 = 1\,000$ | $4 \times 100 = 400$ | $2 \times 10 = 20$ | $2 \times 1 = 2$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

Por tanto, el equivalente de 1 422 en numeración egipcia es:



3 Representa 100 531 en sistema de numeración egipcia.

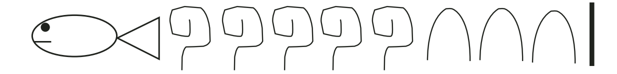
**Solución**

Se escribe el número 100 531 de la siguiente forma:

$$100\,531 = \mathbf{1} \times 100\,000 + \mathbf{5} \times 100 + \mathbf{3} \times 10 + \mathbf{1}$$

| $1 \times 100\,000 = 100\,000$ | $5 \times 100 = 500$ | $3 \times 10 = 30$ | $1 \times 1 = 1$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

Por tanto, el equivalente de 100 531 en numeración egipcia es:



# EJERCICIO 104

Convierte los siguientes a numeración egipcia.

1. 180
2. 240
3. 290
4. 320
5. 466
6. 580
7. 742
8. 760
9. 800
10. 945
11. 1 050
12. 1 430
13. 2 642
14. 5 900
15. 7 530
16. 9 417
17. 10 456
18. 115 403
19. 302 678
20. 3 546 129

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 10

## Sistema métrico decimal y números denominados

### Reseña HISTÓRICA

| Año | Definición |
|---|---|
| 1795 | 1/10 000 000 del cuadrante de meridiano terrestre. |
| 1799 | Materialización del valor anterior en una regla, a extremos, de platino depositada en los archivos de Francia. |
| 1889 | Patrón material internacional de platino iridiado, a trazos, depositado en el BIPM. Es llamado metro internacional. |
| 1960 | 1 650 763 731 en el vacío de la radiación de kriptón 86, transición entre los niveles 2 $p_{10}$ y 5 $d_5$. (Incertidumbre $1\cdot 10^{-8}$). |
| 1983 | Longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante 1/299 792 458 segundos. (Incertidumbre $2.5\cdot 10^{11}$). |

*Sistema métrico decimal*

Sistema decimal de unidades físicas que toma su nombre de su unidad de longitud, el metro (del griego *metron*, "medida"). El sistema métrico decimal se propuso y adoptó legalmente en Francia a partir de 1790, después lo adoptaron como sistema común de pesos y medidas la mayoría de los países. En la actualidad el sistema métrico decimal se usa en todo el mundo para trabajos científicos.

El metro (m) se definió originalmente como una diezmillonésima parte de la distancia entre el ecuador y el polo norte a lo largo del meridiano de París. Entre 1792 y 1799 esta distancia fue medida parcialmente por científicos franceses; consideraron que la Tierra era una esfera perfecta y estimaron la distancia total, la que dividieron entre 10 millones. Más tarde, después de descubrirse que la forma de la Tierra no es esférica, el metro se definió como la distancia entre dos finas líneas trazadas en una barra de aleación de platino e iridio, el metro patrón internacional, conservado en París. Después volvió a definirse a partir de la longitud de onda de la luz rojiza emitida por una fuente de kriptón 86. Sin embargo, las medidas de la ciencia moderna requerían una precisión aún mayor, y en 1983 el metro se definió como la longitud del espacio recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

En 1900 el sistema métrico se había ampliado para convertirse en el sistema MKS (metro-kilogramo-segundo), en el que la unidad de masa no era el gramo sino el kilogramo, y que además incluía la unidad de tiempo, el segundo. Posteriormente se añadió una unidad electromagnética, el ampere, para formar el sistema MKSA (metro-kilogramo-segundo-ampere). Como en la ciencia se necesitaban unidades más pequeñas, también se empleaba el sistema CGS o cegesimal (centímetro-gramo-segundo). La unidad de volumen se definió inicialmente como 1 decímetro cúbico, pero en 1901 se redefinió como el volumen ocupado por un kilogramo de agua a 4 °C de temperatura y una presión de 760 mm de mercurio; en 1964 se volvió a la definición original.

Para expresar múltiplos decimales de las unidades del sistema métrico se emplea una serie de prefijos griegos, mientras que para expresar fracciones decimales se utilizan otros prefijos latinos. El Sistema Internacional de unidades adoptó esos prefijos y añadió otros.

## Sistema métrico decimal

Es el conjunto de medidas que se derivan de la longitud denominada metro.

**Clases de medidas.** Hay 5 clases de medidas: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa.

### Unidades de longitud

La unidad de longitud es el metro, que se representa con la letra *m*. Los múltiplos del metro se forman anteponiendo a la palabra metro los prefijos: deca (D), hecto (H) y kilo (k) que significan: diez, cien y mil; los submúltiplos se forman anteponiendo los prefijos: deci (d), centi (c) y mili (m), cuyo significado es: décima, centésima y milésima.

### Equivalencias de longitud en el sistema métrico decimal

$$1 \text{ km} = 10 \text{ Hm} = 10^2 \text{ Dm} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm} = 10^5 \text{ cm} = 10^6 \text{ mm}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 2.5 kilómetros a metros.

**Solución**

Se emplea la equivalencia correspondiente y se efectúa la conversión.
Equivalencia: $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$

$$\left(\frac{2.5 \text{ km}}{1}\right)\left(\frac{10^3 \text{m}}{1 \text{ km}}\right) = \frac{2.5 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{km}}{1 \text{ km}} = \frac{2.5 \times 1\,000}{1} \text{m} = 2\,500 \text{ m}$$

2 Realiza la conversión de 450 centímetros a decámetros.

**Solución**

La equivalencia es: $10^2 \text{ Dm} = 10^5 \text{ cm}$, se efectúa la conversión y se obtiene:

$$\left(\frac{450 \text{ cm}}{1}\right)\left(\frac{10^2 \text{ Dm}}{10^5 \text{ cm}}\right) = \frac{450 \times 10^2 \text{ Dm} \cdot \text{cm}}{10^5 \text{ cm}} = 450 \times 10^{-3} \text{ Dm} = 0.45 \text{ Dm}$$

3 Convierte 0.52 hectómetros a milímetros.

**Solución**

En este ejemplo la equivalencia es: $10 \text{ Hm} = 10^6 \text{ mm}$

$$\left(\frac{0.52 \text{ Hm}}{1}\right)\left(\frac{10^6 \text{ mm}}{10 \text{ Hm}}\right) = \frac{0.52 \times 10^6 \text{mm} \cdot \text{Hm}}{10 \text{ Hm}} = 0.52 \times 10^5 \text{mm} = 52\,000 \text{ mm}$$

## EJERCICIO 105

Realiza las siguientes conversiones:

1. 8 m ______ dm
2. 15 Dm ______ cm
3. 7.05 Hm ______ dm
4. 19 mm ______ m
5. 185 cm ______ dm
6. 9 cm ______ dm
7. 170 005 km ______ Dm
8. 54 Hm ______ m
9. 0.806 dm ______ cm
10. 16.50 km ______ Hm
11. 380 Dm ______ km
12. 6 300 m ______ dm

13. 380 Hm ______ km
14. 900 m ______ Hm
15. 600 cm ______ m
16. 45.63 m ______ cm
17. 3.016 m ______ mm
18. 0.85 m ______ mm
19. 15.480 km ______ m
20. 75.6 Dm ______ m

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Unidades de superficie

La unidad de superficie es el metro cuadrado, que es un cuadrado que tiene de lado un metro lineal y se representa con $m^2$.

## Equivalencias de superficie en el sistema métrico decimal

$$1\text{ km}^2 = 10^2\text{ Hm}^2 = 10^4\text{ Dm}^2 = 10^6\text{ m}^2 = 10^8\text{ dm}^2 = 10^{10}\text{ cm}^2 = 10^{12}\text{ mm}^2$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Convierte 64 000 $m^2$ a $km^2$.

**Solución**

La equivalencia es: 1 $km^2$ = $10^6$ $m^2$, al realizar la conversión se obtiene:

$$\left(\frac{64\,000\text{ m}^2}{1}\right)\left(\frac{1\text{ km}^2}{10^6\text{ m}^2}\right) = \frac{64\,000\text{ m}^2\cdot\text{km}^2}{1\,000\,000\text{ m}^2} = 0.064\text{ km}^2$$

2 Convierte 38 $Dm^2$ a $dm^2$.

**Solución**

La equivalencia es: $10^4$ $Dm^2$ = $10^8$ $dm^2$, al hacer la conversión se determina que:

$$\left(\frac{38\text{ Dm}^2}{1}\right)\left(\frac{10^8\text{ dm}^2}{10^4\text{ Dm}^2}\right) = \frac{38\times10^8\text{ dm}^2\cdot\text{Dm}^2}{10^4\text{ Dm}^2} = 38\times10^4\text{ dm}^2 = 380\,000\text{ dm}^2$$

## EJERCICIO **106**

Realiza la conversión de las siguientes medidas de superficie:

1. 3 $m^2$ ______ $dm^2$
2. 16 $m^2$ ______ $cm^2$
3. 7 $m^2$ ______ $mm^2$
4. 8 $km^2$ ______ $m^2$
5. 19 $Hm^2$ ______ $m^2$
6. 635 $Dm^2$ ______ $m^2$
7. 28 $Hm^2$ ______ $Dm^2$
8. 14 000 $Dm^2$ ______ $m^2$
9. 800 $m^2$ ______ $Dm^2$
10. 190 000 $m^2$ ______ $Hm^2$
11. 300 000 $m^2$ ______ $km^2$
12. 160 000 $cm^2$ ______ $m^2$
13. 13 000 $dm^2$ ______ $m^2$
14. 9 800 $Hm^2$ ______ $km^2$
15. 0.0014 $km^2$ ______ $dm^2$
16. 21 $Dm^2$ ______ $dm^2$
17. 4.3856 $m^2$ ______ $cm^2$
18. 1 800 $dm^2$ ______ $m^2$
19. 45 000 $m^2$ ______ $Dm^2$
20. 35 $dm^2$ ______ $m^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Unidades de volumen

Las unidades de volumen son el metro cúbico, que es un cubo que tiene de arista un metro lineal y se representa con $m^3$ y el litro cuya representación es *l*.

## Equivalencias de volumen en el sistema métrico decimal

$$1\text{ km}^3 = 10^3\text{ Hm}^3 = 10^6\text{ Dm}^3 = 10^9\text{ m}^3 = 10^{12}\text{ dm}^3 = 10^{15}\text{ cm}^3 = 10^{18}\text{ mm}^3$$
$$1\text{ kl} = 10\text{ Hl} = 10^2\text{ Dl} = 10^3\text{ l} = 10^4\text{ dl} = 10^5\text{ cl} = 10^6\text{ ml}$$

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 0.00726 $Hm^3$ a $m^3$.

**Solución**

Se emplea la equivalencia correspondiente y se efectúa la conversión.
Equivalencia: $10^3\text{ Hm}^3 = 10^9\text{ m}^3$

$$\left(\frac{0.00726\text{ Hm}^3}{1}\right)\left(\frac{10^9\text{ m}^3}{10^3\text{Hm}^3}\right) = \frac{0.00726\times10^9\text{ m}^3\cdot\text{Hm}^3}{10^3\text{Hm}^3} = 0.00726\times10^6\text{ m}^3 = 7\,260\text{ m}^3$$

2 Realiza la conversión de 180 000 $cm^3$ a $m^3$.

**Solución:**

La equivalencia es: $10^{15}\text{ cm}^3 = 10^9\text{ m}^3$, se efectúa la conversión y se obtiene:

$$\left(\frac{180\,000\text{ cm}^3}{1}\right)\left(\frac{10^9\text{ m}^3}{10^{15}\text{cm}^3}\right) = \frac{180\,000\times10^9\text{ m}^3\cdot\text{cm}^3}{10^{15}\text{cm}^3} = 180\,000\times10^{-6}\text{ m}^3 = 0.18\text{ m}^3$$

3 Convierte 2 500 ml a Hl.

**Solución:**

En este ejemplo la equivalencia es: $10^6$ ml = 10 Hl

$$\left(\frac{2\,500\text{ ml}}{1}\right)\left(\frac{10\text{ Hl}}{10^6\text{ ml}}\right) = \frac{2\,500\times10\text{Hl}\cdot\text{ml}}{10^6\text{ ml}} = 2\,500\times10^{-5}\text{ Hl} = 0.025\text{ Hl}$$

4 ¿Cuál es el resultado de convertir 7 kl a Hl?

**Solución:**

La equivalencia que se utiliza para realizar la conversión es: 1 kl = 10 Hl

$$\left(\frac{7\text{ kl}}{1}\right)\left(\frac{10\text{ Hl}}{1\text{ kl}}\right) = \frac{70\text{ Hl}\cdot\text{kl}}{1\text{ kl}} = 70\text{ Hl}$$

## EJERCICIO 107

Realiza la conversión de las siguientes medidas de volumen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. 24 $m^3$ | ______ $dm^3$ | 6. 9.54 kl | ______ l |
| 2. 0.0138 $m^3$ | ______ $cm^3$ | 7. 0.485 $m^3$ | ______ $dm^3$ |
| 3. 19 Dl | ______ l | 8. 0.975 $m^3$ | ______ $cm^3$ |
| 4. 149 $dm^3$ | ______ $cm^3$ | 9. 59l | ______ dl |
| 5. 7 $cm^3$ | ______ $mm^3$ | 10. 3.146 $m^3$ | ______ $dm^3$ |

11. 40 000 $dm^3$ ______ $m^3$
12. 3.905 l ______ ml
13. 15 000 000 $cm^3$ ______ $m^3$
14. 60 000 $mm^3$ ______ $cm^3$
15. 9.6 Hl ______ Dl
16. 0.00045 $m^3$ ______ $mm^3$
17. 16.85 $m^3$ ______ $dm^3$
18. 15.3 kl ______ Hl
19. 0.0075 $m^3$ ______ $cm^3$
20. 43 $m^3$ ______ $dm^3$
21. 7.506 $Dm^3$ ______ $m^3$
22. 400 dl ______ Dl
23. 0.008316 $m^3$ ______ $cm^3$
24. 54.75 l ______ cl
25. 0.0000386 $m^3$ ______ $cm^3$
26. 1 800 $dm^3$ ______ $m^3$
27. 3 280 cl ______ l
28. 45 000 $m^3$ ______ $Dm^3$
29. 35 $dm^3$ ______ $m^3$
30. 17 000 ml ______ cl

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Unidades de masa

En el sistema internacional de unidades el kilogramo (kg) es el patrón de medida para las unidades de masa.

## Equivalencias de masa en el sistema métrico decimal

$$1 \text{ kg} = 10 \text{ Hg} = 10^2 \text{ Dg} = 10^3 \text{ g} = 10^4 \text{ dg} = 10^5 \text{ cg} = 10^6 \text{ mg}$$

### EJEMPLOS

**1** Convierte 1 200 cg a Dg.

**Solución**

Se emplea $10^2$ Dg = $10^5$ cg para realizar la conversión:

$$\left(\frac{1200 \text{ cg}}{1}\right)\left(\frac{10^2 \text{ Dg}}{10^5 \text{ cg}}\right) = \frac{1200 \times 10^2 \text{ Dg} \cdot \text{cg}}{10^5 \text{ cg}} = 1200 \times 10^{-3} \text{ Dg} = 1.2 \text{ Dg}$$

**2** ¿A cuántos miligramos equivalen 0.023 kilogramos?

**Solución**

Para realizar esta conversión se emplea la equivalencia: 1 kg = $10^6$ mg

$$\left(\frac{0.023 \text{ kg}}{1}\right)\left(\frac{10^6 \text{ mg}}{1 \text{ kg}}\right) = \frac{0.023 \times 10^6 \text{ mg} \cdot \text{kg}}{1 \text{ kg}} = 23000 \text{ mg}$$

## EJERCICIO 108

Realiza las siguientes conversiones con unidades de masa.

1. 3 kg ______ g
2. 700 dg ______ kg
3. 156 Hg ______ Dg
4. 36 kg ______ Dg
5. 7 Hg ______ Dg
6. 5 000 g ______ kg
7. 38 000 mg ______ Hg
8. 6 400 cg ______ g
9. 18 000 dg ______ g
10. 38 000 g ______ Hg

11. 40 dg ______ g
12. 850 g ______ Dg
13. 1 500 mg ______ g
14. 4 900 cg ______ Dg
15. 24 000 dg ______ g
16. 80 dg ______ Hg
17. 24.5 dg ______ g
18. 6.35 cg ______ dg
19. 17.28 cg ______ g
20. 38.5 g ______ mg

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Números denominados

### Equivalencias de medidas de tiempo

1 siglo o centuria = 100 años
1 década = 10 años
1 lustro = 5 años
1 año = 12 meses
1 mes = 30 días
1 semana = 7 días
1 día = 24 horas
1 hora = 60 minutos = 3 600 segundos
1 minuto (min) = 60 segundos (s)

### Equivalencias de medidas angulares

Grados ( ° ) = 60 minutos    Minutos ( ′ ) = 60 segundos ( ″ )

Todos los sistemas cuya ley de formación no sigue la ley decimal, dan lugar a los números denominados.
Analicemos algunos ejemplos de representación de un número denominado como una sola cantidad:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa ocho horas, cuarenta y cinco minutos y diecinueve segundos como número denominado.

**Solución**

La cantidad se expresa de la siguiente manera: 8h 45 min 19s.

2 Escribe en forma de número denominado: treinta y cinco grados, treinta minutos, seis segundos.

**Solución**

Se expresa la cantidad de la siguiente manera: 35° 30′ 6″.

3 Convierte a horas, minutos y segundos: 4 563 segundos.

**Solución**

Se divide la cantidad entre 3 600 s para obtener las horas, posteriormente se divide el residuo entre 60 para obtener los minutos y el último residuo representa a los segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 3\,600 & 4\,563 \\ & \phantom{4\,}963 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 16 \\ \hline 60 & 963 \\ & 363 \\ & \phantom{36}3 \end{array}$$

Por tanto, 4 563 segundos = 1 h 16 min 3 s.

4 Escribe en horas el número: 13 horas, 18 minutos.

**Solución**

Se convierten los 18 minutos a horas:

$$\left(\frac{18\,\text{min}}{1}\right)\left(\frac{1\text{h}}{60\,\text{min}}\right)=\frac{18\text{h}\cdot\text{min}}{60\,\text{min}}=\frac{18}{60}\text{h}=\frac{3}{10}\text{h}$$

El resultado se expresa: $13\frac{3}{10}\text{h}$

5 Expresa en años el número denominado: 4 años, 7 meses y 20 días.

**Solución**

Se convierten los días a meses y se suman a los 7 meses:

$$\left(\frac{20\,\text{días}}{1}\right)\left(\frac{1\,\text{mes}}{30\,\text{días}}\right)=\frac{20}{30}\text{mes}=\frac{2}{3}\text{mes} \quad ; \quad 7\,\text{meses}+\frac{2}{3}\text{meses}=\frac{23}{3}\text{meses}$$

Los meses resultantes se convierten a años:

$$\left(\frac{23\,\text{meses}}{3}\right)\left(\frac{1\,\text{año}}{12\,\text{meses}}\right)=\frac{23}{36}\text{años}$$

El resultado final es: $4\frac{23}{36}$ años.

## EJERCICIO 109

Expresa como número denominado cada una de las siguientes cantidades:

1. Treinta y cinco años, nueve meses con veintitrés días.
2. Una hora con treinta segundos.
3. Ciento veinticuatro grados, cuarenta minutos y cincuenta y seis segundos.
4. Cinco meses, doce días, diecisiete horas.
5. Cuarenta y tres años, siete meses y diecisiete días.
6. Veinticinco meses, diecinueve días, ocho horas y cuarenta y cinco minutos.
7. Cuatrocientos treinta y ocho grados con cuarenta y tres segundos.
8. Tres décadas, ocho años, once meses y cuatro días.

Expresa las siguientes cantidades con números denominados:

9. 0.25 meses en días y horas.
10. 40.3° en grados y minutos.
11. $3\frac{5}{8}$ años en años, meses y días.
12. 145.98° en grados, minutos y segundos.
13. 3.745 décadas en años, meses y días.
14. 35.67° en grados, minutos y segundos.
15. 4.05 años en años, meses y días.
16. 85.61° en grados, minutos y segundos.

Expresa las siguientes cantidades como se indica:

17. 3 años, 10 meses, 15 días en años.
18. 78° 34′ 30″ en grados.
19. 6 h 43 min 12s en horas.
20. 324° 51′ 36″ en grados.
21. 3 décadas, 8 años, 18 días en décadas.
22. 148° 54″ en grados.
23. 2h 30s en minutos.
24. 25 días, 8 horas, 24 minutos en horas.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma

Se colocan los números en columnas, de tal forma que se correspondan las distintas unidades. La suma se inicia por las unidades menores, la reducción a unidades de orden superior, misma que se suma con las unidades de la siguiente columna y así, sucesivamente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de 45° 20′ 35″ + 12° 42′ 33″?

**Solución**

Se acomodan las cantidades de manera vertical para que coincidan las respectivas unidades y se realizan las sumas.

$$\begin{array}{r} 45°\ 20'\ 35'' \\ +\quad 12°\ 42'\ 33'' \\ \hline 57°\ 62'\ 68'' \end{array}$$

Al hacer las equivalencias 1′ = 60″ y 1° = 60′, entonces el resultado se expresa como:

$$57°\ 62'\ 68'' = 57°\ 63'\ 8'' = 58°\ 3'\ 8''$$

2 Efectúa: 16 h 30 min 9 s + 26 h 45 min 53 s +15 h 21 min 17 s.

**Solución**

Se acomodan las cantidades como en el ejemplo anterior y se realizan las operaciones.

$$\begin{array}{r} 16\text{ h } 30\text{ min } 9\text{ s} \\ +\quad 26\text{ h } 45\text{ min } 53\text{ s} \\ 15\text{ h } 21\text{ min } 17\text{ s} \\ \hline 57\text{ h } 96\text{ min } 79\text{ s} \end{array}$$

Se aplican las equivalencias: 1 h = 60 min, 1 min = 60 s y el resultado se expresa como:

57 h 96 min 79 s = 57 h 97 min 19 s = 58 h 37 min 19 s

## EJERCICIO 110

Realiza las siguientes sumas:

1. 5h 14 min 35s
 \+ 3h 25 min 38s

2. 48° 17′ 24″
 \+ 169° 25′ 38″

3. 6 años 4 meses 15 días
 \+ 2 años 5 meses 8 días

4. 378° 28′
 \+ 128° 25″

5. 15h 23 min 56s
 \+ 20h 42 min 4s

6. 46° 55′ 31″
 \+ 224° 59″

7. 24 días 16h 32 min 43s
 \+ 8 días 12h 56 min 8s

8. 6 años 7 meses 27 días
 \+ 4 años 3 meses 15 días
 11 años 10 meses 19 días

9. 9° 18′ 42″
 \+ 120° 45′ 53″
 156° 59′ 35″

10. 3 años 7 meses 12 días 10 h 26 min
 \+ 4 años 9 meses 21 días 17 h 41 min
 7 años 10 meses 5 días 11 h 20 min
 8 años 8 meses 6 días 14 h 12 min

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Resta

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades correspondan. Si algún sustraendo es mayor que el minuendo, se le agrega la unidad equivalente superior inmediata para que la resta sea posible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de 10 días 7 h 15 min 16s – 4 días 8 h 20 min 18 s?

**Solución**

En este ejemplo algunos de los elementos del minuendo son menores que el sustraendo, por lo que el minuendo se expresa como: 10 días 7 h 15 min 16 s = 9 días 30 h 74 min 76 s.

| | |
|---|---|
| 10 días 7 h 15 min 16 s | 9 días 30 h 74 min 76 s |
| – 4 días 8 h 20 min 18 s | – 4 días 8 h 20 min 18 s |
| | 5 días 22 h 54 min 58 s |

Se efectúa la resta y se obtiene como resultado

5 días 22 h 54 min 58 s

2 Realiza: 123° 42″ – 79° 25′ 30″.

**Solución**

123° 42″ se expresa como: 122° 60′ 42″ para efectuar la operación.

122° 60′ 42″
– 79° 25′ 30″
43° 35′ 12″

Por tanto, el resultado es: 43° 35′ 12″

## EJERCICIO 111

Realiza las siguientes restas:

1. 4 años 9 meses 24 días
   – 1 año 7 meses 16 días

2. 135° 18′ 40″
   – 105° 12′ 16″

3. 10 meses 27 días 13 h
   – 8 meses 29 días 20 h

4. 220° 56′ 24″
   – 129° 42′ 55″

5. 6 meses 18 días 23 h
   – 5 meses 23 días 9 h

6. 250°
   – 233° 15′ 24″

7. 7 meses 9 días 18h 23 min
   – 2 meses 10 días 22h 46 min

8. 96° 36″
   – 58° 25′

9. 4 días 7 h 20 min
   – 3 días 2 h 35 min

10. 9h 7 min 48 s
    – 8h 10 min 35 s

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Multiplicación

Esta operación sólo es posible cuando el multiplicador es un número natural.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa: 3 días 10 h 14 min × 5.

**Solución**

Las cantidades se acomodan de forma vertical y 5 multiplica a cada una de ellas.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ días } 10 \text{ h } 14 \text{ min} \\ \times \qquad\qquad\qquad 5 \\ \hline 15 \text{ días } 50 \text{ h } 70 \text{ min} \end{array}$$

Este resultado se expresa de la siguiente forma:

15 días 50 h 70 min = 15 días 51 h 10 min = 17 días 3 h 10 min

2 ¿Cuál es el resultado de 56° 25″ × 12?

**Solución**

Se acomodan las cantidades y se efectúa el producto.

$$\begin{array}{r} 56^\circ \quad 25'' \\ \times \quad 12 \\ \hline 672^\circ\ 300'' \end{array}$$

Este resultado se expresa como: 672° 5′

3 Realiza: 3 décadas 5 años 6 meses × 8.

**Solución**

Se multiplica 8 por el número denominado y se aplican las correspondientes equivalencias para obtener como resultado: 28 décadas 4 años.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ décadas } 5 \text{ años } 6 \text{ meses} \\ \times \qquad\qquad\qquad\qquad 8 \\ \hline 24 \text{ décadas } 40 \text{ años } 48 \text{ meses} \end{array}$$

## EJERCICIO 112

Realiza las siguientes multiplicaciones:

1. 6 h 9 min 4 s × 8
2. 115° 24′ 12″ × 6
3. 15 días 5 h 48 min × 5
4. 65° 39′ 45″ × 15
5. 4 años 7 meses 23 días 4 h × 7
6. 225° 42′ 59″ × 7
7. 4 años 8 meses 16 días × 18
8. 156° 40″ × 12
9. 45h 28 min 36 s × 2
10. 18 años 2 meses 9 días × 6

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## División

Esta operación sólo es posible cuando el dividendo es un número natural.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Divide: 31 h 2 min 15 s entre 5.

**Solución**

Se dividen las horas y el residuo se convierte en minutos y se suma a los 2 minutos.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & 1\text{ h} \end{array}$$

1 h = 60 min y 60 min + 2 min = 62 min

Se dividen los minutos entre 5, los 2 minutos del residuo se convierten a segundos y se suman a los 15 segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h } 12\text{ min} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & 1\text{ h } 62\text{ min} \\ & \quad\quad 2\text{ min} \end{array}$$

2 min = 120 s y 120 s + 15 s = 135 s

Se dividen los segundos entre 5 y se obtiene el resultado final de la operación.

$$\begin{array}{r|l} & 6\text{ h } 12\text{ min}\quad 27\text{ s} \\ \hline 5 & 31\text{ h}\quad 2\text{ min}\quad 15\text{ s} \\ & 1\text{ h } 62\text{ min} \\ & \quad\quad 2\text{ min } 135\text{ s} \\ & \quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Por tanto, el resultado de la división es: 6 h 12 min 27 s.

2 ¿Cuál es el resultado de dividir 63° 25′ 44″ entre 12?

**Solución**

Se dividen los grados y el residuo se transforma en minutos y se suma a los minutos dados.

$$\begin{array}{r|l} & 5^\circ \\ \hline 12 & 63^\circ\ 25'\ 44'' \\ & 3^\circ \end{array}$$

$3^\circ = 180'$ y $180' + 25' = 205'$

Se dividen los minutos y el residuo se convierte a segundos y se suma a los 44 segundos.

$$\begin{array}{r|l} & 5^\circ\quad 17' \\ \hline 12 & 63^\circ\quad 25'\ 44'' \\ & 3^\circ\ 205' \\ & \quad\quad 1' \end{array}$$

$1' = 60''$ y $60'' + 44'' = 104''$

*(continúa)*

(*continuación*)
Se dividen los segundos y se obtiene el resultado final, que es igual a: 5° 17′ 8″ con un residuo de 8″

$$\begin{array}{r|l} & 5° \quad 17' \quad 8'' \\ \hline 12 & 63° \quad 25' \quad 44'' \\ & 1° \; 205' \\ & \quad\quad 1' \; 104'' \\ & \quad\quad\quad\quad 8'' \end{array}$$

## EJERCICIO 113

Realiza las siguientes divisiones:

1. 5 ⟌ 8 años 9 meses 15 días
2. 9 ⟌ 95° 43′ 12″
3. 12 ⟌ 16 h 35 min 15 s
4. 15 ⟌ 345° 30′ 45″
5. 10 ⟌ 4 h 20 min 16 s
6. 7 ⟌ 330° 15′ 2″
7. 5 ⟌ 15 h 12 min 6 s
8. 25 ⟌ 400° 40″
9. 7 ⟌ 35 h 56 min 14 s
10. 5 ⟌ 16 años 8 meses 15 días
11. 4 ⟌ 12 meses 28 días 20 h 48 min
12. 20 ⟌ 686° 52′ 20″
13. 3 ⟌ 4 años 6 meses 18 días
14. 56 ⟌ 1 200° 49″

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 11
## Razonamiento aritmético

*Los cuadrados mágicos*

Los cuadrados mágicos son un pasatiempo que data de hace más de 3 000 años en la antigua India. Dicho cuadrado es una tabla con el mismo número de casillas verticales que horizontales y su magia radica en el hecho de que cualquiera que sea la forma en que se sumen los números que lo conforman, ya sea de manera horizontal, vertical o diagonalmente, siempre se llegará al mismo resultado, la *constante mágica*, por ejemplo:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Los cuadrados mágicos de orden 4 fueron introducidos en el siglo XV en el Renacimiento europeo. En aquellos años de superstición solían hacer grabados en planchas de plata como conjuro contra la peste, ya que se les atribuía poderes mágicos.

A continuación se propone resolver el cuadrado mágico inventado por el pintor alemán Alberto Durero, el cual contiene en las casillas centrales inferiores el año de la gran peste: 1514, y cuya suma en forma horizontal, vertical y de sus diagonales principales es 34.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | 15 | 14 | |

## Problemas con números enteros

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si la diferencia del triple de un número y el mismo es igual a 8, ¿cuál es el número?

**Solución**

Si 8 es el triple del número menos el mismo, entonces 8 es el doble del número.

Por tanto, el número es $8 \div 2 = 4$

2 Brenda multiplicó un número por 4, restó 12 al producto, sumó 18 a la diferencia, la suma la dividió entre 19 y obtuvo 2 como cociente, ¿cuál es el número?

**Solución**

Se comienza por el final del problema y se realizan las operaciones inversas.

2 es el resultado de dividir entre 19, entonces se multiplica: $2 \times 19 = 38$
38 es el resultado de sumar 18, luego se resta: $38 - 18 = 20$
20 es el resultado de restar 12, ahora se suma: $20 + 12 = 32$
32 es el resultado de multiplicar por 4, entonces se divide: $32 \div 4 = 8$

Finalmente, el número es 8

**Propiedades**

1. La suma de 2 números enteros más su diferencia es igual al doble del mayor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b)+(a-b) = 2 \cdot a$
2. La suma de 2 números enteros menos su diferencia es igual al doble del número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b)-(a-b) = 2 \cdot b$
3. Al dividir la suma de 2 números enteros entre su cociente aumentado en 1, el resultado es igual al número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a+b) \div (a \div b + 1) = b$
4. Al dividir la diferencia de 2 números enteros entre su cociente disminuido en 1, el resultado es igual al número menor.
   Si $a > b$, entonces $(a-b) \div (a \div b - 1) = b$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si la suma de 2 números es 18 y la diferencia es 2, ¿cuáles son los números?

**Solución**

Al aplicar la propiedad 1, se suma $18 + 2 = 20$, se obtiene el doble del mayor, es decir, $20 \div 2 = 10$, es el número mayor, luego para obtener el número menor se resta de la suma $18 - 10 = 8$

Por consiguiente, los números son 10 y 8

2 Si la diferencia de 2 números es 12 y su cociente es 3, ¿cuáles son los números?

**Solución**

Al aplicar el teorema 4 se tiene que: $12 \div (3-1) = 12 \div 2 = 6$, el resultado es el número menor, si la diferencia es 12, entonces el número mayor es $12 + 6 = 18$

Por tanto, los números son 18 y 6

3 Entre 2 ciudades *A* y *B* hay una distancia de 480 km. A las 8 de la mañana de la ciudad *A* sale un automóvil con una velocidad de $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrará con un automóvil que sale a la misma hora de *B* hacia *A* con una velocidad $90\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y a qué distancia de la ciudad estará *A*?

**Solución**

70 kilómetros es la distancia que recorre en 1 hora el automóvil que sale de *A*.

90 kilómetros es la distancia que recorre en 1 hora el automóvil que sale de *B*.

En 1 hora se acercarán: 70 km + 90 km = 160 km.

La distancia entre *A* y *B*: 480 kilómetros

Tiempo que tardarán en encontrarse: $480 \div 160 = 3$ horas.

Por tanto, si salieron a las 8 de la mañana, se encontrarán a las $8 + 3 = 11$ de la mañana y a una distancia de $70(3) = 210$ kilómetros de la ciudad *A*.

4 Una ciudad *B* está situada a 240 km al este de otra ciudad *A*. Si a las 8 de la mañana sale un automóvil de la ciudad *B* con dirección este y a una velocidad de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿en cuánto tiempo lo alcanzará un automóvil que sale de *A* a las 10:00 a.m. con una velocidad de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ en la misma dirección?

**Solución**

Si el automóvil que sale de *B* recorre 60 km cada hora, a las 10 de la mañana habrá recorrido $60 \times 2 = 120$ km.

La distancia entre los automóviles será de $240 + 120 = 360$ km.

80 kilómetros es la distancia que recorre el automóvil *A* en 1 hora.

En 1 hora se acerca $80 - 60 = 20$ km.

Distancia entre *A* y *B* a las 10:00 a.m.: 360 km

Tiempo que tardarán en encontrarse $360 \div 20 = 18$ horas.

Por consiguiente, tardará en alcanzarlo 18 horas.

5 Luis, Marcos y Andrés tienen bolsas con canicas, si se juntan las bolsas con canicas de Luis y Marcos suman 200, las bolsas de Marcos y Andrés suman 320 y las de Luis y Andrés 280 canicas, ¿cuántas canicas tiene cada uno?

**Solución**

Al sumar $200 + 320 + 280 = 800$, este resultado es el doble de canicas de Luis, Marcos y Andrés, entonces el total de canicas es: $800 \div 2 = 400$

Si Luis y Marcos juntos tienen 200, entonces Andrés tiene $400 - 200 = 200$ canicas.

Si Marcos y Andrés juntos tienen 320, entonces Luis tiene $400 - 320 = 80$ canicas.

Si Luis y Marcos juntos tienen 200 y Luis tiene 80 canicas, entonces Marcos $200 - 80 = 120$ canicas.

Finalmente, Luis tiene 80, Marcos 120 y Andrés 200 canicas.

6 Un tanque tiene 2 llaves y un desagüe, una vierte 80 litros en 8 minutos y la otra 60 litros en 10 minutos, además, por el desagüe salen 180 litros en 20 minutos. Si el tanque tenía 600 litros y al abrir las llaves y el desagüe al mismo tiempo tardó 30 minutos en llenarse, ¿cuál es la capacidad total del tanque?

**Solución**

$80 \div 8 = 10$, es el número de litros por minuto que vierte la primera llave.

$60 \div 10 = 6$, es el número de litros por minuto que vierte la segunda llave.

$180 \div 20 = 9$, es el número de litros que salen por el desagüe.

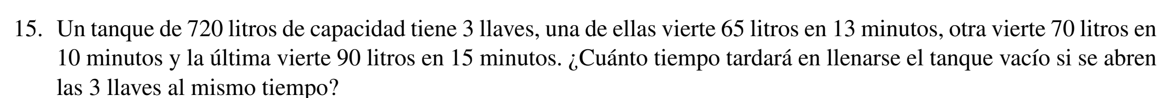
(*continúa*)

(*continuación*)
$10+6=16$, es el número de litros que vierten por minuto las 2 llaves juntas.
$16-9=7$, es el número de litros que quedan por minuto.
Entonces, en 30 minutos quedan $(30)(7)=210$ litros.

Por tanto, si el tanque tenía 600 litros, la capacidad total es de $600+210=810$ litros.

## EJERCICIO 114

1. La suma entre el cuádruplo de un número y el mismo es igual a 60, ¿cuál es el número?
2. La diferencia entre el séxtuplo de un número y el doble del mismo es igual a 20, ¿cuál es el número?
3. Se multiplica un número por 8, se suma 10 al producto, se resta 20 a la suma y la diferencia se divide entre 19, así se obtiene como cociente 2, ¿cuál es el número?
4. Se divide un número entre 9, se suma 32 al cociente, se obtiene la raíz cuadrada de la suma y este resultado se multiplica por 4, el resultado es 24, ¿cuál es el número?
5. La suma del triple de un número con 6 se multiplica por 2 y el resultado se divide entre 12, se obtiene como resultado 5, ¿cuál es el número?
6. La suma de 2 números es 29 y la diferencia es 21, ¿cuáles son los números?
7. El cociente de 2 números es 6 y la diferencia es 35, ¿cuáles son los números?
8. El doble de la diferencia de 2 números es 18 y el cuádruplo de su cociente es 16, ¿cuáles son los números?
9. Dos ciudades $M$ y $N$ se encuentran a 640 km de distancia entre sí. A las 10 de la mañana de la ciudad $M$ sale un automóvil rumbo a la ciudad $N$, con una velocidad de $85\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a la misma hora de $N$ sale otro automóvil rumbo a $M$ con una velocidad de $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrarán y qué distancia ha recorrido cada uno?
10. Entre 2 ciudades $P$ y $Q$ hay una distancia de 990 km. Si a las 11:00 a.m. sale un automóvil de $P$ en dirección a $Q$ con una velocidad de $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora se encontrará con otro automóvil que sale a la 1 de la tarde de $Q$ hacia $P$ con una velocidad de $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
11. Un automóvil sale a las 6 de la mañana con una velocidad de $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$ si otro automóvil sale a las 8 de la mañana con una velocidad de $105\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora el segundo automóvil alcanzará al primero?
12. Una ciudad $X$ está situada a 180 km al oeste de una ciudad $Z$, si a las 9:00 a.m. sale de $X$ un automóvil con dirección oeste a una velocidad de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué hora lo alcanzará un automóvil que sale de $Z$ en la misma dirección, 1 hora después y con una velocidad de $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
13. Fernanda pagó por una playera y un short \$1 100, Adriana pagó por la misma playera y un par de tenis \$1 800, mientras que Alejandra compró el short y el par de tenis en \$1 700. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
14. Las edades de Paulina y Mónica suman 36, las de Mónica y Andrea 40, mientras que la suma de las edades de Paulina y Andrea es 44, ¿cuántos años tiene cada una?



15. Un tanque de 720 litros de capacidad tiene 3 llaves, una de ellas vierte 65 litros en 13 minutos, otra vierte 70 litros en 10 minutos y la última vierte 90 litros en 15 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque vacío si se abren las 3 llaves al mismo tiempo?

16. Un estanque tiene 2 llaves y 2 desagües, si la primera llave vierte 100 litros en 20 minutos, la segunda 112 litros en 16 minutos, mientras que por un desagüe salen 60 litros en 15 minutos y por el otro salen 42 litros en 14 minutos, ¿cuál es la capacidad del estanque si al abrir las dos llaves y los desagües tardó 50 minutos en llenarse?

17. Un estanque con capacidad de 5 400 litros tiene 2 llaves, una vierte 42 litros en 6 minutos y la otra 64 litros en 8 minutos, también tiene un desagüe por el que salen 48 litros en 12 minutos, si el estanque tiene 2 100 litros y se abren las llaves y el desagüe al mismo tiempo, ¿cuánto tardará en llenarse?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Problemas con fracciones

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Al dividir 60 entre cierto número se obtiene $\frac{3}{4}$, ¿cuál es el número?

**Solución**

60 es el dividendo y $\frac{3}{4}$ el cociente, entonces se divide 60 entre el cociente para obtener el divisor.

$$60 \div \frac{3}{4} = \frac{(60)(4)}{3} = \frac{240}{3} = 80$$

Por tanto, si se divide 60 entre 80 se obtiene $\frac{3}{4}$

2 Al multiplicar $\frac{5}{2}$ por cierto número se obtiene $\frac{1}{20}$, ¿cuál es el número?

**Solución**

$\frac{5}{2}$ es uno de los factores y $\frac{1}{20}$ el producto, entonces se divide $\frac{1}{20}$ entre $\frac{5}{2}$ y se obtiene el otro factor.

$$\frac{1}{20} \div \frac{5}{2} = \frac{(1)(2)}{(20)(5)} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

Por tanto, el número es $\frac{1}{50}$

3 Un granjero tiene 200 animales, la cuarta parte son patos, la tercera parte del resto son vacas, las $\frac{2}{5}$ partes del resto cerdos y los demás son gallinas, ¿cuántas gallinas tiene?

**Solución**

La cuarta parte son patos:

$\frac{1}{4}(200) = \frac{200}{4} = 50$, entonces hay 50 patos y restan 150 animales.

La tercera parte del resto son vacas:

$\frac{1}{3}(150) = \frac{150}{3} = 50$, por tanto hay 50 vacas y restan 100 animales.

Las dos quintas partes del resto son cerdos:

$\frac{2}{5}(100) = \frac{200}{5} = 40$, entonces hay 40 cerdos y restan 60 animales.

Finalmente, el número de gallinas es 60

4 Rodolfo gastó la novena parte de su dinero y le quedaron \$32 000, ¿cuánto dinero tenía?

**Solución**

Si Rodolfo gastó la novena parte, entonces \$32 000 son los $\frac{8}{9}$ del total de dinero que tenía.

Por tanto, se divide 32 000 entre $\frac{8}{9}$

$$32\,000 \div \frac{8}{9} = \frac{(32\,000)(9)}{8} = \frac{288\,000}{8} = 36\,000$$

Por consiguiente, Rodolfo tenía \$36 000

5 Mauricio compró una camisa y unos pantalones en \$1 000, si la camisa costó la tercera parte del precio del pantalón, ¿cuánto costó el pantalón?

**Solución**

Si la camisa costó la tercera parte del pantalón, \$1 000 son $\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ del precio del pantalón, entonces el costo del pantalón es: $1\,000 \div \frac{4}{3} = \frac{(1\,000)(3)}{4} = \frac{3\,000}{4} = 750$

Por consiguiente, el precio del pantalón es de \$750

6 Víctor puede hacer un trabajo en 6 horas y Alberto hace el mismo en 8 horas. ¿En cuántas horas podrán hacer el mismo trabajo juntos?

**Solución**

En 1 hora Víctor hace $\frac{1}{6}$ del trabajo.

En 1 hora Alberto hace $\frac{1}{8}$ del trabajo.

Ambos en 1 hora harán $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{4+3}{24}=\frac{7}{24}$ del trabajo.

Luego, para hacer los $\frac{24}{24}=1$ trabajo, se divide:

$$1 \div \frac{7}{24} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

Por tanto, ambos tardarán $3\frac{3}{7}$ horas en realizar el mismo trabajo.

7 Dos llaves llenan un depósito en 8 horas, si una de ellas lo llena en 12 horas, ¿en cuánto tiempo lo llenará la otra llave?

**Solución**

En 1 hora ambas llaves llenan $\frac{1}{8}$ del depósito.

En 1 hora una de las llaves llena $\frac{1}{12}$ del depósito.

La otra llave llena $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{3-2}{24}=\frac{1}{24}$ del depósito.

Por tanto, la otra llave lo llena en 24 horas.

8 Un depósito tiene 2 llaves y un desagüe, una de las llaves tarda 6 horas en llenarlo y la otra lo llena en 4 horas. Si está el depósito lleno tarda 8 horas en vaciarse. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse si se abren al mismo tiempo las 2 llaves y el desagüe?

**Solución**

En 1 hora las 2 llaves llenan,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2+3}{12}=\frac{5}{12} \text{ del depósito.}$$

En 1 hora se vacía $\frac{1}{8}$ del depósito.

Luego, abriendo todo al mismo tiempo en 1 hora se llena

$$\frac{5}{12}-\frac{1}{8}=\frac{10-3}{24}=\frac{7}{24} \text{ del depósito.}$$

Entonces, tardará en llenarse,

$$1\div\frac{7}{24}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$$

Finalmente, el depósito se llenará en $3\frac{3}{7}$ horas.

## EJERCICIO 115

1. Si al multiplicar un número por $\frac{2}{3}$ se obtiene 20 como producto, ¿cuál es el número?
2. Si al dividir un número entre $\frac{1}{2}$ se obtiene $\frac{5}{2}$ como cociente, ¿cuál es el número?
3. Al multiplicar $\frac{4}{5}$ por cierto número se obtiene 3 como producto, ¿cuál es el número?
4. Al dividir $\frac{5}{6}$ entre cierto número se obtiene $\frac{5}{4}$ como resultado, ¿cuál es el número?
5. La cuarta parte de un número es 6, ¿cuál es el número?
6. Las tres quintas partes de un número son $\frac{6}{7}$, ¿cuál es el número?
7. Al preguntar Luis a su profesor de matemáticas la hora, éste le responde que son los tres cuartos del cuádruplo de un tercio de las 9 de la mañana, ¿qué hora es?
8. Margarita tiene la quinta parte de las tres cuartas partes del quíntuplo de la edad de Brenda. ¿Cuántos años tiene Margarita, si Brenda tiene 24 años?
9. El cociente de 2 números es $\frac{5}{3}$ y su MCD es 14, ¿cuáles son los números?
10. El cociente de 2 números es $\frac{4}{7}$ y su mcm es 140, ¿cuáles son los números?
11. El cociente de 2 números es $\frac{3}{2}$ su MCD es 30, ¿cuál es el mcm de los números?
12. La población de un colegio es de 600 alumnos. Si las dos terceras partes de los hombres asisten a un torneo de futbol, ¿cuántos hombres se quedaron en el colegio, si las tres cuartas partes del total son mujeres?
13. Una región produce 750 toneladas de maíz, de las cuales utiliza la quinceava parte para consumo de su comunidad, las tres quintas partes del resto se envían a la Ciudad de México y el resto lo exportan, ¿cuántas toneladas son exportadas?

14. Adrián hace su testamento dejando las dos quintas partes de su fortuna a sus hijos, la cuarta parte a su esposa, la quinta parte a su chofer y $3 750 000 a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende su fortuna?

15. José construye una barda en 24 días, David en 12 y Pedro en 8 días. ¿En cuánto tiempo la construirán los 3 juntos?

16. Una llave llena un depósito en 6 horas, otra lo llena en 9, ¿en cuánto tiempo lo llenarán si se abren al mismo tiempo ambas llaves?

17. Dos llaves llenan un depósito en 4 horas, si una de ellas lo llena en 12 horas, ¿en cuánto tiempo lo llena la otra llave?

18. Una llave llena un depósito en 5 horas, otra lo llena en 3 horas 20 minutos. Si se abren las 2 llaves al mismo tiempo, ¿qué parte del depósito se llena en 1 hora?

19. Un depósito tiene 2 llaves y 2 desagües. Una de las llaves tarda 8 horas en llenarlo y la otra 12 horas, si se abre uno de los desagües cuando el depósito está lleno tarda 24 horas en vaciarse, mientras que con el otro desagüe tarda 12 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse si se abren al mismo tiempo las llaves y los desagües?

20. Un depósito de agua tiene 2 llaves, una de ellas lo llena en 36 minutos, mientras que la otra lo llena en 12 minutos. Si el depósito está lleno hasta los $\frac{4}{9}$ de su capacidad, ¿en cuánto tiempo acabará de llenarse si se abren al mismo tiempo las 2 llaves?

21. Mario y José Luis pintan una barda en 4 días; Mario trabajando solo, tardaría 6 días. ¿En cuántos días la pinta José Luis?

22. Alfredo hace un trabajo en 12 horas, Juan y Pedro juntos hacen el mismo en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo harán Alfredo y Juan, si Pedro tarda 8 horas en hacer el mismo trabajo?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Problemas de agrupación

En ocasiones es conveniente agrupar u ordenar las operaciones de tal forma que al resolverlas el proceso sea más sencillo.

Para resolver los siguientes problemas se utilizarán algunas fórmulas y conceptos.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Deduce la fórmula para hallar la suma de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$.

**Solución**

Sea $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$, se invierte el orden de los sumandos de $S$ y se efectúa la suma de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lccccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & & n+1 & & n+1 \end{array}$$

Existen $(n + 1)$ sumandos y son $n$ términos, la suma es:

$$2S = n(n + 1)$$

Si $n\,(n + 1)$ es el doble de la suma, entonces la suma es:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

La cual se le conoce como la fórmula de Gauss, para hallar la suma de los primeros $n$ números naturales.

2 Calcula la suma de $4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200$.

**Solución**

Los términos de la suma son múltiplos de 4, al aplicar la propiedad distributiva de los números reales $a(b + c) = ab + ac$, la suma se escribe de la siguiente forma:

$$4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200 = 4(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50)$$

Al aplicar la fórmula de Gauss en la suma $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50$ con $n = 50$ se tiene que:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{50(50+1)}{2} = \frac{(50)(51)}{2} = \frac{2\,550}{2} = 1275$$

Luego:

$$\begin{aligned} 4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200 &= 4(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50) \\ &= 4(1\,275) \\ &= 5\,100 \end{aligned}$$

Por tanto, $4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 200 = 5\,100$

3 Determina el resultado de $1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1\,024$.

**Solución**

La suma se escribe de la siguiente manera:

$$1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1\,024 = 1 + (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4 + (-4)^5$$

La expresión anterior tiene la forma:

$$\mathbf{1 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}$$

Donde $a = -4$, $n = 5$:

$$\begin{aligned} 1 + (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4 + (-4)^5 &= \frac{(-4)^{5+1} - 1}{(-4) - 1} = \frac{(-4)^6 - 1}{-4 - 1}\ \frac{4\,096 - 1}{-5} \\ &= \frac{4\,095}{-5} = -819 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1\,024 = -819$

4 Escribe 111 111 como suma de potencias de 10.

**Solución**

La cantidad 111 111 se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 111\,111 &= 100\,000 + 10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1 \\ &= 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 \end{aligned}$$

Por tanto, $111\,111 = 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$

5 Escribe $2^7 + 2^7$ como potencia de 2.

**Solución**

| | |
|---|---|
| $2^7 + 2^7 = 2^7(1 + 1)$ | Propiedad distributiva de los números reales. |
| $= 2^7(2)$ | |
| $= 2^7(2)^1$ | |
| $= 2^{7+1}$ | Teorema de los exponentes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| $= 2^8$ | |

Por consiguiente, $2^7 + 2^7 = 2^8$

6 ¿Cuántos dígitos tiene el producto de $2^{2006}\times 5^{2012}$?

**Solución**

$5^{2012}$ se descompone de la siguiente forma:

$$5^{2012}=5^{2006}\times 5^{6}$$

Luego:

$$2^{2006}\times 5^{2012}=2^{2006}\times\left(5^{2006}\times 5^{6}\right)$$

$=\left(2^{2006}\times 5^{2006}\right)\times\left(5^{6}\right)$ Propiedad asociativa de los números reales.

$=\left(2\times 5\right)^{2006}\times 5^{6}$ Teorema de los $\left(a\cdot b\right)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}$

$=\left(2\times 5\right)^{2006}\times 5^{6}$

$=\left(2\times 5\right)^{2006}\times 15\,625$

$=15\,625\times 10^{2006}$ Propiedad conmutativa de los números reales.

(15 625: 5 dígitos; $10^{2006}$: 2 006 dígitos)

Por tanto, el producto tiene 5 + 2 006 = 2 011 dígitos.

7 Calcula el producto de todos los divisores de $3^{100}\times 5^{100}$

**Solución**

Los divisores de $3^{100}$ son: $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{100}$
Los divisores de $5^{100}$ son: $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, \ldots, 5^{100}$
Los divisores de aaa$3^{100}\times 5^{100}$ se obtienen al multiplicar cada uno de los divisores de $3^{100}$ por los divisores de $5^{100}$, es decir:

$$\begin{array}{cccccc}
3^0\times 5^0 & 3^0\times 5^1 & 3^0\times 5^2 & 3^0\times 5^3 & \ldots & 3^0\times 5^{100}\\
3^1\times 5^0 & 3^1\times 5^1 & 3^1\times 5^2 & 3^1\times 5^3 & \ldots & 3^1\times 5^{100}\\
3^2\times 5^0 & 3^2\times 5^1 & 3^2\times 5^2 & 3^2\times 5^3 & \ldots & 3^2\times 5^{100}\\
3^3\times 5^0 & 3^3\times 5^1 & 3^3\times 5^2 & 3^3\times 5^3 & \ldots & 3^3\times 5^{100}\\
\vdots & & & & \vdots & \vdots\\
3^{100}\times 5^0 & 3^{100}\times 5^1 & 3^{100}\times 5^2 & 3^{100}\times 5^3 & \ldots & 3^{100}\times 5^{100}
\end{array}$$

Al multiplicar los números de cada renglón se obtiene:

$(3^0\times 5^0)\times(3^0\times 5^1)\times(3^0\times 5^2)\times\ldots\times(3^0\times 5^{100})=3^{101}\times(5^0\times 5^1\times 5^2\times\ldots\times 5^{100})$
$(3^1\times 5^0)\times(3^1\times 5^1)\times(3^1\times 5^2)\times\ldots\times(3^1\times 5^{100})=(3^1)^{101}\times(5^0\times 5^1\times 5^2\times\ldots\times 5^{100})$
$(3^2\times 5^0)\times(3^2\times 5^1)\times(3^2\times 5^2)\times\ldots\times(3^2\times 5^{100})=(3^2)^{101}\times(5^0\times 5^1\times 5^2\times\ldots\times 5^{100})$
.
.
.
$(3^{99}\times 5^0)\times(3^{99}\times 5^1)\times(3^{99}\times 5^2)\times\ldots\times(3^{99}\times 5^{100})=(3^{99})^{101}\times(5^0\times 5^1\times 5^2\times 5^3\times\ldots\times 5^{100})$
$(3^{100}\times 5^0)\times(3^{100}\times 5^1)\times(3^{100}\times 5^2)\times\ldots\times(3^{100}\times 5^{100})=(3^{100})^{101}\times(5^0\times 5^1\times 5^2\times 5^3\times\ldots\times 5^{100})$

Al multiplicar los productos se obtiene:

$$\left((3^0)^{101}\times(3^1)^{101}\times(3^2)^{101}\times(3^3)^{101}\times\ldots\times(3^{99})^{101}\times(3^{100})^{101}\right)\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}=$$

$$\left(3^0\times3^1\times3^2\times3^3\times\ldots\times3^{99}\times3^{100}\right)^{101}\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}$$

$$=\left(3^0\times3^1\times3^2\times3^3\times\ldots\times3^{99}\times3^{100}\right)^{101}\times\left(5^0\times5^1\times5^2\times5^3\times\ldots\times5^{99}\times5^{100}\right)^{101}$$

$$=\left(3^{0+1+2+3+\ldots+99+100}\right)^{101}\times\left(5^{0+1+2+3+\ldots+99+100}\right)^{101}$$

Para determinar la suma de 1 + 2 + 3 + … + 99 + 100 se utiliza la fórmula de Gauss.

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$0+1+2+3+\ldots+99+100=0+\frac{100(100+1)}{2}=\frac{(100)(101)}{2}=5\,050 \text{ con } n=100$$

$$=\left(3^{5\,050}\right)^{101}\times\left(5^{5\,050}\right)^{101}=\left(3^{5\,050}\times5^{5\,050}\right)^{101}=\left[(3\times5)^{5\,050}\right]^{101}=(3\times5)^{5\,050\times101}=(15)^{510\,050}$$

Finalmente, el producto de los divisores de $3^{100}\times5^{100}$ es $(15)^{510\,050}$

Sea $N$ un número compuesto, su descomposición en factores primos se representa con $\boldsymbol{N=a^m b^n c^p}$ **…** con $a$, $b$, $c$ números primos; $m$, $n$, $p$ números naturales.

El número de divisores de $N$ está dado por el producto

$$\boldsymbol{(m+1)(n+1)(p+1)\ldots}$$

## Ejemplo

Encuentra el número de divisores de 108.

### Solución

108 se descompone en factores primos, es decir, $108=2\times2\times3\times3\times3=2^2\times3^3$

Al aplicar la fórmula con $m=2$, $n=3$, se tiene que:

$$(m+1)(n+1)=(2+1)(3+1)=3\times4=12$$

Por tanto, el número de divisores de 108 son 12

## Suma de los divisores de un número

Sea $N$ un número compuesto, su descomposición en factores primos está dada por $N=a^m b^n c^p\ldots$ con $a$, $b$, $c$ números primos; $m$, $n$, $p$ números naturales.

La suma de los divisores de $N$ está dada por la fórmula:

$$S=\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\cdot\ldots$$

## Ejemplo

Determina la suma de los divisores de 9 000.

### Solución

El número 9 000 se descompone en sus factores primos y se representa de la forma $a^m b^n c^p\ldots$, obteniendo:

$$9\,000=2^3\times3^2\times5^3$$

*(continúa)*

(*continuación*)
Se determinan los valores de $a$, $b$, $c$, $m$, $n$ y $p$

$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = 5 \quad m = 3 \quad n = 2 \quad p = 3$$

Estos valores se sustituyen en la fórmula

$$S = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\cdot\ldots = \frac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{3+1}-1}{5-1} = \frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{5^4-1}{5-1}$$
$$= \frac{16-1}{2-1}\cdot\frac{27-1}{3-1}\cdot\frac{625-1}{5-1}$$
$$= \frac{15}{1}\cdot\frac{26}{2}\cdot\frac{624}{4}$$
$$= (15)(13)(156)$$
$$= 30\,420$$

Por tanto, la suma de los divisores de 9 000 es 30 420

# EJERCICIO 116

1. Calcula la suma de: 2 + 4 +6 + 8 + … + 20
2. Calcula la suma de: 1 + 3 + 6 + 9 + … + 60
3. Calcula la suma de: 5 + 10 + 15 + 20 + … + 200
4. Paola leyó un libro en 15 días; si el primer día leyó 3 páginas y los siguientes días leyó 5 páginas más que el día anterior, ¿cuántas páginas tiene el libro?
5. Calcula la suma de las 100 fracciones que se obtienen al formar todos los cocientes de los números de la siguiente lista: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, 19 683
6. Calcula la suma 1 – 3 + 9 – 27 + 81 – 243 + 729 – 2 187
7. Escribe el número 111 111 111 como suma de potencias de 10
8. Escribe el número 111 111 111 111 como suma de potencias de 10
9. Escribe el número 101 010 101 como suma de potencias de $10^2$
10. Calcula la suma de todos los divisores positivos de 1 800
11. Expresa $2^{10} + 2^{10}$ como potencia de 2
12. Expresa $3^5 + 3^5 + 3^5$ como potencia de 3
13. Expresa $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$ como potencia de 4

Encuentra el número de divisores de:

14. 18
15. 60
16. 210
17. 450
18. ¿Cuántas cifras tiene el número $20^{10} \times 2^{404} \times 5^{403}$?
19. ¿Cuántas cifras tiene el número $40^{420} \times 2^{1\,001} \times 5^{1\,850}$?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Problemas de repartimientos proporcionales

Es una regla por medio de la cual se divide un número propuesto en partes proporcionales a otros números dados. Para dividir un número *N* en partes proporcionales entre los números *x*, *y* y *z*; se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m+n+p}{x+y+z}=\frac{N}{S}\Rightarrow m=\frac{N\cdot x}{S},\ n=\frac{N\cdot y}{S},\ p=\frac{N\cdot z}{S}$$

Donde:
$N = m + n + p$
$S = x + y + z$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Dividir proporcionalmente 700 entre los números 2, 3 y 5.

**Solución**

Sean *m*, *n* y *p*, lo que le toca a cada parte, respectivamente.
*N*: cantidad a repartir = $m + n + p = 700$
*S*: suma los números dados = $x + y + z = 2 + 3 + 5 = 10$
Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(700)(2)}{10}=\frac{1400}{10}=140$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(700)(3)}{10}=\frac{2100}{10}=210$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(700)(5)}{10}=\frac{3500}{10}=350$$

Por tanto, las cantidades son: 140, 210 y 350, respectivamente.

2 Divide proporcionalmente 4 440 entre los números $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

**Solución**

Sean *m*, *n* y *p*, lo que le toca a cada parte, respectivamente.
*N*: cantidad a repartir = $m + n + p = 4\,440$
Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{5}{2}}=\frac{p}{\frac{1}{3}}$$

Al transformar a un mismo denominador (mcm) se obtiene:

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{5}{2}}=\frac{p}{\frac{1}{3}}=\frac{m}{\frac{3}{12}}=\frac{n}{\frac{30}{12}}=\frac{p}{\frac{4}{12}}=\frac{m}{3}=\frac{n}{30}=\frac{p}{4}$$

*S*: suma los números dados = $x + y + z = 3 + 30 + 4 = 37$

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(4\,440)(3)}{37}=\frac{13\,320}{37}=360$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(4\,440)(30)}{37}=\frac{133\,200}{37}=3600$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(4\,440)(4)}{37}=\frac{17\,760}{37}=480$$

Por tanto, las cantidades son: 360, 3 600 y 480, respectivamente.

3 Se repartieron $1 150 a 3 personas, cuyas edades son: 12, 16 y 18 años. ¿Cuánto le tocó a cada una, si se dividió proporcionalmente a sus edades?

**Solución**

Sean $m$, $n$ y $p$, lo que le toca a cada persona, respectivamente.

$N$: cantidad a repartir = $m + n + p$ = $1 150

$S$: suma de las edades = $x + y + z = 12 + 16 + 18 = 46$ años.

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m = \frac{N \cdot x}{S} = \frac{(1\,150)(12)}{46} = \frac{13\,800}{46} = 300$$
$$n = \frac{N \cdot y}{S} = \frac{(1\,150)(16)}{46} = \frac{18\,400}{46} = 400$$
$$p = \frac{N \cdot z}{S} = \frac{(1\,150)(18)}{46} = \frac{20\,700}{46} = 450$$

Por tanto, cada persona recibió $300, $400 y $450 respectivamente.

4 Se repartieron $2 800 a 4 personas, que tienen respectivamente 4, 6, 10 y 15 años. ¿Cuánto le tocó a cada una, si se dividió inversamente proporcional a sus edades?

**Solución**

Las razones inversas son: $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$, lo que indica que la persona de mayor edad recibió menos cantidad de dinero.

Sean $l$, $m$, $n$ y $p$, las partes respectivas, entonces:

$$\frac{l}{w} = \frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \frac{l}{\frac{1}{4}} = \frac{m}{\frac{1}{6}} = \frac{n}{\frac{1}{10}} = \frac{p}{\frac{1}{15}}$$

Se transforman las fracciones a un denominador común (mcm) de 4, 6, 10 y 15

$$\frac{l}{\frac{15}{60}} = \frac{m}{\frac{10}{60}} = \frac{n}{\frac{6}{60}} = \frac{p}{\frac{4}{60}} = \frac{l}{15} = \frac{m}{10} = \frac{n}{6} = \frac{p}{4}$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$N$: cantidad a repartir = $l + m + n + p$ = $2 800

$S$: suma de las edades = $w + x + y + z = 4 + 6 + 10 + 15 = 35$ años

$$l = \frac{N \cdot w}{S} = \frac{(2\,800)(15)}{35} = \frac{42\,000}{35} = 1200$$
$$m = \frac{N \cdot x}{S} = \frac{(2\,800)(10)}{35} = \frac{28\,000}{35} = 800$$
$$n = \frac{N \cdot y}{S} = \frac{(2\,800)(6)}{35} = \frac{16\,800}{35} = 480$$
$$p = \frac{N \cdot z}{S} = \frac{(2\,800)(4)}{35} = \frac{11\,200}{35} = 320$$

Finalmente:

La persona de 4 años recibió $1 200

La persona de 6 años recibió $800

La persona de 10 años recibió $480

La persona de 15 años recibió $320

5 Se repartieron \$744 000 entre 3 personas, de modo que la parte de la primera persona sea a la segunda como 4 es a 5, y que la parte de la segunda sea a la tercera como 3 es a 7, ¿cuánto le tocó a cada una?

**Solución**

La segunda parte está representada por 2 números, ésta se modificará para ser representada por un solo número.

Cuando la segunda parte es 5, la primera es 4, entonces si la segunda es 3 veces mayor, la primera también debe de ser 3 veces mayor.

Cuando la segunda parte es 3, la tercera es 7, entonces si la segunda es 5 veces mayor, la tercera también debe de ser 5 veces mayor.

| 1era parte | 2da parte | 3ra parte |
|---|---|---|
| 4 | 5 | |
| | 3 | 7 |
| $(4)(3)=12$ | $(5)(3)=15$ <br> $(3)(5)=15$ | $(7)(5)=35$ |
| 12 | 15 | 35 |

Por tanto, 744 000 se repartieron en proporción de 12, 15 y 35

Sean $m$, $n$ y $p$, lo que le tocó a cada persona.

$N$: cantidad a repartir = $m + n + p$ = \$744 000

$S$: suma de las partes = $x + y + z = 12 + 15 + 35 = 62$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(744\,000)(12)}{62}=\frac{8\,928\,000}{62}=144\,000$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(744\,000)(15)}{62}=\frac{11\,160\,000}{62}=180\,000$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(744\,000)(35)}{62}=\frac{26\,040\,000}{62}=420\,000$$

Finalmente:

La primera persona recibió \$144 000

La segunda persona recibió \$180 000

La tercera persona recibió \$420 000

6 Antonio deja \$141 000 al morir y dispone en su testamento que dicha suma sea repartida entre su madre, 2 hermanos, 3 hermanas y 2 sobrinos, del modo siguiente: a los 2 sobrinos partes iguales; a cada hermana lo que a un sobrino, más la tercera parte de lo mismo; a cada hermano lo que a una hermana, más la mitad de lo mismo, y a su madre 3 veces la suma de la parte de cada hermano y cada hermana. ¿Cuánto le corresponde a cada heredero?

**Solución**

Sea 1 la parte de cada sobrino, la de los 2 es $2\times 1=2$

La parte que le corresponde a una hermana es: $1+\frac{1}{3}(1)=\frac{4}{3}$, de las 3 es $3\times\frac{4}{3}=4$

La parte que le corresponde a un hermano será $\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)=2$, de los 2 es $2\times 2=4$

La parte que le corresponde a la madre será $3\left(\frac{4}{3}+2\right)=3\left(\frac{10}{3}\right)=10$

Luego: sea $l$ lo que toca a los 2 sobrinos, $m$ lo que toca a las 3 hermanas, $n$ lo que corresponde a los 2 hermanos y $p$ lo que toca a la madre.

$N$: cantidad a repartir = $l + m + n + p$ = \$141 000

$S$: suma de las partes = $w + x + y + z = 2 + 4 + 4 + 10 = 20$

(*continúa*)

(*continuación*)

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$l=\frac{N\cdot w}{S}=\frac{(141000)(2)}{20}=\frac{282\,000}{20}=14\,100$$
$$m=\frac{N\cdot x}{S}=\frac{(141000)(4)}{20}=\frac{564\,000}{20}=28\,200$$
$$n=\frac{N\cdot y}{S}=\frac{(141000)(4)}{20}=\frac{564\,000}{20}=28\,200$$
$$p=\frac{N\cdot z}{S}=\frac{(141000)(10)}{20}=\frac{1410\,000}{20}=70\,500$$

Finalmente:

Cada sobrino recibirá: $\frac{14\,100}{2}=\$7\,050.00$

Cada hermana recibirá: $\frac{28\,200}{3}=\$9\,400.00$

Cada hermano recibirá: $\frac{28\,200}{2}=\$14\,100.00$

La mamá recibirá: $70 500.00

## EJERCICIO 117

1. Guillermo quiere repartir $2 310 entre sus 3 sobrinos de 7, 11 y 15 años. ¿Cuánto le tocará a cada sobrino, si se repartirá proporcionalmente a sus edades?
2. Allan quiere repartir $1 026 entre sus 4 hermanos de 6, 8, 10 y 12 años. ¿Cuánto le tocará a cada hermano, si se reparte inversamente proporcional a su edad?
3. Tres matemáticos se reúnen para resolver una guía de ecuaciones diferenciales, han ganado juntos $3 800; el primero ha trabajado durante 3 días, el segundo durante 6 y el tercero durante 10. ¿Qué parte de la ganancia le corresponde a cada uno en proporción del tiempo de su trabajo?
4. Divide el número 255 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 2:5 y la parte de la primera sea a la de la tercera como 1:4, ¿cuánto le corresponde a cada parte?
5. Divide el número 1 020 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 1:2 y la parte de la segunda sea a la de la tercera como 3:4, ¿cuánto le corresponde a cada parte?
6. Divide el número 228 en 3 partes, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como $\frac{2}{5}$ es a $\frac{3}{5}$ y la parte de la segunda sea a la de la tercera como $\frac{2}{5}$ es a $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto le corresponde a cada parte?
7. Reparte $6 440 entre 3 personas, de tal manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 3 es a 5 y que la parte de la segunda sea a la de la tercera como 1 es a 3, ¿cuánto le toca a cada persona?
8. José Luis muere dejando en su testamento una herencia de $234 000 a una hermana que se encuentra en otro país, y de quien nunca tuvo noticias, el notario lee el testamento: “Si mi hermana tiene una hija, dejo para ella las $\frac{3}{4}$ partes de la herencia y $\frac{1}{4}$ para la madre; pero si tiene un hijo, a éste le tocará $\frac{1}{4}$ de la herencia y las $\frac{3}{4}$ partes para la madre”. Sucede que la hermana tiene un hijo y una hija, ¿cuánto le corresponde a cada heredero?
9. Jorge deja $142 500 al morir y dispone en el testamento que dicha suma se reparta entre sus 4 hermanas, 2 hermanos y 5 sobrinos, de tal manera que: los 5 sobrinos a partes iguales, a cada hermana lo que a un sobrino, más $\frac{2}{3}$ de lo mismo, a cada hermano lo que a una hermana, más $\frac{1}{4}$ de lo mismo. ¿Cuánto le corresponde a cada heredero?

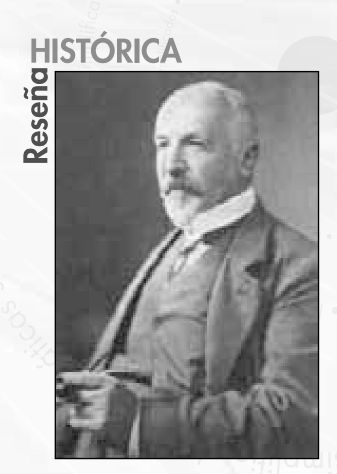
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# Álgebra

# Capítulo 1

## Conjuntos y lógica

**Reseña HISTÓRICA**



*Teoría de conjuntos*

Georg Cantor fue un matemático alemán, quien con Dedekind inventó la teoría de conjuntos, base de las matemáticas modernas. Gracias a la presentación axiomática de su teoría de los conjuntos, fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito, bajo la forma de números transfinitos (cardinales y ordinales).

Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no siempre tienen el mismo tamaño, el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los racionales es enumerable, es decir, del mismo tamaño que el conjunto de los naturales, mientras que el de los reales no lo es: existen, por tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

*Lógica matemática*

Hasta casi finales del siglo XIX se pensaba que la validez de una demostración, de un razonamiento matemático, consistía principalmente en que "nos convenciera", en que se presentara como evidente a nuestra mente y lo aceptáramos como válido. Ésta era, por ejemplo, la forma de entender la argumentación del mismo René Descartes (1596-1650).

Se cita, como ejemplo, la frase del matemático francés Jean Marie Duhamel (1797-1872): "El razonamiento se hace por el sentimiento que nos produce en la mente la evidencia de la verdad, sin necesidad de norma o regla alguna".

Giuseppe Peano (1858-1932) se levantó contra esta forma de argumentar y, en esencia, defendía que "el valor de una demostración, de un proceso argumentativo, no depende del gusto o sentimientos interiores de nadie, sino de que el argumento tenga una propiedad de validez universalmente comprobable".

Para Peano la lógica matemática era, realmente, la lógica de la matemática, un instrumento cuyo objetivo era dar el rigor y adecuado valor a las argumentaciones del quehacer de la matemática.

Georg Cantor (1845-1918)

## Simbología

Éstos son los símbolos que se utilizarán en el capítulo:

$\{\ \}$ Conjunto.

$\in$ Es un elemento del conjunto o pertenece al conjunto.

$\notin$ No es un elemento del conjunto o no pertenece al conjunto.

$|$ Tal que.

$n(C)$ Cardinalidad del conjunto $C$.

$U$ Conjunto universo.

$\phi$ Conjunto vacío.

$\subseteq$ Subconjunto de.

$\subset$ Subconjunto propio de.

$\not\subset$ No es subconjunto propio de.

$>$ Mayor que.

$<$ Menor que.

$\geq$ Mayor o igual que.

$\leq$ Menor o igual que.

$\cap$ Intersección de conjuntos.

$\cup$ Unión de conjuntos.

$A'$ Complemento del conjunto $A$.

$=$ Símbolo de igualdad.

$\neq$ No es igual a.

$\ldots$ El conjunto continúa.

$\Rightarrow$ Entonces.

$\Leftrightarrow$ Si y sólo si.

$\sim$ No (es falso que).

$\wedge$ y

$\vee$ o

## Conjuntos

Un conjunto es una colección de cosas u objetos con características definidas. Los conjuntos se representan con letras mayúsculas y sus elementos se delimitan con llaves y separan con comas.

### Ejemplos

*a*) El conjunto de las vocales.

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

*b*) El conjunto de los dígitos.

$$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

*c*) El conjunto de los números naturales.

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \}$$

**Observación:** los puntos suspensivos indican que el conjunto continúa y que los elementos siguientes conservan la misma característica.

*d*) El conjunto de los días de la semana.

$$S = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

*e*) El conjunto de los números naturales entre 5 y 10.

$$P = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$

Para indicar que un elemento pertenece o no a un conjunto se utilizan los símbolos $\in$ y $\notin$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sea el conjunto $A = \{ a, e, i, o, u \}$, entonces
$u$ pertenece al conjunto $A$ y se representa $u \in A$.
$x$ no pertenece al conjunto $A$ y se representa $x \notin A$.

2 Sea el conjunto $B = \{ 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 \}$, entonces

$$2 \in B,\ 5 \in B,\ 1 \notin B,\ 11 \notin B$$

## EJERCICIO 1

Dados los conjuntos: $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ coloca $\in$ o $\notin$ según corresponda:

1. $a$ _____ $B$
2. $c$ _____ $A$
3. 2 _____ $B$
4. 3 _____ $A$
5. $u$ _____ $A$
6. 5 _____ $B$
7. $i$ _____ $A$
8. $o$ _____ $B$
9. $e$ _____ $A$
10. 8 _____ $B$
11. $b$ _____ $B$
12. 1 _____ $A$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Conjuntos de números

- **Números naturales:** $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots\}$
- **Números enteros:** $Z = \{\ldots -, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Números racionales:** $Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$

**Ejemplos**

$$\frac{6}{5}, -\frac{2}{7}, 6, -8, 0.75 = \frac{3}{4}, 0.\bar{2} = \frac{2}{9}$$

- **Números irracionales.** Números que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros.

**Ejemplos**

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{64}, e, \pi, \ldots$$

- **Números reales.** Es la unión de los números racionales con los irracionales.

## Tipos de números

- **Números dígitos.** Forman la base del sistema decimal

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- **Número par.** Son los divisibles entre 2.

**Ejemplos**

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

- **Número impar.** Son los no divisibles entre 2.

**Ejemplos**

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, …

- **Número primo.** Sólo tiene dos divisores, entre sí mismo y la unidad.

**Ejemplos**

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

- **Número compuesto.** Tiene dos o más divisores primos.

**Ejemplos**

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, …

- **Múltiplo de un número.** El múltiplo de un número $k$, es $nk$, donde $n$ es un natural.

**Ejemplos**

Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, …

## Escritura y representación de conjuntos

Los conjuntos se representan de dos formas:

- **Forma descriptiva o por comprensión.** Se hace mención a la característica principal de los elementos del conjunto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma descriptiva el conjunto $S = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$.

**Solución**

Este conjunto se lee:

$x$ pertenece al conjunto de los números naturales, tal que $x$ es un divisor de seis.
$x$ es una variable que cumple con las características del conjunto $S$.

2 Si $Q = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ representa su forma descriptiva.

**Solución**

$Q = \{q \in N \mid q$ es primo menor que $12\}$

- **Forma enumerativa o por extensión.** Se enlistan los elementos del conjunto, si algún elemento se repite se considera una sola vez.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en forma enumerativa el conjunto $M = \{m \in N \mid m < 5\}$.

**Solución**

El conjunto se lee:

los números naturales que son menores que 5 y su representación en forma enumerativa es:

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

2 Representa en forma enumerativa el conjunto: $A = \{x \in Z \mid x + 8 = 10\}$.

**Solución**

Este conjunto lo forman los números enteros que sumados con 8 dan como resultado 10, por tanto, su forma enumerativa es:

$$A = \{2\}$$

Ya que $2 + 8 = 10$

## EJERCICIO 2

Transforma a la forma descriptiva o enumerativa los siguientes conjuntos:

1. $R = \{ 1, 2, 5, 10 \}$
2. $A = \{ x \in N \mid 1 < x \leq 9 \}$
3. $B = \{ x \in N \mid x + 3 = 7 \}$
4. $C = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$
5. $V = \{ y \in Z \mid -2 \leq y < 3 \}$
6. $Q = \{ x \mid x$ es una vocal de la palabra número $\}$
7. $T = \{ x$ es un dígito de la cifra 453 425 $\}$
8. $S = \{ x$ es un dígito primo de la cifra 729 634 $\}$
9. $U = \{ 4, 8, 12, 16, \ldots \}$
10. $M = \{ x \in N \mid x$ es divisor par de 50 $\}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Cardinalidad

Es el número de elementos que contiene un conjunto.

### Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{ x \mid x$ es compuesto menor que 10, $x \in N \}$?

### Solución

El conjunto $A$, en forma enumerativa, es:

$$A = \{ 4, 6, 8, 9 \}$$

Entonces su cardinalidad es 4 y se denota: $n(A) = 4$

**Conjunto finito.** Es aquel conjunto con cardinalidad definida.

### Ejemplo

¿El conjunto $B = \{ x \mid x$ es un día de la semana $\}$ es finito?

### Solución

El conjunto $B$ en forma enumerativa es:

$$B = \{ \text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} \}$$

El conjunto tiene 7 elementos, es decir su cardinalidad está definida, por tanto es finito.

**Conjunto infinito.** Es aquél cuya cardinalidad no está definida, por ser demasiado grande para cuantificarlo.

### Ejemplo

¿El conjunto $C = \{ x \in N \mid x$ es múltiplo de 3 $\}$ es infinito?

### Solución

El conjunto $C$ en su forma enumerativa es:

$$C = \{ 3, 6, 9, 12, 15, \ldots \}$$

El conjunto continúa indefinidamente, no se puede determinar su número de elementos, por tanto, su cardinalidad es infinita y se escribe como:

$$n(C) = \infty$$

**Conjunto vacío o nulo.** Es aquel que carece de elementos y se denota con el símbolo $\phi$ o bien { }.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿El conjunto $D = \{ x \in N \mid 2x - 1 = 0 \}$ es vacío?

**Solución**

El único valor de $x$ que satisface la igualdad es $\frac{1}{2}$ pero no pertenece al conjunto de los números naturales, por tanto, el conjunto $D$ es vacío.

$$D = \{ \ \} = \phi \text{ su cardinalidad es } n(D) = 0$$

2 ¿El conjunto $E = \{ x \mid x$ es un número par e impar $\}$ es vacío?

**Solución**

El conjunto $E$ es vacío, ya que no hay ningún número que sea par e impar a la vez.

## EJERCICIO 3

Encuentra la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{ x \in N \mid x$ es un divisor de 30 $\}$
2. $B = \{ x$ es vocal de la palabra casa $\}$
3. $S = \{ x \mid x$ es una estación del año $\}$
4. $R = \{ x \in N \mid x + 3 = 1 \}$
5. $Q = \{ x \in N \mid x > 6 \}$
6. $T = \{ x \in R \mid x = 6 \}$
7. $M = \{ x \in N \mid x < 1 \}$
8. $L = \{ x \in N \mid x$ es par divisor de 20 $\}$
9. $J = \{ x$ es natural $\}$
10. $O = \{ x \mid x$ es un mes del año $\}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

### Conjuntos equivalentes

Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos, se dice que $A$ es equivalente a $B$ si y sólo si tiene la misma cardinalidad; se denota: $A \cong B$ y se lee $A$ es equivalente a $B$.

**Ejemplo**

Si $A = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$ y $B = \{ a, e, i, o \}$ comprueba que $A$ es equivalente a $B$.

**Solución**

Las cardinalidades son: $n(A) = 4$, $n(B) = 4$, por tanto, se concluye que ambos son equivalentes. $A \cong B$.

## Conjuntos iguales

Son aquellos que tienen la misma cardinalidad y los mismos elementos.

**Ejemplo**

¿Son iguales los conjuntos $A = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$ y $B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$?

**Solución**

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$A = \{ 1, 2, 3, 6 \} \text{ y } B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

Sus cardinalidades son: $n(A) = n(B) = 4$
Ambos tienen la misma cardinalidad y los mismos elementos, por tanto, los conjuntos son iguales, es decir, $A = B$.

## Conjuntos disjuntos

Son aquellos que no tienen elementos comunes.

**Ejemplo**

¿Son disjuntos los conjuntos $R = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 5 $\}$ y $S = \{ x \in N \mid 2 < x < 5 \}$?

**Solución**

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$R = \{ 1, 5, \} \text{ y } S = \{ 3, 4, \}$$

Los conjuntos no tienen elementos en común, por tanto, los conjuntos $R$ y $S$ son disjuntos.

# EJERCICIO **4**

Sean los conjuntos:

$A = \{ x \in N \mid x < 5 \}$

$B = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 8 $\}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$D = \{ 1, 2, 4, 8 \}$

$E = \{ a, e, i, o \}$

$F = \{ x \mid x$ es una vocal de la palabra murciélago $\}$

Verifica si son equivalentes, iguales o disjuntos los siguientes pares de conjuntos:

1. $A$ y $C$
2. $D$ y $E$
3. $B$ y $F$
4. $F$ y $D$
5. $A$ y $D$
6. $E$ y $B$
7. $C$ y $E$
8. $F$ y $C$
9. $A$ y $F$
10. $B$ y $D$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Subconjuntos

Dado un conjunto $S$ se dice que $A$ es subconjunto de $S$, si todos los elementos de $A$ están contenidos en el conjunto $S$ y se denota por $A \subseteq S$. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

### Ejemplo

Dados los conjuntos $S = \{ x \mid x \text{ es dígito} \}$ y $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, verifica que $A \subseteq S$.

### Solución

El conjunto $S$ en forma enumerativa es: $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

Los elementos de $A$ están contenidos en $S$, por tanto, $A \subseteq S$.

**Subconjunto propio.** Dados dos conjuntos $A$ y $B$, se dice que $B$ es subconjunto propio de $A$ si todos los elementos de $B$ están en $A$ y no son equivalentes.

### Ejemplo

Sean los conjuntos $L = \{ 2, 4, 5, 6, 8 \}$ y $M = \{ 2, 4, 6 \}$, verifica que $M \subset L$.

### Solución

Los elementos de $M$ están contenidos en $L$, y $M$ no es equivalente a $L$, por consiguiente, $M \subset L$.

**Número de subconjuntos de un conjunto.** El número de subconjuntos está dado por la fórmula:

$$N(s) = 2^n \quad \text{con } n = \text{cardinalidad}$$

### Ejemplo

Determina el número de subconjuntos del conjunto:

$$R = \{ a, b, c, d \}$$

### Solución

La cardinalidad del conjunto es 4, entonces $n = 4$ y al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\text{Número de subconjuntos} = 2^4 = 16$$

## Conjunto potencia

Se le llama así al conjunto que forman todos los subconjuntos de un conjunto.

### Ejemplo

Encuentra el conjunto potencia de:

$$T = \{ 2, 4, 6 \}$$

### Solución

El número de subconjuntos de $T$ es:

$$N(s) = 2^3 = 8$$

El conjunto potencia está formado por 8 subconjuntos de cero, uno, dos y tres elementos, los cuales son:

$$\{\{ \},\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\}\}$$

## Conjunto universo

Sean $A$, $B$, $C$, …, subconjuntos de un conjunto $U$, a este último se le llama conjunto universo de los conjuntos dados.

**Ejemplo**

Sea $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ y los conjuntos $A$, $B$ y $C$ tales que:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \}, B = \{ 1, 2, 3, 4 \} \text{ y } C = \{ 1, 2, 6, 7 \}$$

Como $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, siendo $U$ el conjunto universo.

# EJERCICIO 5

Resuelve lo que se indica en los siguientes ejercicios:

1. Si $W = \{ x, y, z \}$, halla el número de subconjuntos de $W$.
2. Si $T = \{ x \in N \mid 1 < x < 7 \}$, determina el número de subconjuntos de $T$.
3. Si $A = \{ x \in N \mid x$ es par menor que 10 $\}$, halla el número de subconjuntos de $A$.
4. Sea el conjunto $L = \{ \alpha, \beta, \theta \}$, determina el conjunto potencia.
5. Sea el conjunto $M = \{ a, c, e, f \}$, determina el conjunto potencia.
6. Sea el conjunto $N = \{1, 2, 3, 6\}$, halla el conjunto potencia.
7. Sea el conjunto $P = \{ x \in N \mid x$ es un divisor de 9$\}$, determina el conjunto potencia.
8. Sea el conjunto $Q = \{ x \in N \mid 4 < x \leq 7 \}$, determina el conjunto potencia.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Diagramas de Venn

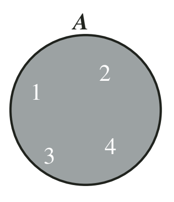
Es la representación de un conjunto o conjuntos y sus operaciones, que delimitan figuras planas como círculos o rectángulos; por lo general los círculos delimitan a los elementos del conjunto o conjuntos dados y los rectángulos delimitan al conjunto universo.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Representa en un diagrama de Venn el conjunto $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

**Solución**



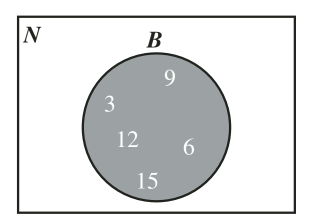

2 Representa en un diagrama de Venn el conjunto:

$$B = \{ x \in N \mid x \text{ es múltiplo de 3 menor que 17 } \}$$

**Solución**

El conjunto $B$ en forma enumerativa es: $B = \{\ 3, 6, 9, 12, 15\ \}$ y el conjunto universo son los números naturales.

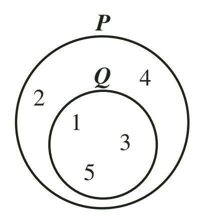
Por tanto, el diagrama es:




3 Representa en un diagrama de Venn los conjuntos $Q = \{\ 1, 3, 5\ \}$ y $P = \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$.

**Solución**

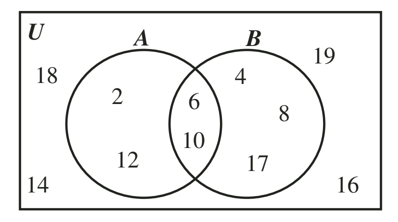
El conjunto $Q$ es un subconjunto propio de $P$, ya que todos los elementos de $Q$ son elementos de $P$, por consiguiente, la representación de ambos conjuntos en un diagrama de Venn es:




4 Representa en un diagrama de Venn los conjuntos $U = \{2,4,6,8,10,12,14,16,17,18,19\}$, $A = \{2,6,10,12\}$ y $B = \{4,6,8,10,17\}$

**Solución**

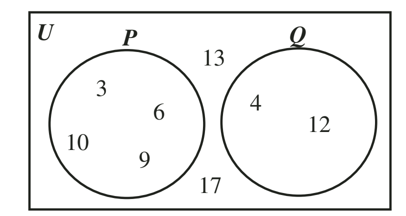
Los elementos que se repiten se colocan en la región común de los conjuntos $A$ y $B$. Los elementos faltantes de cada conjunto se colocan, respectivamente, en la región sobrante. Los elementos del universo que no aparecen en los conjuntos se colocan fuera de ellos.




5 Sean los conjuntos $U = \{3,4,6,9,10,12,13,17\}$, $P = \{3,6,9,10\}$ y $Q = \{4,12\}$, represéntalos en un diagrama de Venn.

**Solución**

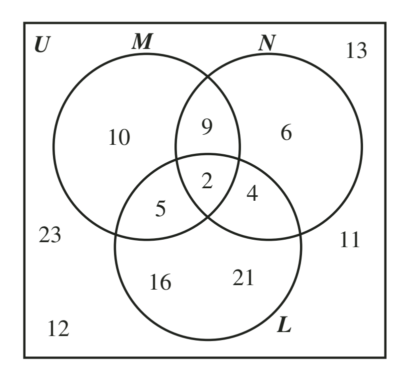
No hay elementos en común; en el diagrama los conjuntos están separados con sus respectivos elementos y los elementos que no pertenecen a los conjuntos se colocan fuera de ellos.



6 Dibuja en un diagrama de Venn los conjuntos $U = \{2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 21, 23\}$, $M = \{2, 5, 9, 10\}$, $N = \{2, 4, 6, 9\}$ y $L = \{2, 4, 5, 16, 21\}$

**Solución**

Los elementos que se repiten se colocan en la región común de los 3 conjuntos y los demás elementos se colocan en sus conjuntos correspondientes, de la misma forma que en los ejemplos anteriores.

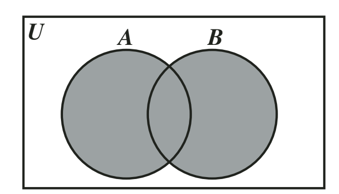



## Unión de conjuntos

Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos, entonces la unión de $A$ y $B$, se define:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

Su diagrama de Venn se representa sombreando ambos conjuntos.




La unión de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos de ambos conjuntos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean los conjuntos $A = \{ 3, 5, 6, 8, 10 \}$ y $B = \{ 2, 6, 8, 10, 12 \}$, halla $A \cup B$.

**Solución**

El conjunto solución de la unión de los conjuntos $A$ y $B$ son todos los elementos de ambos conjuntos, los elementos que se repiten sólo se escriben una vez.

Por tanto, el conjunto es:

$$A \cup B = \{ 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12 \}$$

2 Si $S = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 20 $\}$ y $T = \{ x \in N \mid x$ es divisor de 6 $\}$, halla y representa en un diagrama de Venn $S \cup T$.

**Solución**

La representación en forma enumerativa de los conjuntos es:

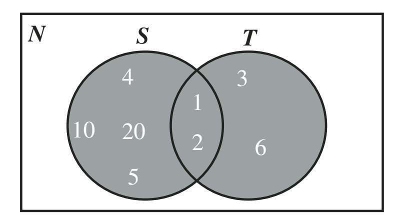
$$S = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$$

$$T = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

El conjunto solución de la unión de los conjuntos $S$ y $T$ es:

$$S \cup T = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20 \}$$

Diagrama de Venn




3 Para los conjuntos $U = \{ x \mid x$ es un dígito $\}$, $P = \{ x \in U \mid x$ es par $\}$ y $Q = \{ x \in U \mid x$ es impar $\}$. Determina y representa en un diagrama de Venn $P \cup Q$.

**Solución**

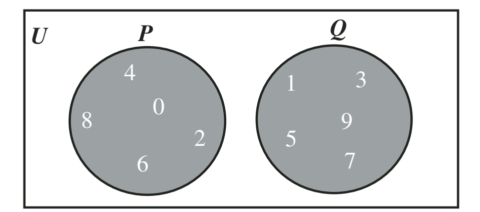
La representación en forma enumerativa de los conjuntos es:

$$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \},\ P = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \} \text{ y } Q = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

El conjunto solución de la unión de $P$ y $Q$ es:

$$P \cup Q = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Diagrama de Venn

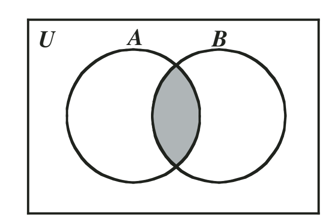



## Intersección de conjuntos

Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos, entonces la intersección de $A$ y $B$ se define:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Su diagrama de Venn se representa sombreando la región común de ambos conjuntos.




En esta operación se toman únicamente los elementos que se repiten en los dos conjuntos.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean los conjuntos $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$, $A = \{ 1, 2, 5, 6 \}$ y $B = \{ 1, 4, 5, 6, 7 \}$, precisa y representa en un diagrama de Venn $A \cap B$.

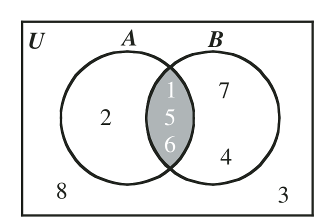
**Solución**

Para encontrar el conjunto solución de la intersección de los conjuntos $A$ y $B$, se toman únicamente los elementos que se repiten en los conjuntos.

Por tanto, el conjunto es

$$A \cap B = \{ 1, 5, 6 \}$$

Diagrama de Venn




2 Encuentra la intersección de los conjuntos $C = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$, $D = \{ x \in N \mid x \geq 6 \}$ y su diagrama de Venn.

**Solución**

La transformación en su forma enumerativa de los conjuntos es:

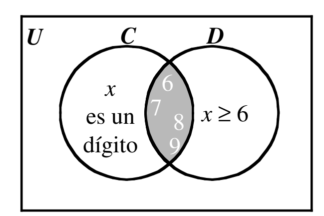
$$C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \},\ D = \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11... \}$$

Para hallar el conjunto solución de la intersección de los conjuntos $C$ y $D$, se toman únicamente los elementos que se repiten en los 2 conjuntos.

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$C \cap D = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$

Diagrama de Venn



3 Para: $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, $S = \{ x \in U \mid x \text{ es par} \}$ y $T = \{ x \in U \mid x \text{ es impar} \}$. Determina y representa en un diagrama de Venn $S \cap T$.

**Solución**

La forma enumerativa de los conjuntos es:

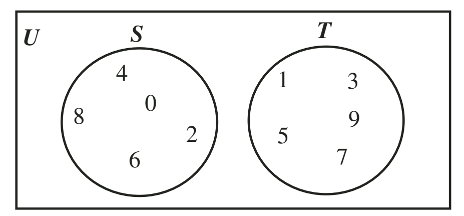
$$S = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$$
$$T = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

Los conjuntos no tienen elementos en común.
Por tanto, el conjunto solución es vacío:

$$A \cap B = \{\} = \phi$$

Diagrama de Venn

El diagrama de Venn no se sombrea



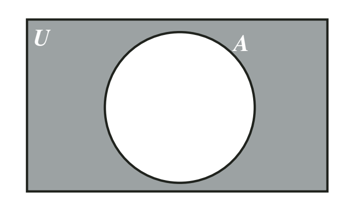

## Conjunto complemento

Sea $U$ el conjunto universo y $A$ un subconjunto de $U$, el complemento de $A$ se define:

$$A' = \{ x \mid x \in U \text{ y } x \notin A \}$$

El conjunto solución contiene a los elementos que pertenecen a $U$ y no pertenecen al conjunto $A$ y se representa como $A'$ o $A^c$.

Su diagrama de Venn se representa sombreando la región fuera del conjunto $A$.




EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el complemento y su diagrama de Venn del conjunto $A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$, si el universo es $U = \{ x \in N \mid x \leq 10 \}$.

**Solución**

El conjunto $U$ en su forma enumerativa es:

$$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

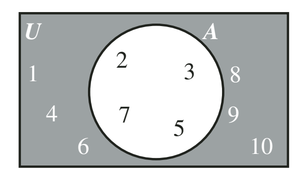
*(continúa)*

(*continuación*)

Por consiguiente, el complemento de $A$ es:

$$A' = \{ 1, 4, 6, 8, 9, 10 \}$$

Diagrama de Venn




2 Sea $U = \{ x \in N \mid x$ es un número compuesto menor que 16 $\}$. Determina el complemento del conjunto $M = \{ x \in U \mid x$ es impar $\}$.

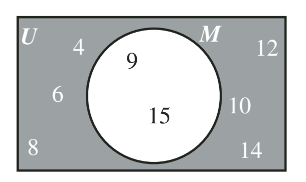
**Solución**

Los conjuntos en su forma enumerativa son:

$$U = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 \}$$
$$M = \{ 9, 15 \}$$

Por tanto, el conjunto complemento de $M$ es: $M' = \{ 4, 6, 8, 10, 12, 14 \}$

Diagrama de Venn




3 Sean los conjuntos

$U = \{ 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14 \}$
$A = \{ 2, 5, 6, 9, 12 \}$
$B = \{ 3, 5, 6, 8, 9 \}$

Determina $A' \cap B$.

**Solución**

Se obtiene el complemento de $A$:

$$A' = \{ 3, 8, 10, 13, 14 \}$$

Se obtiene la intersección de $A'$ con el conjunto $B$:

$$A' \cap B = \{ 3, 8, 10, 13, 14 \} \cap \{ 3, 5, 6, 8, 9 \} = \{ 3, 8 \}$$

Por tanto, el conjunto solución es:

$$A' \cap B = \{ 3, 8 \}$$

4 Sean los conjuntos:

$A = \{ x \in N \mid x$ es par menor que 10 $\}$
$B = \{ x \in N \mid 6 \leq x < 10 \}$
$C = \{ x \in N \mid x$ es impar $\}$

Halla $(A \cup B) \cap C$

**Solución**

Los conjuntos en forma enumerativa son:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \},\ B = \{ 6, 7, 8, 9 \} \text{ y } C = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots \}$$

Se halla $A \cup B$ :

$$A \cup B = \{ 2, 4, 6, 7, 8, 9 \}$$

Con el conjunto $C$ y el conjunto anterior se halla la intersección:

$$(A \cup B) \cap C = \{ 2, 4, 6, 7, 8, 9 \} \cap \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots \} = \{ 7, 9 \}$$

Finalmente, el conjunto solución es:

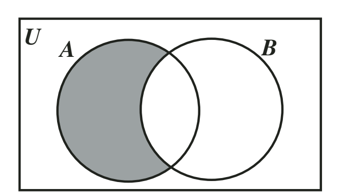
$$(A \cup B) \cap C = \{ 7, 9 \}$$

## Diferencia de conjuntos

Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos, se define la diferencia como el conjunto que contiene a los elementos que pertenecen a $A$ y que no pertenecen al conjunto $B$. La diferencia se representa como $A - B$.

$$A - B = A \cap B^c = \{ x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \notin B \}$$

Su diagrama de Venn se representa de la manera siguiente:




**Ejemplo**

Si $A = \{ a, b, c, d, e \}$ y $B = \{ a, e, i, o, u \}$, hallar $A - B$ y su diagrama de Venn.

**Solución**

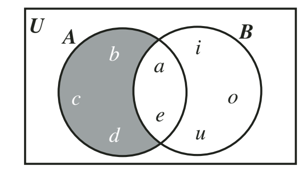
El conjunto solución contiene a los elementos que pertenecen a $A$ y que no pertenecen al conjunto $B$, entonces:

$$A - B = \{ a, b, c, d, e \} - \{ a, e, i, o, u \}$$

Por tanto, el conjunto es:

$$A - B = \{ b, c, d \}$$

Diagrama de Venn



# EJERCICIO 6

Sean los conjuntos:

$U = \{x \in Z \mid -4 < x \leq 7\}$
$A = \{x \in U \mid x < 3\}$
$B = \{x \in U \mid x \text{ es un número par mayor que } 1\}$

Representa en diagrama de Venn y determina:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A'$
4. $B'$
5. $A - B$
6. $B - A$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

En los siguientes ejemplos, se combinan las operaciones de conjuntos.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dados los conjuntos $U = \{ x \in N \mid x \leq 9 \}$, $A = \{ x \in N \mid 3 < x < 8 \}$ y $B = \{ 1, 4, 7, 9 \}$, encuentra el conjunto solución de: $A' \cap B'$

**Solución**

Se escriben los conjuntos $U$ y $A$ en su forma enumerativa:

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ $\quad$ $A = \{ 4, 5, 6, 7 \}$

Se buscan los complementos de ambos conjuntos:

$A' = \{ 1, 2, 3, 8, 9 \}$ $\quad$ $B' = \{ 2, 3, 5, 6, 8 \}$

Se efectúa la operación y el conjunto solución es:

$$A' \cap B' = \{ 1, 2, 3, 8, 9 \} \cap \{ 2, 3, 5, 6, 8 \}$$
$$= \{ 2, 3, 8 \}$$

2 Para los conjuntos:

$P = \{ x \in N \mid -3 < x \leq 6 \}$ $\quad$ $R = \{ x \in N \mid x \text{ es par menor que } 16 \}$
$Q = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 20 \}$ $\quad$ $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$

Determina $(P - Q) \cup (R \cap S)$

**Solución**

Los conjuntos en forma enumerativa son:

$P = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ $\quad$ $R = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \}$
$Q = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$ $\quad$ $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$

Se obtiene la diferencia entre los conjuntos $P$ y $Q$:

$$P - Q = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} - \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$$
$$P - Q = \{ -2, -1, 0, 3, 6 \}$$

Se determina la intersección de $R$ y $S$:

$$R \cap S = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \} \cap \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \}$$
$$R \cap S = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Se determina la unión:

$$(P - Q) \cup (R \cap S) = \{ -2, -1, 0, 3, 6\} \cup \{2, 4, 6, 8 \}$$
$$(P - Q) \cup (R \cap S) = \{ -2, -1, 0, 2, 3, 4, 6, 8 \}$$

## EJERCICIO 7

Sean los conjuntos:

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$A = \{ x \in U \mid x \text{ es par menor que } 10\}$

$B = \{ x \in U \mid x \text{ es divisor de } 12 \}$

$C = \{ x \in U \mid x < 6 \}$

$D = \{ x \in U \mid 2 < x \leq 6 \}$

$E = \{ x \in U \mid x \text{ es un dígito} \}$

$F = \{ x \in U \mid x > 13 \}$

$G = \{ x \in U \mid x \text{ es par mayor que } 10 \}$

Determina:

1. $A \cup B$
2. $B \cup C$
3. $C \cup D$
4. $D \cup B$
5. $A \cap B$
6. $A \cap D$
7. $C \cap E$
8. $B \cap C$
9. $A'$
10. $B'$
11. $C'$
12. $D'$
13. $A - B$
14. $C - D$
15. $E - B$
16. $B - A$
17. $A' \cap B$
18. $A \cup B'$
19. $B' \cap E'$
20. $A' - G$
21. $(A \cup B)'$
22. $(A \cap B)'$
23. $(A \cup F) \cap C$
24. $B \cup (F - G)$
25. $(F - G) \cap E'$
26. $(F \cap G) \cup D$
27. $E' \cap (A \cup G)$
28. $(E \cup F) \cap (A \cup G)$
29. $(C \cup E) \cap (F \cup G)$
30. $(B \cup D) \cup (F \cap G)$
31. $(B \cup D)' - (E \cup G)'$
32. $(A' \cap B') - (E' \cap F')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

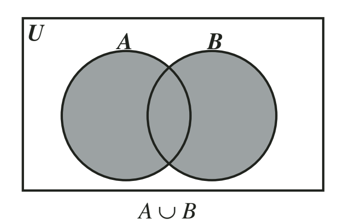
## Operaciones de conjuntos con diagramas de Venn

EJEMPLOS

1 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cup B)'$:

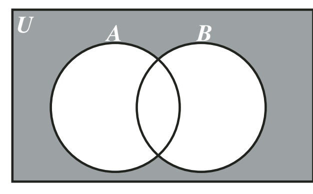
**Solución**

Se determina el diagrama de la unión del conjunto $A$ con $B$.




$A \cup B$

El complemento es todo lo que no pertenece a la unión, por tanto, su diagrama de Venn es:

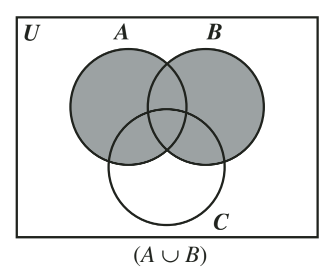



$(A \cup B)'$

2 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cup B) \cap C$.

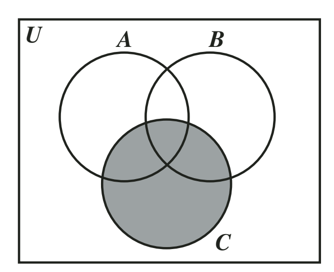
**Solución**

Diagrama de Venn de $(A \cup B)$

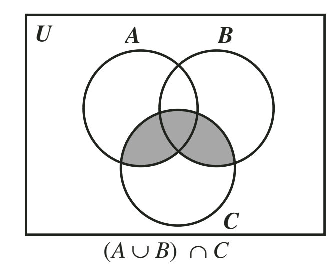


$(A \cup B)$

Diagrama de Venn del conjunto $C$




La intersección de la unión de $A$ con $B$ y el conjunto $C$, es la región común entre las áreas sombreadas.

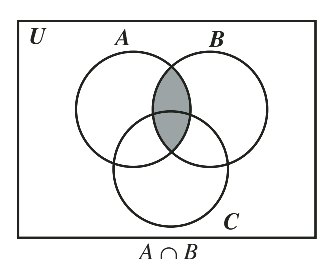


$(A \cup B) \cap C$

3 Representa en un diagrama de Venn la siguiente operación $(A \cap B) \cup (A - C)$.

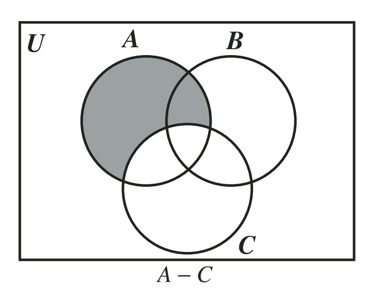
**Solución**

Diagrama de Venn $(A \cap B)$



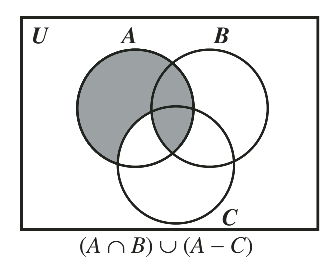
$A \cap B$

Diagrama de Venn $(A - C)$



$A - C$

Finalmente, el conjunto solución es la unión de las áreas sombreadas.



$(A \cap B) \cup (A - C)$

# EJERCICIO 8

Realiza el diagrama de Venn de cada una de las siguientes operaciones:

1. $A'$
2. $(A \cap B)'$
3. $A' \cap B'$
4. $A \cap B \cap C$
5. $(A \cup B) \cap C$
6. $B' \cap (A - C)$
7. $(A \cup C) \cap (B - C)$
8. $(A - B) \cup (A \cap C)$
9. $(A \cap B \cap C)'$
10. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
11. $((A - B) \cup (B \cap C))'$
12. $(A' \cup B') - (A' \cup C')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Ejemplo

Sean los conjuntos:

$U = \{ a, b, c, d, f, g, h, i \}$ $B = \{ b, d, g, h \}$

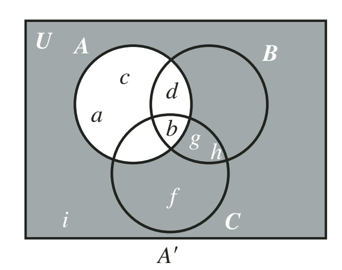
$A = \{ a, b, c, d \}$ $C = \{ b, f, g, h \}$

Representa en diagrama de Venn y halla el conjunto solución $(A' - B) \cap C$.

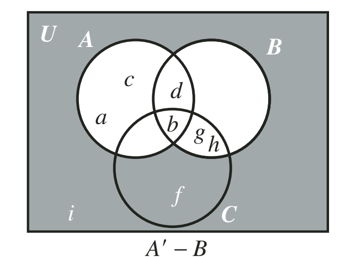
## Solución

Para determinar el conjunto se procede de la siguiente manera:

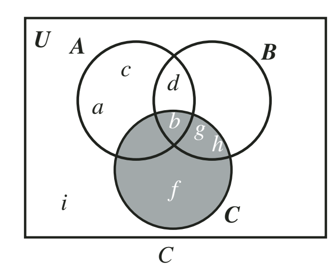
Se halla primero $A'$, se realiza la diferencia con el conjunto $B$ y, finalmente, con esta última operación se realiza la intersección con el conjunto $C$.



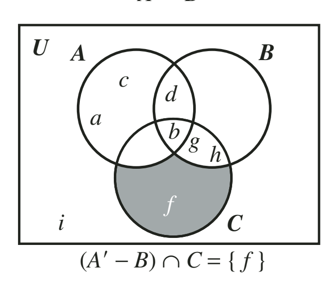
$A'$



$A' - B$



$C$



$(A' - B) \cap C = \{ f \}$

# EJERCICIO 9

Sean los conjuntos:

$U = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$ $B = \{ x \in U \mid x \text{ sea primo} \}$

$A = \{ x \in U \mid x < 5 \}$ $C = \{ 2, 4, 5, 8 \}$

Representa en diagrama de Venn y determina el conjunto solución.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A' \cup B'$
4. $A' \cap B'$
5. $(A \cup B) \cap C$
6. $(A \cup B \cup C)'$
7. $(A' - B') \cap C$
8. $(A - B)' \cap (B \cap C)'$
9. $(A - B)' \cup C'$
10. $(A \cap B)' \cap (A' \cap B')$
11. $(A - B)' \cap (B - C)'$
12. $(A' \cup B') - (A' \cup C')$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Se realizó una encuesta a 82 alumnos sobre el tipo de música que más les agrada; los resultados fueron los siguientes: a 32 de ellos les gusta el pop, a 33 les agrada el rock, a 36, el reggae, a 10 les gusta el pop y el rock, a 11 el pop y el reggae, a 9 les agrada el rock y el reggae, a 4 les gustan los 3 estilos y únicamente a 7 otros tipos de música.

¿Cuántos estudiantes sólo prefieren rock?

¿A cuántos alumnos sólo les agrada el reggae?

¿Cuántos estudiantes prefieren únicamente pop y reggae?

¿Cuántos alumnos prefieren solamente rock y reggae?

**Solución**

Se construye el diagrama de Venn, de la siguiente manera:

Se inicia con la zona en la que se intersecan los 3 conjuntos.

$$4$$

Se obtienen los alumnos de la zona donde se interseca el pop y el rock únicamente.

$$10 - 4 = 6$$

Se obtienen los estudiantes de la zona donde se interseca el pop y el reggae, solamente.

$$11 - 4 = 7$$

Se obtienen los alumnos de la zona donde se interseca el rock y el reggae únicamente.

$$9 - 4 = 5$$

Se obtienen los estudiantes de la zona que únicamente escuchan pop.

$$32 - ( 6 + 4 + 7 ) = 15$$

Se obtienen los alumnos de la zona que únicamente escuchan rock.

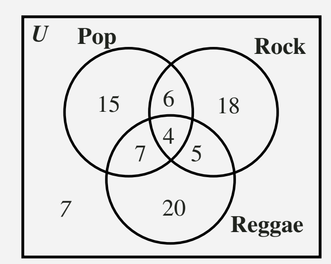
$$33 - ( 6 + 4 + 5 ) = 18$$

Se obtienen los estudiantes de la zona que únicamente escuchan reggae.

$$36 - ( 7 + 4 + 5 ) = 20$$

Los alumnos a quienes les gusten otros estilos, se colocan en la zona que no corresponde a los conjuntos anteriores.

El diagrama de Venn que se obtiene es:




Finalmente:

Los alumnos que sólo prefieren rock, son 18

Los alumnos que sólo les agrada reggae, son 20

Los alumnos que prefieren únicamente pop y reggae, son 7

Los alumnos que prefieren únicamente rock y reggae, son 5

**2** En una preparatoria se obtuvieron los siguientes datos de 350 estudiantes:

200 alumnos aprobaron la materia de cálculo diferencial;
160 estudiantes aprobaron física;
187 aprobaron historia;
112 aprobaron cálculo diferencial e historia;
120 aprobaron cálculo diferencial y física;
95 aprobaron física e historia;
80 alumnos aprobaron cálculo diferencial, física e historia.

Indica cuántos de estos 350 alumnos aprobaron:

1. Sólo una materia
2. Exactamente 2 materias
3. Al menos una materia
4. Cuando mucho 2 materias

**Solución**

Otra forma de resolver este tipo de problemas es la siguiente:

Se denotan los conjuntos de los estudiantes

$U$: Conjunto universo

$C$ = { alumnos que aprobaron cálculo diferencial }

$F$ = { alumnos que aprobaron física }

$H$ = { alumnos que aprobaron historia }

Cardinalidad de los conjuntos:

$n(U) = 350$ $n(C) = 200$ $n(F) = 160$ $n(H) = 187$

$n(C \cap H) = 112$ $n(C \cap F) = 120$ $n(F \cap H) = 95$ $n(C \cap F \cap H) = 80$

Para construir el diagrama de Venn se obtienen los siguientes datos:

Se coloca el número de estudiantes que aprobaron las tres materias; es decir, la intersección de los tres conjuntos: $n(C \cap F \cap H) = 80$

Se completa el número de estudiantes que aprobaron dos materias únicamente; es decir, la intersección de dos conjuntos:

$$n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 112 - 80 = 32$$
$$n(C \cap F) - n(C \cap F \cap H) = 120 - 80 = 40$$
$$n(F \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 95 - 80 = 15$$

Se completa el número de estudiantes de cada conjunto, el cual es el número de estudiantes que aprobaron una sola materia.

Para el conjunto $C$:

$$n(C) - [n(C \cap F) - n(C \cap F \cap H)] - [n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H)] - n(C \cap F \cap H) =$$

$= 200 - 40 - 32 - 80 = 48$ alumnos sólo aprobaron cálculo diferencial.

De una forma análoga se obtiene para los conjuntos $F$ y $H$.

$$n(F) - [n(C\cap F) - n(C\cap F\cap H)] - [n(F\cap H) - n(C\cap F\cap H)] - n(C\cap F\cap H) =$$

= 160 – 40 – 15 – 80 = 25 alumnos sólo aprobaron física.

$$n(H) - [n(F\cap H) - n(C\cap F\cap H)] - [n(C\cap H) - n(C\cap F\cap H)] - n(C\cap F\cap H) =$$

= 187 – 15 – 32 – 80 = 60 sólo aprobaron historia.

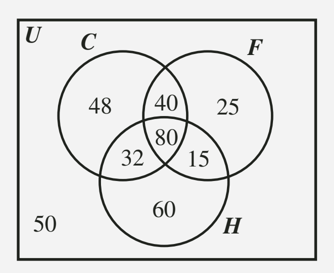
Para completar el diagrama se determina el número de alumnos que no aprobaron ninguna materia.

Es la diferencia del total de estudiantes, de los cuales se obtuvieron los datos y el total de alumnos de los conjuntos.

$$350 - [n(C) + n(F) + n(H) - n(C\cap F) - n(C\cap H) - n(F\cap H) + n(C\cap F\cap H)]$$

$$350 - (200 + 160 + 187 - 120 - 112 - 95 + 80) = 350 - 300 = 50$$

Diagrama de Venn




Finalmente:

Sólo una materia:

Suma de los alumnos que aprobaron una sola materia de cada conjunto:

$$n(C) + n(F) + n(H) - 2\,n(C\cap F) - 2\,n(C\cap H) - 2\,n(F\cap H) + 3\,n(C\cap F\cap H)$$

$$200 + 160 + 187 - 2(120) - 2(112) - 2(95) + 3(80) = 133$$

Exactamente 2 materias:

Suma de los estudiantes que aprobaron 2 materias únicamente:

$$n(C\cap H) + n(C\cap F) + n(F\cap H) - 3\cdot n(C\cap F\cap H) = 112 + 120 + 95 - 3(80) = 87$$

Al menos una materia:

Son los estudiantes que aprobaron 1, 2 o 3 materias:

$$n(C) + n(F) + n(H) - n(C\cap F) - n(C\cap H) - n(F\cap H) + n(C\cap F\cap H) = 300$$

Cuando mucho 2 materias:

Son los estudiantes que aprobaron 0, 1 o 2 materias:

$$350 - n(C\cap F\cap H) = 270$$

# EJERCICIO 10

Resuelve los siguientes problemas:

1. Una empresa realizó una encuesta a 250 personas para saber qué programa de televisión prefieren ver en domingo. Se les dieron 3 opciones: deportes, películas o musicales. El resultado de la encuesta fue: 130 personas prefieren deportes; 80 prefieren ver películas; 40, musicales; 25 prefieren deportes y películas; 20, películas y musicales; 10, deportes y musicales; y sólo a 6 personas les gustan los tres tipos de programas.

   *a*) ¿Cuántas prefieren ver sólo deportes?
   *b*) ¿Cuántas prefieren ver sólo un programa de televisión?
   *c*) ¿Cuántas prefieren ver películas o musicales?

2. A los niños de una organización civil se les apoya para que hagan deporte. Una encuesta reveló que los deportes que más les agradan son: natación, futbol, béisbol, entre otros. Los resultados de la encuesta fueron: 7 sólo prefieren natación; 28 sólo quieren jugar futbol; uno sólo quiere practicar béisbol; 30, natación y futbol; 18, natación y béisbol; 20, futbol y béisbol; 12, los 3 deportes de mayor preferencia y 20, otros deportes.

   *a*) ¿Cuántos niños quieren béisbol o natación?
   *b*) ¿Cuántos niños prefieren futbol o béisbol?
   *c*) ¿Cuántos niños fueron encuestados?
   *d*) ¿Cuántos niños prefieren únicamente 2 deportes?

3. Una empresa concede como prestación a sus empleados la asistencia a su club deportivo; en éste hay canchas de squash, un gimnasio, un boliche y una cafetería, donde se pueden divertir con juegos de mesa o simplemente platicar. A 70 personas se les aplicó una encuesta para saber la actividad de esparcimiento de su preferencia y se encontró que: 20 prefieren boliche, 27 el gimnasio, 24 squash, 8 boliche y gimnasio, 10 squash y boliche, 15 squash y gimnasio y, por último, 6 prefieren squash, gimnasio y boliche.

   *a*) ¿Cuántas únicamente prefieren jugar boliche?
   *b*) ¿Cuántas únicamente quieren jugar squash?
   *c*) ¿Cuántas personas sólo desean estar en el gimnasio?
   *d*) ¿Cuántas personas prefieren otras actividades?
   *e*) ¿Cuántas prefieren el squash o el boliche?
   *f*) ¿Cuántas no quieren boliche o squash?

4. En un supermercado se hizo una encuesta a 60 personas, para saber qué tipo de bebida alcohólica que esté en oferta prefieren. Los resultados fueron: 12 comprarían whisky y tequila; 16 vodka y tequila; 14 whisky y vodka; 29 whisky; 30 tequila; 29 vodka y sólo 9 personas las 3 bebidas.

   *a*) ¿Cuántas personas contestaron que otras bebidas?
   *b*) ¿Cuántas prefieren 2 tipos de bebida únicamente?
   *c*) ¿Cuántas quieren al menos una de las tres bebidas?
   *d*) ¿Cuántas quieren sólo un tipo de bebida?

5. En una fiesta infantil a los niños se les pidió su opinión acerca del sabor del helado que preferirían comer. Los resultados fueron los siguientes: 9 quieren de chocolate, vainilla y fresa; 12 de fresa y vainilla; 13 de chocolate y fresa; 15 de chocolate y vainilla; 18 de fresa; 26 de vainilla; 29 de chocolate y 8 niños prefieren de otros sabores.

   *a*) ¿Cuántos niños había en la fiesta?
   *b*) ¿Cuántos quieren sólo de 2 sabores?
   *c*) ¿Cuántos sólo de un sabor?
   *d*) ¿Cuántos no quieren de chocolate o fresa?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Álgebra de conjuntos

En el siguiente cuadro se muestran diferentes operaciones con conjuntos. Sean los conjuntos $U$, $A$, $B$ y $C$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ y $C \subseteq U$, donde $U$ es el conjunto universo.

| **Operaciones con conjuntos** | |
|---|---|
| 1. $(A')' = A$ | 8. $A \cup A = A$ |
| 2. $\phi' = U$ | 9. $A \cup A' = U$ |
| 3. $A - A = \phi$ | 10. $U' = \phi$ |
| 4. $A - \phi = A$ | 11. $A \cap U = A$ |
| 5. $A - B = A \cap B'$ | 12. $A \cap \phi = \phi$ |
| 6. $A \cup \phi = A$ | 13. $A \cap A = A$ |
| 7. $A \cup U = U$ | 14. $A \cap A' = \phi$ |
| ***Asociativas*** | ***Conmutativas*** |
| 15. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | 19. $A \cup B = B \cup A$ |
| 16. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | 20. $A \cap B = B \cap A$ |
| ***Distributivas*** | ***Leyes de De Morgan*** |
| 17. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | 21. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ |
| 18. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | 22. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ |

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Aplica las definiciones de las operaciones con conjuntos y demuestra que:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$

**Solución**

Si $x \in (A \cup B)'$

| | |
|---|---|
| Entonces $x \in U$ y $x \notin (A \cup B)$ | Definición de complemento |
| Si $x \notin (A \cup B)$, entonces $x \notin A$ o $x \notin B$ | Definición de unión de conjuntos |
| Si $x \notin A$ o $x \notin B$, entonces $x \in A'$ y $x \in B'$ | Definición de complemento |
| Entonces $x \in (A' \cap B')$ | Definición de intersección de conjuntos |
| Por tanto, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ | |

2 Aplica las definiciones de las operaciones con conjuntos y demuestra que:
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

**Solución**

Si $x \in (A \cap B)'$

| | |
|---|---|
| Entonces $x \in U$ y $x \notin (A \cap B)$ | Definición de complemento |
| Si $x \notin (A \cap B)$, entonces $x \notin A$ y $x \notin B$ | Definición de intersección de conjuntos |
| Si $x \notin A$ y $x \notin B$ entonces $x \in A'$ o $x \in B'$ | Definición de complemento |
| Entonces $x \in (A' \cup B')$ | Definición de unión de conjuntos |
| Por tanto, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | |

Es más práctico realizar las demostraciones utilizando las leyes y operaciones de conjuntos.

3 Aplica las leyes y demuestra que $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

**Solución**

| | |
|---|---|
| $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$ | Ley distributiva (18) |
| $= A \cap U$ | Operaciones con conjuntos (9) |
| $= A$ | Operaciones con conjuntos (11) |

4 Aplica las leyes y demuestra que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

**Solución**

| | |
|---|---|
| $(A \cap B) \cup C = C \cup (A \cap B)$ | Ley conmutativa (19) |
| $= (C \cup A) \cap (C \cup B)$ | Ley distributiva (17) |
| $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$ | Ley conmutativa (19) |

5 Aplica las leyes y demuestra que $A \cap (B \cap C)' = (A - B) \cup (A - C)$.

**Solución**

| | |
|---|---|
| $A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$ | Ley de De Morgan (22) |
| $= (A \cap B') \cup (A \cap C')$ | Ley distributiva (18) |
| $= (A - B) \cup (A - C)$ | Operaciones con conjuntos (5) |

## EJERCICIO 11

Aplica las leyes y demuestra las siguientes identidades:

1. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
3. $A' \cap (B \cup C)' = (A \cup B \cup C)'$
4. $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
5. $(A \cup B) \cap A' = A' \cap B$
6. $A' - (A \cup C)' = C - A$
7. $A \cup (B \cap A') = A \cup B$
8. $A - (A - B)' = A - B$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Lógica

La lógica se ocupa del razonamiento a partir de las premisas, las cuales son proposiciones que dan la pauta para el proceso deductivo e inductivo. Analicemos algunos conceptos:

**Inferir.** Proceso de unir ideas para llegar a conclusiones verdaderas a partir de proposiciones verdaderas.

**Proposición lógica.** Es un enunciado que se califica como falso o verdadero, pero no ambos a la vez.

### Ejemplos

| | |
|---|---|
| $a$ = "Cuba está en América" | Verdadero ( ***v*** ) |
| $b$ = "4 es número impar" | Falso ( ***f*** ) |
| $c$ = "El elefante es un ave" | ( ***f*** ) |
| $p$ = "Los perros ladran" | ( ***v*** ) |
| $q$ = "Hermosa tarde" | No es una proposición lógica |

**Negación.** Se obtiene negando o afirmando el enunciado y se denota por el símbolo (~).

### Ejemplo

Sea la proposición:

$a$ = "5 es número primo"

La negación de la proposición es:

$\sim a$ = "5 no es número primo"

## Tipos de proposiciones

**Proposición lógica simple.** Es aquella que está formada por un solo enunciado.

### Ejemplos

$t$ = "El delfín es un mamífero"

$r$ = "4 es número par"

**Proposición lógica compuesta.** Es aquella que forman 2 o más proposiciones simples unidas por uno o más conectivos lógicos.

### Ejemplos

$a$ = "8 es número par y 5 es número primo"

$b$ = "China está en Asia o Colombia está en América"

$c$ = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

$p$ = "8 es número par si y sólo si es divisible por 2"

## Proposiciones compuestas

En el siguiente cuadro se muestran las distintas proposiciones compuestas con su respectivo conectivo lógico y símbolo.

| Nombre | Conectivo lógico | Símbolo |
|---|---|---|
| Negación | No | $\sim$ |
| Disyunción | o | $\vee$ |
| Conjunción | y | $\wedge$ |
| Implicación | entonces | $\Rightarrow$ |
| Doble implicación | Si y sólo si | $\Leftrightarrow$ |

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las proposiciones:

$a$ = "El tucán es un ave"
$b$ = "El león es un mamífero"

La disyunción entre las proposiciones es:

$a \vee b$ = "El tucán es un ave o el león es un mamífero"

2 Sean las proposiciones:

$p$ = "4 es número par"
$q$ = "4 es número natural",

La conjunción entre las proposiciones es:

$p \wedge q$ = "4 es número par y es número natural"

3 Sean las proposiciones:

$p$ = " $x \leq 8, x \in Z$"
$p \wedge q$ = "2 es divisor de 6 y es primo"
$p \vee q$ = "8 es número impar o es compuesto"

La negación entre las proposiciones es:

$\sim p$ = "$x \nleq 8, x \in Z$" o "$x > 8, x \in Z$"
$\sim (p \wedge q)$ = "No es verdad que 2 es divisor de 6 y es primo"
$\sim (p \vee q)$ = "No es verdad que 8 es número impar o es compuesto"

4 Sean las proposiciones:

$p$ = "30 es múltiplo de 10"
$q$ = "30 es múltiplo de 5"

La implicación entre las proposiciones es:

$p \Rightarrow q$ = "Si 30 es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 5"

5 Sean las proposiciones:

$p$ = "China está en Asia"
$q$ = "Cuba está en América"

La doble implicación entre las proposiciones es:

$p \Leftrightarrow q$ = "China está en Asia si y sólo si Cuba está en América"

## EJERCICIO 12

Sean las siguientes proposiciones:

$p$ = "España está en Europa"
$q$ = "Japón está en Asia"

Escribe las siguientes proposiciones:

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $\sim p$
4. $\sim q$
5. $p \Rightarrow q$
6. $p \Leftrightarrow q$
7. $\sim p \wedge q$
8. $p \vee \sim q$
9. $\sim (p \vee q)$
10. $\sim (p \wedge q)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

La representación de una proposición simple o compuesta se ilustra con los siguientes ejemplos:

**Ejemplos**

Sean los siguientes enunciados:

$p$ = "9 es múltiplo de 3"
$q$ = "5 es divisor de 10"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:

1. 9 es múltiplo de 3 y 5 es divisor de 10

$$p \wedge q$$

2. No es verdad que 5 es divisor de 10

$$\sim q$$

3. 5 es divisor de 10 o no es verdad que 9 es múltiplo de 3

$$p \vee \sim q$$

## EJERCICIO 13

Sean las siguientes proposiciones:

$a$ = "La guacamaya es un ave"
$b$ = "A Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:

1. La guacamaya es un ave y a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones
2. La guacamaya es un ave y a Luis no le gusta escuchar a los Rolling Stones
3. La guacamaya no es un ave o a Luis no le gusta escuchar a los Rolling Stones
4. A Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones o la guacamaya es un ave
5. La guacamaya no es un ave y a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones
6. No es verdad que la guacamaya es un ave y que a Luis le gusta escuchar a los Rolling Stones

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Leyes de De Morgan

La negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de sus proposiciones.

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

La negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de sus proposiciones.

$$\sim (p \vee q) = \sim p \vee \sim q$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Niega la siguiente proposición:
$a$ = "4 es número par o Japón está en Asia"

**Solución**

$\sim a$ = "4 no es número par y Japón no está en Asia"

2 Niega la proposición:
$b$ = "La guacamaya es un ave y el delfín es un mamífero"

**Solución**

$\sim b$ = "La guacamaya no es un ave o el delfín no es un mamífero"

3 Niega la proposición:
$c$ = "El león es un mamífero y el tiburón no es un pez"

**Solución**

$\sim c$ = "El león no es un mamífero o el tiburón es un pez"

## EJERCICIO **14**

Niega las siguientes proposiciones compuestas:

1. $a$ = "España está en Europa o 6 es número par"
2. $b$ = "Los perros ladran y 12 es múltiplo de 3"
3. $c$ = "5 es un número par y no es múltiplo de 15"
4. $d$ = "7 no es primo o es divisor de 21"
5. $e$ = "6 no es número impar y el tucán no es un ave"

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Proposiciones condicionales

**Conversa de la implicación.** Si $p \Rightarrow q$, la conversa se define como $q \Rightarrow p$.

### Ejemplo

Hallar la conversa de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

**Solución**

La conversa de la proposición es:

$q \Rightarrow p$ = "Si un volcán está en América, entonces está en Perú"

**Contrapositiva de una implicación.** Si $p \Rightarrow q$, la contrapositiva se define como $\sim q \Rightarrow \sim p$.

### Ejemplo

Determina la contrapositiva de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si un volcán está en Perú, entonces está en América"

### Solución

La contrapositiva de la proposición es:

$\sim q \Rightarrow \sim p$ = "Si un volcán no está en América, entonces no está en Perú"

**Inversa de una implicación.** Si $p \Rightarrow q$, la inversa se define como $\sim p \Rightarrow \sim q$.

### Ejemplo

Determina la inversa de la proposición:
$p \Rightarrow q$ = "Si 8 es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 2"

### Solución

La inversa de la proposición es:

$\sim p \Rightarrow \sim q$ = "Si 8 no es múltiplo de 4, entonces no es múltiplo de 2"

## EJERCICIO 15

Determina la conversa, contrapositiva e inversa de las siguientes implicaciones:

1. $p \Rightarrow q$ = "Si 3 es divisor de 6, entonces no es par"
2. $p \Rightarrow q$ = "Si $x$ es múltiplo de 5, entonces es divisor de 25"
3. $p \Rightarrow q$ = "Si un triángulo es un polígono, entonces no es un cuadrilátero"
4. $p \Rightarrow q$ = "Si Marte no es un planeta, entonces la Luna es un satélite"
5. $p \Rightarrow q$ = "Si 17 es un número primo, entonces no es múltiplo de 50"

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Relación de proposiciones abiertas con conjuntos

**Proposición abierta.** Es aquélla en la que el sujeto es una variable. Toda proposición abierta representa un conjunto, que recibe el nombre de conjunto solución de la proposición.

### Ejemplo

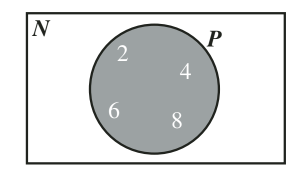
Encuentra y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:
$p$ = "$x$ es un número par menor que 10"; $x \in N$

### Solución

Conjunto solución:

$$P = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Diagrama de Venn



**Conjunción.** La conjunción se relaciona con la intersección de conjuntos.

## Ejemplo

Determina y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:

$$p = \text{“}x \text{ es primo y } x \leq 7\text{”};\ x \in N$$

### Solución

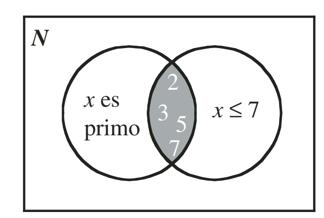
La proposición se representa de la siguiente forma:

$$P = \{\ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots\ \} \cap \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ \}$$

Por tanto, el conjunto solución es:

$$P = \{\ 2, 3, 5, 7\ \}$$

Diagrama de Venn




**Disyunción.** La disyunción se relaciona con la unión de conjuntos.

## Ejemplo

Encuentra y representa en un diagrama de Venn el conjunto solución de la proposición:

$$q = \text{“}x \text{ es par menor que 10 o } x < 6\text{”};\ x \in N$$

### Solución

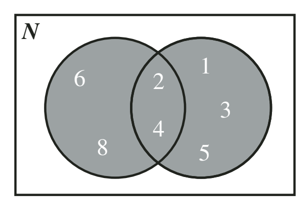
La proposición se representa de la siguiente forma:

$$Q = \{\ 2, 4, 6, 8\ \} \cup \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$$

El conjunto solución es:

$$Q = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\ \}$$

Diagrama de Venn




**Negación.** La negación se relaciona con el complemento de un conjunto.

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es el conjunto solución y el diagrama de Venn de cada una de las siguientes proposiciones?

$a$ = “$x$ es un dígito par” $\qquad$ $\sim a$ = “$x$ no es un dígito par”

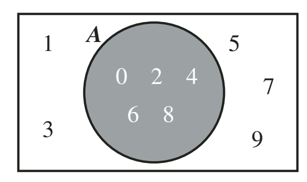
### Solución

El conjunto solución de la proposición $a$, es: $A = \{\ 0, 2, 4, 6, 8\ \}$

(*continúa*)

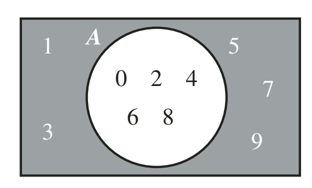
(*continuación*)

Diagrama de Venn




El conjunto solución de la proposición $\sim a$, es: $A' = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Diagrama de Venn




2 ¿Cuál es el conjunto solución de la negación de la siguiente proposición?
$a$ = "$x$ es primo menor que 15 o $x$ es divisor de 15"; $x \in N$

**Solución**

$$A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13 \} \cup \{ 1, 3, 5, 15 \}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$A = \{ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 15 \}$$

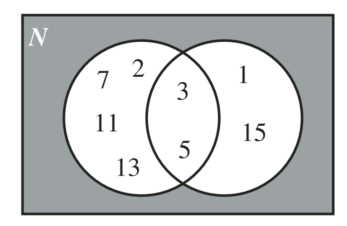
La negación de la proposición es:

$\sim a$ = "$x$ no es primo menor que 15 y $x$ no es divisor de 15"

El conjunto solución es:

$$A' = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \ldots \}$$

Diagrama de Venn




3 ¿Cuál es el conjunto solución de la negación de la siguiente proposición?
$b$ = "$x$ es divisor de 6 y $x$ es par menor que 10"; $x \in N$

**Solución**

$$B = \{ 1, 2, 3, 6 \} \cap \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es:

$$B = \{ 2, 6 \}$$

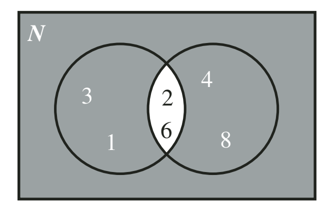
La negación de la proposición es:

$$\sim b = \text{“}x \text{ no es divisor de 6 o } x \text{ no es par menor que 10”}; x \in N$$

El conjunto solución es:

$$A' = \{ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, \ldots \}$$

Diagrama de Venn



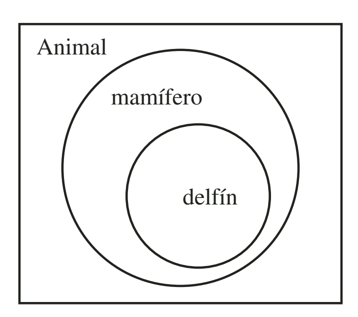

**Implicación.** La implicación se relaciona con el subconjunto de un conjunto.

### Ejemplo

Representa en un diagrama de Venn la siguiente proposición:

$$a = \text{“si un animal es un delfín, entonces es un mamífero”}$$

### Solución




## EJERCICIO 16

Determina el conjunto solución y diagrama de Venn de las siguientes proposiciones:

1. $a$ = “$x$ es par y $x < 10$”; $x \in N$
2. $b$ = “$x$ es par menor que 12 y $x \leq 5$”; $x \in N$
3. $c$ = “$x$ es múltiplo de 3 o $x < 8$”; $x \in N$
4. $d$ = “$x$ es primo menor que 11 o $x$ es par menor que 10”; $x \in N$

Representa en un diagrama de Venn las siguientes implicaciones:

5. $e$ = “Si un ciudadano es duranguense, entonces es mexicano”
6. $f$ = “Si un número real es primo, entonces es entero”

En las siguientes proposiciones determina la negación y represéntala en un diagrama de Venn.

7. $g = $ "$x \leq 7$"; $x \in \mathrm{N}$
8. $h = $ "$x$ es par o $x < 8$"; $x \in N$
9. $i = $ "$x \geq 4$ y $x$ es par"; $x \in N$
10. $j = $ "$x \leq 5$ y $x$ es primo"; $x \in N$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Cálculo proposicional

Cuando una proposición se construye a partir de otras proposiciones, mediante conectivos lógicos, el valor de verdad lo determinan los valores de verdad de las proposiciones originales.

Dadas las proposiciones $p$ y $q$, los valores de verdad de las proposiciones $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ y $\sim p$, los determinan los valores de verdad de $p$ y $q$.

El número de valores de verdad está dado por $2^n$ donde $n$ representa el número de proposiciones.

Para verificar el valor de verdad de una proposición compuesta se utilizan las siguientes tablas.

***Tabla de verdad para la disyunción***

La disyunción es verdadera, si una o las dos proposiciones $z$ son verdaderas.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $v$ | $f$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $f$ | $v$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $f$ | $f$ | $\boldsymbol{f}$ |

***Tabla de verdad para la conjunción***

La conjunción es verdadera, si las dos proposiciones son verdaderas.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $v$ | $f$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $f$ | $v$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $f$ | $f$ | $\boldsymbol{f}$ |

***Tabla de verdad para la implicación***

La implicación es falsa, si la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $v$ | $f$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $f$ | $v$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $f$ | $f$ | $\boldsymbol{v}$ |

***Tabla de verdad para la doble implicación***

La doble implicación es verdadera, si las dos proposiciones son verdaderas o las dos son falsas.

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $v$ | $f$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $f$ | $v$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $f$ | $f$ | $\boldsymbol{v}$ |

***Tabla de verdad para la negación***

En la negación de una proposición, su valor de verdad es el contrario del original.

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| $v$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $f$ | $\boldsymbol{v}$ |

$\boldsymbol{v}$ = Verdadero
$\boldsymbol{f}$ = Falso

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Construye una tabla de verdad y determina el valor de verdad de la siguiente proposición:

*a* = "3 es divisor de 15 o 3 es múltiplo de 2"

**Solución**

Se hallan los valores de verdad de las proposiciones:

*p* = "3 es divisor de 15" ***v***

*q* = "3 es múltiplo de 2" ***f***

Se construye la tabla de verdad para la disyunción ya que el conectivo lógico es "o".

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| *v* | *f* | ***v*** |

Finalmente, el valor de verdad para la proposición "*a*" es verdadero ( ***v*** ).

2 Determina el valor de verdad de la siguiente proposición:

*b* = "15 no es múltiplo de 3 y 3 es primo"

**Solución**

Se determinan los valores de verdad de las proposiciones:

*p* = "15 no es múltiplo de 3" ***f***

*q* = "3 es primo" ***v***

Se construye la tabla de verdad para la conjunción:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| *f* | *v* | ***f*** |

Finalmente, el valor de verdad para la proposición es falso ( ***f*** ).

3 Encuentra el valor de verdad de la siguiente proposición:

*c* = "Si 2 es número par, entonces 4 es divisor de 10"

**Solución**

Se determinan los valores de verdad de las proposiciones:

*p* = "2 es número par" ***v***

*q* = "4 es divisor de 10" ***f***

Se construye la tabla de verdad para la implicación:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| *v* | *f* | ***f*** |

Por consiguiente, el valor de verdad para la proposición es falso ( ***f*** ).

# EJERCICIO 17

Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. $a$ = "4 es número par y 5 es múltiplo de 2"
2. $b$ = "La víbora no es un reptil o el canario es un pez"
3. $c$ = "Si 21 es múltiplo de 7, entonces 21 es múltiplo de 2"
4. $d$ = "La guacamaya es un pez si y sólo si el tiburón es un ave"
5. $e$ = "Si el oro es un metal, entonces es un buen conductor de la electricidad"
6. $b$ = "3 es divisor de 18 o 18 es múltiplo de 24"

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Construcción de las tablas de verdad

Una tabla de verdad se construye paso a paso, al establecer los valores correspondientes de cada suboperación involucrada, hasta llegar a la expresión dada.

Después de construir una tabla de verdad, el resultado puede ser una tautología, una contradicción o una contingencia. Analicemos estos conceptos:

**Tautología.** Proposición compuesta en la que todas las combinaciones de valores son verdaderas.

**Contradicción.** Proposición compuesta en la cual todas las combinaciones de valores son falsas.

**Contingencia.** Proposición compuesta en donde las combinaciones de valores son verdaderas y falsas.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Construye la tabla de verdad para $p \wedge \sim q$ y realiza una conclusión.

**Solución**

El número de proposiciones es 2, por tanto, el número de valores de verdad es $2^n = 2^2 = 4$, el resultado indica el número de renglones de la tabla.

Primero se determina la negación de la proposición $q$. Finalmente la conjunción se realiza tomando la proposición $p$ y la negación de $q$ antes obtenida.

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $f$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $v$ | $f$ | $v$ | $\boldsymbol{v}$ |
| $f$ | $v$ | $f$ | $\boldsymbol{f}$ |
| $f$ | $f$ | $v$ | $\boldsymbol{f}$ |

Se concluye que la tabla de valores de verdad es una contingencia.

2 Construye y da una conclusión de la tabla de verdad para $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

**Solución**

Primero se encuentra la conjunción de $p$ y $q$, después se determina la disyunción de $p$ y $q$.

Por último se realiza la implicación de la conjunción y la disyunción antes obtenida.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $v$ | $v$ | **$v$** |
| $v$ | $f$ | $f$ | $v$ | **$v$** |
| $f$ | $v$ | $f$ | $v$ | **$v$** |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ | **$v$** |

Se concluye que la tabla de verdad construida es una tautología.

3 Realiza una tabla de verdad y verifica si la siguiente proposición $(p \wedge q) \wedge \sim p$ es una contradicción.

**Solución**

Primero se realiza la conjunción de las proposiciones $p$ y $q$, simultáneamente se niega la proposición $q$, finalmente se determina la conjunción de los valores de la primera conjunción con la negación de $p$.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\sim p$ | $(p \wedge q) \wedge \sim p$ |
|---|---|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $v$ | $f$ | **$f$** |
| $v$ | $f$ | $f$ | $f$ | **$f$** |
| $f$ | $v$ | $f$ | $v$ | **$f$** |
| $f$ | $f$ | $f$ | $v$ | **$f$** |

La proposición resultó falsa para todos los valores, por consiguiente, es una contradicción.

4 Construye la tabla de verdad para $p \vee (q \wedge r)$.

**Solución**

El número de proposiciones es 3, por tanto, el número de valores de verdad es $2^n = 2^3 = 8$, el resultado indica el número de renglones de la tabla.

Primero se encuentran los valores de verdad de la conjunción de las proposiciones $q$ y $r$, finalmente se determina la disyunción de la proposición $p$ con la conjunción antes determinada.

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge r$ | $p \vee (q \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $v$ | $v$ | **$v$** |
| $v$ | $v$ | $f$ | $f$ | **$v$** |
| $v$ | $f$ | $v$ | $f$ | **$v$** |
| $v$ | $f$ | $f$ | $f$ | **$v$** |
| $f$ | $v$ | $v$ | $v$ | **$v$** |
| $f$ | $v$ | $f$ | $f$ | **$f$** |
| $f$ | $f$ | $v$ | $f$ | **$f$** |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ | **$f$** |

Finalmente, la tabla indica que se trata de una contingencia.

5 Construye la tabla de verdad para $\sim p \vee \sim q$.

**Solución**

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \vee \sim q$ |
|---|---|---|---|---|
| *v* | *v* | *f* | *f* | ***f*** |
| *v* | *f* | *f* | *v* | ***v*** |
| *f* | *v* | *v* | *f* | ***v*** |
| *f* | *f* | *v* | *v* | ***v*** |

Los valores de verdad de la tabla indican que es una contingencia.

6 Construye la tabla de verdad para $\sim p \vee \sim(\sim p \vee q)$.

**Solución**

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ | $\sim(\sim p \vee q)$ | $\sim p \vee \sim(\sim p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *v* | *v* | *f* | *v* | *f* | ***f*** |
| *v* | *f* | *f* | *f* | *v* | ***v*** |
| *f* | *v* | *v* | *v* | *f* | ***v*** |
| *f* | *f* | *v* | *v* | *f* | ***v*** |

La tabla es una contingencia.

7 Verifica si la siguiente proposición es tautología $p \vee (\sim p \vee q)$.

**Solución**

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $(\sim p \vee q)$ | $p \vee (\sim p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| *v* | *v* | *f* | *v* | ***v*** |
| *v* | *f* | *f* | *f* | ***v*** |
| *f* | *v* | *v* | *v* | ***v*** |
| *f* | *f* | *v* | *v* | ***v*** |

La proposición resultó verdadera para todos los valores, por tanto, es tautología.

8 Verifica si la siguiente proposición es tautología $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

**Solución**

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| *v* | *v* | *v* | *v* | ***v*** |
| *v* | *f* | *f* | *f* | ***v*** |
| *f* | *v* | *f* | *f* | ***v*** |
| *f* | *f* | *f* | *v* | ***v*** |

La proposición resultó verdadera para todos los valores, por consiguiente, es tautología.

9 Construye la tabla de verdad para $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \Leftrightarrow p)$.

**Solución**

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $q \Leftrightarrow p$ | $\sim(p \wedge q)$ | $\sim(q \Leftrightarrow p)$ | $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \Leftrightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v* | *v* | *v* | *v* | *f* | *f* | ***f*** |
| *v* | *f* | *f* | *f* | *v* | *v* | ***v*** |
| *f* | *v* | *f* | *f* | *v* | *v* | ***v*** |
| *f* | *f* | *f* | *v* | *v* | *f* | ***v*** |

La tabla es una contingencia.

## EJERCICIO 18

Construye la tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

1. $p \vee \sim q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \Rightarrow \sim q$
4. $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim q$
5. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
6. $(p \vee q) \wedge \sim(p \Rightarrow q)$
7. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
8. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$
9. $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(p \vee q)$
10. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
11. $\sim p \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Producto cartesiano de conjuntos

Dados 2 conjuntos $A$ y $B$ no vacíos, el producto cartesiano es el conjunto $(A \times B)$ que contiene a todas las parejas ordenadas, cuyo primer elemento pertenece al conjunto $A$ y su segundo elemento pertenece al conjunto $B$.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y\}$, determina $A \times B$.

**Solución**

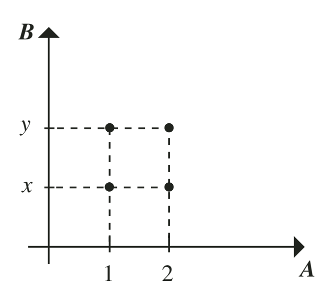
Se asocia a cada uno de los elementos del primer conjunto, con todos los elementos del segundo conjunto:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

*(continúa)*

(*continuación*)

Representación gráfica:




La representación gráfica también se conoce como diagrama sagital.

2 Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{3, 4, 6\}$, halla $(A \cup B) \times (B \cap C)$

**Solución**

Se halla el conjunto solución de las operaciones indicadas y posteriormente se realiza el producto cartesiano:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

$B \cap C = \{3, 4\}$

$$(A \cup B) \times (B \cap C) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$$

3 Si $M = \{a, b, c\}$, $N = \{1, 2, 3\}$ y $Q = \{x, y\}$, encuentra $M \times N \times Q$

**Solución**

El producto cartesiano $M \times N \times Q$ se define como:

$$M \times N \times Q = \{(m, n, q) \mid m \in M,\ n \in N \text{ y } q \in Q\}$$

Entonces:

$$M \times N \times Q = \begin{Bmatrix} (a, 1, x), (a, 1, y), (a, 2, x), (a, 2, y), (a, 3, x), (a, 3, y) \\ (b, 1, x), (b, 1, y), (b, 2, x), (b, 2, y), (b, 3, x), (b, 3, y) \\ (c, 1, x), (c, 1, y), (c, 2, x), (c, 2, y), (c, 3, x), (c, 3, y) \end{Bmatrix}$$

## EJERCICIO 19

Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{3, 5, 6\}$

Realiza los siguientes productos cartesianos y verifica que el resultado del inciso 6 es igual al obtenido en el inciso 7:

1. $A \times B$
2. $A \times C$
3. $B \times C$
4. $B \times A$
5. $C \times B$
6. $A \times (B \times C)$
7. $(A \times B) \times C$
8. $(A \cup B) \times (A \cap C)$
9. $(A - B) \times C$
10. $(A - C) \times (A \cap C)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 2

## CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRA

**Reseña HISTÓRICA**

*al-Khwarizmi*

Matemático árabe, conocido como el padre del álgebra.

Sus obras incursionan en las ramas de las matemáticas, astrología, astronomía, geografía e historia. Una de sus obras importantes por su contenido algebraico es la que lleva por título *Hisab al-gabr wa'lmuqqabala*, considerada uno de los primeros libros de álgebra.

Es el autor de uno de los métodos geométricos más antiguos para resolver ecuaciones de segundo grado, el cual se conoce como completar cuadrado.

En las ecuaciones llamaba "cosa" (*xay* en castellano) a la incógnita, a él se debe que se utilice la letra "*x*" para representarla.

Sello ruso dedicado a al-Khwarizmi
(780-850 d.C.)

# Álgebra

Rama de las matemáticas que trata a las cantidades de manera general.

## Expresiones algebraicas

Se conoce así a la combinación de números reales (*constantes*) y literales o letras (*variables*) que representan cantidades, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etcétera.

### Ejemplos

$3a + 2b - 5$, en esta expresión son constantes 3, 2, − 5 y las variables son $a$ y $b$.
$(z^2 + 8)(5z^4 - 7)$, en esta expresión son constantes 8, 5 y − 7, variable "$z$" y 2, 4 exponentes.

**Término algebraico.** Es un sumando de una expresión algebraica y representa una cantidad. A todo término algebraico se le denomina *monomio* y consta de: coeficiente, base(s) y exponente(s).

### Ejemplos

| Término | Coeficiente | Base(s) | Exponente(s) |
|---|---|---|---|
| $-8y^3$ | $-8$ | $y$ | 3 |
| $\frac{1}{3}mn^x$ | $\frac{1}{3}$ | $m, n$ | $1, x$ |
| $-\frac{3}{4}(2x+1)^{-2}$ | $-\frac{3}{4}$ | $2x + 1$ | $-2$ |

**Términos semejantes.** Dos o más términos son semejantes cuando los mismos exponentes afectan a las mismas bases.

### Ejemplos

Los siguientes términos tienen las mismas bases con sus respectivos exponentes iguales, por lo consiguiente son semejantes.

$-7b$ con $4b$ $\qquad - 8x^2y^3$ con $7x^2y^3$ $\qquad \frac{1}{6}abc^2$ con $abc^2$

## Reducción de términos semejantes

Para simplificar expresiones que involucren términos semejantes, se suman o restan los coeficientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la expresión $-7a + 3a$.

**Solución**

Se agrupan los coeficientes y se realiza la operación que da como resultado:

$$-7a + 3a = (-7 + 3)a = -4a$$

2 ¿Cuál es el resultado de simplificar la expresión $-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2$?

**Solución**

Se agrupan los coeficientes y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2 = (-6 + 9 - 1)xy^2 = 2xy^2$$

Por consiguiente, el resultado de la simplificación es: $2xy^2$

3 Reduce la expresión $-10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b$.

**Solución**

Se efectúa el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$-10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b = (-10+5-6+11)x^{2a}y^b = 0x^{2a}y^b = 0$$

El resultado es igual a 0

4 Simplifica la expresión $7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z$.

**Solución**

Se agrupan los términos semejantes:

$$7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z = 7x - 12x - 3y + 5y - 8y + 4z + 2z - 3z$$

Se realiza la reducción:

$$= (7 - 12)x + (-3 + 5 - 8)y + (4 + 2 - 3)z$$
$$= -5x - 6y + 3z$$

Por tanto, el resultado es: $-5x - 6y + 3z$

5 Simplifica $0.5a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + 0.75ab^3 - \frac{2}{3}a^3b$.

**Solución**

Se expresan los decimales en fracciones, se agrupan y simplifican los términos semejantes.

$$0.5a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + 0.75ab^3 - \frac{2}{3}a^3b = \frac{1}{2}a^3b - 3ab^3 - 5a^3b + \frac{3}{4}ab^3 - \frac{2}{3}a^3b$$
$$= \frac{1}{2}a^3b - 5a^3b - \frac{2}{3}a^3b - 3ab^3 + \frac{3}{4}ab^3$$
$$= \left(\frac{1}{2} - 5 - \frac{2}{3}\right)a^3b + \left(-3 + \frac{3}{4}\right)ab^3$$
$$= -\frac{31}{6}a^3b - \frac{9}{4}ab^3$$

Entonces, el resultado es: $-\frac{31}{6}a^3b - \frac{9}{4}ab^3$

## EJERCICIO 20

Simplifica:

1. $3x - 8x$
2. $6a^2b + 7a^2b$
3. $-6xy^2 - xy^2 - 3xy^2$
4. $4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$
5. $-2a^2b + 12a^2b$
6. $-3a + 5a - 10a$
7. $4x - 3x - 2x$
8. $7ab + 4ab - 3ab$

9. $5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2$
10. $-m + n + m + n$
11. $\frac{1}{4}a^3b - \frac{3}{5}a^3b + \frac{1}{6}a^3b$
12. $-3a^{x+1} + 2a^{x+1} - a^{x+1} + 2a^{x+1}$
13. $0.25b - 0.4b + 0.2b$
14. $\frac{1}{2}ab^3c - \frac{3}{2}ab^3c - ab^3c$
15. $4m^{x-2} - 10m^{x-2} + 3m^{x-2}$
16. $8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y$
17. $10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$
18. $-12m + 3n - 4m - 10n + 5m - n$
19. $12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2$
20. $9a^3b^2c - 5a^2bc^2 - 12a^3b^2c + 3a^2bc^2 + 4a^3b^2c$
21. $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15$
22. $-81m^2 - 17mn + 15n^2 + 20m^2 + 3mn - 17n^2 + 53m^2 + 18mn + 7n^2$
23. $x^{2a+1} - 3x^{3a-2} - 7x^{2a+1} - 4x^{3a-2} + 8x^{2a+1} + 12x^{3a-2}$
24. $-3a^{m+5} + 10x^{m+2} + 2a^{m+5} - 3x^{m+2} - 8a^{m+5}$
25. $-\frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + 5ab - 3a^2 - \frac{1}{2}ab$
26. $\frac{2}{3}x^{m-1} - \frac{1}{10}b^{m-2} + \frac{1}{2}x^{m-1} - \frac{3}{4}b^{m-2} - 4x^{m-1}$
27. $0.5x - 2.5y + 0.4x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}x$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene al sustituir a las literales o letras con sus respectivos valores numéricos y entonces se realizan las operaciones indicadas.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina el valor numérico de la expresión: $x^4y^2z^3$; si $x = 4$, $y = 3$, $z = \frac{1}{2}$.

**Solución**

Se sustituyen los respectivos valores de $x$, $y$, $z$ y se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$x^4y^2z^3 = (4)^4(3)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (256)(9)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2\,304}{8} = 288$$

Entonces, el resultado es: 288

**2** ¿Cuál es el valor numérico de $\frac{5x^2}{3}-\frac{2xy}{5}+\frac{y}{3x}$; $x=2, y=\frac{1}{4}$?

**Solución**

Al seguir los pasos del ejemplo anterior, se obtiene:

$$\frac{5x^2}{3}-\frac{2xy}{5}+\frac{y}{3x}=\frac{5(2)^2}{3}-\frac{2(2)\left(\frac{1}{4}\right)}{5}+\frac{\frac{1}{4}}{3(2)}=\frac{5(4)}{3}-\frac{\frac{4}{4}}{5}+\frac{\frac{1}{4}}{6}$$
$$=\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{24}$$
$$=\frac{800-24+5}{120}=\frac{781}{120}$$

Por tanto, el valor numérico de la expresión es igual a: $\frac{781}{120}$

**3** Encuentra el valor numérico de $3m^2-2mn+n^2p$; si $m=-3$, $n=4$, $p=-5$.

**Solución**

Se sustituyen los respectivos valores en la expresión y se realizan las operaciones:

$$3m^2-2mn+n^2p=3(-3)^2-2(-3)(4)+(4)^2(-5)$$
$$=3(9)-2(-3)(4)+(16)(-5)$$
$$=27+24-80$$
$$=-29$$

Por consiguiente, el valor numérico es: $-29$

## EJERCICIO 21

Encuentra el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones si:

$$m=-2,\ n=3,\ p=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{3},\ y=10,\ z=\frac{1}{2}$$

1. $2m+n$
2. $m-n+y$
3. $8p+3x$
4. $\frac{2z+6x}{n}$
5. $5m-2n+3y$
6. $x+z-p$
7. $\frac{3x+4z-9}{n}$
8. $\frac{m}{n}\left(\frac{y}{2}+m+6\right)$
9. $\frac{m^2+n^2+1}{p+x}$
10. $\left(\frac{z-x}{2m+n}\right)^2$
11. $p^2+2px+x^2$
12. $m^2-3mn+n^2$
13. $\frac{p}{x}-\frac{y}{z}+3$
14. $\frac{m^2}{2}-\frac{n^2}{3}+\frac{y^2}{4}$
15. $\frac{mn}{z}+\frac{mp}{x}-\frac{np}{m}$
16. $\frac{9x^2}{3}-\frac{8z^2}{2}+3$
17. $2\sqrt{p}-\sqrt{\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{24}{5}xy}$
18. $\frac{m-p}{n}-\frac{n+x}{m}$
19. $\frac{8p-z}{2n}-\frac{12x-m}{z}+\frac{2}{x}$
20. $\frac{m^n}{32}-p^n+z^n$
21. $(m-n)(p-x)$
22. $(6x-2p)(3m^2-z^3)$
23. $\frac{2(p-x)}{z}\div\frac{m^2+n^2}{p}$
24. $3(p-x)^m$
25. $\frac{5\sqrt{m^2n^2}}{2}+\frac{3\sqrt{6+y}}{4}-3\sqrt{p}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Lenguaje algebraico

Expresa oraciones de lenguaje común en términos algebraicos.

### Ejemplos

Expresa las siguientes oraciones del lenguaje común al lenguaje algebraico.

| | Lenguaje común | Lenguaje algebraico |
|---|---|---|
| 1. | Un número cualquiera. | $m$ |
| 2. | Un número cualquiera aumentado en siete. | $j+7$ |
| 3. | La diferencia de dos números cualesquiera. | $f-q$ |
| 4. | El doble de un número excedido en cinco. | $2x+5$ |
| 5. | La división de un número entero entre su antecesor. | $\frac{x}{x-1}$ |
| 6. | La mitad de un número. | $\frac{d}{2}$ |
| 7. | El cuadrado de un número. | $y^2$ |
| 8. | La semisuma de dos números. | $\frac{b+c}{2}$ |
| 9. | Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12. | $\frac{2}{3}(x-5)=12$ |
| 10. | Tres números naturales consecutivos. | $x,\ x+1,\ x+2$ |
| 11. | La parte mayor de 1 200, si la menor es $w$. | $1\,200-w$ |
| 12. | El cuadrado de un número aumentado en siete. | $b^2+7$ |
| 13. | Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3. | $\frac{3}{5}p+\frac{1}{2}(p+1)=3$ |
| 14. | La raíz cuadrada de la diferencia de dos cantidades. | $\sqrt{a-b}$ |
| 15. | El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30. | $x(x-1)=30$ |
| 16. | El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número. | $x^3+3x^2$ |

## EJERCICIO 22

Expresa en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

1. Un número disminuido en tres.
2. El triple de un número excedido en ocho.
3. El cociente de dos números cualesquiera.
4. La parte mayor de 100 si la parte menor es $x$.
5. Dos números enteros consecutivos.
6. Tres números enteros pares consecutivos.
7. El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera.
8. La suma de los cuadrados de dos números cualesquiera.
9. El recíproco de un número.
10. La raíz cúbica de la diferencia de dos números cualesquiera.
11. La suma de las raíces cuadradas de dos números cualesquiera.

12. Diez unidades menos que cinco veces un número.
13. La sexta parte de la suma de dos números.
14. La suma de tres números pares consecutivos es igual al triple del menor, más las tres cuartas partes del mayor.
15. Un número de dos cifras, cuyo dígito de las decenas es el doble del de las unidades.
16. La cuarta parte del producto de tres números cualesquiera menos 4.
17. El cuadrado de la suma de dos números es igual a 49.
18. El área de un cuadrado de lado $x$ unidades.
19. El perímetro de un rectángulo, si se sabe que el largo es tres veces su ancho.
20. El perímetro de un triángulo rectángulo, si se sabe que el cateto mayor mide tres unidades más que el cateto menor y que la hipotenusa es dos unidades mayor que el cateto mayor.
21. El precio de un artículo disminuido en su 15%.
22. El exceso de 50 sobre el doble de un número.
23. Dos números cuya suma sea 80.
24. Tres números impares consecutivos.
25. El área de un rectángulo, si se sabe que su largo mide tres unidades menos que el triple de su ancho.
26. La edad de una persona hace 10 años.
27. El exceso del cubo de un número sobre la mitad del mismo.
28. Los ángulos de un triángulo, si el primero es el doble del segundo.
29. La cantidad de alcohol en un recipiente de $x$ litros de una mezcla si la concentración de alcohol es 30%.
30. La edad de Alberto si tiene cuatro años más que el doble de la edad de Patricia.
31. Las dos terceras partes de un número, más el triple de su consecutivo, menos su recíproco equivale a 10.
32. El doble de un número equivale al triple de su antecesor excedido en siete.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dada una expresión algebraica, se representa en lenguaje común de la siguiente manera:

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa en lenguaje común la expresión: $3x - 8$.

**Solución**

Primero se expresa la multiplicación y posteriormente la diferencia.

$3x - 8$ = el triple de un número disminuido en ocho

2 Expresa $2x + x^2$ en lenguaje común.

**Solución**

La expresión queda de la siguiente manera:

$2x + x^2$ = la suma del doble de un número y su cuadrado

Otra forma de representar en lenguaje común la misma expresión es:

$2x + x^2$ = doble de un número aumentado en su cuadrado.

3 Expresa en lenguaje común $\frac{2}{9}x-1=\frac{4}{3}$.

**Solución**

Una manera de la expresión en lenguaje común es:

Dos novenos de un número disminuido en la unidad equivalen a cuatro tercios.

## EJERCICIO 23

Cambia las siguientes expresiones algebraicas a lenguaje común:

1. $x+3$
2. $2a-11$
3. $3x^2$
4. $\frac{5}{6}a$
5. $\frac{1}{x}$
6. $(a+b)^2$
7. $x^3+y^3$
8. $\frac{c}{c+1}$
9. $5x=30$
10. $3y-2=25$
11. $\frac{3}{4}z+2=z$
12. $\frac{1}{6}(x-y)+3=x+y$
13. $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}(x-y)$
14. $x^2-y^2$
15. $x^2-2x$
16. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
17. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$
18. $x^2+(x+1)^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Polinomios

Expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos.

### Suma

En la suma los polinomios se escriben uno seguido del otro y se reducen los términos semejantes.

**EJEMPLOS**

1 Suma los siguientes polinomios: $5x^3-3x^2-6x-4$; $-8x^3+2x^2-3$; $7x^2-9x+1$.

**Solución**

Los polinomios se escriben de la siguiente forma y se realiza la reducción de términos semejantes:

$$(5x^3-3x^2-6x-4)+(-8x^3+2x^2-3)+(7x^2-9x+1)=-3x^3+6x^2-15x-6$$

Por tanto, el resultado es: $-3x^3+6x^2-15x-6$

**2** Efectúa la siguiente operación: $(2x - 7y - 3z + 6) + (-9x + 4z) + (-x + 4y + z - 8)$.

**Solución**

Con un fin más práctico, se ordenan los polinomios haciendo coincidir los términos semejantes en columnas; asimismo, se reducen los coeficientes término a término.

$$\begin{array}{r} 2x - 7y - 3z + 6 \\ + \; -9x \qquad + 4z \quad\; \\ -\; x + 4y + \; z - 8 \\ \hline -8x - 3y + 2z - 2 \end{array}$$

El resultado de la suma es: $-8x - 3y + 2z - 2$

**3** Realiza la siguiente operación: $\left(\frac{1}{2}x^{a+1} - \frac{3}{4}y^{b-1} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{2}x^{a+1} + \frac{1}{3}y^{b-1} + \frac{1}{4}\right)$.

**Solución**

Se acomodan en forma vertical los términos semejantes y se realiza la operación columna por columna:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^{a+1} - \frac{3}{4}y^{b-1} - \frac{1}{6} \\ + \quad \frac{3}{2}x^{a+1} + \frac{1}{3}y^{b-1} + \frac{1}{4} \\ \hline 2x^{a+1} - \frac{5}{12}y^{b-1} + \frac{1}{12} \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es: $2x^{a+1} - \frac{5}{12}y^{b-1} + \frac{1}{12}$

## EJERCICIO 24

Realiza lo siguiente:

1. Suma los polinomios $3x - 8y - 2z$; $7x + 3y + z$
2. ¿Cuál es la suma de $-5m - 3n + 6$ con $2m + 2n - 8$?
3. Realiza $(11a - b + c) + (-8a - c)$
4. Efectúa $(3p - 5q - 6r) + (2p + 3q - 2r) + (-12p + 4q + r)$
5. Suma $6x^2 + 3x - 2$ con $-x^2 + 7x + 4$
6. $(8a^2 - 6a^3 + 4a) + (4a^3 + a^2 - 4a - 5)$
7. $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 3) + (-3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$
8. Realiza $(5x^2 - 5x + 6) + (2x^2 - 7x + 4) + (-6x^2 + 10x - 10)$
9. Suma $y^3 - y$; $2y^2 - 5y + 7$; $4y^3 - 5y^2 + 3y - 8$
10. ¿Cuál es el resultado de sumar $8z^3 - 9$; $-4z^3 + 2z^2 + 6$; $5z^2 - 2z^3 - 7z + 2$?
11. Efectúa la suma de $4x^2 - 10xy - 12y^2$; $3y^2 - 10x^2 + 5xy$; $8xy - 3x^2 - 2y^2$
12. Realiza $(x^5 - 3x) + (x^4 + 6x^2) + (-x^3 - 2)$
13. ¿Cuál es el resultado de la suma de $-15x^3y - 3x^2y^2 - 6xy^3$; $-8x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3$?
14. Suma $x^4 - y^4$; $-x^3y + x^2y^2 - xy^3$; $3x^4 + 5x^3y - 4x^2y^2$; $-4x^3y + 3x^2y^2 - 3y^4$
15. Realiza $(3a^6 - 4a^7) + (7a^4 + 6a^2) + (-3a^2 + 7a) + (-a^4 - 4a^2)$

16. Suma los polinomios $\frac{5}{2}x^2-5xy+\frac{2}{3}y^2$; $-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}xy-\frac{1}{4}y^2$; $-2x^2+\frac{1}{2}xy-\frac{3}{4}y^2$

17. Efectúa $\left(-\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{8}b^2-\frac{1}{2}ab\right)+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{5}{6}ab\right)+\left(-\frac{2}{3}b^2+\frac{3}{4}ab+\frac{5}{6}a^2\right)$

18. Suma los polinomios $\frac{1}{6}x^2y-\frac{3}{5}y^3+\frac{1}{8}xy^2$; $x^3-\frac{1}{2}x^2y-y^3$; $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}xy^2-\frac{2}{5}y^3$

19. Efectúa $\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{3}x^3-2y\right)+\left(-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$

20. Suma $x^5-y^5$; $\frac{1}{10}x^3y^2-\frac{3}{4}xy^4-\frac{1}{6}y^5$; $\frac{3}{5}x^4y-\frac{5}{6}x^2y^3-\frac{1}{9}y^5$; $2x^4y-\frac{2}{5}x^3y^2-\frac{1}{3}y^5$

21. $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^3+2\right)+\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}x^4+x^3-x^2-\frac{3}{4}x-1\right)+\left(-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{2}x^2\right)$

22. ¿Cuál es el resultado de sumar $(5a^{3x}-2a^{2x}+7a^x)+(-2a^{3x}+4a^{2x}-6a^x)$?

23. Suma $3x^{2a}-5x^{2a-1}+4x^{2a-2}$; $x^{2a}+4x^{2a-1}+x^{2a-2}$; $-3x^{2a}-7x^{2a-2}$; $x^{2a-1}+3x^{2a-2}$

24. ¿Cuál es el resultado de sumar $\frac{3}{8}b^{2x}-\frac{5}{6}b^x+b$, $-\frac{1}{4}b^{2x}+b^x-\frac{2}{3}b$ y $-b^{2x}+2b$?

25. $\left(\frac{1}{3}x^{1-y}-\frac{5}{4}x^{1-2y}-x^{1-3y}\right)+\left(-\frac{1}{6}x^{1-y}+\frac{2}{3}x^{1-3y}+x^{1-2y}\right)+\left(\frac{1}{2}x^{1-y}+\frac{1}{3}x^{1-2y}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Resta

En esta operación es importante identificar el minuendo y el sustraendo, para posteriormente realizar la reducción de términos semejantes.

**EJEMPLOS**

1 Realiza la siguiente operación: $(4a-2b-5c)-(3a-5b-7c)$.

**Solución**

En este ejemplo $4a-2b-5c$ representa al minuendo y $3a-5b-7c$ al sustraendo. Se suprimen los paréntesis y se procede a efectuar la reducción de términos semejantes.

$$(4a-2b-5c)-(3a-5b-7c)=4a-3a-2b+5b-5c+7c$$
$$=a+3b+2c$$

Por consiguiente, el resultado de la resta es: $a+3b+2c$

2 De $16x^2-7x-8$ restar $6x^2-3x+6$.

**Solución**

El minuendo es $16x^2-7x-8$ y el sustraendo es $6x^2+3x-6$, entonces al sustraendo se le cambia el signo $-(6x^2-3x+6)=-6x^2+3x-6$ y se acomodan los polinomios en forma vertical para realizar las operaciones entre los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 16x^2-7x-8 \\ -6x^2+3x-6 \\ \hline 10x^2-4x-14 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es: $10x^2-4x-14$

3 Resta $-\frac{3}{4}a^2b-6b^3+2a^3-\frac{1}{2}ab^2$ de $\frac{1}{3}a^3-2b^3+\frac{1}{3}a^2b-ab^2$.

**Solución**

En este caso el minuendo es $\frac{1}{3}a^3-2b^3+\frac{1}{3}a^2b-ab^2$ y el polinomio sustraendo al cual se cambia el signo y se ordena con respecto a los exponentes es: $-\frac{3}{4}a^2b-6b^3+2a^3-\frac{1}{2}ab^2$

$$-\left(-\frac{3}{4}a^2b-6b^3+2a^3-\frac{1}{2}ab^2\right)=-2a^3+\frac{3}{4}a^2b+\frac{1}{2}ab^2+6b^3$$

Se acomodan los polinomios y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}a^2b-\ ab^2\ -2b^3 \\ -2a^3+\frac{3}{4}a^2b+\frac{1}{2}ab^2+6b^3 \\ \hline -\frac{5}{3}a^3+\frac{13}{12}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+4b^3 \end{array}$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{5}{3}a^3+\frac{13}{12}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+4b^3$

## EJERCICIO 25

Realiza las siguientes operaciones:

1. De $5a^2-3a+2$ resta $8a^2-5a+7$
2. ¿Cuál es el resultado de $(3x^3-5x^2-6x+3)-(2x^3+4x-8)$?
3. De $4a^4-10a^3+2a^2-3a-4$ resta $5a^5-3a^3+6a-3$
4. Efectúa $(4x^3y^2-5x^2y^3+6x^4y-8xy^4)-(12x^2y^3-3xy^4+4x^3y^2-9x^4y)$
5. De $7-8a^5b+3a^3b^3-6a^4b^2+2ab^5$ resta $5a^3b^3-3ab^5+8-7a^5b-2a^4b^2$
6. Realiza $(3x^{a+2}-7x^{a+1}-8x^a+3x^{a-1})-(4x^{a+2}+6x^{a+1}-7x^a-9x^{a-1})$
7. De $5a^{2m-1}+6a^{2m}-8a^{m+1}-3a^{m-3}$ resta $12a^{2m}-5a^{2m-1}-3a^{m+1}-4a^{m-3}$
8. ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2-6x+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)$?
9. De $\frac{1}{6}m^2n^3+6mn^4+m^4n-\frac{2}{5}m^3n^2$ resta $\frac{1}{3}m^4n+\frac{3}{2}m^2n^3+8mn^4-m^3n^2$
10. De $\frac{2}{5}x^2y^2+3x^3y-4x^4+\frac{1}{6}y^4$ resta $-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^3y+\frac{1}{2}y^4+\frac{2}{3}x^2y^2$
11. Resta $8x-3y-6$ de $5x+4y-1$
12. Realiza $(a^2+a-1)-(a^2-a+1)$
13. Resta $-8x^3+6x^2-3x-2$ de $10x^3-12x^2+2x-1$
14. ¿Cuál es el resultado de restar $12a^4-3a^2+a-8$ de $14a^4-5a^2-3$?
15. Resta $16x^6y^4-3x^3y^2+8x^7y^5$ de $4x^7y^5+9x^3y^2+10x^6y^4$
16. Resta $3m^{x-6}-7m^{x-5}+8m^{x-9}-12m^{x+1}$ de $4m^{x-9}-6m^{x-5}+2m^{x-2}-8m^{x+1}$
17. Resta $15a^{n+10}-3a^{n+1}-8a^{n-3}+10a^n$ de $4a^{n+9}-5a^{n+2}-3a^{n-3}+2a^n$

18. Resta $\frac{1}{3}m-\frac{4}{5}n-p$ de $\frac{5}{6}m-\frac{3}{2}n-\frac{1}{6}p$

19. Resta $\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{6}xy^2+\frac{2}{3}y^3$ de $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{3}xy^2+\frac{1}{4}y^3$

20. Resta $\frac{1}{2}a^5b-\frac{3}{4}a^3b^3-6a^4b^2$ de $3a^3b^3-8a^5b-\frac{1}{4}a^4b^2+\frac{1}{2}a^2b^4$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Signos de agrupación

Los signos de agrupación se utilizan para indicar que las cantidades en su interior se deben considerar como una sola. Los signos son:

*a*) Corchetes [ ] *b*) Paréntesis ( ) *c*) Llaves { } *d*) Vínculo ——

## Reglas para suprimir los signos de agrupación

Si el signo de agrupación está precedido por el signo "+", éste se suprime y las cantidades que están dentro de él conservan su signo.

$$+(-a+b-c)=-a+b-c$$

Si el signo de agrupación está precedido por el signo "–", éste se suprime y cambia el signo de cada una de las cantidades que se encuentren dentro de él.

$$-(x-2y+3z)=-x+2y-3z$$
$$-\overline{2x-3y}=-(2x-3y)=-2x+3y$$

Si en una expresión existen varios signos de agrupación se suprimen aquellos que no contengan otros. Este proceso se repite hasta llegar a una expresión que carezca de signos de agrupación.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Simplifica $2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-\overline{z+4})]-(-x+y)\}$.

**Solución**

Se suprime el vínculo:

$$2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-\overline{z+4})]-(-x+y)\}$$
$$=2x+\{-[5y+(3x-z)+2-(-x+y-z-4)]-(-x+y)\}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$=2x+\{-[5y+3x-z+2+x-y+z+4]+x-y\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$=2x+\{-5y-3x+z-2-x+y-z-4+x-y\}$$

Se suprimen las llaves:

$$=2x-5y-3x+z-2-x+y-z-4+x-y$$

Se agrupan y reducen los términos semejantes:

$$=2x-3x-x+x-5y+y-y+z-z-2-4$$
$$=-x-5y-6$$

Por tanto, el resultado es: $-x-5y-6$

2 Simplifica: $\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-\overline{x-y}\right]\right)\right\}$.

**Solución**

Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior:

$$\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-\overline{x-y}\right]\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y-\left[-x+\frac{1}{4}y-x+y\right]\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+\left(2x-\frac{2}{3}y+x-\frac{1}{4}y+x-y\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\left\{\frac{3}{4}x-2y+2x-\frac{2}{3}y+x-\frac{1}{4}y+x-y\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x+2y-2x+\frac{2}{3}y-x+\frac{1}{4}y-x+y$$
$$=-\frac{17}{4}x+\frac{47}{12}y$$

Por tanto, el resultado es: $-\frac{17}{4}x+\frac{47}{12}y$

## EJERCICIO 26

Simplifica:

1. $3x-\{2y-(5x+3y)\}$
2. $-(6a-3b)-\{5a-9b-(2c-9b)\}$
3. $-10x-(8x-4y+2z)+(5x-4y-2z)-(10x-3y-4z)$
4. $4m+\{(6m-3n)-(9n-5m)+(8m-2n)\}$
5. $2a-\{7a-(3a-7b)+(10a-9b)\}$
6. $-(x+y)+[3x-2y+\{-8x-5y-(6x-8y-7y)\}-6x]$
7. $8x^2-\{3x^2-6y-\overline{2x-3y}-[9x^2-6y-4x]-(2x^2-9y+6x)-3x^2\}$
8. $-\{-6x+3y-(8x-[2y-4x-\overline{2x-6y}+10x]-9y)+12x\}$
9. $-9y+3z-\{5x-10y-8z-(2x-6y+7z-[2x-3y])\}$
10. $-6x+\{8y-(2x-[4x-9y-6z]-7x)-6y\}-(8x-[3y-2z]-9y)$
11. $\frac{2}{3}a-\left\{-\frac{1}{5}b-\left(2a-\frac{3}{5}b\right)+\frac{2}{3}a\right\}-\frac{1}{2}b$
12. $4x-\frac{2}{5}x-(3x-y)+\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y-\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}y\right)\right\}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Multiplicación

Para realizar esta operación es conveniente recordar las reglas de los signos.

### *Regla de los signos*

(+)(+) = +   (+)(−) = −   (−)(+) = −   (−)(−) = +

**Ley de los exponentes para la multiplicación.** En la multiplicación de términos con la misma base los exponentes se suman.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

### *Monomio por monomio*

Al multiplicar monomios, primero se multiplican los coeficientes y después las bases.

**EJEMPLOS**

1 ¿Cuál es el resultado de $(-5x^4y^5z)(3x^2y^6z)$?

**Solución**

Se multiplican los coeficientes y las bases:

$$(-5x^4y^5z)(3x^2y^6z) = (-5)(3)\ x^4\ x^2\ y^5\ y^6\ z\ z$$

Se aplican las leyes de los signos y de los exponentes:

$$= -15x^{4+2}y^{5+6}z^{1+1}$$
$$= -15x^6y^{11}z^2$$

Por tanto, el resultado es: $-15x^6y^{11}z^2$

2 Realiza la siguiente operación: $\left(-\frac{5}{4}a^6b^5c^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2bc^4\right)$.

**Solución**

Se efectúa el producto de las fracciones y se aplica la ley de los exponentes para las bases.

$$\left(-\frac{5}{4}a^6b^5c^5\right)\left(-\frac{2}{3}a^2bc^4\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)a^{6+2}b^{5+1}c^{5+4}=\frac{10}{12}a^8b^6c^9=\frac{5}{6}a^8b^6c^9$$

Por consiguiente, el resultado es: $\frac{5}{6}a^8b^6c^9$

3 Realiza $(-abc)(3ac)$.

**Solución**

En este ejemplo, la base *b* no se repite en ambos factores, por tanto, se pasa igual en el resultado.

$$(-abc)(3ac) = -3a^{1+1}bc^{1+1} = -3a^2bc^2$$

El resultado de la multiplicación es: $-3a^2bc^2$

4 Realiza $\left(3x^{2a-1}y^{3a}\right)\left(-2x^{4a-3}y^{2a}\right)$.

**Solución**

Se aplica el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, no importa que los exponentes de las bases sean expresiones algebraicas.

$$\left(3x^{2a-1}y^{3a}\right)\left(-2x^{4a-3}y^{2a}\right) = -6x^{(2a-1)+(4a-3)}y^{3a+2a} = -6x^{6a-4}y^{5a}$$

Por tanto, el resultado es: $-6x^{6a-4}y^{5a}$

**5** Efectúa $\left(-3a^4bc\right)\left(2a^2c^5\right)\left(-5ab^3c^2\right)$.

**Solución**

$$\left(-3a^4bc\right)\left(2a^2c^5\right)\left(-5ab^3c^2\right)=(-3)(2)(-5)a^{4+2+1}b^{1+3}c^{1+5+2}=30a^7b^4c^8$$

El resultado del producto es: $30a^7b^4c^8$

# EJERCICIO 27

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(5x)(-3x)$
2. $(4x^3y^5z)(6x^5y^4z)$
3. $(-7a^5c^2)(2a^4bc^6)$
4. $\left(\frac{3}{4}xyz\right)\left(-\frac{2}{5}z^4\right)$
5. $\left(-10m^6p\right)\left(-5m^2p^3\right)$
6. $\left(9c^5m^9p^2\right)\left(-\frac{1}{3}c^6m\right)$
7. $(-xyz)(xyz)$
8. $(ac)\left(-4a^3b\right)$
9. $\left(-\frac{3}{5}mn\right)\left(-\frac{5}{3}m^4np\right)$
10. $\left(\frac{7}{4}a^6b^8c^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2b^5c\right)$
11. $\left(-\frac{4}{5}xyz\right)\left(\frac{3}{7}x^2yz^3\right)$
12. $\left(\frac{9}{5}mp^2\right)\left(-15m^6p\right)$
13. $\left(0.5m^6p^5\right)\left(0.2m^2n\right)$
14. $(0.4abc)(0.12xyz)$
15. $(5a^mb^nc)(-2a^2b^3c)$
16. $(6m^{2x+8}n^{4x})(-7m^{x-6}n^5)$
17. $(-9x^{3m}y^{2n-1})(4x^5y^6)$
18. $(-3x^{2a-3}y^{5a+1})(-2x^{3a+1}y^{4a-6})$
19. $\left(-\frac{7}{6}a^{4x-3}b^{2x}c^4\right)\left(-\frac{3}{14}a^{x+1}bc^x\right)$
20. $\left(-\frac{1}{2}x^{4a-1}y^{2a}\right)\left(4x^{2-3a}y^{1-2a}\right)$
21. $(5ab)(-3a^2b)(2a^3bc)$
22. $(-7x^2y^5z)(-2x^6y^2)(-4xyz)$
23. $(-5x)(3y)(-2z)$
24. $(4x^4y)(-2xy^2)(3x^6y)(-2y^4)$
25. $\left(\frac{1}{3}a^3b^2c\right)\left(\frac{2}{5}a^4bc^2\right)(6ac)\left(\frac{10}{3}a^4b^2\right)$
26. $\left(-\frac{3}{4}a^6b\right)\left(\frac{2}{3}a^2bc\right)\left(-\frac{1}{2}ac\right)\left(-2b^2c^2\right)$
27. $(4a^5b^3c)(-5a^{2x}b^xc)(-2a^{4x-1}b^{2x}c^x)$
28. $\left(\frac{1}{4}x^{3a-1}y^{4a}\right)\left(\frac{2}{3}x^{a+2}y^{a+1}\right)\left(-\frac{1}{2}xy^{2a}\right)$
29. $(3x^{3a-1}y)(-4x^{2a}y^{4a})(-2x^{4a-1}y^{2a})$
30. $(2a^{8x}b^6)(-2m^{2x}n^3)(-5a^2m^3n^{5x})$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Polinomio por monomio*

Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio o viceversa, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

## EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Resuelve $(5x^5y^4-3x^4y^3z+4xz^4)(-3x^4y)$.

**Solución**

Se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio:

$$(5x^5y^4-3x^4y^3z+4xz^4)(-3x^4y)=(5x^5y^4)(-3x^4y)+(-3x^4y^3z)(-3x^4y)+(4xz^4)(-3x^4y)$$
$$=-15x^9y^5+9x^8y^4z-12x^5yz^4$$

Por tanto, el resultado es: $-15x^9y^5+9x^8y^4z-12x^5yz^4$

2 Realiza el siguiente producto: $(-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x}-5a^{3x-2}b^{2x+1}+3a^{3x-3}b^{2x+2})$.

**Solución**

Se realiza el producto del monomio por cada uno de los elementos del polinomio:

$$\begin{aligned}&(-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x}-5a^{3x-2}b^{2x+1}+3a^{3x-3}b^{2x+2})\\&=(-7a^{x+3}b^{1-2x})(4a^{3x-1}b^{2x})+(-7a^{x+3}b^{1-2x})(-5a^{3x-2}b^{2x+1})+(-7a^{x+3}b^{1-2x})(3a^{3x-3}b^{2x+2})\\&=-28a^{4x+2}b+35a^{4x+1}b^2-21a^{4x}b^3\end{aligned}$$

Luego, el resultado es: $-28a^{4x+2}b+35a^{4x+1}b^2-21a^{4x}b^3$

3 Resuelve el siguiente producto: $\left(\frac{4}{5}x^{m-1}-\frac{2}{3}x^{m-2}+\frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)$.

**Solución**

Se multiplica el monomio por cada uno de los elementos del polinomio:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4}{5}x^{m-1}-\frac{2}{3}x^{m-2}+\frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)\\&=\left(\frac{4}{5}x^{m-1}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)+\left(-\frac{2}{3}x^{m-2}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)+\left(\frac{3}{4}x^{m-3}\right)\left(-\frac{2}{3}x^{m+1}\right)\\&=-\frac{8}{15}x^{2m}+\frac{4}{9}x^{2m-1}-\frac{1}{2}x^{2m-2}\end{aligned}$$

Por consiguiente, el resultado es: $-\frac{8}{15}x^{2m}+\frac{4}{9}x^{2m-1}-\frac{1}{2}x^{2m-2}$

## EJERCICIO 28

Realiza los siguientes productos:

1. $(4a^2-7ab)(2a^3b)$
2. $(-3m)(5m^4-3m^3+6m-3)$
3. $(3x^3-7x^2-2x)(xy)$
4. $(-3ab)(2a^2-7ab+8b^2)$
5. $(6a^3b^2-7a^2b^3+4ab^5)(4a^5b^2)$
6. $(-5xy^2z)\ (7x^6y^2z-3x^5y-4xz)$
7. $(5m^3n-3m^4p+6m^2)(8mp^3)$
8. $(4a^3c-7a^2b-2c)(-3ac^4)$
9. $(5m^6n-3mn^4+2mn)(3m^{x+1}n^{2x})$
10. $(-2x^{a-2})(7x^5-8x^2+6x^3-9x+2)$
11. $(3a^{2x+1}b^{4x}-7a^{2x}b^{4x+1}-4a^xb^{3x+1})(-3a^{x+1}b^{1-x})$
12. $(-5x^{2m}y^{n+1})(5x^{3m}y^{2n}-2x^{3m+1}y^{2n+1}-4x^{3m+2}\ y^{2n+2})$
13. $(3a^{x+2}b^yc^m-3a^{x+1}b^{y+1}c^2+2a^{x-3}b^{y-1}c)(-4a^3b^2c^5)$
14. $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{5}b^2-\frac{3}{4}ab\right)\left(\frac{2}{3}ab^2\right)$

15. $\left(\frac{4}{3}x^3y\right)\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3}y^2+6xy\right)$

16. $\left(\frac{2}{5}a^6-\frac{7}{2}a^4b^2+\frac{8}{5}a^2b^4-\frac{1}{16}b\right)\left(\frac{4}{5}ab^2c\right)$

17. $\left(\frac{4}{5}a^{6m+1}b^{2m}-\frac{7}{2}a^{m+3}c^m\right)\left(-5a^3c^4\right)$

18. $\left(\frac{1}{2}x^{m-3}-\frac{1}{6}x^{m-2}+\frac{1}{4}x^{m-1}\right)\left(-6x^m\right)$

19. $(4ab)\left(\frac{7}{3}a^mb^{3n}c+\frac{4}{5}a^{m-1}b^{3n+2}\right)$

20. $\left(-\frac{4}{5}m^xn^4\right)\left(\frac{4}{3}m^{2x+3}n^{3a}-\frac{5}{4}m^{2x+2}n^{3a-1}-\frac{7}{2}m^{2x}n\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Polinomio por polinomio*

Para multiplicar polinomios por polinomios, se siguen los pasos indicados en los siguientes ejemplos:

**EJEMPLOS**

1 Efectúa la siguiente operación: $(5x^2 - 3x - 2)(4x - 3x^2 - 6)$.

**Solución**

Se escriben los factores de la multiplicación en forma escalonada (como en las multiplicaciones aritméticas), y se ordenan los polinomios con respecto a los exponentes en forma ascendente o descendente, según se quiera.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times\ -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline \end{array}$$

Se multiplica el primer término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times\ -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline -15x^4 + 9x^3 + 6x^2 \end{array}$$

$(-3x^2)(5x^2) = -15x^4$
$(-3x^2)(-3x) = +9x^3$
$(-3x^2)(-2) = +6x^2$

A continuación se multiplica el segundo término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba y los resultados se colocan debajo de sus respectivos términos semejantes del primer resultado.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^2 & -3x & -2 & \\ \times & -3x^2 & +4x & -6 & \\ \hline -15x^4 & +9x^3 & +6x^2 & & \\ & +20x^3 & -12x^2 & -8x & \end{array}$$

$(4x)(5x^2) = 20x^3$
$(4x)(-3x) = -12x^2$
$(4x)(-2) = -8x$

Se repite el paso anterior para cada uno de los términos siguientes (si es que existe).

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^2 & -3x & -2 & \\ \times & -3x^2 & +4x & -6 & \\ \hline -15x^4 & +9x^3 & +6x^2 & & \\ & +20x^3 & -12x^2 & -8x & \\ & & -30x^2 & +18x & +12 \end{array}$$

$(-6)(5x^2) = -30x^2$
$(-6)(-3x) = 18x$
$(-6)(-2) = 12$

*(continúa)*

(*continuación*)

Por último, se realiza la suma.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 5x^2 & -3x & -2 \\
\times & & & -3x^2 & +4x & -6 \\
\hline
 & -15x^4 & +9x^3 & +6x^2 & & \\
 & & +20x^3 & -12x^2 & -8x & \\
 & & & -30x^2 & +18x & +12 \\
\hline
 & -15x^4 & +29x^3 & -36x^2 & +10x & +12
\end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es: $-15x^4 + 29x^3 - 36x^2 + 10x + 12$

2 Efectúa la siguiente operación: $(5x^4y - 3x^2y^3 - 6xy)(3x^4y - 4x^2y^3 + 3xy)$.

**Solución**

Se acomodan los polinomios de manera vertical y se realiza el procedimiento descrito en el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 5x^4y & -3x^2y^3 & -6xy & & & & \\
\times & 3x^4y & -4x^2y^3 & +3xy & & & & \\
\hline
 & 15x^8y^2 & -9x^6y^4 & -18x^5y^2 & & & & \\
+ & & -20x^6y^4 & & +12x^4y^6 & +24x^3y^4 & & \\
 & & & +15x^5y^2 & & -9x^3y^4 & -18x^2y^2 & \\
\hline
 & 15x^8y^2 & -29x^6y^4 & -3x^5y^2 & +12x^4y^6 & +15x^3y^4 & -18x^2y^2 &
\end{array}$$

Por tanto, el resultado es: $15x^8y^2 - 29x^6y^4 - 3x^5y^2 + 12x^4y^6 + 15x^3y^4 - 18x^2y^2$

3 ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{5}{2}m^2 - 3mn + \frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m - \frac{1}{2}n\right)$?

**Solución**

Este es un producto de un polinomio por un binomio, los resultados de los productos se acomodan de manera horizontal y se realizan las reducciones de términos semejantes.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{2}m^2 - 3mn + \frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m - \frac{1}{2}n\right) &= \frac{5}{3}m^3 - 2m^2n + \frac{2}{9}mn^2 - \frac{5}{4}m^2n + \frac{3}{2}mn^2 - \frac{1}{6}n^3 \\
&= \frac{5}{3}m^3 - \frac{13}{4}m^2n + \frac{31}{18}mn^2 - \frac{1}{6}n^3
\end{aligned}$$

El resultado de la operación es: $\frac{5}{3}m^3 - \frac{13}{4}m^2n + \frac{31}{18}mn^2 - \frac{1}{6}n^3$

4 Obtén el resultado de $\left(2x^{a+3} + 5x^{a+2} - x^{a+1} + x^{a-2}\right)\left(x^{a+1} + 2x^a - x^{a-1}\right)$.

**Solución**

Se acomodan los polinomios verticalmente y en orden decreciente y se obtiene como resultado:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & 2x^{a+3} & +5x^{a+2} & -x^{a+1} & +x^{a-2} & & & & & \\
\times & & x^{a+1} & +2x^a & -x^{a-1} & & & & & \\
\hline
 & 2x^{2a+4} & +5x^{2a+3} & -x^{2a+2} & & & +x^{2a-1} & & & \\
+ & & +4x^{2a+3} & +10x^{2a+2} & -2x^{2a+1} & & & +2x^{2a-2} & & \\
 & & & -2x^{2a+2} & -5x^{2a+1} & +x^{2a} & & & -x^{2a-3} & \\
\hline
 & 2x^{2a+4} & +9x^{2a+3} & +7x^{2a+2} & -7x^{2a+1} & +x^{2a} & +x^{2a-1} & +2x^{2a-2} & -x^{2a-3} &
\end{array}$$

# EJERCICIO 29

Efectúa los siguientes productos:

1. $(x-7)(x+2)$
2. $(m+9)(m-8)$
3. $(-x+2)(3-x)$
4. $(3x+7)(x+4)$
5. $(2x-5)(3x+2)$
6. $(5x-4y)(5x+4y)$
7. $(3x+2y)(3x-y)$
8. $(n^2+4)(n^2-7)$
9. $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$
10. $\left(\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-3y\right)$
11. $\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{3}x\right)\left(-\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}y\right)$
12. $(x^2-2xy+y^2)(x-y)$
13. $(x^2+2xy+y^2)(x+y)$
14. $(m^2-mn+n^2)(m+n)$
15. $(m^2+mn+n^2)(m-n)$
16. $(5x^2-7y^2-4xy)(3x-2y)$
17. $(4b^2-9a^2-4ab)(3a-7b)$
18. $(2a^3-3a+4)(2a-1)$
19. $(5x^4-3x^2-6)(3x-4)$
20. $(x^2-3x+1)(x^2-1)$
21. $\left(\frac{1}{5}a^2-3ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{7}{2}b\right)$
22. $\left(\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{5}y^2-\frac{3}{4}xy\right)\left(4x-\frac{1}{3}y\right)$
23. $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{5}xy\right)\left(2y-\frac{3}{2}x\right)$
24. $(m^{x-1}-n^{a-1})(m-n)$
25. $(b^m-b^{m+1}+b^{m+2})(b+1)$
26. $(2x^{m+1}+x^{m+2}-x^m)(x^{m+3}-2x^{m+1})$
27. $(x^{a+2}-2x^a+3x^{a+1})(x^a+x^{a+1})$
28. $(3x^2-5x-2)(2x^2-7x+4)$
29. $(4x-6x^2-9)(3x^2+2x+1)$
30. $(4x^3-2x^2y+6xy^2)(x^2y-xy^2-2y^3)$
31. $(m+n-p)(m-p-n)$
32. $(2m-3n+5p)(n+2p-m)$
33. $(a+b-c)(a-b+c)$
34. $(x^2-2x+1)(x^4-2x^2+2)$
35. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)(6x^2-4x-2)$
36. $(x^m+x^{m+1}-x^{m+2})(x^m-x^{m+1}+x^{m+2})$
37. $(2x^{2m+1}+3x^{2m}-x^{2m-1})(x^2+2x+1)$
38. $(a^2b^2-a^3b+a^4-3ab^3+b^4)(a^2-2b^2+ab)$
39. $(3m^{a-2}-2m^{a-1}+m^a)(m^2+2m-1)$
40. $(3x^{2a}+x^{2a+1}-5x^{2a+2})(x^{3a-3}-8x^{3a-2}-6x^{3a-1})$
41. $(m^3-m+m^2+1)(m^2+m^3-2m-1)$
42. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x^2-2+\frac{1}{4}x\right)$
43. $(a^{x+1}-2a^{x+2}-a^{x+3}+a^{x+4})(a^{x-3}-a^{x-1}+a^{x-2})$
44. $(a^{x+3}+4a^{x+1}-5a^{x-1})(a^{x+1}+a^{x+2}+a^{x+3})$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## División

A continuación se muestra la regla de los signos de esta operación:

*Regla de los signos*

$(+)\div(+)=+$ $\quad(+)\div(-)=-$ $\quad(-)\div(+)=-$ $\quad(-)\div(-)=+$

## Ley de los exponentes para la división

En la división los exponentes de las bases iguales se restan.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

*Monomio entre monomio*

Cuando se dividen monomios, primero se realiza la división de los coeficientes y después se aplica la ley de los exponentes para las bases. Si la división de los coeficientes no es exacta, entonces se deja especificada; si las bases no son iguales, entonces se deja expresado el cociente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c}$.

**Solución**

Se dividen los coeficientes y las bases para obtener:

$$\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c} = \frac{-16}{8}a^{5-2}b^{4-3}c^{6-1} = -2a^3bc^5$$

Finalmente, el resultado es: $-2a^3bc^5$

2 ¿Cuál es el resultado de $\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c}$?

**Solución**

La división de los coeficientes no es exacta, por tanto, se deja expresada como fracción, la cual se simplifica y se efectúa la división de las bases.

$$\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c} = \frac{10}{6}x^{7-2}y^{6-2}c^{1-1} = \frac{5}{3}x^5y^4c^0 = \frac{5}{3}x^5y^4$$

Por tanto, el resultado es: $\frac{5}{3}x^5y^4$

3 Realiza $\frac{-xyz}{-xyz}$.

**Solución**

Se aplica la ley de los signos para la división y se dividen las bases.

$$\frac{-xyz}{-xyz} = x^{1-1}y^{1-1}z^{1-1} = x^0y^0z^0 = (1)(1)(1) = 1$$

El resultado es: 1

4 ¿Cuál es el resultado de $8x^{3a-1}y^{5a-4} \div 2x^{2a+3}y^{3a-1}$?

**Solución**

Se dividen los coeficientes y se restan los exponentes para obtener como resultado:

$$\frac{8x^{3a-1}y^{5a-4}}{2x^{2a+3}y^{3a-1}} = 4x^{(3a-1)-(2a+3)}y^{(5a-4)-(3a-1)} = 4x^{3a-1-2a-3}y^{5a-4-3a+1} = 4x^{a-4}y^{2a-3}$$

# EJERCICIO 30

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

1. $\frac{9a^6b^{10}}{3a^2b^5}$
2. $\frac{42x^9y^2}{-7x^5y^2}$
3. $\frac{-26a^5b^6}{-13b^3}$
4. $\frac{32p^5q^6}{-8p^3q^2}$
5. $\frac{36a^{10}b^8}{-12a^2b^7}$
6. $\frac{-25a^{12}b^9}{-5a^6b^3}$
7. $\frac{-6x^8y^9}{18x^4y^7}$
8. $\frac{-44a^5b^8}{66a^3b^2}$
9. $\frac{12x^3y^2z^4}{18xy^2z^3}$
10. $\frac{2x^4y^5z}{8x^3y^2}$
11. $\frac{12x^{10a-4}y^{5b-2}}{-6x^{3a+2}y^{2b+1}}$
12. $\frac{-10a^{5n-5}b^{4n+2}}{-2a^{4n+1}b^{2n-5}}$
13. $\frac{48a^{2x+3}b^{3x-2}c^x}{-16a^{x+1}b^{2x-5}c^3}$
14. $\frac{-20x^{5m-2}y^{9n}z^{2m}}{-6x^3y^5z^2}$
15. $\frac{x^{2a-1}y^{3a-4}z^5}{x^{2a-1}y^{3a-4}z^5}$
16. $-\frac{7}{8}a^2b^5c^8 \div -\frac{5}{2}ab^5c^6$
17. $-\frac{3}{5}a^3b \div -\frac{4}{5}a^2b$
18. $\frac{2}{3}xy^5z^3 \div -\frac{1}{6}z^3$
19. $-\frac{7}{8}a^mb^n \div -\frac{3}{4}ab^2$
20. $-\frac{2}{9}x^4y^5 \div -2$
21. $3m^4n^5p^6 \div -\frac{1}{3}m^4np^5$
22. $-\frac{3}{8}c^3d^5 \div \frac{3}{4}d^x$
23. $\frac{3}{2}a^{m-2}b^{n-5} \div \frac{3}{4}a^{m-5}b^{n-7}$
24. $\frac{3}{4}a^{m+1}b^{n+2} \div \frac{2}{3}a^{2-3m}b^{4-n}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Polinomio entre monomio*

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, como se muestra en los siguientes ejemplos.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa $\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}$.

**Solución**

Se divide cada término del polinomio entre el monomio.

$$\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}=\frac{2x^4}{-x^2}-\frac{5x^3}{-x^2}+\frac{x^2}{-x^2}=-2x^{4-2}+5x^{3-2}-x^{2-2}$$
$$=-2x^2+5x-x^0=-2x^2+5x-1$$

2 Determina el cociente de: $\frac{16x^6y^5z-12x^4y^6z^2+6x^3y^9}{-4x^2y}$.

**Solución**

Al aplicar los pasos del ejemplo anterior se obtiene:

$$\frac{16x^6y^5z}{-4x^2y}-\frac{12x^4y^6z^2}{-4x^2y}+\frac{6x^3y^9}{-4x^2y}=-4x^{6-2}y^{5-1}z+3x^{4-2}y^{6-1}z^2-\frac{3}{2}x^{3-2}y^{9-1}$$
$$=-4x^4y^4z+3x^2y^5z^2-\frac{3}{2}xy^8$$

El resultado es: $-4x^4y^4z+3x^2y^5z^2-\frac{3}{2}xy^8$

3 ¿Cuál es el cociente de $\dfrac{4x^{2m+1}+8x^{3m-2}-12x^{m+3}}{6x^{m-2}}$?

**Solución**

El monomio divide a cada uno de los términos que conforman el polinomio.

$$\frac{4x^{2m+1}}{6x^{m-2}}+\frac{8x^{3m-2}}{6x^{m-2}}-\frac{12x^{m+3}}{6x^{m-2}}=\frac{4}{6}x^{(2m+1)-(m-2)}+\frac{8}{6}x^{(3m-2)-(m-2)}-\frac{12}{6}x^{(m+3)-(m-2)}$$

$$=\frac{2}{3}x^{2m+1-m+2}+\frac{4}{3}x^{3m-2-m+2}-2x^{m+3-m+2}$$

$$=\frac{2}{3}x^{m+3}+\frac{4}{3}x^{2m}-2x^{5}$$

Por consiguiente, el resultado es: $\dfrac{2}{3}x^{m+3}+\dfrac{4}{3}x^{2m}-2x^{5}$

## EJERCICIO 31

Realiza las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{x^2+2x}{x}$
2. $\dfrac{4x^3+2x^2}{2x^2}$
3. $\dfrac{8x^2y-20x^3}{4x^2}$
4. $\dfrac{2x^3-x^2+x}{x}$
5. $\dfrac{2x^4+6x^3-8x^2}{2x^2}$
6. $\dfrac{8x^6-10x^4-12x^3}{-4x^2}$
7. $\dfrac{27m^4n^6-15m^3n^6+3mn^2}{3mn^2}$
8. $\dfrac{32a^7b^5+48a^6b^4-a^4b^3}{8ab^3}$
9. $\dfrac{28x^9y^6-49x^7y^3-7x^2y}{7x^2y}$
10. $\left(\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{5}{2}a\right)\div\dfrac{1}{2}a$
11. $\left(\dfrac{1}{5}a^5b^7-\dfrac{1}{4}a^4b^5-a^3b^4\right)\div 6a^3b^2$
12. $\left(\dfrac{1}{4}a^8b^7-\dfrac{3}{2}a^6b^6+\dfrac{1}{6}a^4b^3\right)\div-\dfrac{3}{4}ab^2$
13. $\left(\dfrac{3}{5}x^7y^9-\dfrac{2}{3}x^8y^7+\dfrac{4}{3}x^4y^5\right)\div\dfrac{4}{15}xy^5$
14. $\left(\dfrac{1}{6}x^8y^7-\dfrac{4}{3}x^6y^5+\dfrac{1}{3}x^5y^{10}\right)\div-\dfrac{6}{5}x^4y^3$
15. $\left(\dfrac{1}{2}x^{10}y^8-\dfrac{2}{3}x^8y^7+\dfrac{1}{8}x^5y^6-x^3y^5\right)\div-\dfrac{5}{2}x^2y^3$
16. $\dfrac{a^{2x}b^{3y}c^{4z}+6a^{3x}b^{4y}c^{5z}-8a^{4x}b^{5y}c^{6z}}{\frac{1}{2}a^{2x}b^{3y}c^{4z}}$
17. $\dfrac{x^{2a-1}y^{3a+5}-12x^{a+6}y^{2a-6}}{6x^{a+2}y^{3a-7}}$
18. $\dfrac{16a^{5m-3}b^{7m+1}-12a^{4m+2}b^{6m-5}+8a^{3m-4}b^{5m}}{-4a^{2m-5}b^{4m+1}}$
19. $\dfrac{20a^{6m-4}b^{3n+10}-50a^{7m-2}b^{3n-1}+8a^{5m}b^{5}}{-10a^{2m+2}b^{2n}}$
20. $\dfrac{\frac{3}{4}x^{2-a}y^{3-b}z^{4-c}+\frac{1}{6}x^{1-a}y^{2-b}z^{3}-\frac{1}{3}x^{-a}y^{-b}z^{4}}{\frac{1}{12}x^{2-3a}y^{3-2b}z^{1-c}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Polinomio entre otro polinomio*

A continuación se enlistan los pasos a seguir para realizar esta operación:

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\frac{3x^2 - 5x + 2}{3x - 2}$.

**Solución**

1. Se colocan los polinomios como en la división con números reales, y se ordenan según convenga con respecto a los exponentes:

$$3x - 2 \;\overline{)\, 3x^2 - 5x + 2}$$

2. Se toma el primer término del dividendo, se divide entre el primer término del divisor y el resultado se coloca en la parte de arriba: $\frac{3x^2}{3x} = x$.

$$\begin{array}{r l} & x \\ 3x - 2 & \overline{)\, 3x^2 - 5x + 2} \end{array}$$

3. Se multiplica el resultado de la división por cada uno de los términos del divisor; a cada resultado se le cambia el signo y se acomoda debajo del dividendo con su término semejante: $(x)(3x) = 3x^2$; $(x)(-2) = -2x$.

$$\begin{array}{r l} & x \\ 3x - 2 & \overline{)\, 3x^2 - 5x + 2} \\ & \underline{-3x^2 + 2x} \end{array}$$

4. Se reducen los términos semejantes y se baja el siguiente término del dividendo, a la expresión resultante se le llama primer residuo.

$$\begin{array}{r l} & x \\ 3x - 2 & \overline{)\, 3x^2 - 5x + 2} \\ & \underline{-3x^2 + 2x} \\ & \quad\;\; -3x + 2 \end{array}$$

5. Se repite el primer paso, es decir, se divide el primer término del primer residuo que resultó de la reducción anterior entre el primer término del divisor y se escribe el resultado arriba: $\frac{-3x}{3x} = -1$.

$$\begin{array}{r l} & x - 1 \\ 3x - 2 & \overline{)\, 3x^2 - 5x + 2} \\ & \underline{-3x^2 + 2x} \\ & \quad\;\; -3x + 2 \end{array}$$

6. Se multiplica el resultado de la división anterior por cada uno de los términos del divisor y se escribe el resultado debajo de cada término semejante del residuo anterior (no olvides cambiar el signo): $(-1)(3x) = -3x$; $(-1)(-2) = 2$.

$$\begin{array}{r l} & x - 1 \\ 3x - 2 & \overline{)\, 3x^2 - 5x + 2} \\ & \underline{-3x^2 + 2x} \\ & \quad\;\; -3x + 2 \\ & \quad\;\;\;\; 3x - 2 \end{array}$$

7. Se realiza la suma y si el residuo es cero como en el ejemplo, la división terminó; en caso contrario, se siguen los pasos anteriores hasta obtener cero como residuo o algún polinomio de grado menor al del divisor.

$$\begin{array}{r l} & x - 1 \\ 3x - 2 & \overline{)\, 3x^2 - 5x + 2} \\ & \underline{-3x^2 + 2x} \\ & \quad\;\; -3x + 2 \\ & \quad\;\;\;\; \underline{3x - 2} \\ & \qquad\qquad\; 0 \end{array}$$

Por tanto, el resultado del cociente es: $x - 1$

2 Efectúa la siguiente operación: $\dfrac{5a^2-21b^2+8ab}{a+3b}$.

**Solución**

Al emplear los pasos del ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r|l} & 5a-7b \\ \hline a+3b & 5a^2+8ab-21b^2 \\ & -5a^2-15ab \\ \hline & -7ab-21b^2 \\ & 7ab+21b^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\frac{5a^2}{a}=5a \rightarrow (5a)(a+3b)=5a^2+15ab$$

$$\frac{-7ab}{a}=-7b \rightarrow (-7b)(a+3b)=-7ab-21b^2$$

Por consiguiente, el cociente es: $5a-7b$

En una división de polinomios, si al dividendo le falta uno de sus términos, se deja indicado el espacio que ocupa dicho término o se escribe con coeficiente 0.

## Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\dfrac{-2a+a^4-a^2-1}{a+a^2+1}$?

**Solución**

Se ordena tanto el dividendo como el divisor en orden decreciente con respecto a los exponentes y, en el caso del dividendo, se deja el espacio correspondiente al término de exponente 3:

$$a^2+a+1 \;\overline{\big|\; a^4+0a^3-a^2-2a-1}$$

Se realiza la división como en los ejemplos anteriores:

$$\begin{array}{r|l} & a^2-a-1 \\ \hline a^2+a+1 & a^4+0a^3-a^2-2a-1 \\ & -a^4-a^3-a^2 \\ \hline & -a^3-2a^2-2a \\ & a^3+a^2+a \\ \hline & -a^2-a-1 \\ & a^2+a+1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\frac{a^4}{a^2}=a^2 \rightarrow (a^2)(a^2+a+1)=a^4+a^3+a^2$$

$$\frac{-a^3}{a^2}=-a \rightarrow (-a)(a^2+a+1)=-a^3-a^2-a$$

$$\frac{-a^2}{a^2}=-1 \rightarrow (-1)(a^2+a+1)=-a^2-a-1$$

El resultado de la división es: $a^2-a-1$

# EJERCICIO 32

Determina el cociente de las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$
2. $\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$
3. $\dfrac{x^2+5xy+6y^2}{x+2y}$
4. $\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}$
5. $\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}$
6. $\dfrac{x^2+3x-18}{x-3}$

7. $\frac{m^2-11mn+28n^2}{m-7n}$

8. $\frac{x^2-9xy-10y^2}{x+y}$

9. $\frac{n^4+2n^2-48}{n^2+8}$

10. $\frac{m^6-m^3-20}{m^3-5}$

11. $\frac{x^8+11x^4+18}{x^4+9}$

12. $\frac{x^{12}-9x^6+14}{x^6-2}$

13. $\frac{9x^2-6x-35}{3x+5}$

14. $\frac{16m^2-4m-6}{4m+2}$

15. $\frac{15a^2-a-28}{3a+4}$

16. $\frac{8a^2-6ab-27b^2}{4a-9b}$

17. $\frac{49m^2-56m+15}{7m-5}$

18. $\frac{15a^2-ab-28b^2}{5a-7b}$

19. $\frac{7m^2-31mn+12n^2}{m-4n}$

20. $\frac{12x^2-5xy-2y^2}{4x+y}$

21. $\frac{18m^4-21m^2n^2-15n^4}{6m^2+3n^2}$

22. $\frac{9m^4-9m^2-40}{3m^2-8}$

23. $\frac{20m^6-9m^3-18}{4m^3+3}$

24. $\frac{15m^3-34m^2+9m+10}{3m-5}$

25. $\frac{12x^3+13x^2-59x+30}{4x-5}$

26. $\frac{8a^3-44a^2+44a+42}{4a^2-8a-6}$

27. $\left(x^3-y^3\right)\div(x-y)$

28. $\left(8x^3+27y^3\right)\div(3y+2x)$

29. $\left(x^6-8y^6\right)\div\left(x^2-2y^2\right)$

30. $\left(a^4-a\right)\div(a-1)$

31. $\frac{x^3+48x-64-12x^2}{x^2+16-8x}$

32. $\frac{4x^4+x^2y^2-5xy^3-6y^4}{2x^2-xy-2y^2}$

33. $\frac{6x^4-8x^2-x^3+x+2}{2x^2-x-1}$

34. $\frac{3x^4+2x^3+3x-6x^2-2}{x^2+x-2}$

35. $\frac{4x^4-4x^3-13x^2+11x+4}{2x^2-4+x}$

36. $\frac{6x^4-19x^3-12x^2+43x+30}{3x^2-5x-6}$

37. $\frac{4a^4+26a^3-79a^2-20a+42}{a^2+8a-6}$

38. $\frac{12x^4-36x^3-29x^2+38x+24}{2x^2-5x-6}$

39. $\frac{28x^4-17x^3+18x+23x^2-24}{4x^2-3x+6}$

40. $\frac{5x^4-9x^3-23x^2+36x+12}{x^2-4}$

41. $\frac{12x^4+9x^3-11x^2-6x+2}{3x^2-2}$

42. $\frac{10a^4-41a^3b+9a^2b^2+38ab^3+14b^4}{2a-7b}$

43. $\dfrac{8x^6-32x^5+16x^4+19x^3+34x^2+19x-10}{2x-5}$

44. $\left(5a^2-\dfrac{13}{18}ab-\dfrac{2}{3}b^2\right)\div\left(3a-\dfrac{4}{3}b\right)$

45. $\left(\dfrac{4}{5}x^2-\dfrac{203}{75}xy+\dfrac{2}{15}y^2\right)\div\left(\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{3}y\right)$

46. $\left(6m^2-\dfrac{3}{2}mn+\dfrac{1}{12}n^2\right)\div\left(\dfrac{3}{2}m-\dfrac{1}{4}n\right)$

47. $\dfrac{\dfrac{5}{8}a^3+\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{17}{18}a-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{5}{2}a^2-\dfrac{2}{3}a-2}$

48. $\left(x^{a+3}+x^a\right)\div(x+1)$

49. $\dfrac{a^m-ab^{y-1}-a^{m-1}b+b^y}{a-b}$

50. $\dfrac{m^{a+2}-2m^a+m^{a-2}}{m^2+2m+1}$

51. $\dfrac{m^{2x+3}+4m^{2x+2}+m^{2x+1}-2m^{2x}}{m^x+m^{x+1}}$

52. $\dfrac{m^{2x+5}+2m^{2x+4}-3m^{2x+3}-4m^{2x+2}+2m^{2x+1}}{m^{x+3}-2m^{x+1}}$

53. $\dfrac{-30m^{5x+1}+46m^{5x}+5m^{5x-1}-23m^{5x-2}+3m^{5x-3}}{m^{3x-3}-8m^{3x-2}+6m^{3x-1}}$

54. $\dfrac{-x^{2m+3}+2x^{2m+2}+2x^{2m+1}-4x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}}{x^{m-3}-x^{m-1}+x^{m-2}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una empresa construye estructuras prediseñadas para casas y edificios. Si $x$ representa el número de estructuras y los costos de producción son: $x^2 + 12x - 1\,200$ para las casas y $3x^2 + x + 2\,000$ para los edificios, ¿cuál es el costo total de producción de la compañía?

**Solución**

El costo total se obtiene al sumar el precio de las casas y el de los edificios.

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +12x & -1200 \\ + & 3x^2 & +\ x & +2\,000 \\ \hline & 4x^2 & +13x & +\ 800 \end{array}$$

Por tanto, la empresa gasta: $4x^2+13x+800$

2 El largo de un terreno en metros lo determina la expresión $2a^2+3a+2$ y su ancho lo representa $2a-1$, ¿cuál es la superficie del terreno en metros cuadrados?

**Solución**

Para obtener la superficie del terreno se multiplica su largo por su ancho.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2a^2 & +3a & +2 \\ \times & & & 2a & -1 \\ \hline & 4a^3 & +6a^2 & +4a & \\ + & & -2a^2 & -3a & -2 \\ \hline & 4a^3 & +4a^2 & +a & -2 \end{array}$$

Entonces, la superficie del terreno es de: $4a^3+4a^2+a-2$ metros cuadrados.

3 Al adquirir $2x + 3$ artículos se paga un importe de $10x^2 + 29x + 21$ pesos, ¿cuál es el precio unitario de los artículos?

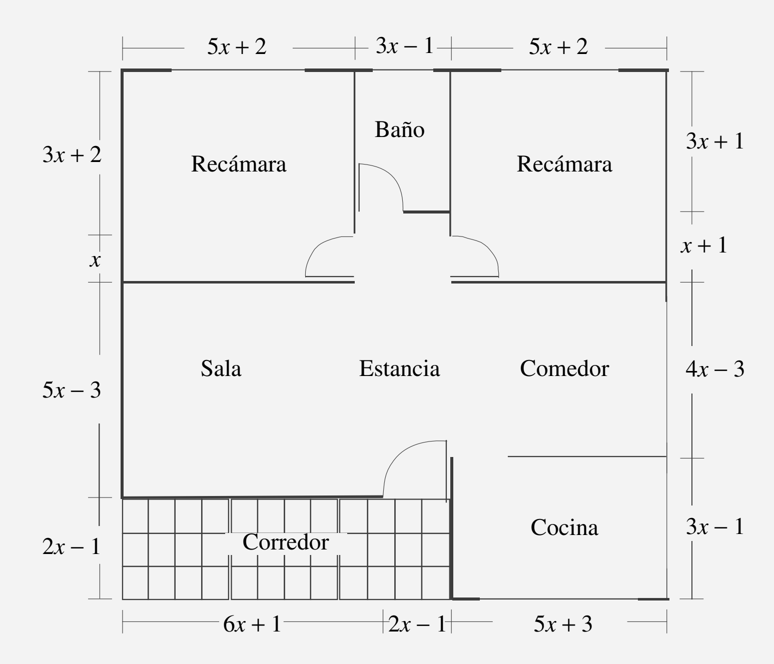
**Solución**

Para obtener el precio unitario, se divide el importe total entre el número de artículos.

$$\begin{array}{r|l} & 5x + 7 \\ \hline 2x + 3 & 10x^2 + 29x + 21 \\ & -10x^2 - 15x \\ \hline & \quad 14x + 21 \\ & \quad -14x - 21 \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

El costo de cada artículo es: $5x + 7$ pesos.

4 Observa el siguiente plano de distribución de una casa, la cual se proyecta en un terreno rectangular.




De acuerdo con él, calcula la superficie que abarca la construcción, excepto el corredor.

**Solución**

Se calcula el largo y ancho del rectángulo que abarca la construcción:

$$\text{Largo} = (6x + 1) + (2x - 1) + (5x + 3) = 13x + 3$$

$$\text{Ancho} = (3x + 2) + x + (5x - 3) + (2x - 1) = 11x - 2$$

Se obtiene el área del rectángulo que ocupa la casa y la del corredor:

Área del rectángulo

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{Largo})(\text{Ancho}) \\ &= (13x + 3)(11x - 2) \\ &= 143x^2 - 26x + 33x - 6 \\ &= 143x^2 + 7x - 6 \end{aligned}$$

Área del corredor

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{Largo})(\text{Ancho}) \\ &= ((6x + 1) + (2x - 1))(2x - 1) \\ &= (8x)(2x - 1) \\ &= 16x^2 - 8x \end{aligned}$$

Para saber cuál es la superficie, se resta al área del rectángulo el área del corredor:

$$\begin{aligned} A &= (143x^2 + 7x - 6) - (16x^2 - 8x) \\ &= 143x^2 + 7x - 6 - 16x^2 + 8x \\ &= 127x^2 + 15x - 6 \end{aligned}$$

Por tanto, la superficie es: $127x^2 + 15x - 6$

# EJERCICIO 33

Resuelve los siguientes problemas.

1. Una partícula recorre $5t^2 + 4t + 7$ metros, después recorre $t^2 - 4$ y, finalmente, $-5t + 3$ metros. ¿Cuál es la distancia total de su recorrido?
2. Una empresa obtiene con la venta de un artículo un ingreso de $3x^2 - 7x + 6\,400$ y sus costos de producción son de $2x^2 - 9x + 2\,000$. ¿Cuál es la utilidad que obtiene dicha compañía?
3. Un obrero pinta una barda, cuya superficie es de $8x^2 + 6xy + 9y^2$ metros cuadrados, si le faltan por pintar $3x^2 + 8y^2$ metros cuadrados, ¿qué superficie lleva pintada?
4. Un producto tiene un precio en el mercado de $5y + 3$ pesos, si se venden $3y + 1$ productos. ¿Cuál es el ingreso que se obtuvo?
5. Si un terreno rectangular mide $4x - 3y$ metros de largo y $5x + 2y$ metros de ancho, ¿cuál es su superficie?
6. Las dimensiones de una caja en decímetros son: $2w - 3$ de largo, $3w + 1$ de ancho y $2w + 1$ de altura. ¿Cuál es su volumen?
7. Se tienen $12x^2 - 5xy - 2y^2$ litros de aceite y se van a envasar en botellas de $3x - 2y$ litros de capacidad, ¿cuántas botellas se van a emplear?
8. Un móvil se mueve a razón de $3t^3 - t^2 + 4t - 2$ metros por segundo, calcula la distancia que recorre en un tiempo de $2t + 1$ segundos (distancia = (velocidad)(tiempo)).

Utiliza el plano del ejemplo 4 de la página anterior, para calcular lo siguiente:

9. La superficie de las recámaras.
10. El área del baño.
11. La superficie de la cocina.
12. El área del comedor.

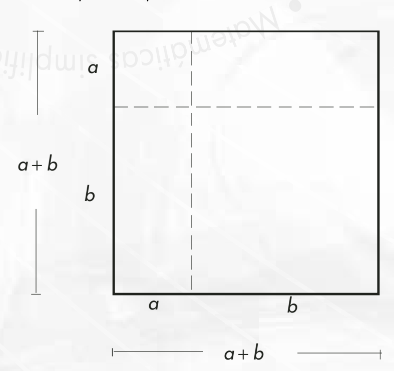
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 3
## PRODUCTOS NOTABLES

### *El trinomio cuadrado perfecto*

Así se denomina al resultado de $(a + b)^2$, que se obtiene mediante un cuadrado de lado $(a + b)$; al que conforman dos cuadrados de área "$a^2$" y "$b^2$", así como dos rectángulos de área "$ab$", por tanto, el desarrollo de la expresión $(a + b)^2$ es:

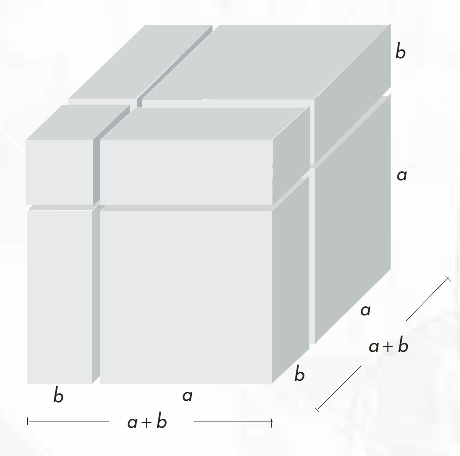
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$




### *El cubo perfecto*

Es la denominación del resultado de $(a + b)^3$; para su desarrollo se propone un cubo de arista $(a + b)$ cuyo volumen será la expresión $(a + b)^3$. A este cubo perfecto lo conforman dos cubos de volumen "$a^3$" y "$b^3$" respectivamente, tres paralelepípedos con volumen "$a^2b$" y otros tres con volumen "$ab^2$", lo que da el desarrollo de la expresión:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



## Definición

Los productos notables se obtienen con un simple desarrollo, sin necesidad de efectuar el producto.

## Cuadrado de un binomio

El desarrollo de la suma de dos cantidades al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo; esta regla general se expresa con la fórmula:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A la expresión resultante se le conoce como trinomio cuadrado perfecto.

*Demostración*

La expresión $(a + b)^2$ es equivalente a $(a + b)(a + b)$, entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x + 7)^2$.

**Solución**

Al aplicar la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(x)^2 = x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(x)(7) = 14x$
- El cuadrado del segundo término: $(7)^2 = 49$

Se suman los términos resultantes y se obtiene:

$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

2 ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(3m + 5n)^2$?

**Solución**

Se aplica la fórmula con $3m$ como primer término y $5n$ como segundo término

$$\begin{aligned}(3m + 5n)^2 &= (3m)^2 + 2(3m)(5n) + (5n)^2\\ &= 9m^2 + 30mn + 25n^2\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $9m^2 + 30mn + 25n^2$

3 Desarrolla $\left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2$.

**Solución**

Se sustituyen los términos en la fórmula y se efectúan las operaciones, para obtener:

$$\left(\frac{1}{2}a+3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)(3) + (3)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{6}{2}a + 9 = \frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$$

4 Desarrolla $(5m^{2x-3} + n^{4x})^2$.

**Solución**

En este ejemplo los exponentes de las bases son expresiones algebraicas, entonces, al aplicar la fórmula, se obtiene:

$$(5m^{2x-3} + n^{4x})^2 = (5m^{2x-3})^2 + 2(5m^{2x-3})(n^{4x}) + (n^{4x})^2 = 25m^{4x-6} + 10m^{2x-3}n^{4x} + n^{8x}$$

5 Desarrolla $(-2x-3y)^2$.

**Solución**

El binomio se expresa de la siguiente manera: $(-2x-3y)^2 = \left((-2x)+(-3y)\right)^2$, se aplica la fórmula:

$$(-2x-3y)^2 = \left((-2x)+(-3y)\right)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(-3y) + (-3y)^2$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Por tanto: $(-2x-3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

El desarrollo del cuadrado de una diferencia de dos cantidades, es igual a:

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

En este desarrollo los términos se sustituyen con signo positivo, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(4x^4 - 9y^3)^2$?

**Solución**

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$(4x^4 - 9y^3)^2 = (4x^4)^2 - 2(4x^4)(9y^3) + (9y^3)^2$$
$$= 16x^8 - 72x^4y^3 + 81y^6$$

2 Desarrolla $(3x^3y - 2x^5z)^2$.

**Solución**

Se aplica la fórmula de la misma manera que en el ejemplo anterior y se obtiene:

$$(3x^3y - 2x^5z)^2 = (3x^3y)^2 - 2(3x^3y)(2x^5z) + (2x^5z)^2 = 9x^6y^2 - 12x^8yz + 4x^{10}z^2$$

Finalmente, el resultado de la operación es: $9x^6y^2 - 12x^8yz + 4x^{10}z^2$

## Cuadrado de un trinomio

El desarrollo de la expresión: $(a+b+c)^2$ es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más los dobles productos de las combinaciones entre ellos:

$$\boldsymbol{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

*Demostración*

La expresión $(a+b+c)^2$ es equivalente al producto $(a+b+c)(a+b+c)$, entonces:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

Al simplificar los términos semejantes:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(x+2y+3z)^2$.

**Solución**

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}(x+2y+3z)^2 &= (x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2(x)\,(2y)+2(x)\,(3z)+2(2y)\,(3z)\\ &= x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz\end{aligned}$$

2 Obtén el resultado de $(4m-7n-5)^2$.

**Solución**

El trinomio se expresa de la siguiente manera: $(4m-7n-5)^2=(4m+(-7n)+(-5))^2$ y se aplica la fórmula para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}(4m-7n-5)^2 &= (4m)^2+(-7n)^2+(-5)^2+2(4m)(-7n)+2(4m)(-5)+2(-7n)(-5)\\ &= 16m^2+49n^2+25-56mn-40m+70n\end{aligned}$$

3 Desarrolla $\left(\frac{1}{2}x^{m+1}+2x^m+x^{m-1}\right)^2$.

**Solución**

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)^2+\left(2x^m\right)^2+\left(x^{m-1}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)\left(2x^m\right)+2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)\left(x^{m-1}\right)+2\left(2x^m\right)\left(x^{m-1}\right)\\ &=\frac{1}{4}x^{2m+2}+4x^{2m}+x^{2m-2}+2x^{2m+1}+x^{2m}+4x^{2m-1}\end{aligned}$$

Se reducen los términos semejantes y se acomodan de forma decreciente, respecto a los exponentes:

$$=\frac{1}{4}x^{2m+2}+2x^{2m+1}+5x^{2m}+4x^{2m-1}+x^{2m-2}$$

## EJERCICIO **34**

Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(x+8)^2$
2. $(m-10)^2$
3. $(a-3)^2$
4. $(y+1)^2$
5. $(y+5)^2$
6. $(p-6)^2$
7. $(1-b)^2$
8. $(x-5)^2$
9. $(2+n)^2$
10. $(4-m)^2$
11. $(y+9)^2$
12. $(x-12)^2$
13. $(p+15)^2$
14. $(2a-1)^2$
15. $\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{3}\right)^2$
16. $(3ax-1)^2$
17. $(mn+8a)^2$
18. $(7a-3b)^2$
19. $(2x+3y)^2$
20. $(x+0.2)^2$
21. $(4x^3+5y)^2$
22. $(9a^3-a^2b)^2$
23. $(6mn^4+3m^5p)^2$
24. $(a^5-b^5)^2$
25. $\left(1-\frac{3}{4}xy\right)^2$
26. $\left(\frac{1}{4}x-2y^3\right)^2$
27. $\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{4y}\right)^2$

28. $(3x^2 + 4xy^7)^2$

29. $(5ab - 3xy^5)^2$

30. $(m^9 + 12\,y^4)^2$

31. $(3x^2 - 9y^6)^2$

32. $(a^x - b^y)^2$

33. $(3x^{4a-5} + 2y^{2a+1})^2$

34. $(m^{3a+6} - 4n^{3b})^2$

35. $\left(3a^x + \frac{1}{2}a^{3x}b^{4y}\right)^2$

36. $\left(\frac{4}{5}a^{2m-1} - \frac{3}{2}b\right)^2$

37. $(0.6m^{2x} - 0.5n^4)^2$

38. $(6x^{3m-2} + 5y^{4m}z^3)^2$

39. $\left(0.3x^{2a} - 0.8y^{b-1}\right)^2$

40. $\left(\frac{5}{3}x^{3a-2} + \frac{6}{5}y^{1-3a}\right)^2$

41. $\left(\frac{x^{8-y}}{2} + 3y^{8-x}\right)^2$

42. $\left(\frac{x^{4a}}{5} + \frac{b^{4x}y^{a+1}}{4}\right)^2$

43. $(x + 2y + 3z)^2$

44. $(3x - 2y + 1)^2$

45. $(a + 6b - 5c)^2$

46. $(a^2 + 5a + 4)^2$

47. $(a^2 + 3a - 2)^2$

48. $(x^2 - 2x + 1)^2$

49. $(x + y - 2)^2$

50. $(2a - 3b + 1)^2$

51. $(4m + 5n + \mathrm{p})^2$

52. $(3x^2 + 2y^2 - 1)^2$

53. $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + c\right)^2$

54. $\left(\frac{1}{6}x - y + \frac{1}{4}\right)^2$

55. $\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z}\right)^2$

56. $(a^x - b^y + c^z)^2$

57. $(a^{x+1} - 2a^x - a^{x-1})^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Binomios conjugados

Son de la forma $(a + b)(a - b)$ y su resultado es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades, como se ilustra en la fórmula:

$$\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

*Demostración*
Se realiza el producto y se obtiene:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Desarrolla $(x + 6)\,(x - 6)$.

**Solución**

Ambos términos se elevan al cuadrado:

- El cuadrado del término que no cambia de signo: $(x)^2 = x^2$
- El cuadrado del término que cambia de signo: $(6)^2 = 36$

Finalmente, se realiza la diferencia y el resultado es: $x^2 - 36$

2 Desarrolla $(m - 4)(m + 4)$.

**Solución**

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(m - 4)(m + 4) = (m)^2 - (4)^2 = m^2 - 16$$

3 Resuelve $(-2x^3 + 7)(-2x^3 - 7)$.

**Solución**

Los binomios se expresan de la siguiente manera para aplicar la fórmula:

$$(-2x^3 + 7)(-2x^3 - 7) = [(-2x^3) + 7][(-2x^3) - 7] = (-2x^3)^2 - (7)^2 = 4x^6 - 49$$

4 Desarrolla $\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right)$.

**Solución**

Se ordenan los términos y se aplica la fórmula para obtener:

$$\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{10}{3} + \frac{3m^4}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{3m^4}{2}\right)^2 = \frac{100}{9} - \frac{9m^8}{4}$$

5 Resuelve $(5x^{2a-3} + y^{4m})(5x^{2a-3} - y^{4m})$.

**Solución**

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(5x^{2a-3} + y^{4m})(5x^{2a-3} - y^{4m}) = (5x^{2a-3})^2 - (y^{4m})^2 = 25x^{4a-6} - y^{8m}$$

## Productos donde se aplican binomios conjugados

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El resultado de $(m + n - p)(m + n + p)$ es:

**Solución**

Los elementos de ambos factores se agrupan de la siguiente manera:

$$(m + n - p)(m + n + p) = [(m + n) - p][(m + n) + p]$$

Se aplica la fórmula para los binomios conjugados:

$$= (m + n)^2 - p^2$$

Se desarrolla el binomio y, finalmente, el resultado es:

$$= m^2 + 2mn + n^2 - p^2$$

2 Desarrolla $(x + y - 3)(x - y + 3)$.

**Solución**

El producto se expresa de la siguiente manera y se procede a aplicar el producto de binomios conjugados:

$$\begin{aligned}(x + y - 3)(x - y + 3) &= [x + (y - 3)][x - (y - 3)] \\ &= (x)^2 - (y - 3)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 6y - 9\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $x^2 - y^2 + 6y - 9$

3 ¿Cuál es el resultado de $(2x - 3y - z + 5)(2x - 3y + z - 5)$?

**Solución**

Se agrupan los términos y se aplica la fórmula para binomios conjugados:

$$(2x - 3y - z + 5)(2x - 3y + z - 5) = [(2x - 3y) - (z - 5)][(2x - 3y) + (z - 5)]$$
$$= (2x - 3y)^2 - (z - 5)^2$$

Se desarrollan los binomios, se eliminan los paréntesis y se ordenan los términos:

$$= (4x^2 - 12xy + 9y^2) - (z^2 - 10z + 25)$$
$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - z^2 + 10z - 25$$
$$= 4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy + 10z - 25$$

Finalmente, el resultado es: $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy + 10z - 25$

## EJERCICIO 35

Desarrolla los siguientes productos:

1. $(x + 3)(x - 3)$
2. $(a - 1)(a + 1)$
3. $(b + 2)(b - 2)$
4. $(k - 8)(k + 8)$
5. $(5 - y)(5 + y)$
6. $(9 - a)(9 + a)$
7. $(m - n)(m + n)$
8. $(xy - z)(xy + z)$
9. $(3x + 5y)(3x - 5y)$
10. $(4m - 9n)(4m + 9n)$
11. $(2b - 3c)(3c + 2b)$
12. $(6x^5 + 1)(6x^5 - 1)$
13. $(3m^3 - 8)(3m^3 + 8)$
14. $(5x^4y + 4z)(-4z + 5x^4y)$
15. $(9ab^4 - c^7)(9ab^4 + c^7)$
16. $(7a^4b^3 - cd^5)(7a^4b^3 + cd^5)$
17. $\left(\frac{3}{5}m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}m - \frac{1}{2}\right)$
18. $\left(\frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}\right)$
19. $\left(\frac{1}{3}xy - z^6\right)\left(\frac{1}{3}xy + z^6\right)$
20. $\left(3x^2 - \frac{1}{10}\right)\left(3x^2 + \frac{1}{10}\right)$
21. $(3a^{x-4} + b^{3x})(3a^{x-4} - b^{3x})$
22. $(8y^{2a-3} - 4x^{4a})(4x^{4a} + 8y^{2a-3})$
23. $(a + b - c)(a + b + c)$
24. $(a - b + c)(a + b - c)$
25. $(m + n + p)(m - n - p)$
26. $(x + y - 3)(x + y + 3)$
27. $(4x + 3y - z)(4x - 3y + z)$
28. $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2 + xy)$
29. $(m^4 - m^2 - m)(m^4 + m^2 + m)$
30. $(2x + 5y - 3z)(2x + 5y + 3z)$
31. $(x + 2y - 1)(x + 2y + 1)$
32. $\left(\frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{4}\right)$

33. $\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{2}{7}y^2\right)\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{2}{7}y^2\right)$

34. $\left(\frac{1}{3}x^{m+1}-\frac{1}{6}x^m+\frac{1}{2}x^{m-1}\right)\left(\frac{1}{3}x^{m+1}+\frac{1}{6}x^m-\frac{1}{2}x^{m-1}\right)$

35. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

36. $(x+y+z-1)(x-y+z+1)$

37. $(m-2n+3p-5)(m+2n-3p-5)$

38. $(x-y+z-4)(x-y-z+4)$

39. $(2x+3y+4z-7)(2x+3y-4z+7)$

40. $(x-y-3z-5)(x-y+3z+5)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Binomios con término común

Son de la forma $(x+a)(x+b)$, su resultado es un trinomio cuyo desarrollo es el cuadrado del término común, más la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los no comunes.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

*Demostración*
Se realiza el producto de los binomios:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab$$

Se agrupan los términos semejantes y se obtiene la fórmula:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Desarrolla $(x-6)(x+4)$.

**Solución**

Se desarrolla el procedimiento descrito:

- El cuadrado del término común: $(x)^2=x^2$
- La suma de los términos no comunes, multiplicada por el término común: $(-6+4)(x)=-2x$
- El producto de los términos no comunes: $(-6)(4)=-24$

Se suman los términos anteriores y se obtiene como resultado:

$$(x-6)(x+4)=x^2-2x-24$$

2 Efectúa $(m-3)(m-5)$.

**Solución**

Al aplicar la fórmula, se obtiene:

$$(m-3)(m-5)=m^2+(-3-5)m+(-3)(-5)=m^2-8m+15$$

3 Resuelve $(5x-4)(5x-2)$.

**Solución**

$$\begin{aligned}(5x-4)(5x-2)&=(5x)^2+(-4-2)(5x)+(-4)(-2)\\&=25x^2+(-6)(5x)+8\\&=25x^2-30x+8\end{aligned}$$

4 Efectúa la siguiente operación: $(7-x)(7+3x)$.

**Solución**

El término común es 7, con la aplicación de la fórmula se obtiene:

$$(7-x)(7+3x) = (7)^2+(-x+3x)(7)+(-x)(3x) = 49+14x-3x^2$$

5 ¿Cuál es el resultado de $(n^4+10)(n^4-8)$?

**Solución**

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$(n^4+10)(n^4-8) = \left(n^4\right)^2+(10-8)n^4+(10)(-8) = n^8+2n^4-80$$

6 Efectúa $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)$.

**Solución**

Se aplica la fórmula y se obtiene:

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{9}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{8}$$

7 Desarrolla $(x+y-3)(x+y+7)$.

**Solución**

Se agrupan los términos en común:

$$(x+y-3)(x+y+7) = [(x+y)-3][(x+y)+7]$$

Se aplica el desarrollo para el producto de binomios con término común:

$$\begin{aligned}(x+y-3)(x+y+7) &= [(x+y)-3][(x+y)+7]\\ &= (x+y)^2+(-3+7)(x+y)+(-3)(7)\\ &= (x+y)^2+(4)(x+y)+(-21)\\ &= x^2+2xy+y^2+4x+4y-21\end{aligned}$$

8 Desarrolla $(2m+3n-4)(2m-5n+2)$.

**Solución**

Se expresa el producto de la siguiente manera:

$$(2m+3n-4)(2m-5n+2) = [(2m)+(3n-4)][(2m)+(-5n+2)]$$

Al desarrollar el producto de binomios con término común, se obtiene:

$$\begin{aligned}&= (2m)^2+(3n-4-5n+2)(2m)+(3n-4)(-5n+2)\\ &= 4m^2+(-2n-2)(2m)+(-15n^2+6n+20n-8)\\ &= 4m^2+(-4mn-4m)+(-15n^2+26n-8)\\ &= 4m^2-4mn-4m-15n^2+26n-8\\ &= 4m^2-15n^2-4mn-4m+26n-8\end{aligned}$$

# EJERCICIO 36

Resuelve los siguientes productos:

1. $(x-8)(x+5)$
2. $(m+7)(m-4)$
3. $(x-10)(x-2)$
4. $(x-6)(x-5)$
5. $(x+4)(x+6)$
6. $(n-3)(n+4)$
7. $(x-1)(x-8)$
8. $(a+3)(a-9)$
9. $(x-5)(x+2)$
10. $(m-3)(m+8)$
11. $(2x-6)(2x+4)$
12. $(3m+6)(3m-4)$
13. $(6x-4)(6x+3)$
14. $(4x-5)(4x-2)$
15. $(1-3x)(2-3x)$
16. $(4+5x)(6+5x)$
17. $(2-7x)(2+6x)$
18. $(5+2x)(5-9x)$
19. $(x^2-10)(x^2+6)$
20. $(m^3-4)(m^3-8)$
21. $(x^4+6)(x^4-12)$
22. $(x^5-1)(x^5+2)$
23. $(a^3-5)(a^3-2)$
24. $(x^{2m-1}+7)(x^{2m-1}-5)$
25. $(a^2x^3+b^4)(a^2x^3+2b^4)$
26. $(3x^m+4y^n)(3x^m-7y^n)$
27. $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)$
28. $\left(\frac{1}{3}m+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}\right)$
29. $\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}y-\frac{5}{8}\right)$
30. $\left(-xy+\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-xy\right)$
31. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{7}y\right)\left(\frac{3}{7}y-\frac{4}{5}x\right)$
32. $\left(\frac{6}{5}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)\left(\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{3}y^2\right)$
33. $(a+b+3)(a+b+4)$
34. $(a-2b+1)(a-2b+5)$
35. $(x-y+3z)(x-y-7z)$
36. $(2x+y+2)(2x+y-1)$
37. $(m^2+n^2-5)(m^2+n^2+9)$
38. $(a+b-c)(a-b-3c)$
39. $(x+3y-4z)(x-2y+z)$
40. $(a+5b+c)(a-5b+c)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Cubo de un binomio

Es de la forma $(a + b)^3$, su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y su desarrollo es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$\boldsymbol{(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

*Demostración*

La expresión $(a + b)^3$ es equivalente al producto $(a + b)^2(a + b)$, entonces:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla $(m + 5)^3$.

**Solución**

Se obtiene cada uno de los términos que conforman al cubo perfecto:

- El cubo del primer término: $(m)^3 = m^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(m)^2(5) = 15m^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(m)(5)^2 = 3(m)(25) = 75m$
- El cubo del segundo: $(5)^3 = 125$

Estos resultados se suman y se obtiene:

$$(m + 5)^3 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125$$

2 Desarrolla el siguiente binomio $(x - 4)^3$:

**Solución**

El binomio se expresa de la siguiente manera: $(x - 4)^3 = (x + (-4))^3$, se obtiene cada uno de los términos del cubo perfecto:

- El cubo del primer término: $(x)^3 = x^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(x)^2(-4) = -12x^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(x)(-4)^2 = 3(x)(16) = 48x$
- El cubo del segundo término: $(-4)^3 = -64$

Finalmente, el desarrollo es:

$$(x - 4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

3 Desarrolla $(-2m - 3n)^3$.

**Solución**

El binomio se representa como: $(-2m - 3n)^3 = [(-2m) + (-3n)]^3$, se aplica la regla general:

$$\begin{aligned}(-2m - 3n)^3 &= (-2m)^3 + 3(-2m)^2(-3n) + 3(-2m)(-3n)^2 + (-3n)^3\\ &= (-8m^3) + 3(4m^2)(-3n) + 3(-2m)(9n^2) + (-27n^3)\\ &= -8m^3 - 36m^2n - 54mn^2 - 27n^3\end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

El desarrollo del cubo de la diferencia de dos cantidades se obtiene con la fórmula:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Al utilizar la fórmula los términos se sustituyen con signo positivo.

4 ¿Cuál es el resultado de $(3x^4 - 2y^3)^3$?

**Solución**

Se aplica la fórmula y se determina que:

$$\begin{aligned}(3x^4 - 2y^3)^3 &= (3x^4)^3 - 3(3x^4)^2(2y^3) + 3(3x^4)(2y^3)^2 - (2y^3)^3\\ &= 27x^{12} - 3(9x^8)(2y^3) + 3(3x^4)(4y^6) - 8y^9\\ &= 27x^{12} - 54x^8y^3 + 36x^4y^6 - 8y^9\end{aligned}$$

## EJERCICIO 37

Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

1. $(x - 1)^3$
2. $(m + 6)^3$
3. $(x - 2)^3$
4. $(a + 10)^3$
5. $(n - 7)^3$
6. $(x + 3)^3$
7. $(1 - x)^3$
8. $(10 - m)^3$
9. $(2x + 1)^3$
10. $(3a - 4)^3$
11. $(2x + 3)^3$
12. $(1 - 4m)^3$
13. $(3x - 4y)^3$
14. $(5m^2 + 2n^5)^3$
15. $(3x^3y - 2z^4)^3$
16. $(4x^2 + 2xy)^3$
17. $(3m^4 - 4m^3n)^3$
18. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$
19. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$
20. $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)^3$
21. $\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{3}y\right)^3$
22. $\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b\right)^3$
23. $\left(\frac{1}{3}x^4 + y\right)^3$
24. $\left(2x^{2a-3} - 3y^{4a+1}\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Multiplicaciones que se resuelven con la aplicación de productos notables

Se utiliza para resolver una multiplicación de polinomios, siempre que las características de los factores permitan aplicar las reglas de los productos notables. Se agrupan las expresiones y se desarrolla el producto notable que corresponda a las características de los mismos; con los factores resultantes se aplica el mismo procedimiento hasta obtener el resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla el siguiente producto: $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3)$.

**Solución**

Se eligen los factores $(x + 2)(x - 2)$, los que se resuelven como un producto de binomios conjugados:

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$

Entonces el producto inicial se representa como:

$$(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3) = (x^2 - 4)(x^2 + 3)$$

Por último, se aplica el producto de binomios con término común:

$$\begin{aligned}(x^2 - 4)(x^2 + 3) &= (x^2)^2 + (-4 + 3)(x^2) + (-4)(3)\\ &= x^4 - x^2 - 12\end{aligned}$$

Por tanto: $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 3) = x^4 - x^2 - 12$

2 Desarrolla el siguiente producto: $(x + 1)\ (x + 2)\ (x - 1)\ (x - 2)$.

**Solución**

De acuerdo con la elección de los factores es como se procede a aplicar el producto notable, en este caso reagruparemos los factores de la siguiente manera:

$$(x + 1)\ (x - 1)\ (x + 2)\ (x - 2)$$

Al desarrollar mediante binomios conjugados, se obtiene:

$$(x + 1)\ (x - 1) = x^2 - 1 \qquad (x + 2)\ (x - 2) = x^2 - 4$$

La expresión se transforma en:

$$(x + 1)\ (x - 1)\ (x + 2)\ (x - 2) = (x^2 - 1)\ (x^2 - 4)$$

Por último se aplican binomios con término común:

$$\begin{aligned}&= (x^2)^2 + (-1 - 4)x^2 + (-1)(-4)\\ &= x^4 - 5x^2 + 4\end{aligned}$$

Por tanto: $(x + 1)\ (x + 2)\ (x - 1)\ (x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$

3 Resuelve el siguiente producto: $(x + 3)^2(x - 3)^2$.

**Solución**

Se desarrollan los cuadrados de los binomios:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9\ ;\ \ (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Luego:

$$(x + 3)^2(x - 3)^2 = (x^2 + 6x + 9)(x^2 - 6x + 9) = (x^2 + 9 + 6x)\ (x^2 + 9 - 6x)$$

Al aplicar binomios conjugados se determina que:

$$\begin{aligned}(x^2 + 9 + 6x)(x^2 + 9 - 6x) = [(x^2 + 9)^2 - (6x)^2] &= (x^2)^2 + 2(x^2)\ (9) + (9)^2 - 36x^2\\ &= x^4 + 18x^2 + 81 - 36x^2\\ &= x^4 - 18x^2 + 81\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es: $x^4 - 18x^2 + 81$

# EJERCICIO 38

Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando productos notables:

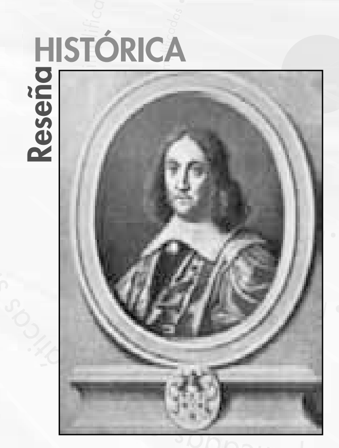
1. $(x-1)(x+1)(x^2+2)$
2. $(m+8)(m-8)(m+1)\,(m-1)$
3. $(3x-5)(3x+2)(9x^2-9x-10)$
4. $(5x-6)^2\,(5x+6)^2$
5. $(m+2)^3\,(m-2)^3$
6. $(-x-6)^2\,(x^2-12x+36)$
7. $(n^2-1)(n^2+7)(n^4-6n^2+7)$
8. $(x^2+y)^2\,(x^2-y)^2\,(x^4+y^2)^2$
9. $(2m+6)(2m-8)(4m^2+3m+1)$
10. $(9-6x^3)(6x^3+9)(81+36x^6)$
11. $(x-4)(x+5)(x+4)(x-5)$
12. $\left(\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{5}y^5\right)^2\left(\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{5}y^5\right)^2$
13. $[(2x-y)(2x+y)(4x^2+y^2)]^2$
14. $(m^2-m-1)(m^2+m+1)$
15. $(x-y)\,(x^2+y^2)\,(x+y)$
16. $(m-2)(m^2-4)^2\,(m+2)$
17. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4-y^4)$
18. $(x+1)(x-3)(x-1)(x+3)$
19. $(m^4+5)(m-2)(m^2+4)(m+2)$
20. $[(n+2)(n-2)(n^2+4)]^3$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 4

## FACTORIZACIÓN

**Reseña HISTÓRICA**



*Pierre de Fermat*

Matemático francés quien nació en Beaumont de Lomagne y falleció en Toulouse. Fermat participó con Pascal en la creación de la teoría matemática de la probabilidad; Descartes y Fermat inventaron la geometría analítica, cada uno por su lado. Si todas estas aportaciones de primera categoría no son suficientes para ponerlo a la cabeza de sus contemporáneos en la matemática pura, podemos preguntarnos: ¿quién hizo más? Fermat era creador innato. Era también, en el estricto sentido de la palabra, en lo que se refiere a su ciencia de la matemática, un aficionado. Sin duda es uno de los más grandes aficionados en la historia de la ciencia, y quizá "sea el primero". La vida de Fermat fue tranquila y laboriosa, pues tuvo una extraordinaria suerte.

Pierre de Fermat
(1601-1665 d.C.)

## Definición

Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

## Factor común

Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^6 - x^5 + x^2$.

**Solución**

Para encontrar el factor común se toma la letra que se repite y de menor exponente $\left(x^2\right)$, después cada uno de los términos de la expresión algebraica se divide entre el factor común:

$$\frac{x^6}{x^2} = x^4 \qquad -\frac{x^5}{x^2} = -x^3 \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Los resultados se expresan de la siguiente manera:

$$x^6 - x^5 + x^2 = x^2\left(x^4 - x^3 + 1\right)$$

2 Factoriza: $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$.

**Solución**

Se busca el factor común de los coeficientes, que es el máximo común divisor de ellos y también se busca el factor común de las literales:

MCD (16, 12, 20) = 4 Factor común literal $= a^3b^2$

Se realizan las divisiones término a término y el resultado de la factorización es:

$$16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2\left(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8\right)$$

3 Obtén la factorización de la expresión: $18x^2 - 12x + 54$.

**Solución**

El máximo común divisor de los coeficientes es 6 y no existe un factor común literal, por tanto, la expresión tiene sólo un factor común numérico y se expresa como:

$$18x^2 - 12x + 54 = 6\left(3x^2 - 2x + 9\right)$$

4 Factoriza: $(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2$.

**Solución**

En esta expresión el factor común está compuesto por binomios, por consiguiente, se toma de cada uno de ellos el de menor exponente y se realiza la factorización de la siguiente manera:

$$(2a-3b)^2(5a-7b)^3 - (2a-3b)^3(5a-7b)^2 = (2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[(5a-7b)-(2a-3b)\right]$$

Se reducen los términos semejantes del último factor:

$$= (2a-3b)^2(5a-7b)^2[5a-7b-2a+3b]$$
$$= (2a-3b)^2(5a-7b)^2[3a-4b]$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(2a-3b)^2(5a-7b)^2[3a-4b]$

## EJERCICIO 39

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $a^2 + a$
2. $a^3b^2 - 2a^3b$
3. $a^4 + a^3 - a^2$
4. $18x^5 + 30x^4$
5. $48x^2 - 12x^3 - 24x^4$
6. $25b^2 + 35b^4 - 45b^5$
7. $11ax - 121a^2x + 33a^3$
8. $9a^5b - 12\,a^2b^3 + 15ab^2 - 18a^3b^4$
9. $9x^2 + 6x + 3$
10. $4x^4 - 8x^3 + 12x^2$
11. $6x^2 - 6xy - 6x$
12. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
13. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
14. $55m^2n^3x + 110m^2n^3x^2 - 220m^2y^3$
15. $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2$
16. $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$
17. $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n + 48m^5n^4$
18. $3a^2b + 6a^3b^2 - 5a^4b^3 + 8a^5b^4 + 4a^6b^5$
19. $16x^3y^2 - 8x^4y - 24x^2y - 40x^2y^3$
20. $100a^2b^3c - 150ab^2c^2 + 50ab^3c^3 - 200abc^2$
21. $93a^3x^2y - 62a^2x^3y^2 - 124a^2x$
22. $6x(3x-1)^2 + 2x^2(1-3x)^2$
23. $9(x+1) - 3(x+1)^2$
24. $x^2(x+2) - x(x+2)$
25. $4x^2(2x-5)^2 + 8x^2(2x-5)$
26. $(2x-1)(x+4) - (2x-1)(3x+1)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Factor común por agrupación de términos

Se agrupan los términos que tengan algún factor en común, de tal modo que la expresión restante pueda factorizarse como se muestra en los siguientes ejemplos:

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Factoriza: $am + bm + a^2 + ab$.

**Solución**

Se agrupan los términos y de los primeros se factoriza "$m$" y de los segundos "$a$".

$$am + bm + a^2 + ab = (am + bm) + (a^2 + ab) = m(a+b) + a(a+b)$$

La última expresión se vuelve a factorizar tomando como factor común el binomio $a + b$ y se obtiene como resultado:

$$= (a+b)(m+a)$$

2 ¿Cuál es el resultado de factorizar $6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab$?

**Solución**

Se agrupan los términos y se buscan los respectivos factores comunes de cada uno para poder factorizarlos y obtener como resultado:

$$6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab = (6ax + 3a^2) + (-4bx - 2ab) = 3a(2x + a) - 2b(2x + a)$$
$$= (2x + a)(3a - 2b)$$

3 Factoriza: $6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b$.

**Solución**

Se repiten los mismos pasos que en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b = (6a^2x + 4ab + 2a) + (-3abx - 2b^2 - b)$$
$$= 2a(3ax + 2b + 1) - b(3ax + 2b + 1)$$
$$= (3ax + 2b + 1)(2a - b)$$

## EJERCICIO 40

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $m^2 + mn + mx + nx$
2. $3x^3 - 1 - x^2 + 3x$
3. $ax - bx + ay - by$
4. $2y^3 - 6ay^2 - y + 3a$
5. $am - 2bm - 3an + 6bn$
6. $4a^2x - 5a^2y + 15by - 12bx$
7. $m^2p^2 - 3np^2 + m^2z^2 - 3nz^2$
8. $5m^2n + 5mp^2 + n^2p^2 + mn^3$
9. $3a - 2b - 2by^4 + 3ay^4$
10. $2mx^4 + 3nx^4 + 10m + 15n$
11. $bm^2 + by^2 - cm^2 - cy^2$
12. $x^3 - 15 - 5x + 3x^2$
13. $3bz - by - 9mz + 3my$
14. $a^3 + a^2 + a + 1$
15. $1 + 2a - 3a^2 - 6a^3$
16. $3x^3 - 7x^2 + 3x - 7$
17. $4a - 1 - 4ab + b$
18. $18m^3 + 12m^2 - 15m - 10$
19. $x^2yz - xz^2m + xy^2m - yzm^2$
20. $p^3t^3 + mn^2p^2t + m^2npt^2 + m^3n^3$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y su factorización es:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Lo que da como resultado el producto de binomios conjugados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $x^2 - 9$.

**Solución**

Se extrae la raíz cuadrada del primer y segundo términos; los resultados se acomodan como se indica en la fórmula.

$$\sqrt{x^2} = x \quad ; \quad \sqrt{9} = 3$$

Finalmente, la factorización es: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

2 Factoriza: $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$.

**Solución**

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$$

3 ¿Cuál es el resultado de factorizar $x^{2a-4} - y^{6b}$?

**Solución**

Se expresan los exponentes de la siguiente manera:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = x^{2(a-2)} - y^{2(3b)}$$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos términos:

$$\sqrt{x^{2(a-2)}} = x^{a-2} \qquad \sqrt{y^{2(3b)}} = y^{3b}$$

Finalmente, se obtiene:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = \left(x^{a-2} + y^{3b}\right)\left(x^{a-2} - y^{3b}\right)$$

4 Factoriza la expresión: $(2x + 3)^2 - (x-1)^2$.

**Solución**

Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los términos:

$$\sqrt{(2x + 3)^2} = 2x+3 \qquad \sqrt{(x-1)^2} = x-1$$

Se sustituyen las raíces obtenidas en la fórmula:

$$(2x + 3)^2 - (x-1)^2 = [(2x + 3)+(x-1)][(2x + 3)-(x-1)]$$

Se reducen los términos semejantes de cada uno de los factores y se obtiene como resultado:

$$= [2x + 3 + x - 1][2x + 3 - x + 1]$$
$$= [3x + 2][x + 4]$$

## EJERCICIO 41

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 1$
2. $x^2 - 49$
3. $81 - x^2$
4. $16x^2 - 9$
5. $a^4 - b^4$
6. $x^4 - 64$
7. $100 - 16x^2$
8. $36x^2 - 1$
9. $4 - 25x^2$
10. $4a^4 - 9b^2c^2$
11. $x^6 - 36$
12. $16a^4b^6 - c^6$
13. $x^2 - \frac{1}{4}$
14. $x^2 - \frac{4}{81}$
15. $x^2 - \frac{16}{49}$
16. $x^4 - \frac{1}{16}$
17. $49x^2 - \frac{16}{25}$
18. $x^{6a} - y^{4b}$
19. $a^{2x+6} - 9b^{6y}$
20. $m^{4a+8} - 25$
21. $1 - x^{2a}$
22. $-n^{8x+2y} + m^{6x-4y}$
23. $16x^{6a} - 49y^{2b}$
24. $(x-1)^2 - (y-3)^2$
25. $(2x+1)^2 - (y+5)^2$
26. $(x-1)^2 - 16y^2$
27. $4(3x-2)^2 - 9(x-1)^2$
28. $-(x+2y)^2 + 16(x+y)^2$
29. $25(4x-3)^2 - 9(2x+1)^2$
30. $49x^4 - 4(x^2 - 3x)^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Trinomio cuadrado perfecto

Se conoce así a toda expresión de la forma:

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

### Pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto

1. Para factorizar esta expresión, se debe verificar que los términos se encuentren ordenados con respecto a los exponentes de mayor a menor o viceversa.
2. Se extraen las raíces cuadradas de los términos extremos (primer y último términos):

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{b^2} = b$$

3. Para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces:

$$\text{Comprobación } = 2ab$$

4. Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces éste es cuadrado perfecto y su factorización es igual al cuadrado de una suma o diferencia de las raíces cuadradas de los términos extremos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $x^2 + 6x + 9$.

**Solución**

Se obtienen las raíces cuadradas y se comprueba que el trinomio es cuadrado perfecto:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \text{Comprobación} = 2(x)(3) = 6x$$

Al tomar el signo del segundo término, la factorización es:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

2 Factoriza: $4x^2+9y^2-12xy$.

**Solución**

Se ordenan los términos de la siguiente manera:

$$4x^2+9y^2-12xy=4x^2-12xy+9y^2$$

Se extraen las raíces de los términos extremos y se verifica que el trinomio es cuadrado perfecto:

$\sqrt{4x^2}=2x$ $\quad$ $\sqrt{9y^2}=3y$ $\quad$ Comprobación $=2(2x)(3y)=12xy$

Finalmente, el resultado de la factorización es:

$$4x^2+9y^2-12xy=4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$$

3 Factoriza la siguiente expresión: $(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}$.

**Solución**

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba el doble producto:

$\sqrt{(m+n)^2}=m+n$ $\quad$ $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ $\quad$ Comprobación $=2(m+n)\left(\frac{1}{2}\right)=m+n$

Por tanto, la factorización de la expresión propuesta es:

$$(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}=\left((m+n)+\frac{1}{2}\right)^2=\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2$$

4 Factoriza la expresión: $3a-2\sqrt{15ab}+5b$.

**Solución**

Las raíces de los extremos y la comprobación de que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto es:

$\sqrt{3a}$ y $\sqrt{5b}$ $\quad$ Comprobación $=2\left(\sqrt{3a}\right)\left(\sqrt{5b}\right)=2\sqrt{(3a)(5b)}=2\sqrt{15ab}$

Por tanto:

$$3a-2\sqrt{15ab}+5b=\left(\sqrt{3a}-\sqrt{5b}\right)^2$$

5 Factoriza $x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{8}}+4$.

**Solución**

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba:

$\sqrt{x^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{(4)(2)}}=x^{\frac{1}{8}}$ $\quad$ $\sqrt{4}=2$ $\quad$ Comprobación $=2\left(x^{\frac{1}{8}}\right)(2)=4x^{\frac{1}{8}}$

Por consiguiente, el trinomio es cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{8}}+4=\left(x^{\frac{1}{8}}+2\right)^2$$

# EJERCICIO 42

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $a^2 + 8a + 16$
2. $m^2 - 10m + 25$
3. $n^2 - 8n + 16$
4. $x^2 - 6x + 9$
5. $x^2 + 12x + 36$
6. $9a^2 - 30a + 25$
7. $36 + 121c^2 - 132c$
8. $16a^2 + 24ab + 9b^2$
9. $4a^2 - 20ab + 25b^2$
10. $9a^2 + 6ab + b^2$
11. $4a^2 - 12ab + 9b^2$
12. $a^2 - 24x^2a^3 + 144x^4a^4$
13. $100a^4 - 60a^2b + 9b^2$
14. $a^8 + 36b^2c^2 + 12a^4bc$
15. $121 + 198a^6 + 81a^{12}$
16. $49x^6 - 70ax^3y^2 + 25a^2y^4$
17. $400a^{10} + 40a^5 + 1$
18. $x^8 + 18x^4 + 81$
19. $\frac{y^2}{4} - yz + z^2$
20. $1 + \frac{2}{3}p + \frac{p^2}{9}$
21. $x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$
22. $\frac{1}{25} + \frac{25}{36}b^4 - \frac{b^2}{3}$
23. $16m^6 - 2m^3n^2 + \frac{n^4}{16}$
24. $9(a + x)^2 - 12(a + x) + 4$
25. $4(1 + m)^2 - 4(1 + m)(n - 1) + (n - 1)^2$
26. $9(a - b)^2 + 12(a - b)(a + b) + 4(a + b)^2$
27. $(m + n)^2 - 2(m + n)(m - n) + (m - n)^2$
28. $4a^2 - 4a(b - a) + (b - a)^2$
29. $(m + a)^2 - 2(m + a)(a + b) + (a + b)^2$
30. $x + 2\sqrt{2xy} + 2y$
31. $ax + 4\sqrt{ax} + 4$
32. $a^3 - 10a^{\frac{3}{2}} + 25$
33. $x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 9$
34. $16x^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{1}{4}} + 1$
35. $m^{\frac{2}{3}} + 4m^{\frac{1}{3}} + 4$
36. $\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Esta expresión resulta del producto de binomios con término común. Para factorizarla se realizan los pasos aplicados en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $x^2 + 11x + 24$.

**Solución**

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

$$x^2 + 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$$

Se coloca el signo del segundo término $(+11x)$ en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(+)(+) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Al ser los signos de los factores iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término $(24)$ y cuya suma sea igual a 11; estos números son 8 y 3, que se colocan en el primer factor, el mayor, y en el segundo factor, el menor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

Finalmente, la factorización es: $(x + 8)(x + 3)$

2 Factoriza la expresión: $m^2 - 13m + 30$.

**Solución**

La raíz cuadrada del término cuadrático es "$m$"; el primer factor va acompañado del signo del segundo término $(-13m)$ y el segundo factor va con el signo que resulta del producto de los signos del segundo y tercer términos $(-)(+) = -$

$$m^2 - 13m + 30 = (m - \quad)(m - \quad)$$

Se buscan dos cantidades que multiplicadas den 30 y sumadas 13, estas cantidades son 10 y 3, se acomodan de la siguiente forma y el resultado de la factorización es:

$$m^2 - 13m + 30 = (m - 10)(m - 3)$$

Cuando los signos de los factores son iguales (positivos o negativos), los números buscados se suman (ejemplos 1 y 2), pero si los signos de los factores son diferentes, entonces los números buscados se restan (ejemplos siguientes).

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^2 - 18 - 7x$.

**Solución**

Se ordenan los términos en forma descendente con respecto a los exponentes y se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$x^2 - 7x - 18 = (x \quad)(x \quad)$$

En el primer factor se coloca el signo del término lineal (– 7*x*) y en el segundo se coloca el signo que resulta de multiplicar los signos del término lineal (– 7*x*) y el independiente (– 18)

$$x^2-7x-18=(x-\ \ )(x+\ \ )$$

Se buscan dos números cuyo producto sea igual a 18 y cuya resta sea 7. En este caso los números que cumplen esta condición son 9 y 2; es importante señalar que el número mayor va en el primer factor y el menor en el segundo.

$$x^2-7x-18=(x-9)(x+2)$$

2 Factoriza la expresión: $x^4-x^2-6$.

**Solución**

Se extrae la raíz cuadrada del primer término, se escriben los signos y se buscan dos números que al multiplicarse den 6 y al restarse 1 para que la expresión factorizada sea:

$$x^4-x^2-6=(x^2-3)(x^2+2)$$

3 Factoriza la expresión: $x^2+xy-20y^2$.

**Solución**

Después de extraer la raíz cuadrada, acomodar los signos y buscar los números, la factorización es:

$$x^2+xy-20y^2=(x+5y)(x-4y)$$

4 Factoriza la expresión: $21-4x-x^2$.

**Solución**

Se ordena el trinomio y se factoriza el signo del término cuadrático:

$$21-4x-x^2=-x^2-4x+21=-(x^2+4x-21)$$

Al factorizar la última expresión:

$$-(x^2+4x-21)=-(x+7)(x-3)$$

Se multiplica el segundo factor por el signo negativo y se ordena para que el resultado sea:

$$-(x+7)(x-3)=(x+7)(-x+3)=(x+7)(3-x)$$

5 Factoriza la expresión: $5+4a^{3n}-a^{6n}$.

**Solución**

Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo:

$$5+4a^{3n}-a^{6n}=-a^{6n}+4a^{3n}+5=-(a^{6n}-4a^{3n}-5)$$

La expresión encerrada en el paréntesis se factoriza al igual que las anteriores:

$$-(a^{6n}-4a^{3n}-5)=-(a^{3n}-5)(a^{3n}+1)$$

Se multiplica el signo por los términos del primer factor y el resultado de la factorización es:

$$-\left(a^{3n}-5\right)\left(a^{3n}+1\right)=\left(-a^{3n}+5\right)\left(a^{3n}+1\right)=\left(5-a^{3n}\right)\left(a^{3n}+1\right)$$

6 Factoriza: $(2x+3)^2-3(2x+3)-28$.

**Solución**

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se realizan los procedimientos descritos en los ejemplos anteriores para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}(2x+3)^2-3(2x+3)-28&=\left((2x+3)-7\right)\left((2x+3)+4\right)\\&=(2x+3-7)(2x+3+4)=(2x-4)(2x+7)\\&=2(x-2)(2x+7)\end{aligned}$$

## EJERCICIO 43

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^2+3x+2$
2. $m^2-11m+30$
3. $n^2-7n+12$
4. $y^2-15y+56$
5. $x^2+7x+6$
6. $x^2+7x+12$
7. $a^2+10a+24$
8. $b^2-7b+10$
9. $m^2-9m+20$
10. $y^2+4y+3$
11. $x^2-5x+4$
12. $n^2+6n+8$
13. $a^2-16a-36$
14. $y^2+y-30$
15. $x^2-18-7x$
16. $x^2-18xy+80y^2$
17. $a^2-5ab-50b^2$
18. $m^2-7mn-30n^2$
19. $x^2+xy-56y^2$
20. $m^4+3m^2-4$
21. $y^4-6y^2+8$
22. $n^4-20n^2+64$
23. $a^4-37a^2+36$
24. $x^4-x^2-90$
25. $a^2b^2+ab-12$
26. $(5y)^2+13(5y)+42$
27. $y^6-5y^3-14$
28. $m^2-4mn-21n^2$
29. $5+4b-b^2$
30. $z^{10}+z^5-20$
31. $y^4+7xy^2-60x^2$
32. $(a-b)^2+5(a-b)-24$
33. $x^4y^4-2x^2y^2-99$
34. $m^4n^4+m^2n^2-132$
35. $n^2-34n+288$
36. $y^2+3y-550$
37. $c^2-22c-968$
38. $a^2+33a+252$
39. $x^2+44x+363$
40. $t^2-99t+2\,430$
41. $24-5x-x^2$
42. $12+x-x^2$
43. $40-3x-x^2$
44. $42-x^2+x$
45. $16+6(3x)-(3x)^2$
46. $9-8(2x)-(2x)^2$
47. $77-4(8x)-(8x)^2$
48. $143+2(5x)-(5x)^2$
49. $x^{2a}-13x^a+36$
50. $b^{4x}+b^{2x}-72$
51. $y^{6a}+65y^{3a}+64$
52. $2-x^{4a}-x^{8a}$
53. $45+4x^{a+2}-x^{2(a+2)}$
54. $(x+1)^2-12(x+1)+32$
55. $(2x-7)^2-3(2x-7)-88$
56. $(5x+y)^2+(5x+y)-42$
57. $(6a+5)^2-15(6a+5)+50$
58. $22-9(x+3y)-(x+3y)^2$
59. $24+5(1-4x)-(1-4x)^2$
60. $10y^2-3y(x-2y)-(x-2y)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $6x^2 - 7x - 3$.

**Solución**

Se ordenan los términos según la forma $ax^2 + bx + c$, se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

$$\frac{6\left(6x^2 - 7x - 3\right)}{6} = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

La expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la fracción:

$$\frac{3(2x - 3)2(3x + 1)}{6} = \frac{6(2x - 3)(3x + 1)}{6} = (2x - 3)(3x + 1)$$

Finalmente, la factorización de $6x^2 - 7x - 3$ es $(2x - 3)(3x + 1)$

2 Factoriza: $3x^2 - 5x - 2$.

**Solución**

Se multiplica y divide la expresión por 3, para que se transforme el numerador en una expresión de la forma: $x^2 + bx + c$

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{3\left(3x^2 - 5x - 2\right)}{3} = \frac{9x^2 - 5(3x) - 6}{3} = \frac{(3x)^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

Se factoriza la expresión y se simplifica para obtener como resultado de la factorización:

$$= \frac{(3x - 6)(3x + 1)}{3} = \frac{3(x - 2)(3x + 1)}{3} = (x - 2)(3x + 1)$$

Por consiguiente: $3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$

3 Factoriza la siguiente expresión: $6a^2x^2 + 5ax - 21$.

**Solución**

Se aplican los pasos descritos en los ejemplos anteriores y se obtiene:

$$6a^2x^2 + 5ax - 21 = \frac{6\left(6a^2x^2 + 5ax - 21\right)}{6} = \frac{36a^2x^2 + 5(6ax) - 126}{6} = \frac{(6ax)^2 + 5(6ax) - 126}{6}$$

$$= \frac{(6ax + 14)(6ax - 9)}{6} = \frac{2(3ax + 7)3(2ax - 3)}{6} = \frac{6(3ax + 7)(2ax - 3)}{6} = (3ax + 7)(2ax - 3)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $6a^2x^2 + 5ax - 21 = (3ax + 7)(2ax - 3)$

4 Factoriza la siguiente expresión: $5 + 11x - 12x^2$.

**Solución**

Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo:

$$5 + 11x - 12x^2 = -12x^2 + 11x + 5 = -\left(12x^2 - 11x - 5\right)$$

Se realiza la factorización y se obtiene:

$$=-\frac{12\left(12x^2-11x-5\right)}{12}=-\frac{144x^2-11(12x)-60}{12}=-\frac{(12x)^2-11(12x)-60}{12}$$

$$=-\frac{(12x-15)(12x+4)}{12}=-\frac{3(4x-5)4(3x+1)}{12}=-\frac{12(4x-5)(3x+1)}{12}=-(4x-5)(3x+1)$$

Se multiplica el signo por el primer factor y se ordenan los términos:

$$-(4x-5)(3x+1)=(-4x+5)(3x+1)=(5-4x)(3x+1)$$

Finalmente, el resultado de la factorización es: $(5-4x)(3x+1)$

## Por agrupación de términos

**EJEMPLOS**

1 Factoriza el trinomio: $6x^2+13x+5$.

**Solución**

Se multiplica el coeficiente del primer término por el término independiente: $(6)(5)=30$

Se buscan dos números que multiplicados den 30 y sumados 13, en este caso los números son 10 y 3, por tanto, el segundo término del trinomio se expresa como: $13x=10x+3x$ y se procede a factorizar agrupando términos:

$$6x^2+13x+5=6x^2+10x+3x+5=2x(3x+5)+1(3x+5)=(3x+5)(2x+1)$$

Finalmente, la factorización es: $6x^2+13x+5=(3x+5)(2x+1)$

2 Factoriza: $8x^4-19x^2+6$.

**Solución**

Se multiplican los coeficientes de los extremos de la expresión: $(8)(6)=48$

Los números que multiplicados dan 48 y sumados $-19$ son $-16$ y $-3$, por consiguiente, se expresa como: $-19x^2=-16x^2-3x^2$ y se procede a factorizar:

$$8x^4-19x^2+6=8x^4-16x^2-3x^2+6=\left(8x^4-16x^2\right)+\left(-3x^2+6\right)$$
$$=8x^2\left(x^2-2\right)-3\left(x^2-2\right)=\left(x^2-2\right)\left(8x^2-3\right)$$

Finalmente: $8x^4-19x^2+6=\left(x^2-2\right)\left(8x^2-3\right)$

3 Factoriza la expresión: $15x^2-2xy-8y^2$.

**Solución**

Se multiplican los coeficientes de los extremos del trinomio: $(15)(-8)=-120$

Se descompone $-120$ en dos factores, de tal manera que restados den como resultado el coeficiente del término central $-2$, estos números son: $-12$ y $10$

La expresión se descompone de la siguiente manera:

$$15x^2-2xy-8y^2=15x^2-12xy+10xy-8y^2=3x(5x-4y)+2y(5x-4y)$$
$$=(5x-4y)(3x+2y)$$

Se concluye que: $15x^2-2xy-8y^2=(5x-4y)(3x+2y)$

# EJERCICIO 44

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $5m^2 + 13m - 6$
2. $3a^2 - 5a - 2$
3. $6y^2 + 7y + 2$
4. $2x^2 + 3x - 2$
5. $4n^2 + 15n + 9$
6. $20x^2 + x - 1$
7. $7a^2 - 44a - 35$
8. $2y^2 + 5y + 2$
9. $20x^2 + 13x + 2$
10. $15m^2 - 8m - 12$
11. $44z + 20z^2 - 15$
12. $2b^2 + 29b + 90$
13. $6y^4 + 5y^2 - 6$
14. $14m^4 - 45m^2 - 14$
15. $6a^2b^2 + 5ab - 25$
16. $15y^2 - by - 2b^2$
17. $6n^2 - 13mn - 15m^2$
18. $30 + 13x - 3x^2$
19. $15 + 2b^2 - 8b^4$
20. $30x^2 + 17xy - 21y^2$
21. $10a^8 + 29a^4 + 10$
22. $6a^2 - 43ab - 15b^2$
23. $6 - 5x^2 - 6x^4$
24. $30x^{10} - 91x^5 - 30$
25. $6m^2 - 11mn + 4n^2$
26. $6a^2x^2 - 11axy - 35y^2$
27. $24a^2 + 5ab - 14b^2$
28. $4x^2y^2 + 3xy - 10$
29. $5a^4b^2 - 13a^2bc - 6c^2$
30. $2m^2 + 9mn - 110n^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Casos especiales

Estos trinomios también son de la forma $ax^2 + bx + c$; sin embargo, algunos coeficientes son fraccionarios o tienen raíz cuadrada.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$.

**Solución**

En este caso se incluyen fracciones, entonces los extremos deben expresarse como una fracción que contenga el mismo denominador, por tanto:

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{2(12)}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$$

Se multiplican los coeficientes numeradores de los extremos del trinomio: (24)(1) = 24

Se buscan dos números que multiplicados den 24 y sumados 11, en este caso los números son 3 y 8, por tanto el trinomio se expresa como:

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{3}{12}p + \frac{8}{12}p + \frac{1}{12} = 2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12}$$

Se procede a realizar la factorización del polinomio resultante:

$$2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12} = p\left(2p + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(2p + \frac{1}{4}\right) = \left(2p + \frac{1}{4}\right)\left(p + \frac{1}{3}\right)$$

Entonces, se concluye que: $2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \left(2p + \frac{1}{4}\right)\left(p + \frac{1}{3}\right)$

2 Factoriza la expresión: $6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10}$.

**Solución**

Se convierten los coeficientes del trinomio en una fracción con denominador común:

$$6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10} = \frac{6(20)}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3(2)}{10(2)} = \frac{120}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{6}{20}$$

Se multiplican los numeradores de los extremos: (120)(6) = 720, entonces se buscan dos números que multiplicados den 720 y restados 29, los cuales son: 45 y 16, por tanto, la expresión se representa como:

$$\frac{120}{20}x^2-\frac{29}{20}x-\frac{6}{20}=\frac{120}{20}x^2-\frac{45}{20}x+\frac{16}{20}x-\frac{6}{20}=6x^2-\frac{9}{4}x+\frac{4}{5}x-\frac{6}{20}=$$

Al factorizar se obtiene como resultado:

$$6x^2-\frac{9}{4}x+\frac{4}{5}x-\frac{6}{20}=3x\left(2x-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{5}\left(2x-\frac{3}{4}\right)=\left(2x-\frac{3}{4}\right)\left(3x+\frac{2}{5}\right)$$

3 Factoriza la expresión $3x+2\sqrt{x}-8$.

**Solución**

Se multiplican los coeficientes de los extremos: (3)(8) = 24

Se buscan dos números que al multiplicarse den 24 y restados 2, en este caso los números son 6 y 4, entonces:

$$3x+2\sqrt{x}-8=3x+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8$$

Se expresa $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ y se realiza la factorización:

$$3x+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8=3\left(\sqrt{x}\right)^2+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8=3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-4\left(\sqrt{x}+2\right)$$
$$=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)$$

Por consiguiente, el resultado de la factorización es: $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)$

## EJERCICIO **45**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $3x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{8}$
2. $2x^2+\frac{7}{15}x-\frac{2}{15}$
3. $6x^2+\frac{15}{4}x+\frac{3}{8}$
4. $5m^2+\frac{23}{6}m+\frac{1}{3}$
5. $4m^2+\frac{17}{15}m-\frac{1}{15}$
6. $\frac{1}{6}a^2+\frac{17}{72}a+\frac{1}{12}$
7. $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}xy-\frac{1}{8}y^2$
8. $\frac{3}{25}x^2-\frac{3}{20}x-\frac{1}{12}$
9. $\frac{1}{24}x^2-\frac{13}{72}xy+\frac{1}{6}y^2$
10. $2x+13\sqrt{x}+15$
11. $12x-5\sqrt{x}-2$
12. $15x-23\sqrt{x}-28$
13. $2x-5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-3y$
14. $6x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-40$
15. $3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}-2$
16. $5(x+y)-6\sqrt{x+y}-8$
17. $12x^{\frac{4}{3}}-17x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}-40y$
18. $8x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-15y^{\frac{4}{3}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma o diferencia de cubos

Dadas las expresiones de la forma: $a^3+b^3$ y $a^3-b^3$, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $27x^3+8$.

**Solución**

Se extrae la raíz cúbica de ambos términos:

$$\sqrt[3]{27x^3}=3x \qquad \sqrt[3]{8}=2$$

Se sustituye en su fórmula respectiva, se desarrollan los exponentes y se obtiene:

$$27x^3+8=(3x+2)\left((3x)^2-(3x)(2)+(2)^2\right)$$
$$=(3x+2)(9x^2-6x+4)$$

2 Factoriza: $m^6-216$.

**Solución**

Se extraen las raíces cúbicas de los términos y se sustituyen en la fórmula para obtener:

$$m^6-216=(m^2-6)\left((m^2)^2+(m^2)(6)+(6)^2\right)$$
$$=(m^2-6)(m^4+6m^2+36)$$

3 Factoriza: $x^{15}+64y^3$.

**Solución**

Se realiza el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores para obtener:

$$x^{15}+64y^3=(x^5+4y)\left((x^5)^2-(x^5)(4y)+(4y)^2\right)$$
$$=(x^5+4y)(x^{10}-4x^5y+16y^2)$$

4 Factoriza la siguiente expresión: $(x+y)^3+(x-y)^3$.

**Solución**

Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos y se sustituyen en la respectiva fórmula:

$$\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y \qquad \sqrt[3]{(x-y)^3}=x-y$$

Al aplicar la factorización de la suma de cubos, desarrollar y simplificar se obtiene:

$$(x+y)^3+(x-y)^3=\left((x+y)+(x-y)\right)\left((x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right)$$
$$=(x+y+x-y)(x^2+2xy+y^2-x^2+y^2+x^2-2xy+y^2)$$
$$=2x(x^2+3y^2)$$

5 Factoriza la siguiente expresión: $x-y$.

**Solución**

Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos:

$$\sqrt[3]{x} \text{ y } \sqrt[3]{y}$$

Se aplica la factorización para una diferencia de cubos y el resultado es:

$$x-y=\left[\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right]\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{y}\right)+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right]$$
$$=\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$$

6 Factoriza la expresión: $8a^{\frac{3}{2}}+27b^{\frac{6}{5}}$.

**Solución**

Las raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{8a^{\frac{3}{2}}}=2a^{\frac{3}{(2)(3)}}=2a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{27b^{\frac{6}{5}}}=3b^{\frac{6}{(5)(3)}}=3b^{\frac{2}{5}}$$

Se sustituyen las raíces en la fórmula y la factorización es:

$$8a^{\frac{3}{2}}+27b^{\frac{6}{5}}=\left[2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{5}}\right)+\left(3b^{\frac{2}{5}}\right)^2\right]$$
$$=\left[2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[4a-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}}+9b^{\frac{4}{5}}\right]$$

## EJERCICIO 46

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $8x^3-1$
2. $x^3+27$
3. $8x^3+y^3$
4. $27a^3-b^3$
5. $8a^3+27b^6$
6. $64a^3-729$
7. $512-27a^9$
8. $x^6-8y^{12}$
9. $1-216m^3$
10. $a^3-125$
11. $27m^3+64n^9$
12. $343x^3-512y^6$
13. $a^6+125b^{12}$
14. $8x^6+729$
15. $27m^6+343n^9$
16. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$
17. $a^{\frac{3}{4}}-8b^{\frac{3}{4}}$
18. $x^{\frac{3}{2}}+125y^{\frac{9}{2}}$
19. $x^{3a+3}-y^{6a}$
20. $(x+2y)^3-(2x-y)^3$
21. $(x-y)^3+8y^3$
22. $27m^3-(3m+2n)^3$
23. $(a+b)^3-(2a+3b)^3$
24. $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^3$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma o diferencia de potencias impares iguales

Dadas las expresiones de la forma $a^n + b^n$ o $a^n - b^n$ siendo $n$ un número impar, su factorización es de la siguiente forma:

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Factoriza la expresión: $x^7 + y^7$.

**Solución**

Se extrae la raíz séptima de ambos términos:

$$\sqrt[7]{x^7} = x \qquad \sqrt[7]{y^7} = y$$

Se sustituye en su fórmula y se obtiene como resultado:

$$x^7 + y^7 = (x+y)\left(x^{7-1} - x^{7-2}y + x^{7-3}y^2 - x^{7-4}y^3 + x^{7-5}y^4 - x^{7-6}y^5 + y^6\right)$$

$$= (x+y)\left(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6\right)$$

2 Factoriza: $x^5 - 32$.

**Solución**

Se descompone 32 en sus factores primos y se aplica la fórmula:

$$x^5 - 32 = x^5 - 2^5 = (x-2)\left(x^{5-1} + x^{5-2}(2) + x^{5-3}(2)^2 + x^{5-4}(2)^3 + (2)^4\right)$$

$$= (x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$$

Finalmente, se tiene que: $x^5 - 32 = (x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$

## EJERCICIO **47**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^3 + 64y^3$
2. $a^7 - 128$
3. $243 - 32x^5$
4. $x^7 + 1$
5. $m^5 - n^5$
6. $x^7 - a^7b^7$
7. $1 - a^5$
8. $x^5y^5 + 3125$
9. $x^9 - 1$
10. $x^9 + 512$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Factorización que combina un trinomio cuadrado perfecto y una diferencia de cuadrados

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Factoriza: $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$.

**Solución**

La expresión $x^2 - 2xy + y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Por tanto:

$$x^2 - 2xy + y^2 - a^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - a^2 = (x - y)^2 - a^2$$

Al factorizar la diferencia de cuadrados se obtiene finalmente:

$$= (x - y)^2 - a^2 = (x - y + a)(x - y - a)$$

2 Factoriza la siguiente expresión: $16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2$.

**Solución**

Se agrupan los términos de la siguiente manera y se factoriza el signo negativo:

$$16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2 = 16a^2 + (- m^2 - 8mn - 16n^2)$$
$$= 16a^2 - (m^2 + 8mn + 16n^2)$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$= 16a^2 - (m + 4n)^2$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados y se obtiene finalmente:

$$= [4a + (m + 4n)][4a - (m + 4n)]$$
$$= (4a + m + 4n)(4a - m - 4n)$$

3 Factoriza: $a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6$.

**Solución**

Se agrupan los términos que forman trinomios cuadrados perfectos y posteriormente se factoriza la diferencia de cuadrados para que finalmente el resultado sea:

$$a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6 = (a^2 - 2ab + b^2) - (25m^{10} - 40m^5n^3 + 16n^6)$$
$$= (a - b)^2 - (5m^5 - 4n^3)^2$$
$$= [(a - b)+ (5m^5 - 4n^3)][(a - b) - (5m^5 - 4n^3)]$$
$$= (a - b + 5m^5 - 4n^3)(a - b - 5m^5 + 4n^3)$$

## EJERCICIO **48**

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $m^2 +2m + 1 - 4n^2$
2. $y^2 - 6y + 9 - z^2$
3. $x^2 - y^2 + 10y - 25$
4. $m^4 - n^6 - 6n^3 - 9$
5. $49m^4 - 25m^2 - 9n^2 + 30mn$
6. $m^2 - 6x - 9 - x^2 + 2am + a^2$
7. $1 - a^2 - 9n^2 - 6an$
8. $m^2 - n^2 + 4 + 4m - 1 - 2n$
9. $2by - y^2 + 1 - b^2$
10. $25p^2 -2m - m^2 -1$
11. $m^2 - 16 - n^2 + 36 + 12m - 8n$
12. $x^2 + 2xy + y^2 - 16a^2 - 24ab^5 -9b^{10}$
13. $100 - 60y + 9y^2 - m^2 + 2amp - a^2p^2$
14. $25b^2 + 10ab - 9n^2 + a^2 - 6mn - m^2$
15. $4m^2 - 9a^2 + 49n^2 - 30ab - 25b^2 - 28mn$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Factorización para completar el trinomio cuadrado perfecto

**Caso I trinomio de la forma $x^2 + bx + c$**

### Ejemplo

Factoriza la expresión: $x^2 - 3x - 10$.

#### Solución

Se toma el coeficiente del término lineal y se divide entre 2 y el resultado se eleva al cuadrado.

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Se suma y se resta $\frac{9}{4}$ al trinomio, se agrupan los términos y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto que resulta:

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 10 = \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados y se reducen términos semejantes:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right) = (x+2)(x-5)$$

Finalmente, la factorización queda como: $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$

**Caso II trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$**

### Ejemplo

Factoriza: $2x^2 + 5x + 2$.

#### Solución

Se factoriza el coeficiente del término cuadrático y se completa el trinomio para la expresión encerrada en el paréntesis:

$$2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1\right) = 2\left(\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16} + 1\right) = 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)$$

Se multiplican por 2 los términos del primer factor y se obtiene como resultado:

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2) = (2x+1)(x+2)$$

**Caso III por adición y sustracción**

### Ejemplo

Factoriza la expresión: $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4$.

#### Solución

El trinomio no es cuadrado perfecto, debido a que el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer términos, es:

$$2(2m^2)(3n^2) = 12m^2n^2$$

Ya que el segundo término es $3m^2n^2$, se le suma $9m^2n^2$ y se obtiene el término que se necesita para que el trinomio sea cuadrado perfecto, por consiguiente, se resta también $9m^2n^2$ para no alterar la expresión.

$$\begin{aligned} 4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 &= 4m^4 + 3m^2n^2 + 9m^2n^2 + 9n^4 - 9m^2n^2 \\ &= (4m^4 + 12m^2n^2 + 9n^4) - 9m^2n^2 \\ &= (2m^2 + 3n^2)^2 - 9m^2n^2 \\ &= (2m^2 + 3n^2 + 3mn)(2m^2 + 3n^2 - 3mn) \end{aligned}$$

Finalmente: $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 = (2m^2 + 3n^2 + 3mn)(2m^2 + 3n^2 - 3mn)$

## EJERCICIO 49

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 3x + 2$
2. $x^2 - x - 20$
3. $m^2 - 7m + 10$
4. $x^2 - 2x - 48$
5. $a^2 - 6a - 40$
6. $n^2 + 3n - 54$
7. $3x^2 + 10x + 8$
8. $6m^2 + 7m + 2$
9. $3a^2 - a - 4$
10. $6x^2 - x - 12$
11. $n^4 + n^2 + 1$
12. $a^4 - 6a^2 + 1$
13. $m^8 + 4m^4n^4 + 16n^8$
14. $x^4 - 45x^2 + 100$
15. $64a^4 + 76a^2 + 49$
16. $121 + 21a^2b^2 + a^4b^4$
17. $36m^4 - 109m^2n^2 + 49n^4$
18. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
19. $a^4 - 7a^2b^2 + 9b^4$
20. $4m^8 - 53m^4n^4 + 49n^8$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Expresiones algebraicas donde se utilizan dos o más casos

Existen polinomios que se deben factorizar dos o más veces con diferentes métodos; a continuación se ejemplifican algunos de estos polinomios:

**EJEMPLOS**

**1** Factoriza la expresión: $2x^3 + 6x^2 - 8x$.

**Solución**

Se obtiene el factor común:

$$2x^3 + 6x^2 - 8x = 2x(x^2 + 3x - 4)$$

Se factoriza el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y se obtiene:

$$= 2x\,(x + 4)(x - 1)$$

**2** Factoriza: $3m^4 - 243$.

**Solución**

Se factoriza 3 que es el factor común:

$$3m^4 - 243 = 3\,(m^4 - 81)$$

El binomio se factoriza con una diferencia de cuadrados:

$$= 3\,(m^2 - 9)\,(m^2 + 9)$$

La expresión $m^2 - 9$ se factoriza empleando nuevamente la diferencia de cuadrados y se obtiene finalmente:

$$= 3\,(m - 3)\,(m + 3)\,(m^2 + 9)$$

# EJERCICIO 50

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^3 - 3x^2 - 28x$
2. $3a^2 - 3a - 6$
3. $3m^3 - 3m$
4. $y^4 - 3y^2 - 4$
5. $m^3 - m^2 - m + 1$
6. $6ax^2 - ax - 2a$
7. $x^4 - x^3 + x^2 - x$
8. $8ax^2 - 2a$
9. $a^5 + a^3 - 2a$
10. $64 - m^6$
11. $x^4 - 25x^2 + 144$
12. $a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5$
13. $a^9 - ab^8$
14. $a(x^3 + 1) + 3ax(x + 1)$
15. $a^6 - 25a^3 - 54$
16. $a^4 - a^3 + a - 1$
17. $4m^2y^3 - 4m^2$
18. $3mnp^2 + 3mnp - 18mn$
19. $256 - a^4$
20. $a^8 - b^8$
21. $8x^4 + 6x^2 - 2$
22. $5mxy^3 + 10my^2 - 5mxy - 10m$
23. $a^6 - 729$
24. $x^7 - xy^6$
25. $a^2(a^2 - b^2) - (2a - 1)(a^2 - b^2)$
26. $4a^5 + 4a^3 + 4a$
27. $m^3 - 4m - m^2 + 4$
28. $y^5 - 40y^3 + 144y$
29. $m^5 - m$
30. $6m^2y - 9m^3 - my^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Descomposición en factores de un polinomio por división sintética

Dado el polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, su factorización es de la forma $(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots x_n$, se obtienen del cociente:

$$\text{Posibles factores del polinomio} = \frac{\text{factores de } a_n}{\text{factores de } a_0}$$

**EJEMPLOS**

1 Descompón por evaluación: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

**Solución**

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de $x^3$

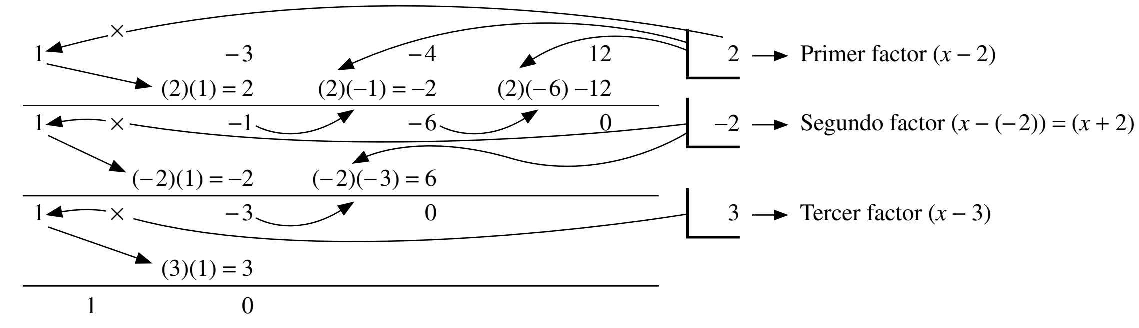
Divisores de $12 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ Divisores de $1 = \{\pm 1\}$

Se dividen los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente de $x^3$

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Éstos son los posibles valores para los cuales el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones indicadas, si la última operación es cero, entonces, se resta a la literal para obtener un factor, este procedimiento se repite las veces que sea necesario como se ilustra a continuación:




Los $x_1, x_2, x_3$... son los valores para los que el residuo de la división sintética es cero, y el número de factores es el número de valores que la cumplen.

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio propuesto es:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)$$

2 Factoriza el polinomio: $6x^3 + x^2 - 31x + 10$.

**Solución**

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de $x^3$

Divisores de 10 = { ± 1, ± 2, ± 5, ± 10} Divisores de 6 = { ± 1, ± 2, ± 3, ± 6}

Posibles factores del polinomio: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{6}, \pm\frac{10}{3}\right\}$

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones siguientes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | –31 | 10 | 2 | → Primer factor $(x - 2)$ |
| | 12 | 26 | –10 | | |
| 6 | 13 | –5 | 0 | $\frac{1}{3}$ | → Segundo factor $\left(x - \frac{1}{3}\right)$ |
| | 2 | 5 | | | |
| 6 | 15 | 0 | | $-\frac{5}{2}$ | → Tercer factor $\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = \left(x + \frac{5}{2}\right)$ |
| | –15 | | | | |
| 6 | 0 | | | | |

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$6x^3 + x^2 - 31x + 10 = 6(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (x-2)(2x+5)(3x-1)$$

3 Factoriza el polinomio: $m^4 - 18m^2 + 81$.

**Solución**

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de $m^4$

Divisores de 81 = { ± 1, ± 3, ± 9, ±27, ± 81} Divisores de 1 = { ± 1}

Posibles factores del polinomio: { ± 1, ± 3, ± 9, ±27, ± 81}

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio, se consideran los ceros de los términos cúbico y lineal y se efectúan las operaciones siguientes:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | –18 | 0 | 81 | 3 | → Primer factor $(m - 3)$ |
| | 3 | 9 | –27 | –81 | | |
| 1 | 3 | –9 | –27 | 0 | 3 | → Segundo factor $(m - 3)$ |
| | 3 | 18 | 27 | | | |
| 1 | 6 | 9 | 0 | | –3 | → Tercer factor $(m - (-3)) = (m + 3)$ |
| | –3 | 0 | | | | |
| 1 | 3 | 0 | | | –3 | → Cuarto factor $(m - (-3)) = (m + 3)$ |
| | –3 | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | |

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$m^4 - 18m^2 + 81 = (m-3)(m-3)(m+3)(m+3) = (m-3)^2(m+3)^2$$

4 Factoriza el polinomio: $4y^4 - 9y^2 - 6y - 1$.

**Solución**

Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de $y^4$.

Divisores de 1 = { ± 1} Divisores de 4 = { ± 1, ± 2, ± 4}

Posibles factores del polinomio: $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$

Éstos son los posibles valores para los que el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.

Se ordenan los coeficientes del polinomio, se considera al cero del término cúbico y se efectúan las operaciones siguientes:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | –9 | –6 | –1 | –1 | → Primer factor $(y+1)$ |
| | –4 | 4 | 5 | 1 | | |
| 4 | –4 | –5 | –1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | → Segundo factor $\left(y+\frac{1}{2}\right)$ |
| | –2 | 3 | 1 | | | |
| 4 | –6 | –2 | 0 | | | → Tercer factor $(4y^2 - 6y - 2)$ |

La expresión $4y^2 - 6y - 2$ únicamente se puede factorizar de la siguiente manera:

$$4y^2 - 6y - 2 = 2(2y^2 - 3y - 1)$$

Finalmente, la descomposición en factores del polinomio es:

$$4y^4 - 9y^2 - 6y - 1 = (y+1)\left(y+\frac{1}{2}\right)2\left(2y^2 - 3y - 1\right) = (y+1)(2y+1)(2y^2 - 3y - 1)$$

# EJERCICIO 51

Factoriza las siguientes expresiones:

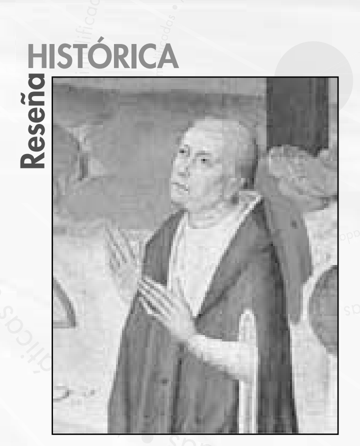
1. $b^3 - b^2 - b + 1$
2. $w^3 + 2w^2 - w - 2$
3. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
4. $x^3 + x^2 - 14x - 24$
5. $4x^3 - 7x + 3$
6. $m^3 + 2m^2 + m + 2$
7. $6y^3 + y^2 - 11y - 6$
8. $a^4 - 10a^2 + 9$
9. $3x^3 + 4x^2 - 59x - 20$
10. $m^4 + 6m^3 + 3m + 140$
11. $n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 4n + 4$
12. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
13. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$
14. $x^5 - 4x^4 + 10x^2 - x - 6$
15. $a^5 - 30a^3 - 25a^2 - 36a - 180$
16. $2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 23x^2 + 16x - 12$
17. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 32x - 24$
18. $6x^5 + 7x^4 - 47x^3 - 13x^2 + 77x - 30$
19. $n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36$
20. $2x^6 - 3x^5 - 35x^4 - 2x^2 + 3x + 35$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 5

## FRACCIONES ALGEBRAICAS

Reseña HISTÓRICA



*Nicolás de Cusa (1401-1464)*

Cardenal alemán nacido en Cusa y fallecido en Lodi (Italia). Más filósofo que matemático, a él se debe la crítica a los conceptos de la noción de infinito: "…para alcanzar el maximum y el minimum hay que trascender la serie indefinida de lo grande y lo pequeño, y entonces se descubre que el maximum y el minimum coinciden en la idea de infinito…".

Nicolás de Cusa vio que uno de los puntos débiles del pensamiento escolástico de la época, en lo que se refiere a la ciencia, había sido su incapacidad para medir, mientras que él pensaba que el conocimiento debería sustentarse en la medida. Sus teorías filosóficas neoplatónicas sobre la concordancia de los contrarios, le condujo a pensar que los máximos y los mínimos están siempre en relación.

Nicolás de Cusa (1401-1464)

## Máximo común divisor (MCD)

El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es el término o polinomio que divide exactamente a todas y cada una de las expresiones dadas.

Regla para obtener el MCD:

- Se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes.
- Se toman los factores (monomio o polinomio) de menor exponente que tengan en común y se multiplican por el máximo común divisor de los coeficientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el máximo común divisor de: $15x^2y^2z$, $24xy^2z$, $36y^4z^2$.

**Solución**

Se obtiene el MCD de 15, 24 y 36

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 24 | 36 | 3 |
| 5 | 8 | 12 | |

MCD = 3

Se toman los factores que tengan en común y se escogen los de menor exponente, en este caso: $y^2$, $z$
Finalmente, el máximo común divisor: $3y^2z$

2 Obtén el MCD de los siguientes polinomios:

$$4m^2 + 8m - 12,\ 2m^2 - 6m + 4,\ 6m^2 + 18m - 24;$$

**Solución**

Se factorizan los polinomios:

$4(m^2 + 2m - 3) = 4(m + 3)(m - 1)$
$2(m^2 - 3m + 2) = 2(m - 2)(m - 1)$
$6(m^2 + 3m - 4) = 6(m + 4)(m - 1)$

Se obtiene el MCD de 4, 2 y 6

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 6 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | |

El MCD de los coeficientes 2, 4 y 6 es 2.
El MCD de los factores es $m - 1$
Por tanto, el MCD de los polinomios es: $2(m - 1)$

## Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es el término algebraico que se divide por todas y cada una de las expresiones dadas.

Regla para obtener el mínimo común múltiplo:

- Se obtiene el mcm de los coeficientes.
- Se toman los factores que no se repiten y, de los que se repiten, el de mayor exponente, y se multiplican por el mínimo común múltiplo de los coeficientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el mcm de las siguientes expresiones $15x^2y^2z$; $24xy^2z$, $36y^4z^2$.

**Solución**

Se encuentra el mcm de 15, 24, 36

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 24 | 36 | 2 |
| 15 | 12 | 18 | 2 |
| 15 | 6 | 9 | 2 |
| 15 | 3 | 9 | 3 |
| 5 | 1 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | |

$\text{mcm} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

El mcm de los coeficiente 15, 24 y 36 es 360

Se toman todos los factores y se escogen los de mayor exponente en el caso de aquellos que sean comunes y, los que no, se escriben igual.

$$x^2y^4z^2$$

Finalmente, el mcm es $360\,x^2y^4z^2$

2 Encuentra el mcm de $4m^2 + 8m - 12$; $2m^2 - 6m + 4$; $6m^2 + 18m - 24$.

**Solución**

Se factorizan los polinomios y se escogen los factores:

$$4m^2 + 8m - 12 = 4(m^2 + 2m - 3) = 4(m + 3)(m - 1)$$
$$2m^2 - 6m + 4 = 2(m^2 - 3m + 2) = 2(m - 2)(m - 1)$$
$$6m^2 + 18m - 24 = 6(m^2 + 3m - 4) = 6(m + 4)(m - 1)$$

Se obtiene el mcm de los coeficientes de 4, 2 y 6

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 6 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | |

$\text{mcm} = 2^2 \times 3 = 12$

El mcm de 4, 2 y 6 es 12

El mcm de los factores es: $(m + 3)(m - 2)(m + 4)(m - 1)$

Por consiguiente, el mcm es: $12(m + 3)(m - 1)(m - 2)(m + 4)$

## EJERCICIO **52**

Determina el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de las siguientes expresiones:

1. $35x^2y^3z^4$; $42x^2y^4z^4$; $70x^2y^5z^2$
2. $72m^3y^4$; $96m^2y^2$; $120m^4y^5$
3. $4x^2y$; $8x^3y^2$, $2x^2yz$; $10xy^3z^2$
4. $39a^2bc$; $52ab^2c$; $78abc^2$

5. $60m^2n^x$; $75m^4n^{x+2}$; $105mn^{x+1}$
6. $22x^ay^b$; $33x^{a+2}y^{b+1}$; $44x^{a+1}y^{b+2}$
7. $18a^2(x-1)^3$; $24a^4(x-1)^2$; $30a^5(x-1)^4$
8. $27(a-b)(x+y)^2$; $45(a-b)^2(x+y)$
9. $24(2x+1)^2(x-7)$; $30(x+8)(x-7)$; $36(2x+1)(x+8)^2$
10. $38(a^3+a^3b)$; $57a(1+b)^2$; $76a^4(1+b)^3$
11. $xy+y$; $x^2+x$
12. $m^3-1$; $m^2-1$
13. $m^2+mn$; $mn+n^2$; $m^3+m^2n$
14. $x^2-y^2$; $x^2-2xy+y^2$
15. $3x^2-6x$; $x^3-4x$; $x^2y-2xy$; $x^2-x-2$
16. $3a^2-a$; $27a^3-1$; $9a^2-6a+1$
17. $m^2-2m-8$; $m^2-m-12$; $m^3-9m^2+20m$
18. $2a^3-2a^2$; $3a^2-3a$; $4a^3-4a^2$
19. $12b^2+8b+1$; $2b^2-5b-3$
20. $y^3-2y^2-5y+6$; $2y^3-5y^2-6y+9$; $2y^2-5y-3$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Simplificación de fracciones algebraicas

Una fracción algebraica contiene literales y se simplifica al factorizar al numerador y al denominador y al dividir aquellos factores que se encuentren en ambas posiciones, como a continuación se ejemplifica.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Simplifica la siguiente expresión: $\frac{8a^2+12ab}{8a^2}$.

**Solución**

Se factorizan tanto el numerador como el denominador.

$$\frac{8a^2+12ab}{8a^2}=\frac{(4a)(2a+3b)}{(2a)(4a)}$$

Una vez factorizados los elementos de la fracción, se observa que en ambos se encuentra la expresión $(4a)$ la cual se procede al simplificar

$$\frac{(4a)(2a+3b)}{(2a)(4a)}=\frac{2a+3b}{2a}$$

2 Simplifica la siguiente expresión: $\frac{3m}{15m-12m^2}$.

**Solución**

Se factorizan el numerador y el denominador, simplificando el término que se repite en ambos $(3m)$

$$\frac{3m}{15m-12m^2}=\frac{1(3m)}{(3m)(5-4m)}=\frac{1}{5-4m}$$

3 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{6x^2y-12xy^2}{x^2-4y^2}$.

**Solución**

Se factorizan tanto el numerador como el denominador.

$$\frac{6x^2y-12xy^2}{x^2-4y^2}=\frac{6xy(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}$$

Una vez factorizados los elementos de la fracción, se observa que en ambos se encuentra la expresión $(x-2y)$ la cual se procede a simplificar

$$\frac{6xy(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}=\frac{6xy}{x+2y}$$

4 Simplifica $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+ax-3x-3a}$.

**Solución**

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2+ax-3x-3a}=\frac{(x-3)^2}{x(x+a)-3(x+a)}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+a)}$$

En esta fracción el elemento que se repite en el numerador y denominador es $(x-3)$, entonces se realiza la simplificación

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+a)}=\frac{x-3}{x+a}$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}$.

**Solución**

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}=\frac{x(9-x^2)}{x^2(x^2-x-6)}=\frac{x(3+x)(3-x)}{x^2(x-3)(x+2)}$$

Los factores que se repiten son $(x)$ y $(x-3)$

$$\frac{x(3+x)(3-x)}{x^2(x-3)(x+2)}=\frac{(3+x)(-1)}{x(x+2)}=-\frac{x+3}{x(x+2)}$$

6 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}$.

**Solución**

Se factorizan tanto numerador como denominador

$$\frac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}=\frac{(-1)(3x+1)(x+3)(x-4)}{(x-5)(3x+1)(x-4)}$$

Los factores que se repiten en el numerador y denominador $(3x+1)$ y $(x-4)$, se dividen, obteniéndose la simplificación de la fracción

$$\frac{12+37x+2x^2-3x^3}{20+51x-26x^2+3x^3}=\frac{(-1)(x+3)}{(x-5)}=-\frac{x+3}{x-5}$$

# EJERCICIO 53

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{2a^2+2ab}{3a^2b}$
2. $\frac{6a^3b^2}{3a^2b-6ab^2}$
3. $\frac{4a^2+12a}{8a^2}$
4. $\frac{6m^3-18m^2-24m}{15m-9m^2}$
5. $\frac{m^3n-m^2n^2}{n^2-m^2}$
6. $\frac{4x^2-12x}{2x^3-2x^2-12x}$
7. $\frac{x^2-3xy-10y^2}{5y^2+4xy-x^2}$
8. $\frac{x^2+7x-78}{x^2-36}$
9. $\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n-3}$
10. $\frac{2x^2-xy-6y^2}{3x^2-5xy-2y^2}$
11. $\frac{-x^4+3x^3y-2x^2y^2}{5x^3-4x^2y-xy^2}$
12. $\frac{3x^2+10xy+8y^2}{x^2-xy-6y^2}$
13. $\frac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$
14. $\frac{8-x^3}{x^2+2x-8}$
15. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$
16. $\frac{y^3-27x^3}{y^2-xy-6x^2}$
17. $\frac{x^3-1}{x^3-x^2-x-2}$
18. $\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^3-3xy^2+2y^3}$
19. $\frac{3ax-bx-3ay+by}{by^2-bx^2-3ay^2+3ax^2}$
20. $\frac{a^2+ab-ad-bd}{2a^2b+2ab^2}$
21. $\frac{y^3+y^2-6y}{3ay^2+9ay+2y^2+6y}$
22. $\frac{3x^2-3xy}{yz-xz-yw+xw}$
23. $\frac{w^2+w-2}{x-wx-y+wy}$
24. $\frac{p+1-p^3-p^2}{p^3-p-2p^2+2}$
25. $\frac{2a^3-2ab^2+a^2-b^2}{2ab^2+b^2-2a^3-a^2}$
26. $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+4x^2+x-6}$
27. $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+x^2-14x-24}$
28. $\frac{y^3-9y^2+26y-24}{y^3-5y^2-2y+24}$
29. $\frac{(y-1)(y^2-8y+16)}{(y^2-4y)(1-y^2)}$
30. $\frac{(a-2)^2(a^2+a-12)}{(2-a)(3-a)^2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma y resta de fracciones con denominador común

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\frac{2a-a^2b}{a^2b}+\frac{3a+4a^2b}{a^2b}$.

**Solución**

Se simplifica cada fracción, si es posible.

$$\frac{2a-a^2b}{a^2b}=\frac{a(2-ab)}{a^2b}=\frac{2-ab}{ab}; \qquad \frac{3a+4a^2b}{a^2b}=\frac{a(3+4ab)}{a^2b}=\frac{3+4ab}{ab}$$

Se suman las nuevas expresiones.

$$\frac{2-ab}{ab}+\frac{3+4ab}{ab}$$

Como los denominadores son comunes, en la fracción resultante sólo se reducen los numeradores y el denominador permanece igual.

$$\frac{2-ab}{ab}+\frac{3+4ab}{ab}=\frac{2-ab+3+4ab}{ab}=\frac{5+3ab}{ab}$$

2 Encuentra el resultado de $\frac{2m+n}{2m-n}+\frac{5m-5n}{2m-n}+\frac{n-m}{2m-n}$.

**Solución**

En este caso ningún sumando se puede simplificar, entonces el común denominador es $2m-n$, y sólo se reducen los numeradores.

$$\frac{2m+n}{2m-n}+\frac{5m-5n}{2m-n}+\frac{n-m}{2m-n}=\frac{2m+n+5m-5n+n-m}{2m-n}=\frac{6m-3n}{2m-n}=\frac{3(2m-n)}{2m-n}=3$$

## EJERCICIO 54

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{2x^2-7x}{8x^2}+\frac{6x^2+x}{8x^2}$
2. $\frac{1-a^2}{a}-\frac{7-2a^2}{a}$
3. $\frac{7n-1}{10n}+\frac{8n-4}{10n}$
4. $\frac{7m^2-6m}{4mn}+\frac{12m^2-3m}{4mn}$
5. $\frac{35n-7}{5n^2-n}-\frac{15n-3}{5n^2-n}$
6. $\frac{11y^2-14y}{6y^2}-\frac{2y^2+y}{6y^2}$
7. $\frac{12x^2-x+5}{22x}+\frac{6+x-x^2}{22x}$
8. $\frac{13x-y}{3x-2y}+\frac{5x-3y}{3x-2y}-\frac{3x+6y}{3x-2y}$
9. $\frac{6a+5b}{8a-2b}-\frac{a+6b}{8a-2b}+\frac{3a-b}{8a-2b}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma y resta de fracciones con denominadores diferentes

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\frac{3x}{2y^2}+\frac{5y}{4x^2}$.

**Solución**

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realizan las operaciones correspondientes.

$$\frac{3x}{2y^2}+\frac{5y}{4x^2}=\frac{3x(2x^2)+5y(y^2)}{4x^2y^2}=\frac{6x^3+5y^3}{4x^2y^2}$$

2 Realiza la siguiente operación y simplificar al máximo: $\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}$.

**Solución**

Se obtiene el común denominador de los denominadores "$x + h$" y "$x$", posteriormente se procede a realizar la diferencia de fracciones

$$\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=\frac{x-x-h}{x(x+h)}=\frac{-h}{x(x+h)}$$

3 Efectúa $\frac{3x}{x^2-6x+9}+\frac{4}{x-3}$.

**Solución**

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se efectúan las operaciones:

$$\frac{3x}{(x-3)^2}+\frac{4}{x-3}=\frac{3x(1)+4(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{3x+4x-12}{(x-3)^2}=\frac{7x-12}{(x-3)^2}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\frac{1}{(x+h)^2-1}-\frac{1}{x^2-1}$.

**Solución**

Se determina el común denominador, éste se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su numerador, los productos se reducen al máximo.

$$\frac{1}{(x+h)^2-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2+2xh+h^2-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1(x^2-1)-1(x^2+2xh+h^2-1)}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2-1-x^2-2xh-h^2+1}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}=\frac{-2xh-h^2}{(x^2+2xh+h^2-1)(x^2-1)}$$

5 Simplifica la siguiente operación: $\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

**Solución**

A los enteros se les coloca la unidad como denominador:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1}$$

Luego, el común denominador es $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, por tanto

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1}=\frac{x^2(1)+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

se aplica la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ y se simplifica al máximo el numerador, entonces:

$$\frac{x^2(1)+(x^2+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

6 Simplifica la siguiente operación: $\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}$.

**Solución**

El común denominador de esta diferencia de fracciones es $(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$, entonces:

$$\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}=\frac{x^3-(x^3-1)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-(x^3-1)}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-x^3+1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Por tanto, la simplificación es:

$$\frac{x^3}{\left(x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}}-\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\left(x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

7 Efectúa y simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$.

**Solución**

El común denominador es el producto de los denominadores:

$$\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se realiza la operación:

$$\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x\left(x^2+1\right)-x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{x^3+x-x^3+x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

En el denominador los factores están elevados al mismo exponente, se pueden multiplicar las bases, las cuales dan como resultado una diferencia de cuadrados, por tanto:

$$\frac{x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x}{\left(x^4-1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

8 Simplifica la siguiente operación: $\dfrac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$.

**Solución**

Se obtiene el común denominador y se procede a realizar la diferencia:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-2(x+1)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)-2(x+1)}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x-2-2x-2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

Por último se simplifica el numerador, entonces:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{-x-4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=-\frac{x+4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

9 Realiza y simplifica la operación $\frac{a+b}{a^2-ab-20b^2}-\frac{a+4b}{a^2-4ab-5b^2}+\frac{a+5b}{a^2+5ab+4b^2}$.

**Solución**

Se factorizan los denominadores:

$$a^2-ab-20b^2=(a-5b)(a+4b)$$
$$a^2-4ab-5b^2=(a-5b)(a+b)$$
$$a^2+5ab+4b^2=(a+4b)(a+b)$$

La expresión con los denominadores factorizados es:

$$\frac{a+b}{(a-5b)(a+4b)}-\frac{a+4b}{(a-5b)(a+b)}+\frac{a+5b}{(a+4b)(a+b)}$$

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores: $(a-5b)(a+4b)(a+b)$
Se resuelve la fracción:

$$=\frac{(a+b)(a+b)-(a+4b)(a+4b)+(a-5b)(a+5b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-8ab-16b^2+a^2-25b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2-6ab-40b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$

El numerador se factoriza, si es posible, para simplificar al máximo, entonces

$$=\frac{(a-10b)(a+4b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}$$
$$=\frac{a-10b}{(a-5b)(a+b)}$$

## EJERCICIO 55

Efectúa y simplifica las siguientes operaciones algebraicas:

1. $\frac{x-2}{4x}+\frac{x+5}{10x}$
2. $\frac{x+1}{2x}+\frac{2x+3}{3x}$
3. $\frac{x-4}{9x^2}+\frac{x-3}{6x}$
4. $\frac{2x+5}{6x}-\frac{x+6}{4x^2}$
5. $\frac{1}{x+h+2}-\frac{1}{x+2}$
6. $\frac{x+h+1}{x+h-1}-\frac{x+1}{x-1}$
7. $\frac{2}{(x+h)^2-3}-\frac{2}{x^2-3}$
8. $\frac{(x+h)^2}{(x+h)^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}$
9. $\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}$
10. $\frac{2}{x+1}+\frac{x+2}{x^2-1}$
11. $\frac{4x}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}$
12. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{x^2-1}$

13. $\frac{7x}{x^2+6x+9}+\frac{1}{x^2-9}$

14. $2x(x-2)^{\frac{1}{3}}-\frac{x^2}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$

15. $12x^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{3x^5}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

16. $\frac{3x(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}$

17. $\frac{-2x(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}{3(5-x^2)^{\frac{2}{3}}}-\frac{4x(5-x^2)^{\frac{1}{3}}}{3(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$

18. $\frac{(8x-3)(4x^2+3x)^{\frac{1}{3}}}{3(4x^2-3x)^{\frac{2}{3}}}-\frac{(8x+3)(4x^2-3x)^{\frac{1}{3}}}{3(4x^2+3x)^{\frac{2}{3}}}$

19. $\frac{x+1}{x^2+x-12}-\frac{12}{x^2+5x-24}$

20. $\frac{2x^2+8}{2x^2+2x-12}-\frac{5x-6-x^2}{x^2+2x-8}$

21. $\frac{4x-5}{x^2+x-12}+\frac{9}{18-3x-x^2}+\frac{2}{x^2+10x+24}$

22. $\frac{1}{2x^2+11x+15}+\frac{6x+7}{3x^2+7x-6}-\frac{19}{6x^2+11x-10}$

23. $\frac{m+n}{m^2-mn+n^2}-\frac{1}{m+n}+\frac{3m^2}{m^3+n^3}$

24. $\frac{3x+2y}{x^2+3xy-10y^2}-\frac{5x+y}{x^2+4xy-5y^2}+\frac{4x-y}{x^2-3xy+2y^2}$

25. $\frac{a-b}{3a+3b}-\frac{a-2b}{6a-6b}+\frac{a^2+2ab-6b^2}{9a^2-9b^2}$

26. $\frac{r+3s}{s+r}-\frac{3s^2}{s^2-r^2}+\frac{r}{s-r}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Multiplicación de fracciones algebraicas

Regla para multiplicar fracciones:

- Descomponer en factores los elementos de las fracciones que se van a multiplicar.
- Se simplifican aquellos términos que sean comunes en el numerador y denominador de las fracciones que se van a multiplicar.
- Multiplicar todos los términos restantes.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Multiplica $\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{6y^2}{4x}\cdot\frac{5xy}{2y}$.

**Solución**

Se realiza la multiplicación de fracciones y se simplifica el resultado

$$\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{6y^2}{4x}\cdot\frac{5xy}{2y}=\frac{60x^3y^3}{24xy^2}=\frac{5x^2y}{2}$$

2 Simplifica: $\frac{m^2+9m+18}{m-5}\cdot\frac{5m-25}{5m+15}$.

**Solución**

Se factoriza cada uno de los elementos

$$\frac{m^2+9m+18}{m-5}\cdot\frac{5m-25}{5m+15}=\frac{(m+6)(m+3)}{m-5}\cdot\frac{5(m-5)}{5(m+3)}$$

*(continúa)*

(*continuación*)
se procede a realizar la multiplicación y la simplificación

$$\frac{(m+6)(m+3)}{m-5}\cdot\frac{5(m-5)}{5(m+3)}=\frac{5(m+6)(m+3)(m-5)}{5(m-5)(m+3)}=m+6$$

3 Efectúa y simplifica: $\frac{a^2-5a+6}{3a-15}\cdot\frac{6a}{a^2-a-30}\cdot\frac{a^2-25}{2a-4}$.

**Solución**

$$\frac{(a-3)(a-2)}{3(a-5)}\cdot\frac{2\cdot 3a}{(a-6)(a+5)}\cdot\frac{(a+5)(a-5)}{2(a-2)}=\frac{(a-3)(a-2)2\cdot 3a(a+5)(a-5)}{3(a-5)(a-6)(a+5)2(a-2)}$$

$$=\frac{6a(a-3)(a-2)(a+5)(a-5)}{6(a-5)(a-6)(a+5)(a-2)}=\frac{a(a-3)}{a-6}$$

Finalmente, el resultado de la multiplicación es $\frac{a(a-3)}{a-6}=\frac{a^2-3a}{a-6}$

# EJERCICIO 56

Efectúa la multiplicación de las fracciones algebraicas y simplifica:

1. $\frac{4a^2}{7x^3}\cdot\frac{14x}{5b^4}\cdot\frac{5b^2}{7a^3}$
2. $\frac{5}{x}\cdot\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{3y}{10}$
3. $\frac{3x}{10y^2}\cdot\frac{5y^4}{14ab}\cdot\frac{7a}{6x^2}$
4. $\frac{16ab^2}{5a^2x}\cdot\frac{10x^3}{4b^3}\cdot\frac{2a^2}{3bx}$
5. $\frac{3x^2}{4b}\cdot\frac{b^2}{2y^2}\cdot\frac{2y}{3x^3}$
6. $\frac{5m+25}{14}\cdot\frac{7m+7}{10m+50}$
7. $\frac{b^2-5b+6}{3b-15}\cdot\frac{b^2-25}{2b-4}\cdot\frac{6b}{b^2-b-30}$
8. $\frac{2m^3+2mn^2}{2mx^2-2mx}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x^3-x}{m^2x+n^2x}$
9. $\frac{14x^2-21x}{24x-16}\cdot\frac{12x-8}{42x-63}$
10. $\frac{30x^3-18x^2}{6x^3+5x^2}\cdot\frac{42x+35}{60x-36}$
11. $\frac{7x^2+42x}{3x^2-6x}\cdot\frac{15x-30}{14x^2+84x}$
12. $\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}$
13. $\frac{x^2-10x+24}{30+x-x^2}\cdot\frac{x^2-2x-48}{x^2-12x+32}$
14. $\frac{8x^2+10x+3}{4x^2+4x+1}\cdot\frac{6x^2+x-1}{9x^2+9x-4}$
15. $\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}\cdot\frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$
16. $\frac{x^2+9x+18}{2x^2+9x+9}\cdot\frac{2x^2+7x+6}{4x^2+9x+2}$
17. $\frac{x^3+2x^2-3x}{4x^2+8x+3}\cdot\frac{2x^2+3x}{x^2-x}$
18. $\frac{x^3-27}{a^3-1}\cdot\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$
19. $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\frac{8x+8}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x}{x+2}$
20. $\frac{2n^2+5n-3}{n^2-2n-8}\cdot\frac{n^2+4n+4}{6n^2-5n+1}\cdot\frac{3n^2+11n-4}{n^2+5n+6}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## División de fracciones algebraicas

Regla para dividir fracciones:

- Primero se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, de lo que resulta el numerador de la fracción solución; el denominador de la fracción solución se obtiene al multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda. De preferencia los productos se dejan indicados.
- Se simplifican los términos o factores que sean comunes, en el numerador y denominador, de las fracciones que se van a multiplicar.
- Se multiplican todos los términos restantes.

**EJEMPLOS**

1 Realiza la siguiente división: $\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3}$.

**Solución**

Se efectúan los productos cruzados y se simplifica la expresión

$$\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3} = \frac{(m^2)(n^3)}{3n^2(2m)} = \frac{m^2n^3}{6mn^2} = \frac{mn}{6}$$

2 Simplifica la siguiente división: $\frac{\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{(x^2+1)}}$.

**Solución**

Se realiza el producto de medios por medios y extremos por extremos, para después simplificar al máximo.

$$\frac{\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{(x^2+1)}} = \frac{3x^2(x^2+1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{3x}{x^2+1}$$

3 Realiza el siguiente cociente y simplifica: $\frac{a^3-a}{2a^2+6a} \div \frac{5a^2-5a}{2a+6}$.

**Solución**

Se factorizan todos los elementos y se procede a efectuar la simplificación.

$$\frac{a^3-a}{2a^2+6a} \div \frac{5a^2-5a}{2a+6} = \frac{a(a-1)(a+1)}{2a(a+3)} \div \frac{5a(a-1)}{2(a+3)} = \frac{a(a-1)(a+1)(2)(a+3)}{(2a)(5a)(a-1)(a+3)} = \frac{a+1}{5a}$$

4 Simplifica la siguiente operación:

$$\frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^2+1)}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

**Solución**

En este caso se tiene una fracción sobre un entero, al que se le agrega la unidad como denominador, para después realizar el producto de medios y extremos, entonces:

$$\frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(x^2+1)}{1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

5 Resuelve la siguiente división: $\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2} \div \frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2}$.

**Solución**

Se factoriza cada uno de los factores y se procede a realizar la división

$$\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2} \div \frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2} = \frac{(2x+y)(2x-y)}{(2x-y)(x+y)} \div \frac{(3x+2y)(2x+y)}{(3x+2y)(x+y)}$$

$$= \frac{(2x+y)(2x-y)(3x+2y)(x+y)}{(2x-y)(x+y)(3x+2y)(2x+y)} = 1$$

6 Efectúa y simplifica la siguiente operación: $\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right) \div \left(x-1-\frac{9}{x-1}\right)$.

**Solución**

Se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis:

$$\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right) \div \left(x-1-\frac{9}{x-1}\right) = \left(\frac{x^2+5x+4+2}{x+1}\right) \div \left(\frac{x^2-2x+1-9}{x-1}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+5x+6}{x+1}\right) \div \left(\frac{x^2-2x-8}{x-1}\right)$$

Se factorizan los polinomios resultantes y se resuelve la división:

$$\frac{(x+3)(x+2)}{x+1} \div \frac{(x-4)(x+2)}{x-1} = \frac{(x+3)(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-4)(x+2)} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}$$

## EJERCICIO 57

Realiza las siguientes operaciones y simplifica al máximo:

1. $\frac{2x^3}{y^2} \div \frac{8x^5}{3y^3}$

2. $\frac{12a^4b^5}{15x^6y^3} \div \frac{4a^2b}{5x^2y^3}$

3. $\frac{\frac{6x^2}{(2x+3)^3}}{\frac{2x^4}{(2x+3)}}$

4. $\frac{\frac{12x^5}{(2x^3+1)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{2x^2}{(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}}}$

5. $\dfrac{\dfrac{4x^3}{3x^2-3xy}}{\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}$

6. $\dfrac{x^3+x}{x^2-x} \div \dfrac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}$

7. $\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3} \div \dfrac{x^2+6x-27}{x^2-10x+9}$

8. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5} \div \dfrac{x^2+5x-14}{x^2+8x+7}$

9. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9} \div \dfrac{x^2+12x+32}{x^2+3x-40}$

10. $\dfrac{4x^2-23x-6}{3x^2-14x+8} \div \dfrac{4x^2+25x+6}{x^2+x-30}$

11. $\dfrac{6x^2-5x+1}{12x^2-x-1} \div \dfrac{4x^2-8x-5}{8x^2+6x+1}$

12. $\dfrac{x^2-16}{x^3-3x^2+9x} \div \dfrac{x^2-x-12}{x^3+27}$

13. $\dfrac{8x^2-2x-3}{16x^3-9x} \div \dfrac{4x^2-1}{4x^2+3x}$

14. $\dfrac{\dfrac{x^3-121x}{x^3-49x}}{\dfrac{x^2-11x}{x+7}}$

15. $\dfrac{\dfrac{x^3+125}{x^2-64}}{\dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}}$

16. $\dfrac{\dfrac{a^2-6a}{a^3+3a^2}}{\dfrac{a^2+3a-54}{a^2+9a}}$

17. $\dfrac{15x^2+7x-2}{25x^3-x} \div \dfrac{6x^2+13x+6}{25x^2+10x+1}$

18. $\left(1+\dfrac{a}{a+b}\right) \div \left(1+\dfrac{2a}{b}\right)$

19. $\left(x+\dfrac{2}{x+3}\right) \div \left(x+\dfrac{3}{x+4}\right)$

20. $\left(n-\dfrac{2n-1}{n^2+2}\right) \div \left(n^2+1-\dfrac{n-1}{n}\right)$

21. $\left(a+b+\dfrac{b^2}{a-b}\right) \div \left(1-\dfrac{b}{a+b}\right)$

22. $\left(1-\dfrac{1}{x^3+2}\right) \div \left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Combinación de operaciones con fracciones

La simplificación de este tipo de operaciones, en las que se combinan operaciones básicas, se basa en la jerarquización de operaciones de izquierda a derecha, como sigue:

- Divisiones y productos
- Sumas y restas

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa y simplifica la siguiente fracción algebraica

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} \div \frac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}$$

**Solución**

Se factoriza cada uno de los polinomios de la expresión

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} \div \frac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4} = \frac{x(x+2)}{(x+3)(x+1)} \cdot \frac{(x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} \div \frac{(x-4)(x+2)}{(2x+1)(x-4)}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se realiza el producto

$$\frac{x(x+2)}{(x+3)(x+1)}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\frac{x(x+2)(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)(2x+1)(x-1)}=\frac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)}$$

Por último, se realiza la división y se simplifica al máximo:

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)}\div\frac{(x-4)(x+2)}{(2x+1)(x-4)}=\frac{x(x+2)(2x+1)(x-4)}{(x+1)(2x+1)(x-4)(x+2)}=\frac{x}{x+1}$$

2 Realiza y simplifica la siguiente fracción:

$$\frac{x^2+6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x^2-3x-10}{x^2-4x-5}-\frac{x}{x+1}$$

**Solución**

Se factorizan las expresiones y se aplica la jerarquía de las operaciones

$$\frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)(x+2)}\cdot\frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x+1)}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+5)(x+1)(x-5)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-5)(x+1)}-\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{x+5}{x+3}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+5)(x+1)-x(x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+6x+5-x^2-3x}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{3x+5}{(x+3)(x+1)}$$

## EJERCICIO 58

Efectúa y simplifica las siguientes expresiones:

1. $\frac{x^2-x-12}{x^2-49}\cdot\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}$
2. $\frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\cdot\frac{a^2-36}{a^3-1}\div\frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$
3. $\frac{6a^2-7a-3}{a^2-1}\div\frac{4a^2-12a+9}{a^2-1}\cdot\frac{2a^2-a-3}{3a^2-2a-1}$
4. $\frac{2t^2+5t+2}{t^2-4t+16}\div\frac{t+2}{t^3+64}\div\frac{2t^3+9t^2+4t}{t+1}$
5. $\frac{2}{x+3}\div\frac{3x+3}{x^2-2x-8}\div\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
6. $\frac{3x^2+3x}{3x^2-8x+4}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}-\frac{2x}{2x-1}$
7. $\frac{6x^2-12x}{2x^2+3x-9}\div\frac{2x^2-5x+2}{2x^2+5x-3}-\frac{3}{x+1}$

8. $\frac{x^4-27x}{x^2+7x-30}\cdot\frac{x^2+20x+100}{x^3+3x^2+9x}\div\frac{x^2-100}{x-3}$

9. $\frac{8x^2-10x-3}{6x^2+13x+6}\cdot\frac{4x^2-9}{3x^2+2x}\div\frac{8x^2+14x+3}{9x^2+12x+4}$

10. $\frac{x^2-x-12}{x^2+x-2}\div\frac{x^2-6x+8}{x^2-3x-10}\div\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-15}$

11. $\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-1}+\frac{2x^2-4x}{x^2+x-6}$

12. $\frac{x^3-5x^2}{x^3-25x}\div\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6}+\frac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}\cdot\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Fracciones complejas

En una fracción compleja el numerador y el denominador se conforman por operaciones algebraicas.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Simplifica la expresión $\left(m+\frac{m}{n}\right)\div\left(n-\frac{1}{n}\right)$.

**Solución**

Se realizan las operaciones dentro de los paréntesis,

$$\left(m+\frac{m}{n}\right)\div\left(n-\frac{1}{n}\right)=\frac{mn+m}{n}\div\frac{n^2-1}{n}$$

se resuelve la división y se simplifica al máximo:

$$\frac{n(mn+m)}{n(n^2-1)}=\frac{nm(n+1)}{n(n+1)(n-1)}=\frac{m}{n-1}$$

2 Realiza y simplifica la fracción $\frac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}$.

**Solución**

Se resuelve tanto el numerador como el denominador y se factorizan los polinomios resultantes, si es posible

$$\frac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}=\frac{\frac{(y-1)(y+3)-5}{y+3}}{\frac{(y+5)(y+3)-35}{y+3}}=\frac{\frac{y^2+2y-3-5}{y+3}}{\frac{y^2+8y+15-35}{y+3}}=\frac{\frac{y^2+2y-8}{y+3}}{\frac{y^2+8y-20}{y+3}}$$

$$=\frac{\frac{(y+4)(y-2)}{y+3}}{\frac{(y+10)(y-2)}{y+3}}$$

*(continúa)*

(*continuación*)
Se dividen las fracciones y se simplifica al máximo

$$=\frac{(y+3)(y+4)(y-2)}{(y+3)(y+10)(y-2)}=\frac{y+4}{y+10}$$

3 Efectúa y simplifica: $\dfrac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{b-\dfrac{b-2}{b+1}}}$.

**Solución**

Se eligen las operaciones secundarias y se reducen hasta simplificar la fracción al máximo:

$$\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{b-\dfrac{b-2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b(b+1)-(b-2)}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b^2+b-b+2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{b^2+2}{\dfrac{b^2+2}{b+1}}}$$

$$=\frac{b-1}{b+2-\dfrac{(b+1)(b^2+2)}{b^2+2}}=\frac{b-1}{b+2-(b+1)}=\frac{b-1}{1}=b-1$$

4 Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}$$

**Solución**

Se resuelve la parte superior de la fracción principal

$$\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-(x+2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x-2)-(x+2)}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-4}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}$$

Luego, la fracción original se escribe como:

$$\frac{\dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}=\frac{\dfrac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{x-2}=\frac{\dfrac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{x-2}{1}}$$

Se realiza la división de fracciones y la simplificación es:

$$\frac{-2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{3}{2}}}$$

# EJERCICIO 59

Simplifica las siguientes fracciones complejas:

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

2. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}}$

3. $1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{y}{3}-1}}$

4. $\dfrac{m+4+\dfrac{3}{m}}{m-4-\dfrac{5}{m}}$

5. $\dfrac{y^2-\dfrac{1}{y}}{1-\dfrac{1}{y}}$

6. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$

7. $\dfrac{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{x^2-y^2}{x+y}}{\dfrac{x-y}{y}+\dfrac{y}{x}}$

8. $\dfrac{1-\dfrac{7}{n}+\dfrac{12}{n^2}}{n-\dfrac{16}{n}}$

9. $\dfrac{a-3b-\dfrac{5b^2}{a+b}}{a-2b-\dfrac{4b^2}{a+b}}$

10. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y^2}}{\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{x^2}{y}}$

11. $\dfrac{\left(a-2b+\dfrac{4b^2}{a+3b}\right)\left(a+2b-\dfrac{b^2}{a+2b}\right)}{1+\dfrac{a}{b}}$

12. $\left(1+\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a+b}}\right)\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}b-\dfrac{\dfrac{7}{4}b^2}{2a+3b}\right)$

13. $\dfrac{\dfrac{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{2(2x+3)^{\frac{1}{2}}}}{2x+3}$

14. $\dfrac{2x\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}-\dfrac{x^3}{\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}}}{x^2-5}$

15. $\dfrac{\dfrac{(3x-1)^{\frac{1}{3}}}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}$

16. $\dfrac{\dfrac{\left(5x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{10x^{\frac{4}{3}}}{3\left(5x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}}{\left(5x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 6

## ECUACIONES DE PRIMER GRADO

**Reseña HISTÓRICA**

A principios del siglo XIX tres matemáticos, Ruffini, Abel y Galois, encararon el problema de resolver una ecuación desde un punto de vista radicalmente diferente.

Más que a Ruffini y Abel, es Evariste Galois a quien le cabe el título de fundador del álgebra moderna.

Galois nació el 25 de octubre de 1811 en Bourg-la Reine, hasta los 12 años de edad lo educó su madre, mujer culta y esclarecida. En 1823 viaja a París para internarse en el Liceo Louis le Grand, institución famosa por el rigor de su disciplina.

A principios de 1827 despierta su interés por la matemática, disciplina a la que de inmediato se dedica por completo, descuidando los estudios de griego, latín, francés, retórica, considerados más importantes.

Galois publicó, en abril de 1829, su primer artículo científico: un teorema sobre las fracciones continuas periódicas. Al mes siguiente presentó a la Academia de Ciencias sus primeras investigaciones sobre las ecuaciones algebraicas de primer grado, trabajo que fue recibido con frialdad y desinterés por Cauchy, el mayor matemático de la época y presidente de la Academia. En ese mismo año el joven matemático entró en la École Préparatoire, institución destinada a formar profesores. Dos meses después era bachiller en letras y en ciencias.

Evariste Galois (1811-1832)

## Conceptos generales

**Igualdad.** Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor.

### Ejemplos

$(2 + 3)^2 = 25$ $\quad$ $(4)^2 + (3)^2 = 25$ $\quad$ $\sqrt{625} = 25$

Entonces $(2 + 3)^2$, $(4)^2 + (3)^2$, $\sqrt{625}$ son expresiones equivalentes ya que todas valen 25
¿Podríamos decir que $x + 3 = 8$ es una igualdad?

**Ecuación.** Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud.

### Ejemplos

La fórmula $v = \frac{d}{t}$ se utiliza para encontrar la velocidad constante de un móvil del que se conoce la distancia recorrida y el tiempo que empleó en recorrerla.

La fórmula $A = \pi r^2$ se utiliza para encontrar el área de un círculo dada la longitud de su radio.

También existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que se busca el valor de una variable o representan modelos matemáticos que resuelvan algún problema de la vida real.

### Ejemplos

$x + 2 = 8$ $\quad$ $x + y = 6$ $\quad$ $x^2 - 4 = 0$ $\quad$ $\frac{4}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{5}{x+2}$

Las ecuaciones están formadas de la siguiente manera:

1er miembro = 2do miembro

**Solución de una ecuación.** La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla.

### Ejemplos

1. Para la ecuación $x + 2 = 10$, la solución es $x = 8$, ya que al sustituir con 8 a la literal $x$, se obtiene: $8 + 2 = 10$
2. Para la ecuación $x + y = 8$, una solución es $x = 3$, $y = 5$; porque: $3 + 5 = 8$
3. Para la ecuación $x^2 - 4 = 0$, las soluciones son: $x = -2$, $x = 2$ porque:

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0\ ,\ (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

**Grado de una ecuación.** El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s).

### Ejemplos

1. La ecuación $2x + 3 = 5$, es de primer grado, porque la incógnita tiene exponente 1
2. La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2
3. La ecuación $x + y = 6$, es de primer grado, porque las variables tienen exponente 1

A las ecuaciones de primer grado se les llama lineales.

## Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ecuaciones que se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de $x$ en la siguiente ecuación: $2x + 3 = 7$.

**Solución**

Se agrupan los términos que contienen a la incógnita en el primer miembro y las constantes en el segundo, se aplican sumas, restas, multiplicaciones o divisiones, según corresponda.

$2x + 3 = 7 \quad \rightarrow \quad (2x + 3) - 3 = 7 - 3$ Se resta 3 en ambos miembros

$2x = 4$ Al simplificar

$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(4)$ Se multiplica por $\frac{1}{2}$

$\frac{2}{2}x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

Se comprueba la solución al sustituir en la ecuación el valor de $x$, y se verifica la igualdad.

$$2(2) + 3 = 7$$
$$4 + 3 = 7$$
$$7 = 7$$

Por tanto, la solución es $x = 2$

2 Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación $m - 25 = 3m - 5$.

**Solución**

$m - 25 = 3m - 5 \quad \rightarrow \quad m - 3m = -5 + 25$ Se suma 25 y se resta $3m$

$-2m = 20$ Al simplificar

$m = \frac{20}{-2}$ Se divide entre $-2$

$m = -10$

Por tanto, $m = -10$

3 ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $20x - 14 - 11x = 8 - 6x + 2$?

**Solución**

$20x - 14 - 11x = 8 - 6x + 2 \quad \rightarrow \quad 20x - 11x + 6x = 8 + 2 + 14$

$15x = 24$

$x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$

Por consiguiente, el conjunto solución es $\left\{\frac{8}{5}\right\}$

Teorema: sea la ecuación lineal $ax = b$

*a*) Si $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$ es solución única

Demostración:

$ax = b$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \rightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)x = \frac{b}{a} \rightarrow 1x = \frac{b}{a} \rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Supongamos ahora que $x_0$ es solución, entonces, al sustituir en $ax = b$ obtenemos:

$$ax_0 = b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}(ax_0) = \frac{1}{a}(b) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)x_0 = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{b}{a}$$

Por tanto, $x = \frac{b}{a}$ es solución única.

*b*) Si $a = 0$ pero $b \neq 0$, entonces, $ax = b$ no tiene solución

Demostración:
Sea $a = 0$, entonces, para todo $k \in R$, $ak = 0$ si $b \neq 0$, entonces, $ax \neq 0$, por tanto, $k$ no es solución de $ax = b$

*c*) Si $a = 0$ y $b = 0$, todo $k \in R$ es solución de $ax = b$

Demostración:
Si $a = 0$, para todo $k \in R$, $ak = 0$, si $b = 0$, entonces, cualquier número real $k$ es solución de $ax = b$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de la ecuación $2x - 7 - 5x = 11x - 6 - 14x$.

**Solución**

Al resolver la ecuación se obtiene:

$$2x - 7 - 5x = 11x - 6 - 14x \quad \rightarrow \quad 2x - 5x - 11x + 14x = -6 + 7$$
$$0x = 1$$

El conjunto solución es vacío, ya que todo número multiplicado por cero es cero (ver inciso *b* del teorema).

2 Determina el conjunto solución de la ecuación $3y - 8 + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y$.

**Solución**

$$3y - 8 + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y \quad \rightarrow \quad 3y + 5y - 10y + 2y = -2 + 8 - 6$$
$$0y = 0$$

El conjunto solución son todos los números reales, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero (ver inciso *c* del teorema).

## EJERCICIO **60**

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x + 2 = 5$
2. $y - 4 = 6$
3. $8 - z = 9$
4. $10 - x = 12$
5. $2x - 3 = 5$
6. $3y + 2 = 11$
7. $9x - 6 = 18$
8. $5x + 7 = 3$
9. $1 - 4w = 9$
10. $2 - 7z = 13$
11. $8x - 6 = 6x + 4$
12. $12 + 7x = 2x + 22$
13. $9 - 8y = 27 - 2y$
14. $2z + 9 = z + 1$
15. $3w - 3 = 4w + 11$
16. $10x + 21 = 15 - 2x$
17. $21x - 3 = 3x + 6$
18. $11y - 5y + 6 = -24 - 9y$

19. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
20. $-9x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$
21. $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$
22. $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - 2x$
23. $-12x - 8 - 3x + 10 = 2x - 9 + 6x$
24. $3z - 8 + 6z - 12 = z - 10 + 9z - 13$
25. $7y - 10 + 2y - 8 = 14y - 9 + 8y$
26. $x - 6 - 5x + 10x = 9x - 8 + 3x$
27. $2z - 4 - 8z + 9 = 10z - 6 + z - 12$
28. $9y - 1 - 14y + 8 = y - 9 + 15y - 1$
29. $x - 7 - 12x - 9 + 3x = 14x - 10 - x + 7$
30. $10z - 5 + 7z - 10 + 8z = 2z - 6 + 4z - 8$
31. $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$
32. $14 - 12x + 39x - 18x = 239 - 60x - 6x$
33. $-8x + 48 - 30x - 51x = 3x - 31x + 170$
34. $7x + 5 - 2x + 9x = 14x - 9 + 2x - 11x + 8$
35. $3w + 5 - 7w + 9w - 11w + 13 = 16 - 8w$
36. $6z + 12z - 18 - 5z = -12z + 4z - 11 + z$
37. $10x - 8 + 3x - 7 + x = 20x - 10 - 6x$
38. $5x - 8 - 8x + 10 - 3x = 9 - x + 6 - 5x - 13$
39. $2y + 7 - 8y + 5 - 3y = 14 - 6y - 2 - 3y$
40. $12z - 9 - 10z + 3 - 8z = z - 9 + 3z + 10 - 10z$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Con signos de agrupación y productos indicados

Para resolver este tipo de ecuaciones se suprimen los signos de agrupación o se realizan los productos indicados y se resuelve la ecuación equivalente que se obtuvo.

### EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Resuelve la ecuación: $8x - (6x - 9) + (3x - 2) = 4 - (7x - 8)$.

**Solución**

Se eliminan los signos de agrupación y se resuelve la ecuación equivalente que se obtiene:

$$8x - (6x - 9) + (3x - 2) = 4 - (7x - 8) \quad \rightarrow \quad 8x - 6x + 9 + 3x - 2 = 4 - 7x + 8$$

$$8x - 6x + 3x + 7x = 4 + 8 - 9 + 2$$

$$12x = 5$$

$$x = \frac{5}{12}$$

Por tanto, la solución es: $x = \frac{5}{12}$

**2** Encuentra el valor de la incógnita en la siguiente ecuación:

$$7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$$

**Solución**

Se resuelven los productos indicados y se determina el valor de $x$ de resolver la ecuación equivalente:

$$7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$$

$$126 - 7x - 18 + 30x = -7x - 9 - 6x - 15 - 12$$

$$-7x + 30x + 7x + 6x = -9 - 15 - 12 - 126 + 18$$

$$36x = -144$$

$$x = \frac{-144}{36} = -4$$

Por consiguiente, $x = -4$

3 Determina el valor de $x$ en la siguiente ecuación:

$$2x-\{3x-(9x+1)-8\}=12x-\{9-[3x-(5-2x)-10]+18x\}$$

**Solución**

Se suprimen los signos de agrupación y se resuelve la ecuación:

$$2x-\{3x-(9x+1)-8\}=12x-\{9-[3x-(5-2x)-10]+18x\}$$
$$2x-\{3x-9x-1-8\}=12x-\{9-[3x-5+2x-10]+18x\}$$
$$2x-\{3x-9x-1-8\}=12x-\{9-3x+5-2x+10+18x\}$$
$$2x-3x+9x+1+8=12x-9+3x-5+2x-10-18x$$
$$2x-3x+9x-12x-3x-2x+18x=-9-5-10-1-8$$
$$9x=-33 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{33}{9}=-\frac{11}{3}$$

Por consiguiente, el valor de $x$ es: $-\frac{11}{3}$

4 Determina el valor de $y$ en la siguiente ecuación:

$$-13y-(y-4)^2+8(2y-3)=8-(y+5)(y-5)-10(y+1)$$

**Solución**

Se realizan los productos notables, los productos indicados y se resuelve la ecuación:

$$-13y-(y-4)^2+8(2y-3)=8-(y+5)(y-5)-10(y+1)$$
$$-13y-(y^2-8y+16)+8(2y-3)=8-(y^2-25)-10(y+1)$$
$$-13y-y^2+8y-16+16y-24=8-y^2+25-10y-10$$
$$-13y-y^2+8y+16y+y^2+10y=8+25-10+16+24$$
$$21y=63$$
$$y=\frac{63}{21}=3$$

Por tanto, la solución es: $y=3$

## EJERCICIO 61

Determina el valor de la incógnita de las siguientes ecuaciones:

1. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$
2. $15x-20=6x-(x+2)+(-x+3)$
3. $(5-3x)-(-4x+6)=(8x+11)-(3x-6)$
4. $4(x-2)-5(2x-6)=8(x+1)-3(2x+3)$
5. $7(3x+1)+8(2x-3)=4(3x-1)-7(x-4)$
6. $30w-(-w+6)+(-5w+4)=-(5w+6)+(-8+3w)$
7. $-\{3y+8-[-15+6y-(-3y+2)-(5y+4)]-29\}=-5$
8. $-2y-3-\{-4y+5+[-y+2-(3y-1)+2y-5]\}=-(y-4)$

9. $-2(y-1)+\{-4(y-1)-5[y-2(4-y)+3y]-(y+1)\}=2y-(-5-y)$

10. $w-2[w+5(1-2w)+4w]-(w+3)=-w+3(w+2)+7w$

11. $x-3[2x-(x+1)+5(1-x)]=x+(3x-7)-(x+3)$

12. $7(x-4)^2-3(x+5)^2=4(x+1)(x-1)-2$

13. $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)=x(x-3)-2x(x+5)-2$

14. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$

15. $3(x-2)^2(x+5)=3(x+1)^2(x-1)+3$

16. $(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)^2$

17. $2x(x-4)-(2x+3)(x-4)=4x(2x-3)-8(1-x)^2$

18. $(3x-2)^3-(3x-4)(6x-5)-45x^2=9x^2(3x-5)-10(x+3)-2(6x-1)(6x+1)$

19. $3x-\{10x-[(3-5x)^2-8]+(5x-3)(5x+4)\}=3(6x^2-4)-9\{3x+(2x-1)(x-3)\}$

20. $12-\{6x+[3x+(x-7)(x+7)]-(2x+3)^2\}=-2x^2+5[(x+1)^2-3(x+6)]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Fraccionarias

Cuando aparecen fracciones en la ecuación, se eliminan los denominadores al multiplicar los dos términos de la igualdad por su mínimo común múltiplo.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Encuentra el valor de $x$ en la siguiente ecuación: $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$.

**Solución**

Se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores, en este caso 6:

$$\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x \quad\rightarrow\quad 6\left(\frac{x}{6}+5\right)=6\left(\frac{1}{3}-x\right) \quad\rightarrow\quad \frac{6x}{6}+30=\frac{6}{3}-6x$$

Se simplifica

$$x+30=2-6x$$
$$x+6x=2-30$$
$$7x=-28$$
$$x=-\frac{28}{7}$$

Por consiguiente, el resultado es: $x=-4$

2 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{3z}\left(2-\frac{z}{2}\right)-\frac{2}{3}+\frac{1}{4z}\left(10-\frac{5z}{3}\right)=\frac{1}{z}\left(5+\frac{z}{4}\right)$$

**Solución**

Se eliminan los signos de agrupación,

$$\frac{2}{3z}-\frac{z}{6z}-\frac{2}{3}+\frac{10}{4z}-\frac{5z}{12z}=\frac{5}{z}+\frac{z}{4z} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{3z}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2z}-\frac{5}{12}=\frac{5}{z}+\frac{1}{4}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se multiplican ambos miembros por $12z$, y se resuelve la ecuación que resulta.

$$12z\left(\frac{2}{3z}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2z}-\frac{5}{12}=\frac{5}{z}+\frac{1}{4}\right)$$
$$8-2z-8z+30-5z=60+3z$$
$$-2z-8z-5z-3z=60-8-30$$
$$-18z=22$$
$$z=\frac{22}{-18}$$
$$z=-\frac{11}{9}$$

Finalmente: $z=-\frac{11}{9}$

3 Determina el valor de $y$ en la ecuación:

$$\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{1-9y^2}$$

**Solución**

Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{(1+3y)(1-3y)}$$

Se multiplica por el mínimo común múltiplo que es: $(1+3y)(1-3y)$ y se simplifica:

$$(1+3y)(1-3y)\left[\frac{1+2y}{1+3y}-\frac{1-2y}{1-3y}=-\frac{3y-14}{(1+3y)(1-3y)}\right]$$
$$(1-3y)(1+2y)-(1+3y)(1-2y)=-(3y-14)$$

Se realizan los productos indicados y se resuelve la ecuación:

$$1+2y-3y-6y^2-\left(1-2y+3y-6y^2\right)=-3y+14$$
$$1+2y-3y-6y^2-1+2y-3y+6y^2=-3y+14$$
$$-2y=-3y+14$$
$$-2y+3y=14$$
$$y=14$$

4 Encuentra el valor de $t$ en la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{t^2+5t+6}-\frac{5}{t^2+3t+2}=\frac{3}{t^2+4t+3}$$

**Solución**

Se factorizan los denominadores:

$$\frac{1}{(t+3)(t+2)}-\frac{5}{(t+2)(t+1)}=\frac{3}{(t+3)(t+1)}$$

Se multiplica por $(t+1)(t+2)(t+3)$, se simplifica y resuelve la ecuación:

$$(t+1)(t+2)(t+3)\left[\frac{1}{(t+3)(t+2)}-\frac{5}{(t+2)(t+1)}=\frac{3}{(t+3)(t+1)}\right]$$

$$1(t+1)-5(t+3)=3(t+2)$$

$$t+1-5t-15=3t+6$$

$$t-5t-3t=6+15-1$$

$$-7t=20$$

$$t=-\frac{20}{7}$$

## EJERCICIO **62**

Resuelve las siguientes ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1. $\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x=33$
2. $\frac{5}{2}x-\frac{5}{6}x=\frac{4}{3}$
3. $\frac{5}{6}x-\frac{2}{3}x=-\frac{3}{8}$
4. $\frac{5}{9}x-\frac{5}{3}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$
5. $\frac{4}{3}x-\frac{2}{5}=\frac{7}{5}x-\frac{1}{10}$
6. $\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}=x+\frac{1}{4}$
7. $\frac{5x}{6}-\frac{7}{4}+\frac{2x}{3}=2x-\frac{5}{12}+\frac{x}{3}$
8. $\frac{5x-9}{3}+\frac{x}{2}=10$
9. $\frac{x+10}{9}+\frac{x+7}{3}=7$
10. $\frac{x+1}{6}+\frac{x-3}{3}=\frac{5}{6}$
11. $\frac{9x+12}{4}+\frac{3x-2}{2}=\frac{7}{2}x$
12. $\frac{2x+1}{6}-\frac{x-3}{3}=\frac{4x-1}{3}+\frac{x-6}{2}$
13. $\frac{3x-2}{5}-\frac{2x+1}{10}=\frac{6x-3}{2}-4$
14. $\frac{5}{6}(x+9)+\frac{3}{4}(x+1)-\frac{7}{9}=8$
15. $\frac{1}{2}(z-1)-(z-3)=\frac{1}{3}[z+3]+\frac{1}{2}$
16. $\frac{4}{3x}+\frac{7}{4}=6-\frac{5}{2x}$
17. $\frac{1}{4}+\left(2z-\frac{3z-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{z+2}{6}\right)-2z$
18. $\frac{3}{4}\left(3-\frac{x}{9}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{3}\right)=1-\left(x-\frac{3}{2}\right)$
19. $\frac{2}{x}-\frac{4}{5}=\frac{3}{x}$
20. $\frac{3}{2x}-\frac{7}{5}=\frac{4}{5x}-\frac{5}{2}$
21. $\frac{3}{5x}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2x}=\frac{7}{5}-\frac{9}{4x}$
22. $\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{5x}=\frac{4}{5x^2}-\frac{7}{4x}$
23. $\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{5}{3x^2}-\frac{6}{x}$
24. $\frac{7y-1}{3}-\frac{5-2y}{2y}-\frac{4y-3}{4}=\frac{1+4y^2}{3y}$
25. $\frac{2x+7}{3}-\frac{2(x^2-4)}{5x}=\frac{4x^2-6}{15x}+\frac{7x^2+6}{3x^2}$
26. $\frac{3}{x-5}=\frac{4}{x+5}$
27. $\frac{4}{3x-2}=\frac{6}{2x+1}$
28. $\frac{5}{z-4}-\frac{2}{z+4}=0$
29. $\frac{3}{4x^2-1}-\frac{4}{2x+1}=\frac{5}{2x-1}$
30. $\frac{4}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$
31. $\frac{2}{z^2-4z-12}-\frac{1}{z^2-3z-18}=\frac{4}{z^2+5z+6}$
32. $\frac{2}{2y^2+7y+3}-\frac{1}{2y^2+11y+5}=\frac{1}{y^2+8y+15}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Con valor absoluto

En estas ecuaciones se aplica la definición del valor absoluto.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \quad a < 0 \\ a & \text{si} \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Para resolver una ecuación con valor absoluto, se tiene que si $|x| = a$, su solución está dada por:

$$x = a \qquad \text{o} \qquad -x = a$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $|6 - 3x| = 9$.

**Solución**

Se aplica la definición y se obtienen dos ecuaciones, las cuales se resuelven por separado:

$$\begin{aligned} 6 - 3x &= 9 \\ -3x &= 9 - 6 \\ -3x &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -(6 - 3x) &= 9 \\ -6 + 3x &= 9 \\ 3x &= 9 + 6 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Por consiguiente, las soluciones para esta ecuación son: $x = -1$ o $x = 5$

2 Encuentra el conjunto solución de: $|3x - 1| = 2x + 5$.

**Solución**

Se aplica la definición y se resuelven las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 2x + 5 \\ 3x - 2x &= 5 + 1 \\ x &= 6 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -(3x - 1) &= 2x + 5 \\ -3x + 1 &= 2x + 5 \\ -3x - 2x &= 5 - 1 \\ -5x &= 4 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución es: $\left\{-\frac{4}{5}, 6\right\}$

3 Determina el conjunto solución de: $\left|\frac{x+3}{x}\right| = 2$.

**Solución**

Se aplica la definición y se resuelven las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} &= 2 \\ x + 3 &= 2x \\ x - 2x &= -3 \\ -x &= -3 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad -\left(\frac{x+3}{x}\right) = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{x+3}{x} &= -2 \\ x + 3 &= -2x \\ x + 2x &= -3 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el conjunto solución es $\{-1, 3\}$

4 Determina el conjunto solución de $\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right| = 2.$

**Solución**

Se factorizan las expresiones, se simplifica y se aplica la definición:

$$\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right| = 2 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\right| = 2 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{x-2}{x+3}\right| = 2$$

$$\frac{x-2}{x+3} = 2 \qquad\qquad -\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = 2 \rightarrow \frac{x-2}{x+3} = -2$$

$$x-2 = 2(x+3) \qquad\qquad x-2 = -2(x+3)$$
$$x-2 = 2x+6 \qquad\qquad x-2 = -2x-6$$
$$x-2x = 6+2 \qquad\qquad x+2x = -6+2$$
$$-x = 8 \qquad\qquad 3x = -4$$
$$x = -8 \qquad\qquad x = -\frac{4}{3}$$

Por tanto, el conjunto solución es: $\left\{-8, -\frac{4}{3}\right\}$

# EJERCICIO 63

Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones:

1. $|x+1| = 8$
2. $|3-2y| = 5$
3. $|3m+4| = 8$
4. $|5x-1| = 14$
5. $|4-2y| = 4$
6. $|-2m-5| = 1$
7. $\left|x+\frac{1}{2}\right| = 2$
8. $\left|\frac{m-1}{2m+1}\right| = 0$
9. $|8x+2| = 2-x$
10. $|2x-5| = x+2$
11. $\left|\frac{x+2}{5}\right| = \frac{1}{15}$
12. $\left|\frac{x}{3}-1\right| = \frac{x}{6}+2$
13. $\left|\frac{3x-2}{5}\right| = \frac{1}{2}-\frac{x}{10}$
14. $\left|\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$
15. $\left|\frac{1}{x}-\frac{3}{4}\right| = 2$
16. $\left|\frac{x}{x-3}\right| = 1$
17. $\left|\frac{x+6}{x-2}\right| = 5$
18. $\left|\frac{3x-1}{x}\right| = 1$
19. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\right| = 4$
20. $\left|\frac{3x}{x^2-7x}\right| = 8$
21. $\left|\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\right| = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Con literales

En estas ecuaciones las incógnitas se representan con las letras $x$, $y$, $z$, mientras que las letras $a$, $b$, $c$, $d$, $m$ y $n$, se utilizan como constantes.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Encuentra el valor de $x$ en la ecuación: $8abcx - ab = 8abx + 1$.

**Solución**

$8abcx - ab = 8abx + 1$

$8abcx - 8abx = 1 + ab$ Se agrupan términos en $x$

$x(8abc - 8ab) = 1 + ab$ Se factoriza y se despeja

$$x = \frac{1+ab}{8abc-8ab}$$

2 Determina el valor de $y$ en la ecuación: $a - \frac{m+n}{y} = b - \frac{m-n}{y}$.

**Solución**

$$a - \frac{m+n}{y} = b - \frac{m-n}{y}$$

$$y\left[a - \frac{m+n}{y} = b - \frac{m-n}{y}\right]$$ Se eliminan los denominadores

$ay - (m+n) = by - (m-n)$

$ay - m - n = by - m + n$

$ay - by = -m + n + m + n$ Se agrupan términos

$y(a-b) = 2n$ Se factoriza

$$y = \frac{2n}{a-b}$$

3 Resuelve la ecuación $1 + \frac{b}{z} = \frac{b}{a} + \frac{a}{z}$; para $z$.

**Solución**

Se multiplica la ecuación por $az$, para eliminar los denominadores:

$$az\left[1 + \frac{b}{z} = \frac{b}{a} + \frac{a}{z}\right]$$

$az + ab = bz + a^2$

$az - bz = a^2 - ab$ Se agrupan los términos con $z$

$z(a-b) = a(a-b)$ Se factoriza en ambos miembros y se despeja $z$

$$z = \frac{a(a-b)}{(a-b)}$$ Se simplifica

$z = a$

# EJERCICIO 64

Resuelve las siguientes ecuaciones para las incógnitas *x*, *y* o *z*, según sea el caso:

1. $2b(2a - x) = x(b - a) + a(x + b)$
2. $y^2 + a^2 = (a + y)^2 - a(a + 1)$
3. $a(x + b) - (x + a)^2 = - x^2$
4. $a(b - y) - a(b - 1) = a\,(ay - b)$
5. $\frac{x-m}{x-n} = \left(\frac{2x-m}{2x-n}\right)^2$
6. $\frac{x-m}{n} = 2 - \frac{x-n}{m}$
7. $\frac{x+a}{a} - \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{x+b}{b} - 2$
8. $(y-m)^2 + (m-n)^2 - (y-n)^2 = 0$
9. $(z+m)^3 + (z-m)^3 = 2(z^3 + 6m^3)$
10. $\frac{z+a}{a-b} + \frac{z-a}{a+b} = \frac{z+b}{a+b} - \frac{z-b}{a-b}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Para resolver los siguientes problemas debes tomar en cuenta la relación entre objetos, personas, etc., para establecer una incógnita y un modelo matemático en lenguaje algebraico que al resolverlo dé el valor de dicha incógnita y, por tanto, la solución del problema.

### Problemas sobre números

1 La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en ocho. Encuentra los números.

**Solución**

Datos: número mayor: $x + 8$

Número menor: $x$

Planteamiento:

$x + (x + 8) = 106$ la suma de dos números es 106

$$2x + 8 = 106$$
$$2x = 106 - 8$$
$$2x = 98$$
$$x = \frac{98}{2}$$
$$x = 49$$

Por consiguiente, el número mayor es $49 + 8 = 57$ y el menor es 49

2 La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Determina los números.

**Solución**

Datos:

Mayor: $x$ Medio: $x - 32$ Menor: $x - 65$

Planteamiento:

$x + (x - 32) + (x - 65) = 200$ la suma de los tres números es 200

$$3x = 200 + 32 + 65$$
$$3x = 297$$
$$x = \frac{297}{3}$$
$$x = 99$$

Por tanto, los números buscados son: Mayor = 99 Medio = 67 Menor = 34

Para los siguientes problemas se utiliza la notación desarrollada de un número. Por ejemplo, en el número $372 = 3(100) + 7(10) + 2$, 3 es el dígito de las centenas, 7 el de las decenas y 2 el de las unidades.

3 En un número de dos dígitos, el dígito de las decenas es 3 unidades menor que el de las unidades. Si el número excede en 6 al cuádruplo de la suma de sus dígitos, halla el número.

**Solución**

Datos:

Dígito de las unidades: $x$
Dígito de las decenas: $x - 3$
Número: $10(x - 3) + x$

Planteamiento:

Número = 4(suma de los dígitos) + 6

$10(x - 3) + x = 4(x + x - 3) + 6$

Se resuelve la ecuación:

$$10x - 30 + x = 4x + 4x - 12 + 6$$
$$10x + x - 4x - 4x = -12 + 6 + 30$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

El dígito de las unidades es 8 y el de las decenas es 5, por tanto, el número es 58.

4 La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 9. Si el número se divide por el dígito de las decenas, el cociente es 12. Encuentra el número.

**Solución**

Datos:

Dígito de las unidades: $x$

Dígito de las decenas: $9 - x$

Número: $10(9 - x) + x$

Planteamiento:

$$\frac{\text{Número}}{\text{Dígito de las decenas}} = 12$$

$$\frac{10(9 - x) + x}{9 - x} = 12$$

Resolviendo la ecuación:

$$10(9 - x) + x = 12(9 - x)$$
$$90 - 10x + x = 108 - 12x$$
$$-10x + x + 12x = 108 - 90$$
$$3x = 18$$
$$x = 6$$

El dígito de las unidades es 6 y el de las decenas es 3, por tanto, el número es 36

## EJERCICIO **65**

Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.
2. La diferencia de dos números es 17 y la suma de ambos es 451. Determina los números.
3. La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determina los números.
4. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 45. Encuentra los números.
5. La diferencia de dos números es 36 y un medio del mayor excede en dos al menor. Determina los números.
6. La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?
7. Un número excede en seis a otro y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.

8. Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Determina los números.
9. El exceso de un número sobre 20 es igual a las tres cuartas partes del mismo número. ¿Cuál es el número?
10. El exceso de 30 sobre un número es igual a las dos terceras partes del número, más 10 unidades. ¿Cuál es el número?
11. La suma de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 40. ¿Cuáles son los números?
12. La suma de dos números y la diferencia de sus cuadrados es 11. ¿Cuáles son los números?
13. El cuadrado del exceso de 12 sobre un número, menos la mitad del número, es igual al cuadrado del número, menos los trece medios del número. ¿Cuál es el número?
14. Un número es el doble de otro, si ambos se aumentan en 6, el triple del mayor equivale a cinco veces el menor. Encuentra los números.
15. Un número es la tercera parte de otro, si ambos se aumentan en 10, el mayor será el doble del menor. Determina los números.
16. La suma de tres números es 45, el mayor excede en 5 al mediano y en 10 al menor. Encuentra los números.
17. La suma de dos números es 60 y el mayor equivale cinco veces el menor aumentado en 30. Determina los números.
18. La suma de dos números es 23 y el doble del mayor excede en 6 al triple del menor. ¿Cuáles son los números?
19. La diferencia de dos números es 8 y si se divide el doble del mayor más dos entre el menor, se obtiene como cociente 5. Encuentra los números.
20. Dos números están en la relación 3:4 y el mayor equivale al menor aumentado en 8. Determina los números.
21. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es igual a 8. Si los dígitos se invierten, el número resultante excede en 11 a las seis quintas partes del número original. ¿Cuál es el número?
22. En un número de dos cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades. Si al número se resta 4, el resultado es el séxtuplo de la suma de sus dígitos. Determina el número.
23. En un número de dos cifras el dígito de las decenas es 4 menos que el dígito de las unidades. Si los dígitos se invierten, el número resultante es el triple más 6 del número original. Encuentra el número.
24. La suma de los dígitos de una cantidad de dos cifras es 9. Si los dígitos se invierten, el número que resulta excede en 9 al número original, ¿cuál es el número?
25. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede al de las unidades en 5 y las dos terceras partes de la suma de sus cifras es 6. ¿Cuál es el número?
26. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Si el número supera en 5 al triple de la suma de sus dígitos, ¿cuál es el número?
27. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si se resta 18 al número formado al invertir el orden de los dígitos del número original, el resultado es la mitad del número original, determina el número.
28. En una cantidad de dos dígitos, el número que ocupa el lugar de las decenas es la mitad del dígito que ocupa el lugar de las unidades. El mismo número es igual a la suma de ocho veces el dígito de las decenas, más cuatro veces el de las unidades reducido en dos. ¿Cuál es la cantidad?
29. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 16 y el cociente del número original con el número que resulta al invertir los dígitos es uno, con un residuo de 18. ¿Cuál es el número?
30. En un número de dos cifras, el dígito de las unidades equivale a las $\frac{2}{3}$ partes del dígito de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 6 y el residuo 6, halla los números.
31. En un número de tres cifras, el dígito de las unidades excede en tres al de las centenas y la suma de los tres dígitos es 7. Si se invierten los dígitos de las decenas y las centenas el número resultante excede en 90 al original. Encuentra el número.
32. En un número de tres cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades y en 4 al de las centenas. Si se invierten el dígito de las unidades y el de las centenas, el número que resulta es 66 unidades menor que el doble del número original. ¿Cuál es el número?

33. En un número de tres cifras el dígito de las decenas es la mitad del dígito de las unidades, mientras que el de las centenas es el sucesor del dígito de las decenas. Si se intercambia el dígito de las decenas por el de las centenas el número obtenido es 44 unidades menor que treinta veces la suma de los dígitos. Determina el número.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

### Problemas sobre edades

1 La edad de Carla excede en 3 años a la de Daniel y el doble de la edad de Carla más 12 años equivale al triple de la de Daniel. Determina ambas edades.

**Solución**

Datos:

Edad de Carla: $x$
Edad de Daniel: $x - 3$

Planteamiento:

2(Edad de Carla) + 12 años = 3(Edad de Daniel)

$$2x + 12 = 3(x - 3)$$

Se resuelve la ecuación:

$$2x + 12 = 3(x - 3) \quad \rightarrow \quad 2x + 12 = 3x - 9$$
$$2x - 3x = -9 - 12$$
$$-x = -21$$
$$x = 21$$

Por tanto, Carla tiene 21 años y Daniel 18.

2 La edad de Antonio es el doble de la edad de Ramiro y dentro de 6 años será de $\frac{5}{3}$. ¿Cuáles son sus edades?

**Solución**

| Datos: | Edades actuales: | Dentro de 6 años: |
|---|---|---|
| Antonio | $2x$ | $2x + 6$ |
| Ramiro | $x$ | $x + 6$ |

Planteamiento:

$$2x + 6 = \frac{5}{3}(x + 6)$$

Resolvemos la ecuación:

$$3(2x + 6) = 5(x + 6)$$
$$6x + 18 = 5x + 30$$
$$6x - 5x = 30 - 18$$
$$x = 12$$

Finalmente, la edad de Ramiro es 12 años y la de Antonio es 24

## EJERCICIO 66

Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de las edades de Andrés, Carlos y Rodolfo es de 90 años. La edad de Andrés excede en 4 años a la edad de Carlos y en 11 a la de Rodolfo. Determina las edades de los tres.
2. La edad de Fabiana es la tercera parte de la edad de Hilda y la edad de Cecilia es el doble de la edad de Fabiana. Si la suma de sus edades es de 72 años, determina la edad de Cecilia.
3. La edad de Tania excede en 6 a la de Luz, y la edad de María es la semisuma de las edades de Tania y Luz. Si la suma de sus edades es 42, determina las edades de Tania, Luz y María.
4. Carlos tiene 18 años y Juan 42, ¿en cuántos años la edad de Juan será el doble de la de Carlos en ese entonces?

5. La edad de Carlos es el triple de la de Mauricio y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Carlos y Mauricio.
6. La edad actual de Bárbara es la mitad de la de Patricia. Si dentro de veinte años la edad de Patricia superará en 8 la de Bárbara, determina las edades actuales.
7. Ignacio tiene 70 años y Álvaro 28. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Ignacio era el triple de la de Álvaro?
8. Hace 6 años la edad de Alejandra era el triple de la de Omar y dentro de 4 años será el doble. Determina sus edades actuales.
9. Gabriela le dice a Samanta: "Si a mi edad le restas 4 años y a la de Angélica 12 nuestras edades serían iguales, ¿cuántos años tengo si mi edad es la mitad de la de Angélica?"
10. Héctor le dice a María: "Mi abuelo es 40 años más grande que yo y un cuarto de la suma de nuestras edades equivale a mi edad. ¿Cuántos años tengo?"
11. La edad de Guillermo excede en 12 a la de Patricia y hace 7 años la edad de Patricia era $\frac{3}{4}$ de la edad de Guillermo. Halla las edades de Guillermo y Patricia hace 7 años.
12. La edad de Camilo supera en 20 años a la de Joaquín y equivale a $\frac{3}{2}$ de la edad de Julián. Si la suma de las edades de Camilo, Joaquín y Julián es de 60 años, ¿cuáles son sus edades?
13. La edad de Iván es $\frac{3}{5}$ de la de Antonio y hace 5 años era la mitad, determina ambas edades.
14. La edad de Luciana son los tres quintos de la edad de Mariana, si dentro de 10 años Luciana tendrá siete décimos de la edad que tenga Mariana en ese entonces, ¿cuántos años tiene Luciana?
15. Hace 5 años la edad de Juan Carlos era dos tercios de la de Daniel y dentro de 5 años será cuatro quintos. Halla las edades actuales.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

### Problemas sobre mezclas

1 Un tanque contiene 80 litros de agua al 5% de sal. ¿Cuánta agua deberá agregarse para tener agua al 2% de sal?

**Solución**

Datos:

Planteamiento:
Éste se obtiene con la cantidad de sal de cada recipiente:

$$5\% \text{ de } 80 = 2\% \text{ de } (80 + x)$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{5}{100}(80) = \frac{2}{100}(80 + x) \quad \rightarrow \quad 5(80) = 2(80 + x)$$

$$400 = 160 + 2x$$
$$400 - 160 = 2x$$
$$240 = 2x$$
$$120 = x$$

Esto significa que se deberán agregar 120 litros de agua para obtener agua al 2% de sal.

2 ¿Cuántos litros de una solución al 15% de alcohol se deben agregar a otra al 6% para obtener 180 litros de una nueva solución al 10% de alcohol?

**Solución**

Datos:

Planteamiento:
Éste se obtiene con la cantidad de alcohol de cada recipiente:

$$15\% \text{ de } x + 6\% \text{ de } (180 - x) = 10\% \text{ de } 180$$

Planteamos la ecuación y la resolvemos:

$$\frac{15}{100}x + \frac{6}{100}(180 - x) = \frac{10}{100}(180) \quad \rightarrow \quad 15x + 6(180 - x) = 10(180)$$

$$15x + 1\,080 - 6x = 1\,800$$
$$9x = 720$$
$$x = 80$$

Se deben combinar 80 litros al 15% de alcohol con 100 litros al 6% para obtener 180 litros al 10% de alcohol.

## EJERCICIO 67

Resuelve los siguientes problemas:

1. A 120 litros de agua azucarada al 3%, ¿cuánta agua se debe evaporar para aumentar su concentración a 5%?
2. A 80 litros de agua al 1.5% de sal, ¿cuánta agua deberá agregarse para disminuir su concentración al 1%?
3. ¿Cuánto ácido clorhídrico se debe agregar a 120 gr de una solución al 60% del ácido para obtener una nueva solución con 70%?
4. Si se tienen 120 litros de una solución que contiene azúcar al 5%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para obtener una solución al 2%?
5. De 50 litros de agua al 4% de sal, ¿qué cantidad de agua se debe evaporar para obtener una nueva solución al 5%?
6. Un radiador contiene 1.5 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si 30% de la mezcla es anticongelante, ¿cuántos litros de anticongelante puro se deben añadir para que en la nueva mezcla represente 50%?
7. Se tienen 18 onzas de una mezcla de agua hervida y leche de fórmula al 20%. Si se desea una mezcla al 15% de leche de fórmula, ¿cuántas onzas de agua hervida hay que agregar?
8. En una empresa que fabrica material médico se utiliza alcohol etílico al 10% para limpiar las áreas de producción. Si al almacén llega un contenedor de 20 lt con alcohol etílico al 15%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para poder obtener el alcohol al 10%?
9. Un farmacéutico debe preparar 75 ml de una solución con un ingrediente activo al 2%. Si sólo tiene en existencia soluciones al 4 y 1%, ¿cuánto de cada solución deberá mezclar para la elaboración de la nueva solución al 2%?
10. Se requieren 100 ml de una solución al 3.5% de alcohol, si sólo se tienen disponibles soluciones al 5 y 2%, ¿qué cantidad de cada solución deberá mezclarse para obtener la solución requerida?
11. ¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 30% deben combinarse con otra al 3% para obtener 30 litros de una nueva solución al 12%?

12. Mario quiere mezclar una aleación de plata al 30%, con otra al 80% para lograr una nueva aleación al 60%. Si hay 30 onzas más de la aleación al 80% que de la de 30%, ¿cuántas onzas hay de cada aleación?
13. Una planta procesadora de alimentos dispone de dos tipos de mermelada, una con 56% y otra con 80% de azúcar. Si desea producir 2 400 litros de mermelada al 70% de azúcar, ¿cuánta de cada tipo deberá utilizar?
14. Se mezclan 12 000 gramos de una aleación de cobre con 8 000 gramos de otra que contiene 30% menos que la primera, y se obtiene una aleación con 80% de cobre, ¿qué porcentaje de cobre hay en cada aleación?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

## Problemas sobre monedas

En este tipo de problemas se toma en cuenta que el producto del número de billetes, monedas, etc…, por su denominación nos da el valor monetario.

1 Carmen tiene \$110 en monedas de \$10 y \$5, el número de monedas de \$10 excede en 2 a las de \$5, ¿cuántas monedas de \$10 y de \$5 tiene Carmen?

**Solución**

Datos:
Número de monedas de \$10: $x$
Número de monedas de \$5: $x - 2$
Planteamiento:
La suma de los productos del número de monedas por la denominación de la moneda nos da el total:

$$\text{(denominación) (monedas de \$10) + (denominación) (monedas de \$5) = total}$$
$$10x + 5(x - 2) = 110$$

Resolución:

$$10x + 5(x - 2) = 110 \quad \rightarrow \quad 10x + 5x - 10 = 110$$
$$10x + 5x = 110 + 10$$
$$15x = 120$$
$$x = 8$$

Carmen tiene 8 monedas de \$10 y 6 monedas de \$5.

2 Carla retira del banco \$5 000, en billetes de \$500, \$200 y \$100. Si el número de billetes de \$200 excede en 3 a los de \$100, y el número de billetes de \$100 es el doble de los de \$500, ¿cuántos billetes de cada denominación recibió Carla?

**Solución**

Datos:
Billetes de \$200: $x$
Billetes de \$100: $x - 3$
Billetes de \$500: $\frac{x-3}{2}$

Planteamiento:

$$200x + 100(x - 3) + 500\left(\frac{x-3}{2}\right) = 5\,000$$

Se resuelve la ecuación:

$$200x + 100(x - 3) + 250(x - 3) = 5\,000$$
$$200x + 100x - 300 + 250x - 750 = 5\,000$$
$$200x + 100x + 250x = 5\,000 + 300 + 750$$
$$550x = 6\,050$$
$$x = 11$$

Carla recibió 11 billetes de \$200, 8 de \$100 y 4 de \$500.

## EJERCICIO 68

Resuelve los siguientes problemas:

1. Marcos ahorró \$3 270 en monedas de \$10, \$5 y \$2. Si el número de monedas de \$10 excede en 20 a las de \$5 y en 15 a las de \$2, ¿cuántas monedas de \$5 pesos tiene Marcos?
2. Paulina tiene \$9 300 en billetes de \$1 000, \$500 y \$200. Si el número de billetes de \$500 excede en 2 a los de \$1 000 y en 3 a los de \$200, ¿cuántos billetes de cada denominación tiene Paulina?
3. Andrés tiene 30 monedas de \$5 y \$10. Si en total dispone de \$200, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
4. Juan tiene 400 monedas de 50¢ y \$1. Si en total dispone de \$350, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
5. Se desea repartir \$210 en monedas de \$20, \$10 y \$5, de tal forma que el número de monedas de cada denominación sea el mismo. ¿Cuántas monedas se necesitan de cada denominación?
6. Se desea tener \$2 600 en billetes de \$200, \$100 y \$50, de tal manera que el número de billetes de mayor denominación sea uno más que los de mediana denominación y dos más que los de menor denominación, ¿cuántos billetes de cada denominación se tendrá?
7. Gloria tiene el triple de monedas de \$5 que de \$10 y 10 monedas más de \$2 que de \$5. Si en total dispone de \$392, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?
8. Iván da a su hijo \$90 en monedas de \$2 y 50¢, si el número de monedas de \$2 es la mitad del número de monedas de 50¢, ¿cuántas monedas de \$2 pesos le da a su hijo?
9. Fabián tiene 12 monedas de \$5 y 33 de \$2, al llegar el día domingo su papá le da el doble número de monedas de \$2 que de \$5, Fabián se da cuenta que tiene la misma cantidad de dinero en monedas de \$2 que de \$5, ¿cuántas monedas de \$2 y de \$5 le dio su papá?
10. Sergio es conductor de un transporte colectivo y cambia en el banco \$795 por monedas de \$5, \$2, \$1 y de 50¢. Al separar las monedas de acuerdo con su denominación se da cuenta que el número de monedas de \$5 es la tercera parte del número de monedas de \$2, la mitad de las de \$1 y el doble de 50¢, ¿cuántas monedas de \$5 tiene?
11. Ricardo cambia un cheque de \$6 400 por billetes de \$200, \$100, \$50 y \$20, y le pide al cajero que el número de billetes de \$200 sea la mitad de los de \$100, la cuarta parte de los de \$50 y la décima parte de los de \$20, ¿cuántos billetes de \$200 recibirá?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

### Problemas sobre costos

1 Sandra pagó \$66 por una pasta dental, un jabón y un champú. Si el costo de la pasta excede en \$15 al del jabón y en \$3 al del champú, determina el costo de cada uno de los artículos.

**Solución**

Datos:
Costo de la pasta para dientes: $x$
Costo del jabón: $x - 15$
Costo del champú: $x - 3$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$x + (x - 15) + (x - 3) = 66 \quad \rightarrow \quad 3x - 18 = 66$$
$$3x = 66 + 18$$
$$3x = 84$$
$$x = \frac{84}{3}$$
$$x = 28$$

Por tanto, los costos de los artículos son: pasta dental \$28, jabón \$13, champú \$25.

2 Cierta escuela pidió el presupuesto para la fotografía de graduación de un grupo de 30 alumnos. Al momento de realizar el trato con el estudio fotográfico se avisa que serán 10 alumnos más, si el estudio respeta el precio total y disminuye en $50 el costo de la fotografía por persona, ¿cuál hubiese sido el costo $x$ de la fotografía por alumno para el grupo de 30 alumnos?

**Solución**

Datos:
El costo total para un grupo de 30 alumnos es: $30x$
El costo total para un grupo de 40 alumnos es: $40(x - 50)$
Debido a que el costo total es el mismo, entonces:

$$30x = 40(x - 50)$$

Se resuelve la ecuación:

$$30x = 40x - 2\,000 \quad \rightarrow \quad 30x - 40x = -2\,000$$
$$-10x = -2\,000$$
$$x = \frac{-2000}{-10}$$
$$x = 200$$

Por tanto, el costo de la fotografía para un grupo de 30 alumnos es de $200 por cada uno.

3 El costo de producción por ejemplar de una revista semanal es de 28 centavos. El ingreso del distribuidor es de 24 centavos por copia más 20% de los ingresos por concepto de publicidad anunciada en la revista cuando sobrepasan las 3 000 copias. ¿Cuántas copias deben publicarse y venderse cada semana para obtener utilidades semanales de $1 000?

**Solución**

Sea $x$ el número de ejemplares, el 20% de los ingresos es $\frac{20}{100}\left(\frac{24}{100}x\right) = \frac{6}{125}x$ cuando sobrepasan las 3 000 copias

Costo total por semana = $ $\frac{28}{100}(x + 3000)$

Ingreso total por semana = $ $\left[\frac{24}{100}(x + 3000) + \frac{6}{125}x\right]$

Se sabe que:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

Por tanto,

$$\left[\frac{24}{100}(x + 3000) + \frac{6}{125}x\right] - \frac{28}{100}(x + 3000) = 1\,000$$

Se resuelve la ecuación:

$$500\left\{\left[\frac{24}{100}(x + 3\,000) + \frac{6}{125}x\right] - \frac{28}{100}(x + 3\,000) = 1\,000\right\}$$
$$500\left\{-\frac{4}{100}(x + 3\,000) + \frac{6}{125}x = 1\,000\right\}$$
$$-20(x + 3\,000) + 24x = 500\,000$$
$$-20x - 60\,000 + 24x = 500\,000$$
$$4x = 500\,000 + 60\,000$$
$$x = \frac{560\,000}{4}$$
$$x = 140\,000$$

El distribuidor deberá vender 140 000 ejemplares para obtener utilidades de $1 000 semanales.

# EJERCICIO 69

Resuelve los siguientes problemas:

1. Julio pagó por un traje, una camisa y unos zapatos, $2 700. Si la camisa cuesta la sexta parte del traje y los zapatos cuestan el doble de la camisa, ¿cuál es el precio de los zapatos?
2. Alejandra compró una chamarra, una blusa y un pantalón. El pantalón costó la mitad de la chamarra y la blusa las tres décimas partes del costo del pantalón. Si en total pagó $1 320, ¿cuál fue el costo de cada prenda?
3. Adriana pagó por su reinscripción, colegiatura y un examen extraordinario, $6 400. Si el examen cuesta las dos quintas partes de la inscripción y las dos novenas partes de la colegiatura, ¿cuánto paga de colegiatura?
4. Una empresa compró automóviles para tres de sus gerentes. El primer automóvil costó el doble del segundo más $25 000 y el tercero $18 000 menos que el primero. Si la empresa invirtió $432 000, ¿cuál es el precio de cada automóvil?
5. Jazmín ganó el martes el doble de lo que ganó el lunes; el miércoles, el doble de lo que ganó el martes; el jueves, el doble de lo que ganó el miércoles; el viernes, $30 menos que el jueves y el sábado $10 más que el viernes. Si en los seis días Jazmín ganó $1 500, ¿cuánto ganó el miércoles?
6. Una computadora y un escritorio costaron $15 100, si por el escritorio se pagó la sexta parte de la computadora más $400, determina el precio de cada uno.
7. En el curso de álgebra un profesor pidió resolver 16 problemas al alumno más destacado de la clase, con la condición de que por cada problema resuelto correctamente el estudiante recibiría $30, y por cada problema erróneo, perdería $10. Después de resolver los 16 problemas, el profesor le pagó $240. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente el alumno?
8. Luis dice: "Si triplico mi dinero y pago $2 600 de una deuda me quedarían $13 000". ¿Cuánto dinero tiene Luis?
9. "Compré 20 discos por cierta cantidad, si hubiera adquirido 4 discos más por la misma cantidad, el costo de cada disco disminuiría en $60. ¿Cuál es el precio de cada disco?" (Sugerencia: sea $x$ el precio de los 20 discos).
10. El salario básico de un profesor es de $40 por hora, pero recibe un tanto y medio de esta cuota por cada hora cuando rebasa las 40 horas por semana. Si el cheque que recibe es de $2 800, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó durante la semana?
11. El precio de 30 kg de una mezcla de dos tipos de arroz es de $10.20 por kilogramo. Si uno de los tipos de arroz vale $9.30 el kilogramo y el otro $12, ¿cuántos kilogramos de cada tipo de este grano hay en la mezcla?
12. Las entradas para el espectáculo de un circo cuestan $60 para adulto y $40 para niño. Si una familia pagó $320 por seis boletos, ¿cuántos boletos de cada clase compró?
13. En un partido de futbol se vendieron 12 000 boletos y se recaudaron $800 000. Si los precios eran de $60 y $80, ¿cuántos boletos se vendieron de cada clase?
14. Juan mezcla tres tipos de café, el primero tiene un precio de $100 el kilogramo, el segundo de $70 y el tercero de $105. La mezcla pesa 20 kilogramos y la vende en $90 el kilogramo. Si la cantidad del grano de $70 es el doble que la del café de $100, ¿cuántos kilogramos utilizó de cada grano?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

## Problemas sobre el tiempo requerido para realizar un trabajo

1 Un estanque se llena por una de dos llaves en 4 horas y la segunda lo llena en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo?

**Solución**

| Datos: | Tiempo total de llenado: | En una hora, el estanque estará lleno en: |
|---|---|---|
| Primera llave | 4 horas | $\frac{1}{4}$ de su capacidad |
| Segunda llave | 6 horas | $\frac{1}{6}$ de su capacidad |
| Las dos llaves | $x$ horas | $\frac{1}{x}$ de su capacidad |

Planteamiento:

En una hora las dos llaves llenarán $\frac{1}{x}$ de la capacidad del estanque:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad 12x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}\right) \quad \rightarrow \quad 3x+2x=12$$

$$5x=12$$

$$x=2.4$$

2.4 horas equivalen a 2 horas, .4(60) = 24 minutos

Por consiguiente, las dos llaves tardarán 2 horas y 24 minutos en llenar el estanque.

2 Para la recolección de trigo se utilizan dos cosechadoras, la primera tarda 8 horas y las dos juntas tardan 4.8 horas, ¿cuánto tiempo tardará la segunda en recolectar el trigo?

**Solución**

Sea $x$ el tiempo que tarda la segunda cosechadora en recolectar el trigo, entonces:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4.8} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{4.8}-\frac{1}{8}$$

Se resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{24}-\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad 24=5x-3x \quad \rightarrow \quad 24=2x$$

$$x=12$$

Resulta que la segunda cosechadora tardará 12 horas en recolectar el trigo.

## EJERCICIO **70**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un estanque se llena con una de dos llaves en 3 horas y con la segunda en 2 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren las dos llaves?
2. Cierto trabajo lo puede realizar Damián en 4 horas y Beatriz en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo realizan ambos?
3. Una tortillería produce por día 350 kilogramos con la máquina A, con la máquina B la misma producción se obtiene en dos días, si se ponen a trabajar ambas máquinas, ¿cuánto tiempo tardarán en producir los 350 kilos de tortilla?
4. Para envasar leche se utilizan dos máquinas, la primera envasa 2 400 botes en 4 horas y la segunda envasa la misma cantidad en 8 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar los 2 400 botes de leche ambas máquinas?
5. Para sacar 20 000 copias se tienen tres copiadoras, la primera tarda 6 horas, la segunda 8 horas y la tercera 4 horas; si se utilizan las tres copiadoras, ¿cuánto tiempo tardarán en realizar esta tarea?

6. Un productor de leche puede vaciar un contenedor con una llave de desagüe en 12 horas; este recipiente puede ser llenado con una llave en 4 horas y con una segunda llave en 6 horas. Si el contenedor inicialmente está vacío y se abren las tres llaves simultáneamente, ¿en cuánto tiempo se puede llenar?
7. Cierta producción de tornillos se realiza por la máquina serie *A* en una hora 20 minutos, y por las máquinas series *A* y *B* en 1 hora, ¿cuánto tiempo tardaría la máquina serie *B* en realizar la producción de tornillos?
8. Una pipa de 1 500 litros de capacidad tiene dos llaves y un desagüe. La primera llave la llena en 45 minutos, la segunda en 30 y el desagüe la vacía en 60 minutos. Si la pipa está vacía y se abren las dos llaves y el desagüe, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse la pipa?
9. Tania y José van a construir cierta cantidad de juguetes que se conforman de tres piezas cada uno. Tania los construye en 2 horas y media y ambos tardan una hora 54 minutos, ¿cuánto tardará José en construir los juguetes?
10. En una escuela se tienen que hacer juegos de cuatro hojas cada uno para formar 1 200 exámenes, para ello se forman dos grupos de 3 personas; el primer grupo tardará tres horas 40 minutos, mientras que los dos grupos tardarán 3 horas, ¿cuánto tiempo tardará el segundo grupo en terminar los 1 200 exámenes?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

## Problemas sobre comparación de distancias y tiempos

En este tipo de problemas se utilizan las siguientes fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme:

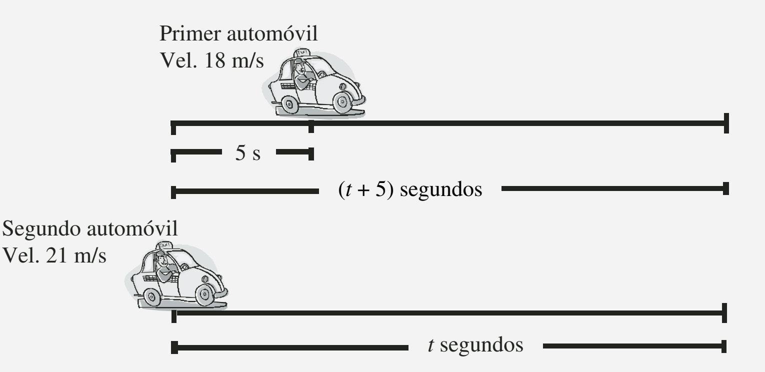
$$v = \frac{d}{t} \qquad d = vt \qquad t = \frac{d}{v}$$

Éstas se usan para determinar la velocidad, distancia y el tiempo, respectivamente.

1 Un automóvil con velocidad constante de 21 m/s sale de la meta 5 segundos después que un automóvil, cuya velocidad constante es de 18 m/s, ¿cuánto tiempo transcurre para que el segundo alcance al primero?

**Solución**

Datos:




Planteamiento:

Las distancias recorridas son las mismas, pero cada automóvil con distinto tiempo, si $d = vt$, entonces:

Distancia recorrida por el primer automóvil = distancia recorrida por el segundo automóvil

$$18(t + 5) = 21(t)$$

Se resuelve la ecuación:

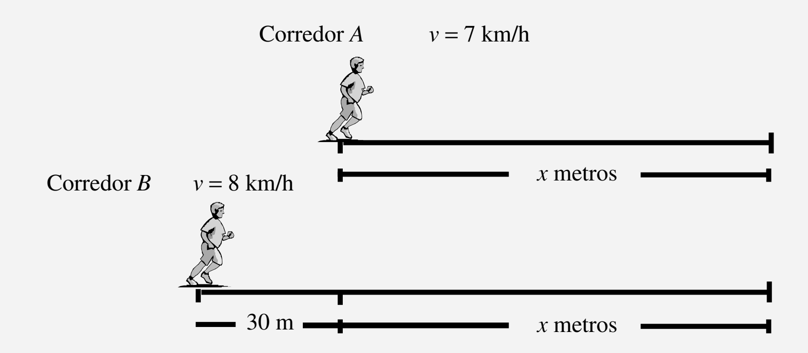
$$18(t + 5) = 21(t) \quad \rightarrow \quad 18t + 90 = 21t$$
$$90 = 21t - 18t$$
$$90 = 3t$$
$$30 = t$$

Esto indica que el segundo automóvil dará alcance al primero en 30 segundos.

2 En cierta competencia de atletismo el corredor $A$ se encuentra a 30 metros adelante del corredor $B$. El corredor $A$ lleva una velocidad constante de 7 km/h y el corredor $B$ lleva una velocidad constante de 8 km/h. Si los dos salen al mismo tiempo, ¿después de cuántos metros el corredor $B$ alcanzará al corredor $A$?

**Solución**

Datos:




Planteamiento:
La distancia en kilómetros para cada corredor es $\frac{x}{1000}$ y $\frac{30+x}{1000}$, respectivamente.

Al momento de salir el tiempo es el mismo para ambos corredores, si $t = \frac{d}{v}$, entonces;

tiempo para el corredor $A$ = tiempo para el corredor $B$

$$\frac{\frac{x}{1000}}{7} = \frac{\frac{30+x}{1000}}{8}$$

Se resuelve la ecuación:

$$\frac{x}{7000} = \frac{30+x}{8000} \quad \rightarrow \quad 8x = 7(30+x) \quad \rightarrow \quad 8x = 210 + 7x$$

$$8x - 7x = 210$$
$$x = 210$$

El corredor $B$ recorre 210 + 30 = 240 metros antes de alcanzar al corredor $A$

## EJERCICIO 71

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un automóvil que viaja a 60 m/s pasa por el punto $A$ 12 segundos antes de que un automóvil que viaja a 80 m/s pase por el mismo punto, ¿cuánto tiempo transcurre antes de que el segundo automóvil alcance al primero?
2. Dos personas se encuentran a una distancia de 55 metros, ¿después de cuánto tiempo se encontrarán si la primera camina a 1 m/s y la segunda a 1.2 m/s?
3. Un automóvil con una velocidad constante de 60 km/h va por la avenida Viaducto, en sentido contrario viaja un segundo automóvil a una velocidad constante de 90 km/h. Si la distancia que los separa es de 25 km, ¿después de cuánto tiempo se cruzarán?
4. Un par de guardabosques tienen aparatos de radiocomunicación, con un alcance máximo de 2 kilómetros. Uno de ellos realiza su recorrido hacia el oeste a las 12:00 p.m. a una velocidad de 4 km/h, mientras que el otro sale de la misma base a las 12:10 p.m. y camina hacia el este a una velocidad de 6 km/h. ¿A qué hora dejan de comunicarse ambos guardabosques?

5. Una lancha que viaja a 12 m/s pasa por debajo de un puente 3 segundos después que un bote que viaja a 9 m/s, ¿después de cuántos metros la lancha alcanzará al bote?
6. Dos automóviles se cruzan en dirección opuesta, si el primero lleva una velocidad de 24 m/s y el segundo una velocidad de 26 m/s, ¿cuántos segundos transcurren cuando los automóviles están a 800 m uno del otro?
7. Un motociclista persigue a un automóvil, el automóvil lleva una velocidad de 80 km/h y la motocicleta 120 km/h. Si el automóvil le lleva una ventaja de 500 m, ¿qué distancia debe recorrer la motocicleta para alcanzarlo?
8. Una persona que viaja a 3.6 km/h pasa por el punto $A$ a las 14:15 p.m.; 18 minutos después pasa un automóvil por el mismo punto a una velocidad de 68.4 km/h, ¿a qué hora alcanza el automóvil a la persona?
9. Dos personas se encuentran a las 8:34 a.m., la primera camina a 1.5 m/s hacia el oeste y la segunda camina hacia el este a 0.5 m/s, ¿a qué hora la distancia entre ellos es de 360 m?
10. Dos automóviles parten en sentido contrario del punto $A$, el primero parte a las 20:12 p.m. con una velocidad constante de 40 km/h y el segundo a las 20:16 p.m. a una velocidad constante de 30 km/h, ¿a qué hora la distancia entre ellos será de 26 km?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

### Problemas de aplicación a la geometría plana

Para los siguientes problemas se toman en cuenta algunos conceptos básicos de geometría. Aquí se proporcionan algunas fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas.

| Figura | Perímetro | Área |
|---|---|---|
| Rectángulo | $P = 2(b + h)$ | $A = bh$ |
| Cuadrado | $P = 4\,l$ | $A = l^2$ |
| Triángulo | $P = l_1 + l_2 + l_3$ | $A = \frac{bh}{2}$ |
| Círculo | $P = 2\pi$ | $A = \pi r^2$ |

$b$ = base, $h$ = altura, $l$ = lado, $r$ = radio

1 Dos ángulos complementarios son aquellos que suman 90°, ¿cuánto mide un ángulo si su complemento es el doble más 15°?

**Solución**

Datos:

Ángulo: $x$

Complemento: $2x + 15°$

Planteamiento:

Ángulo + Complemento = 90°

$$x + (2x + 15°) = 90°$$

Se resuelve la ecuación:

$$x + 2x + 15° = 90°$$
$$3x + 15° = 90°$$
$$3x = 75°$$
$$x = 25°$$

Por tanto, el ángulo es de 25°

2 El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm. Si el lado diferente equivale a $\frac{2}{3}$ de la medida de los lados iguales, ¿cuál es la medida de los lados del triángulo?

**Solución**

Datos:

Medida de los lados iguales: $x$

Medida del lado diferente: $\frac{2}{3}x$

Planteamiento:

Perímetro = suma de los lados = 48

$$x + x + \frac{2}{3}x = 48$$

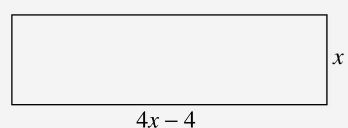
Se resuelve la ecuación:

$$3x + 3x + 2x = 144$$
$$8x = 144$$
$$x = 18$$

Los lados del triángulo isósceles son 18 cm, 18 cm y 12 cm.

3 El largo de un rectángulo mide 4 metros menos que el cuádruple de su ancho y su perímetro mide 32 metros. ¿Cuánto mide el largo?

**Solución**




Datos:
Ancho o altura: $x$
Largo o base: $4x - 4$
Perímetro: 32 metros
La fórmula para hallar el perímetro de un rectángulo es: $P = 2(b + h)$

Se plantea la ecuación y se resuelve:

$$2[x + (4x - 4)] = 32$$
$$2[5x - 4] = 32$$
$$5x - 4 = 16$$
$$5x = 16 + 4$$
$$5x = 20$$
$$x = 4$$

Por tanto, el largo del rectángulo mide:
$4(4) - 4 = 12$ metros

4 Si se aumentan 8 metros a los lados de un cuadrado el área aumenta en 144 $m^2$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?

**Solución**

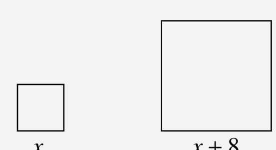
Datos:

Lado del primer cuadrado: $x$

Lado del segundo cuadrado: $x + 8$

Área del primer cuadrado: $x^2$

Área del segundo cuadrado: $(x + 8)^2$




La diferencia de las áreas es igual a 144 $m^2$, se plantea la ecuación y se resuelve:

$$(x + 8)^2 - x^2 = 144$$
$$x^2 + 16x + 64 - x^2 = 144$$
$$16x = 144 - 64$$
$$16x = 80$$
$$x = \frac{80}{16}$$
$$x = 5$$

Por tanto el lado del cuadrado original mide 5 metros.

## EJERCICIO 72

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si uno de dos ángulos complementarios mide 34° más que el otro, ¿cuánto mide el ángulo mayor?
2. Dos ángulos son suplementarios si suman 180°, ¿cuál es la medida del ángulo cuyo suplemento es el triple del ángulo?

3. El largo de un rectángulo mide el triple de su ancho; si el perímetro mide 96 cm, ¿cuáles son sus dimensiones?
4. El largo de un rectángulo mide diez metros más que el doble de su ancho y su perímetro mide 164 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?
5. El ancho de un rectángulo mide cinco metros menos que la cuarta parte de su largo y su perímetro mide 80 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?
6. El perímetro de un triángulo escaleno mide 23 metros. Si uno de los lados mide dos metros menos que el doble del segundo lado y tres metros más que el tercer lado, ¿cuánto mide cada lado?
7. La base de un triángulo mide 36 cm y su área 144 $cm^2$. ¿Cuánto mide la altura?
8. Un trozo de madera de 14 cm se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es las dos quintas partes de longitud de la otra, ¿cuál es la longitud de cada parte?
9. Una cuerda de 75 cm se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es las tres quintas partes del total de la cuerda.
   - Si con el trozo más pequeño se forma una circunferencia, determina su radio.
   - Si con el trozo de mayor longitud se forma un cuadrado, calcula la longitud de uno de sus lados.
10. Si se aumentan ocho metros a cada lado de un cuadrado el área aumenta 160 $m^2$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?
11. El largo de un rectángulo mide el doble de su ancho. Si se aumentan cuatro metros a cada lado el área aumenta 124 $m^2$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?
12. El largo de un rectángulo mide cinco metros menos que el triple de su ancho. Si se aumentan 10 metros al largo el área aumenta 60 $m^2$. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo?
13. La diferencia entre las áreas de dos círculos es de 209 $\pi m^2$. Si el radio del círculo mayor mide once metros más que el radio del círculo menor, ¿cuánto mide el radio del círculo mayor?
14. El área de un rectángulo es de $24u^2$ con un ancho de $x$. Si el largo se aumenta en 3 y no cambia el ancho, el área resultante es de $33u^2$. Determina las dimensiones del rectángulo inicial.
15. La base de un triángulo excede en dos a su altura; si la base se disminuye en 3 y la altura se aumenta en 2, el área del nuevo triángulo es $3u^2$ menor que el área del triángulo original. Determina las dimensiones del triángulo original
16. Se desea mandar a diseñar una ventana Normanda (forma de rectángulo bajo un semicírculo). El ancho es de tres metros, pero la altura $h$ todavía no se define. Si para dicha ventana se utilizan 24 $m^2$ de vidrio, determina la altura del rectángulo $h$.
17. Las dimensiones de un rectángulo están en relación 2:1, si estas dimensiones se aumentan en 3 unidades, el área del nuevo rectángulo excede en $63u^2$ al área del rectángulo inicial, ¿cuál es el largo del rectángulo inicial?
18. El marco de una pintura rectangular mide 5 cm de ancho y tiene un área de 2 300 $cm^2$. El largo de la pintura mide 20 cm menos que el triple de su ancho. Determina las dimensiones de la pintura sin marco.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Despejes de fórmulas

Al inicio del capítulo se habló de que una ecuación es una fórmula para el cálculo de alguna magnitud. En este caso habrá fórmulas que tengan más de una variable que representen ciertas magnitudes y dependerá cuál se quiera conocer para hacer el despeje.

Para despejar una variable bastará con aplicar la operación inversa a cada miembro de la fórmula. Si el término suma, se resta el mismo valor en ambos miembros, si multiplica, se divide, si es una potencia se obtiene una raíz, etcétera.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la fórmula $A = b \cdot h$, despeja $b$.

**Solución**

$A = b \cdot h \quad \rightarrow \quad \frac{A}{h} = b$ Se dividen ambos miembros entre $h$

Por tanto, $b = \frac{A}{h}$

2 Despeja $c$ de la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

**Solución**

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - b^2 = c^2$ Se resta $b^2$ a ambos miembros

$\sqrt{a^2 - b^2} = c$ y se obtiene la raíz cuadrada

Por consiguiente, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3 Despeja $R_1$ en la fórmula $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

**Solución**

$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$ Se resta $\frac{1}{R_2}$ a ambos miembros

$\frac{R_2 - R_t}{R_t \cdot R_2} = \frac{1}{R_1}$ Se resuelve la fracción

$R_1(R_2 - R_t) = 1(R_t \cdot R_2)$ Se multiplica por $R_1(R_t R_2)$

Finalmente, se obtiene: $R_1 = \frac{R_t \cdot R_2}{R_2 - R_t}$ Se divide entre $R_2 - R_t$

4 Despeja $v$ de la fórmula $E = mgh + \frac{mv^2}{2}$.

**Solución**

$E = mgh + \frac{mv^2}{2} \quad \rightarrow \quad E - mgh = \frac{mv^2}{2}$ Se resta $mgh$

$2(E - mgh) = mv^2$ Se multiplica por 2

$\frac{2(E - mgh)}{m} = v^2$ Se divide entre $m$

$\sqrt{\frac{2(E - mgh)}{m}} = v$ Se obtiene la raíz cuadrada

Por tanto, $v = \sqrt{\frac{2(E - mgh)}{m}}$

# EJERCICIO 73

Realiza lo que se indica en cada caso:

1. Despeja $n$ de la fórmula $PV = n\ r\ t$
2. En $P = 2\ell + 2\ \omega$ despeja $\ell$
3. En $y = mx + b$ despeja $m$
4. En $S = \dfrac{a - \ell r}{1 - r}$ despeja $r$
5. Despeja $F$ de $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$
6. Despeja $r$ de $A = \pi r^2$
7. Despeja $b$ de $A = \dfrac{1}{2}h\ (B + b)$
8. En $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ despeja $x_2$
9. Despeja $h$ de la fórmula $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
10. Despeja $F$ de la fórmula $r = \dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2 + C^2 - 4AF}$
11. En $u = a + (n - 1)d$ despeja $d$
12. Despeja $r$ de $u = ar^{n-1}$
13. Despeja $P_0$ de $P = P_0e^{kt}$
14. En $a = \dfrac{{V_f}^2 - {V_0}^2}{2d}$ despeja $V_0$
15. Despeja $m$ de $F = G\dfrac{mM}{r^2}$
16. Despeja $i$ de $M = C(1 + i)^t$
17. En $tg\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$, despeja $m_1$
18. Despeja $x$ de $y = ax^2 + bx + c$
19. En $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p'}$ despeja $p'$
20. Despeja $t$ de $d = Vt + \dfrac{1}{2}at^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 7

## FUNCIÓN LINEAL

Reseña HISTÓRICA

*François Viéte (1540-1603)*

Entre el Renacimiento y el surgimiento de la matemática moderna (s. XVII), se desarrolló un periodo de transición en el que se asentaron las bases de disciplinas como el álgebra, la trigonometría, los logaritmos y el análisis infinitesimal. La figura más importante de este periodo fue el francés François Viéte.

Considerado uno de las padres del álgebra, desarrolló una notación que combina símbolos con abreviaturas y literales. Es lo que se conoce como álgebra sincopada, para distinguirla del álgebra retórica utilizada en la antigüedad y el álgebra simbólica que se usa en la actualidad.

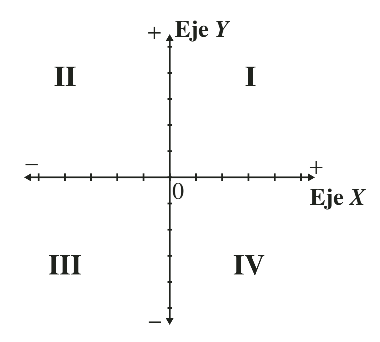
Uno de sus hallazgos más importantes fue establecer claramente la distinción entre variable y parámetro, lo que le permitió plantear familias enteras de ecuaciones con una sola expresión y así abordar la resolución de ecuaciones con un alto grado de generalidad, en lo que se entendió como una aritmética generalizada.

François Viéte (1540-1603)

## Plano cartesiano

El plano cartesiano se forma con dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de eje $X$ o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje $Y$ o eje de las ordenadas.

El plano cartesiano se divide en cuatro regiones llamadas "cuadrantes". A cada punto $P$ se le asigna un par ordenado o coordenada $P(x, y)$.

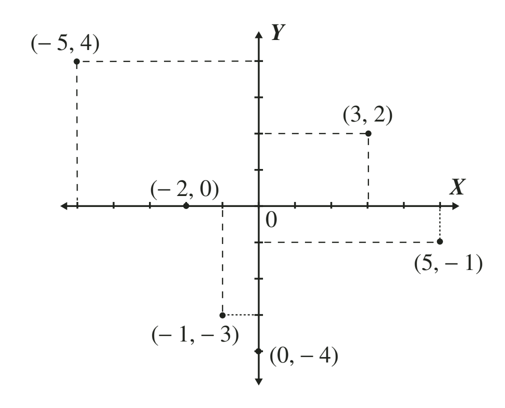



### Localización de puntos

Para localizar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano se toma como referencia el origen, se avanza tanto como lo indica el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda, según sea su signo, de ese punto se avanza hacia arriba o hacia abajo, tanto como lo indica el segundo número (ordenada) según sea su signo.

**Ejemplo**

Grafica los puntos: (– 5, 4), (3, 2), (– 2, 0), (– 1, – 3), (0, – 4) y (5, – 1) en el plano cartesiano.




## EJERCICIO 74

Localiza en el plano cartesiano y une los puntos:

1. $A(3, -1)$ y $B(4, 3)$
2. $A(0, 2)$ y $B(3, 0)$
3. $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -3)$
4. $A(0, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(-3, -4)$
5. $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -3)$ y $D(4, 2)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Función

Es la relación que existe entre dos conjuntos, de manera que a los elementos de $x$ les corresponde a lo más un elemento de $y$. Se denota por:

$$y = f(x)$$

Se lee, $y$ es igual a $f$ de $x$
donde: $x$: variable independiente
$y$: variable dependiente
$f(x)$: regla de correspondencia

### Constante

Es la función que asocia un mismo valor a cada valor de la variable independiente

$$y = k$$

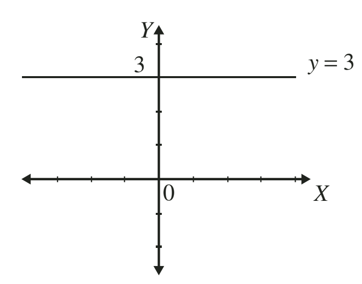
La representación gráfica es una línea recta paralela al eje $X$, sobre la ordenada $k$

**Ejemplo**

Grafica la función $y = 3$

**Solución**

Se traza una recta paralela al eje $X$, sobre la ordenada 3




### Ecuación $x = k$

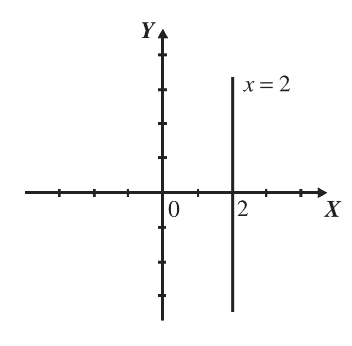
Una ecuación de la forma $x = k$ no es una función. La representación gráfica de esta ecuación es una recta paralela al eje $Y$ que pasa por el valor de la abscisa $k$

**Ejemplo**

Representa en una gráfica la ecuación $x = 2$

**Solución**

Se traza una recta paralela al eje $Y$, que pasa sobre la abscisa 2



## Lineal

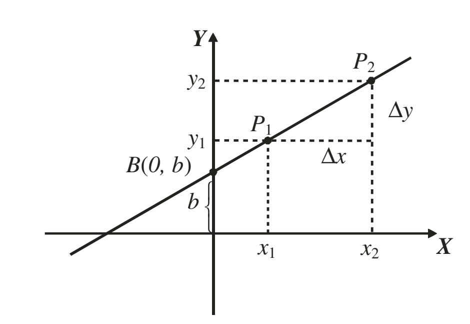
La función de la forma $y = mx + b$ se llama lineal, donde los parámetros $m$, $b$ representan la pendiente y ordenada al origen, respectivamente.

### Ejemplos

Sean las funciones lineales:

1. $y = 5x + 2$ en donde: $m = 5, b = 2$
2. $y = -4x + \frac{4}{7}$ en donde: $m = -4, b = \frac{4}{7}$
3. $y = \frac{2}{3}x - 1$ en donde: $m = \frac{2}{3}, b = -1$
4. $y = -\frac{1}{2}x$ en donde: $m = -\frac{1}{2}, b = 0$
5. $y = 4$ en donde: $m = 0, b = 4$

La pendiente indica el número de unidades que incrementa o disminuye $y$, cuando $x$ aumenta. La ordenada al origen es la distancia del origen al punto $(0, b)$, este punto se encuentra sobre el eje $Y$, y es la intersección con la recta.



Donde:

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

Dados dos puntos de la recta, la pendiente se obtiene con la fórmula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 6)$?

**Solución**

Sea:

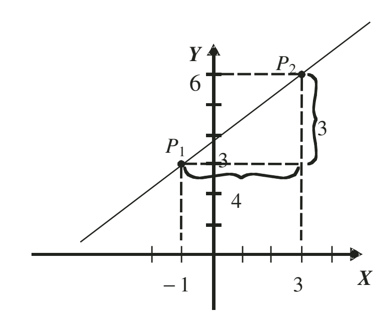
$A(-1, 3) = (x_1, y_1)$, entonces $x_1 = -1$, $y_1 = 3$

$B(3, 6) = (x_2, y_2)$, entonces $x_2 = 3$, $y_2 = 6$

Estos valores se sustituyen en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{3-(-1)} = \frac{6-3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, el valor de la pendiente es $\frac{3}{4}$

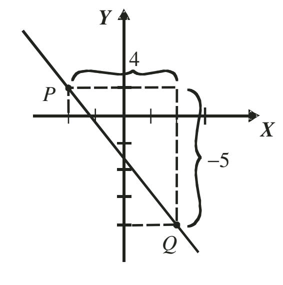


**2** ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(2, -4)$?

**Solución**

Sea:

$P(-2, 1) = (x_1, y_1)$, entonces $x_1 = -2$, $y_1 = 1$
$Q(2, -4) = (x_2, y_2)$, entonces $x_2 = 2$, $y_2 = -4$



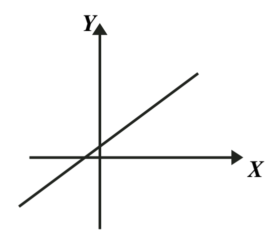

Estos valores se sustituyen en la fórmula:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-1}{2-(-2)}=\frac{-4-1}{2+2}=\frac{-5}{4}=-\frac{5}{4}$$

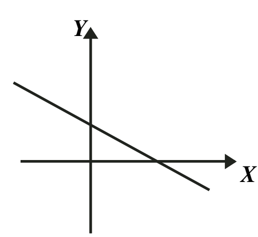
Por consiguiente, el valor de la pendiente es $-\frac{5}{4}$

## Generalidades

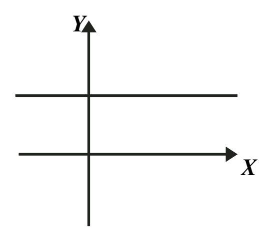
- Si $m > 0$, la función es creciente, es decir, cuando $x$ aumenta, también lo hace $y$.




- Si $m < 0$, la función es decreciente, es decir, cuando $x$ aumenta, $y$ disminuye.




- Si $m = 0$, se tiene una función constante.



# EJERCICIO 75

Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

1. $A(-2,4)\, y\, B(6,12)$
2. $M(1,5)\, y\, B(2,-7)$
3. $R(-4,-2)\, y\, B(5,6)$
4. $A\left(-\frac{1}{2},3\right) y\, B\left(4,-\frac{2}{3}\right)$
5. $A\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{4}\right) y\, B\left(\frac{3}{10},\frac{1}{2}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Gráfica*

Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

**I.** Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto (0, *b*).
**II.** A partir de este punto se localiza otro al tomar a la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

## EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Grafica la función $y=\frac{2}{3}x+4$.

**Solución**

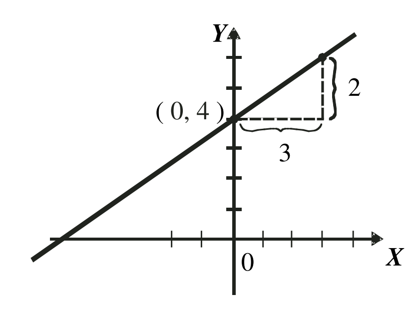
La pendiente y ordenada al origen de la función:

$$y=\frac{2}{3}x+4$$

$$m=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}$$

$b = 4$ que representa el punto (0, 4).

Gráfica de la función




**2** Traza la gráfica de la función $y=-\frac{4}{5}x+2$.

**Solución**

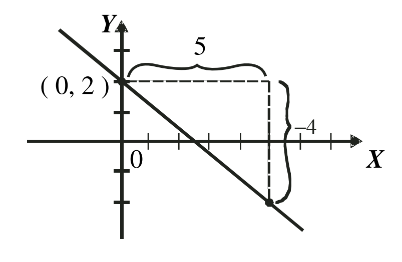
La pendiente y ordenada al origen de la función:

$$y=-\frac{4}{5}x+2$$

$$m=-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5} \Rightarrow \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}$$

$b = 2$ que representa el punto (0, 2).

Gráfica de la función



3 Traza la gráfica de la función $y = -5x - 3$.

**Solución**

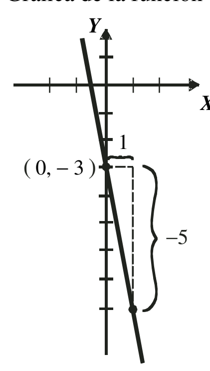
La pendiente y ordenada al origen de la función:

$$y = -5x - 3$$

$$m = -5 = \frac{-5}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-5 \text{ decremento vertical}}{1 \text{ incremento horizontal}}$$

$b = -3$ que representa el punto $(0, -3)$.

Gráfica de la función




Otra forma de graficar una función lineal es dar valores de *x*, para obtener los respectivos valores de *y,* con estos dos valores se forman puntos coordenados. A este procedimiento se le llama *tabulación.*

## Ejemplo

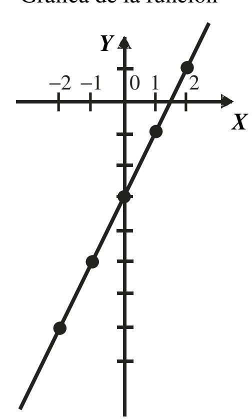
Traza la gráfica de la función $y = 2x - 3$.

**Solución**

Se construye una tabla con valores arbitrarios en *x*, para obtener los valores respectivos de *y*.

| $x$ | $y = 2x - 3$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| $-2$ | $y = 2(-2) - 3 = -7$ | $(-2, -7)$ |
| $-1$ | $y = 2(-1) - 3 = -5$ | $(-1, -5)$ |
| $0$ | $y = 2(0) - 3 = -3$ | $(0, -3)$ |
| $1$ | $y = 2(1) - 3 = -1$ | $(1, -1)$ |
| $2$ | $y = 2(2) - 3 = 1$ | $(2, 1)$ |

Gráfica de la función




# EJERCICIO 76

Grafica las siguientes funciones y ecuaciones:

1. $y = -2$
2. $y = \pi$
3. $x = 4$
4. $x = \frac{3}{2}$
5. $y = 2x + 5$
6. $y = 4x$
7. $y = -\frac{1}{2}x$
8. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
9. $y = \frac{3}{4}x + 3$
10. $y = -\frac{1}{3}x + 3$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Familia de rectas*

Se ha visto la función $y = mx + b$ con valores constantes para $m$ y $b$, en este tema analizaremos qué pasa cuando se fija uno de los dos valores y el otro se deja libre. Este tipo de funciones reciben el nombre de *familia de rectas*.

**Ejemplos**

1. $y = 3x + b$ 2. $y = -x + b$ 3. $y = mx - 7$ 4. $y = mx + 6$

EJEMPLOS

1 Grafica una familia de rectas de la función $y = mx + 2$.

**Solución**

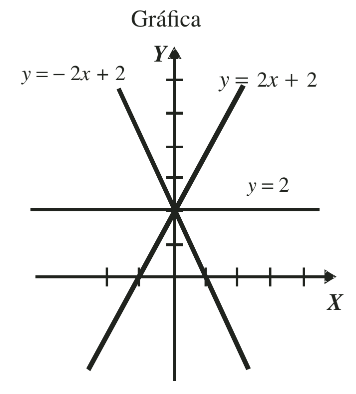
La función $y = mx + 2$ representa todas las rectas que tienen ordenada al origen 2, es decir, todas las rectas que intersecan al eje $Y$ en el punto (0, 2).

Se grafican algunas de las rectas, con algunos valores para $m$:

Si $m = 2$, entonces se tiene la recta $y = 2x + 2$

Si $m = -2$, entonces se tiene la recta $y = -2x + 2$

Si $m = 0$, entonces se tiene la recta $y = 2$




2 Grafica una familia de rectas de la ecuación $y = x + b$.

**Solución**

La función $y = x + b$ representa todas las rectas que tienen pendiente 1

Se grafican algunas de estas rectas, con algunos valores para $b$:

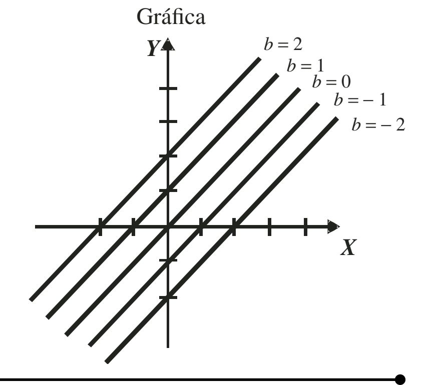
Si $b = -2$, se tiene la recta $y = x - 2$

Si $b = -1$, se tiene la recta $y = x - 1$

Si $b = 0$, se tiene la recta $y = x$

Si $b = 1$, se tiene la recta $y = x + 1$

Si $b = 2$, se tiene la recta $y = x + 2$




## EJERCICIO 77

Grafica una familia de rectas para cada función:

1. $y = mx + 4$
2. $y = mx - 3$
3. $y = mx + \frac{2}{3}$
4. $y = 2x + b$
5. $y = -x + b$
6. $y = \frac{7}{2}x + b$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Si tenemos dos variables $x$, $y$ que cumplen la ecuación $y = mx + b$ donde $m, b \in R$, se dice que dichas variables se relacionan linealmente.

Para lo anterior existen problemas de la vida real que se pueden representar con un modelo lineal y así dar un valor estimado de la variable $y$, para un cierto valor de la variable $x$.

### Ejemplos

1. El salario $s$ que recibe un empleado por trabajar $x$ horas
2. El desgaste $d$ de un artículo que se ha usado $t$ meses

1 Cinco metros de tela tienen un costo de \$300, encuentra un modelo lineal para el costo y determina ¿cuánto cuestan 25$m$? y ¿cuántos metros de tela se pueden comprar con \$18 000?

**Solución**

Sean:

$x$: metros de tela

$y$: costo por metro de tela

El costo $y$ de $x$ metros de tela se relaciona con la función $y = mx + b$

Si se venden cero metros de tela ($x = 0$), el costo es cero pesos ($y = 0$), entonces, al sustituir estos valores en la función $y = mx + b$, se tiene que:

$$0 = m(0) + b \rightarrow b = 0$$

De tal manera que la función queda de la forma siguiente:

$$y = mx$$

Si $x = 5$, entonces $y = 300$, que son los datos iniciales del problema, con ellos se encuentra el valor de la pendiente, cuando se sustituyen en $y = mx$.

$$y = mx$$
$$300 = m(5) \rightarrow m = \frac{300}{5} = 60 \rightarrow m = 60$$

Por tanto, el modelo lineal es:

$$y = 60x$$

Se quiere conocer el costo de 25 metros de tela.

$$y = 60x$$
$$y = 60(25) = 1500$$

Por consiguiente, 25 $m$ de tela tienen un costo de \$1500

Finalmente, se desea saber cuántos metros de tela se pueden comprar con \$18 000

$$y = 60x$$
$$18\,000 = 60x$$
$$\frac{18\,000}{60} = x$$
$$300 = x$$

Con \$18 000 se pueden comprar 300 metros de tela.

**2** El delfín mular mide 1.5 metros al nacer y pesa alrededor de 30 kilogramos. Los delfines jóvenes son amamantados durante 15 meses, al final de dicho periodo estos cetáceos miden 2.7 metros y pesan 375 kilogramos.

Sea $L$ y $P$ la longitud en metros y el peso en kilogramos, respectivamente, para un delfín mular de $t$ meses.

*a*) Si la relación entre $L$ y $t$ es lineal, expresa $L$ en términos de $t$.
*b*) ¿Cuál es el aumento diario de la longitud para un delfín joven?
*c*) Expresa $P$ en términos de $t$, si $P$ y $t$ están relacionados linealmente.
*d*) ¿Cuál es el peso de un delfín de cinco meses de edad?

**Solución**

*a*) Si la relación entre $L$ y $t$ es lineal, expresa $L$ en términos de $t$.

$$L = mt + b$$

Cuando el delfín es recién nacido $t = 0$ y $L = 1.5$, al sustituir estos valores en la función anterior se tiene que $b = 1.5$ y el modelo queda de la siguiente forma:

$$L = mt + 1.5 \quad \rightarrow \quad L = mt + \frac{3}{2}$$

Cuando $t = 15$, $L = 2.7$, estos valores se sustituyen en el modelo anterior para determinar la pendiente.

$$L = mt + \frac{3}{2}$$

$$2.7 = m(15) + \frac{3}{2} \quad \rightarrow 2.7 - \frac{3}{2} = 15m \quad \rightarrow \quad \frac{6}{5} = 15m \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{6}{5}}{15} = m$$

$$\frac{2}{25} = m$$

Por tanto, la longitud $L$ en función del tiempo $t$ es:

$$L = \frac{2}{25}t + \frac{3}{2}$$

*b*) ¿Cuál es el aumento diario de la longitud para un delfín joven?
En la función lineal $L$, la parte que indica el aumento en la longitud del delfín es: $\frac{2}{25}t$, por consiguiente, se divide $t$ entre 30 y se sustituye $t = 1$

$$\frac{t}{30} = \frac{1}{30}$$

Entonces:

$$\frac{2}{25}t = \frac{2}{25}\left(\frac{1}{30}\right) = \frac{2}{750} = \frac{1}{375} = 0.00267$$

Luego, el aumento diario en la longitud de un delfín es de 0.00267 $m$.

*c*) Expresa $P$ en términos de $t$, si $P$ y $t$ están relacionados linealmente.
Se representa el peso $P$ en función del tiempo $t$ con la función:

$$P = mt + b$$

Cuando el delfín es neonato su peso es de 30 kilogramos, es decir,

$$t = 0 \text{ y } P = 30$$

Al sustituir estos valores en la función anterior se obtiene el valor de $b$,

$$P = mt + b$$
$$30 = m(0) + b \rightarrow b = 30$$

El modelo matemático para un delfín recién nacido es:

$$P = mt + 30$$

Luego, a los 15 meses un delfín pesa 375 kg, entonces:

Si $t = 15$ y $P = 375$, se tiene que:

$$P = mt + 30$$

$$375 = m(15) + 30 \rightarrow 375 - 30 = 15m \rightarrow 345 = 15m \rightarrow \frac{345}{15} = m \quad \rightarrow \quad m = 23$$

Por consiguiente, el peso $P$ en términos de $t$ se expresa con el modelo:

$$P = 23t + 30$$

*d*) ¿Cuál es el peso de un delfín de cinco meses de edad?

Para obtener el peso $P$ de un delfín de 5 meses de edad, se sustituye $t = 5$ en el modelo anterior:

$$P = 23t + 30$$
$$P = 23(5) + 30$$
$$P = 115 + 30$$
$$P = 145$$

Por tanto, el peso de un delfín de cinco meses de edad es de 145 kilogramos.

## EJERCICIO 78

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un hombre recibe $120 por 3 horas de trabajo. Expresa el sueldo $S$ (en pesos) en términos del tiempo $t$ (horas).
2. Un bebé pesa 3.5 kg al nacer y 3 años después alcanza 10.5 kg. Supongamos que el peso $P$ (en kg) en la infancia está relacionado linealmente con la edad $t$ (en años).
   *a*) Expresa $P$ en términos de $t$.
   *b*) ¿Cuánto pesará el niño cuando cumpla 9 años?
   *c*) ¿A qué edad pesará 28 kg?
3. La cantidad de calor $C$ (en calorías), requerida para convertir un gramo de agua en vapor, se relaciona linealmente con la temperatura $T$ (en °F) de la atmósfera. A 50°F esta conversión requiere 592 calorías y cada aumento de 15°F aumenta 9.5 calorías la cantidad de calor. Expresa $C$ en términos de $T$.
4. El dueño de una franquicia de agua embotellada debe pagar $500 por mes, más 5% de los ingresos mensuales (I) por concepto de uso de la marca. Los costos de operación de la franquicia incluyen un pago fijo de $1 300 por mes de servicios y mano de obra. Además, el costo para embotellar y distribuir el agua comprende 50% de los ingresos.
   *a*) Determina los gastos mensuales $G$ en términos de $I$.
   *b*) Expresa la utilidad mensual $U$ en términos de $I$ (utilidad = ingreso – costo)
   *c*) Indica el ingreso mensual necesario para que no haya pérdida ni ganancia.
5. La relación entre las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius, está dada por: $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$
   *a*) Encuentra la temperatura en que la lectura es la misma en ambas escalas.
   *b*) ¿En qué valor debe estar la lectura en grados Fahrenheit para que sea el doble de la lectura en grados Celsius?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 8

## Sistemas de ecuaciones

### Reseña HISTÓRICA

*Gabriel Cramer*

Matemático suizo nacido en Ginebra en el año 1704, quien falleció en Bagnols-sur-Cèze, Francia, 1752. Fue catedrático de matemáticas (1724-1727) y de filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra. En 1750 expuso en su obra *Introducción al análisis de las curvas algebraicas* la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación. Reintrodujo el determinante, algoritmo que Leibniz ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Editó las obras de Jakob Bernoulli y parte de la correspondencia de Leibniz.

Gabriel Cramer (1704-1752)

## Ecuación lineal

Una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde $A$, $B$ y $C$ son constantes reales tales que $A$ y $B$ no son cero, recibe el nombre de lineal.

### Ejemplos

1. $2x - 3y - 4 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 2$, $B = -3$ y $C = -4$
2. $-5x + 4y = 0$, es una ecuación lineal con: $A = -5$, $B = 4$ y $C = 0$
3. $x + 2 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 1$, $B = 0$ y $C = 2$
4. $2y - 3 = 0$, es una ecuación lineal con: $A = 0$, $B = 2$ y $C = -3$

Una ecuación que se puede escribir de la forma $Ax + By + C = 0$ también es lineal.

### Ejemplos

1. Dada la ecuación $2x = 5y - 6$, también se puede escribir de la forma: $2x - 5y + 6 = 0$
2. Para que la ecuación $\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y = 2$ tenga la forma $Ax + By + C = 0$, se eliminan los denominadores al multiplicar por 4 cada término de la igualdad:

$$4\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = 4(2)$$

Al realizar las operaciones se transforma en $10x - 3y = 8$, finalmente:

$$10x - 3y - 8 = 0$$

3. La ecuación $\frac{1}{2}(x - y) - 3y = 4x + 1$, se puede escribir de la forma: $Ax + By + C = 0$, al realizar el producto indicado, eliminar denominadores y simplificar:

$$\frac{1}{2}(x - y) - 3y = 4x + 1$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 3y = 4x + 1$$
$$2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 3y\right) = 2(4x + 1)$$
$$x - y - 6y = 8x + 2$$
$$x - y - 6y - 8x - 2 = 0$$

Por tanto, la ecuación se transforma en: $-7x - 7y - 2 = 0$

4. La ecuación $y = \frac{5}{3}x - 2$ al multiplicarla por 3 se obtiene $3y = 5x - 6$, por consiguiente se puede escribir como: $5x - 3y - 6 = 0$

## Solución de una ecuación lineal

Una ecuación lineal tiene como conjunto solución todos los pares ordenados $(x, y)$, que satisfacen la ecuación, donde $x$ y $y$ son números reales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si los pares ordenados (1, – 4), $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$, son soluciones de la ecuación: $2x - 3y - 14 = 0$.

**Solución**

Se sustituye cada par ordenado en la ecuación:

- Para (1, – 4)

$$\begin{aligned} 2x-3y-14&=0\\ 2(1)-3(-4)-14&=0\\ 2+12-14&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Por tanto, el par ordenado (1, – 4), es solución.

- Para $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$

$$\begin{aligned} 2x-3y-14&=0\\ 2(2)-3\left(-\frac{10}{3}\right)-14&=0\\ 4+10-14&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el par ordenado $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$ es solución.

- Para $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$

$$\begin{aligned} 2x-3y-14&=0\\ 2\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(-\frac{3}{4}\right)-14&=0\\ 1+\frac{9}{4}-14&=0\\ -\frac{43}{4}&\neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, el par ordenado $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ no es solución.

2 Verifica si el punto (– 2, 1), es solución de la ecuación $x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(y-x)-5$

**Solución**

Se sustituye el punto en la ecuación:

$$\begin{aligned} x+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}(y-x)-5\\ -2+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}[1-(-2)]-5\\ -2+\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}[1+2]-5 \end{aligned}$$

*(continúa)*

(*continuación*)

$$-2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(3)-5$$
$$-2+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}-5$$
$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Por consiguiente (– 2, 1), es solución de la ecuación.

## EJERCICIO 79

1. Verifica si los pares ordenados $(2,-3)$, $(7,0)$ y $(1,5)$ son solución de la ecuación: $3x-5y-21=0$.
2. Verifica si los puntos $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ son solución de la ecuación: $2x+4y+2=0$.
3. Verifica si los pares ordenados $(3,-4)$, $(-3,-12)$ y $\left(\frac{1}{2},2\right)$ son solución de la ecuación: $\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}y+4$.
4. Verifica si el punto $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ es solución de la ecuación: $2(x-y)-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(x-8)-y$.
5. Verifica si el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right)$ es solución de la ecuación: $\frac{1}{5}(x+2y)+\frac{1}{10}y=\frac{7}{10}(x+1)-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}x$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

### Gráfica

La gráfica de una ecuación lineal $Ax + By + C = 0$, es una recta que forman los puntos de su conjunto solución: $\{(x,y)|Ax+By+C=0\}$.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuál es la gráfica de la ecuación $2x - 3y + 7 = 0$?

**Solución**

Para obtener la gráfica, basta con conocer dos puntos de la recta, para lo cual se sustituyen dos valores arbitrarios para $x$ o $y$ en la ecuación, y con esto se obtienen los dos puntos que se requieren.

Sea $x = -2$, se sustituye y se despeja $y$:

$$2x-3y+7=0$$
$$2(-2)-3y+7=0$$
$$-4-3y+7=0$$
$$3-3y=0$$
$$-3y=-3$$
$$y=\frac{-3}{-3}$$
$$y=1$$

Por tanto, el punto es (–2,1)

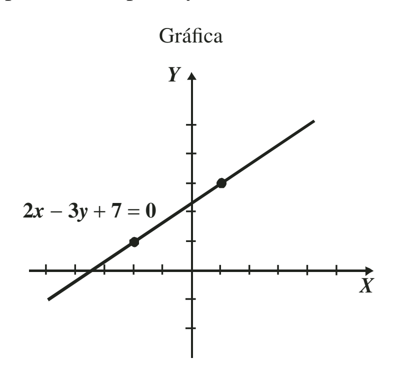
Sea $x = 1$, se sustituye y se despeja $y$:

$$2x-3y+7=0$$
$$2(1)-3y+7=0$$
$$2-3y+7=0$$
$$9-3y=0$$
$$-3y=-9$$
$$y=\frac{-9}{-3}$$
$$y=3$$

Por consiguiente, el punto es $(1,3)$

Por último, se localizan los puntos en el plano y se traza una recta sobre ellos.

Gráfica




Otra forma de graficar $Ax + By + C = 0$, es transformarla a la forma $y = mx + b$ y aplicar algunos de los métodos vistos en el capítulo 7.

### Ejemplo

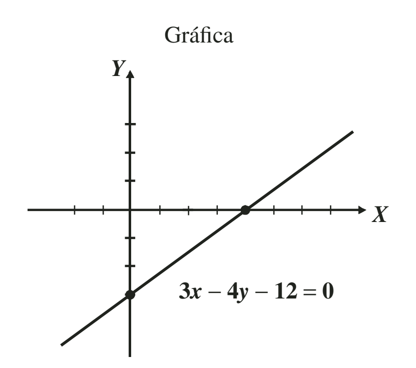
Grafica la ecuación $3x - 4y - 12 = 0$.

#### Solución

Se despeja $y$ en la ecuación para expresarla a la forma $y = mx + b$

$$3x-4y-12=0$$
$$-4y=-3x+12$$
$$y=\frac{-3x+12}{-4}$$
$$y=\frac{-3}{-4}x+\frac{12}{-4}$$
$$y=\frac{3}{4}x-\frac{12}{4}$$
$$y=\frac{3}{4}x-3$$

Gráfica




Los valores respectivos de la pendiente y ordenada al origen son: $m = \frac{3}{4}$ y $b = -3$

## EJERCICIO 80

Grafica las siguientes ecuaciones:

1. $x+y-3=0$
2. $x-y+2=0$
3. $3x-2y+6=0$
4. $4x+3y-12=0$
5. $3x-4y=0$
6. $2x+7y=0$
7. $-3x+5y-10=0$
8. $8x=2y-4$
9. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=4$
10. $-\frac{3}{5}x=\frac{1}{10}y-2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Se ha visto que el conjunto solución de la ecuación $Ax + By + C = 0$, son todos los pares ordenados $(x, y)$ que satisfacen la ecuación.

En un sistema de dos ecuaciones con dos variables, que tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

El conjunto solución lo forman todos los pares ordenados que satisfacen ambas ecuaciones, es decir:

$\{(x, y) \mid a_1x + b_1y = c_1\} \cap \{(x, y) \mid a_2x + b_2y = c_2\}$

Cada ecuación representa una recta en el plano, entonces, se pueden presentar tres casos:

**I. Las rectas se intersecan en un punto.** Las rectas sólo coinciden en un punto, por tanto, se dice que el sistema tiene una solución.

### Ejemplo

Grafica y determina la solución del siguiente sistema:

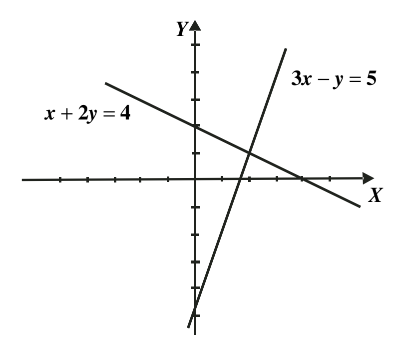
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

### Solución

Se grafica cada una de las ecuaciones a partir de encontrar las intersecciones con los ejes *XY*.

| $x + 2y = 4$ | | $3x - y = 5$ | |
|---|---|---|---|
| Sea $x = 0$ | Sea $y = 0$ | Sea $x = 0$ | Sea $y = 0$ |
| $x + 2y = 4$ | $x + 2y = 4$ | $3x - y = 5$ | $3x - y = 5$ |
| $(0) + 2y = 4$ | $x + 2(0) = 4$ | $3(0) - y = 5$ | $3x - (0) = 5$ |
| $y = \frac{4}{2} = 2$ | $x = 4$ | $y = -5$ | $x = \frac{5}{3}$ |
| La intersección con el eje *y* es: $(0, 2)$ | La intersección con el eje *x* es: $(4, 0)$ | La intersección con el eje *y* es: $(0, -5)$ | La intersección con el eje *x* $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ |

Gráfica




La solución es el punto donde se intersecan las rectas, en este caso (2, 1)

**II. Las rectas son coincidentes.** Dos ecuaciones representan rectas coincidentes si al multiplicar una de ellas por un número real $k$, se obtiene la otra.

En un sistema de rectas coincidentes el conjunto solución es infinito, es decir, el conjunto solución son todos los puntos de las rectas.

## Ejemplo

Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x-6y=18 \end{cases}$$

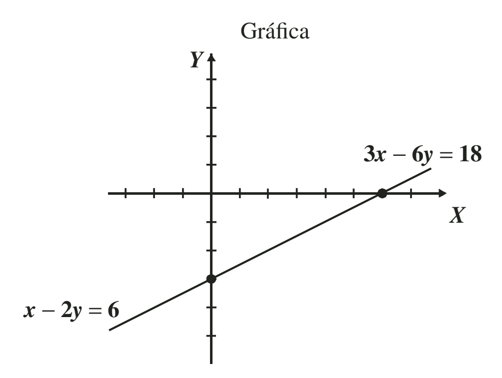
### Solución

Se grafica cada recta.

| $x-2y=6$ | | $3x-6y=18$ | |
|---|---|---|---|
| Sea $x=0$ | Sea $y=0$ | Sea $x=0$ | Sea $y=0$ |
| $x-2y=6$ | $x-2y=6$ | $3x-6y=18$ | $3x-6y=18$ |
| $(0)-2y=6$ | $x-2(0)=6$ | $3(0)-6y=18$ | $3x-6(0)=18$ |
| $y=\frac{6}{-2}=-3$ | $x=6$ | $y=\frac{18}{-6}$ | $x=\frac{18}{3}$ |
| | | $y=-3$ | $x=6$ |
| El punto es: $(0,-3)$ | El punto es: $(6,0)$ | El punto es: $(0,-3)$ | El punto es: $(6,0)$ |

Se observa que las intersecciones de las rectas con los ejes, son los mismos puntos.

Gráfica




Las rectas coinciden en todos sus puntos, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.
Se observa que si multiplicamos la ecuación $x-2y=6$, por 3, se obtiene la otra ecuación.

**III. Las rectas son paralelas.** En este caso, las rectas no tienen ningún punto en común, por tanto, el sistema no tiene solución.

## Ejemplo

Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=-12 \end{cases}$$

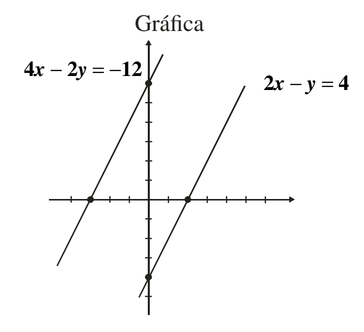
**Solución**

Se grafican las rectas.

| $2x - y = 4$ | | $4x - 2y = -12$ | |
|---|---|---|---|
| Sea $x = 0$ | Sea $y = 0$ | Sea $x = 0$ | Sea $y = 0$ |
| $2x - y = 4$ | $2x - y = 4$ | $4x - 2y = -12$ | $4x - 2y = -12$ |
| $2(0) - y = 4$ | $2x - (0) = 4$ | $4(0) - 2y = -12$ | $4x - 2(0) = -12$ |
| $y = -4$ | $x = \frac{4}{2} = 2$ | $y = \frac{-12}{-2}$ | $x = \frac{-12}{4}$ |
| | $x = 2$ | $y = 6$ | $x = -3$ |
| El punto es: $(0, -4)$ | El punto es: $(2, 0)$ | El punto es: $(0, 6)$ | El punto es: $(-3, 0)$ |

Se localizan los puntos de intersección y se grafican las rectas.

Gráfica




Al graficar las rectas se observa que son paralelas, es decir, no hay un punto común, por consiguiente no hay solución, entonces se dice que el conjunto solución es vacío.

## EJERCICIO 81

Grafica y determina el conjunto solución de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 6x - 9y = 18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 3x - 15y = -15 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - 3y = -11 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 10x + 6y = 4 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = -9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Métodos de solución

Hasta ahora se ha visto cómo resolver de forma gráfica un sistema de ecuaciones con dos variables, sin embargo, este método en algunas ocasiones puede ser poco preciso, por lo que existen procedimientos algebraicos y que además de ser prácticos resultan exactos.

*Reducción (suma y resta)*

Este método consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por algún número, de tal forma que al sumar las ecuaciones equivalentes que resultan, una de las variables se elimina para obtener una ecuación con una incógnita, y al resolverla se determina su valor, para posteriormente sustituirla en alguna de las ecuaciones originales y así obtener el valor de la otra incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+5y=19 \\ 3x-4y=-6 \end{cases}$$

**Solución**

Se elige la variable a eliminar, en este ejemplo se toma $x$; para eliminarla se necesita que los coeficientes de $x$ de cada ecuación sean iguales y de distinto signo. La primera ecuación se multiplica por $-3$ y la segunda se multiplica por 2, posteriormente se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{matrix} (2x+5y=19)(-3) \\ (3x-4y=-6)(2) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} -6x-15y=-57 \\ 6x\ \ -8y=-12 \\ \hline -23y=-69 \end{array}$$

$$y=\frac{-69}{-23}$$

$$y=3$$

El valor de $y = 3$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de $x$.

$$2x+5y=19 \rightarrow 2x+5(3)=19$$

$$2x+15=19$$

$$2x=19-15$$

$$2x=4$$

$$x=\frac{4}{2}$$

$$x=2$$

Se puede comprobar el resultado al sustituir los valores obtenidos en la otra ecuación:

$$3x-4y=-6 \rightarrow 3(2)-4(3)=-6 \rightarrow 6-12=-6 \rightarrow -6=-6$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = 3$

2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x-3y=-7 \\ 3x+5y=-11 \end{cases}$$

**Solución**

En este ejemplo se elimina la variable $y$, entonces se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por 3

$$\begin{matrix} (5x-3y=-7)(5) \\ (3x+5y=-11)(3) \end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 25x-15y=-35 \\ 9x+15y=-33 \\ \hline 34x\qquad=-68 \end{array}$$

$$x=\frac{-68}{34}=-2$$

(*continúa*)

(*continuación*)

El valor de $x = -2$, se sustituye, en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de $y$.

$$3x+5y=-11 \rightarrow 3(-2)+5y=-11$$
$$-6+5y=-11$$
$$5y=-11+6$$
$$5y=-5$$
$$y=-1$$

Por consiguiente, la solución del sistema es: $x = -2$, $y = -1$

Los siguientes conjuntos indican el conjunto solución de un sistema de rectas coincidentes y paralelas, respectivamente.

$$\{(x,y)|0x+0y=0\}=\{(x,y)|x,y\in R\}$$

$$\{(x,y)|0x+0y=a, a\neq 0\}=\phi$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 6x-2y=10 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

**Solución**

La primera ecuación se multiplica por 1 y la segunda por $-2$ y se suman las ecuaciones equivalentes:

$$\begin{matrix}(6x-2y=10)(1) \\ (3x-y=5)(-2)\end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 6x-2y=10 \\ -6x+2y=-10 \\ \hline 0x+0y=0 \end{array}$$

Se obtiene la ecuación $0x + 0y = 0$, por tanto, hay un conjunto infinito de soluciones; entonces, se trata de dos rectas coincidentes, y se dice que al conjunto solución lo forman todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones.

2 Encuentra el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} -x+2y=4 \\ -3x+6y=5 \end{cases}$$

**Solución**

La primera ecuación se multiplica por $-3$ y la segunda por 1 y se suman las ecuaciones equivalentes.

$$\begin{matrix}(-x+2y=4)(-3) \\ (-3x+6y=5)(1)\end{matrix} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-6y=-12 \\ -3x+6y=5 \\ \hline 0x+0y=-7 \end{array}$$

Resulta la ecuación $0x + 0y = -7$, por consiguiente, el conjunto solución es el vacío.

# EJERCICIO 82

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

1. $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 12x-18y=13 \\ -12x+30y=-19 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x-4y=-26 \\ 2x-3y=-19 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 7x+6y=38 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 5a+3b=21 \\ -2a+4b=2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 5m+n=-1 \\ 3m+2n=5 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 7x+2y=-3 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 6u+4v=5 \\ 9u-8v=4 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 9x-12y=21 \end{cases}$
11. $\begin{cases} -20x+5y=2 \\ 4x-y=5 \end{cases}$
12. $\begin{cases} 7p-q=2 \\ -21p+3q=5 \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### *Sustitución*

Este método consiste en despejar una de las variables de cualquiera de las dos ecuaciones y sustituir dicho despeje en la ecuación restante, así resulta una ecuación de primer grado, la cual se resuelve para obtener el valor de una de las variables. Este primer valor se sustituye en el despeje para determinar el valor de la variable que falta.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los valores de $x$ y $y$ en el sistema: $\begin{cases} 3x-4y=-11 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$.

**Solución**

En este ejemplo se despeja $x$ de la primera ecuación.

$$3x-4y=-11 \rightarrow \quad 3x=4y-11$$

$$x=\frac{4y-11}{3}$$

Se sustituye el despeje en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$5x+3y=1 \rightarrow 5\left(\frac{4y-11}{3}\right)+3y=1 \qquad \text{Se multiplica por 3}$$

$$5(4y-11)+9y=3$$
$$20y-55+9y=3$$
$$20y+9y=3+55$$
$$29y=58$$
$$y=\frac{58}{29}$$
$$y=2$$

Se sustituye el valor de $y = 2$ en el despeje $x=\frac{4y-11}{3}$

$$x=\frac{4(2)-11}{3}=\frac{8-11}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

Por tanto, los valores son:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

2 Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} -x+y=-7 \\ 5x+3y=3 \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja $y$ de la primera ecuación.

$$-x+y=-7$$
$$y=x-7$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación.

$$5x+3y=3 \rightarrow 5x+3(x-7)=3 \rightarrow 5x+3x-21=3$$
$$8x-21=3$$
$$8x=24$$
$$x=3$$

Se sustituye $x = 3$, en el despeje $y=x-7$

$$y=3-7=-4$$
$$y=-4$$

Finalmente, el punto de intersección del sistema es $(3,-4)$

3 Obtén el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x+y=-4 \\ 6x-3y=12 \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja $y$ de la primera ecuación.

$$-2x+y=-4 \rightarrow y=2x-4$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$6x-3(2x-4)=12$$
$$6x-6x+12=12$$
$$6x-6x=12-12$$
$$0x=0$$

La ecuación $0x = 0$ indica que las rectas son coincidentes y tienen como conjunto solución todos los números reales, esto significa que el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 6x-8y=3 \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja $x$ de la primera ecuación.

$$3x-4y=7 \rightarrow 3x=4y+7 \rightarrow x=\frac{4y+7}{3}$$

El despeje se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$6\left(\frac{4y+7}{3}\right)-8y=3$$
$$2(4y+7)-8y=3$$
$$8y+14-8y=3$$
$$8y-8y=3-14$$
$$0y=-11 \quad \text{La ecuación no tiene solución}$$

Por tanto, el conjunto solución es vacío.

## EJERCICIO 83

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

1. $\begin{cases} 2x+y=-10 \\ x-3y=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2m-5n=14 \\ 5m+2n=-23 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 6r-5t=-11 \\ 7t-8r=15 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 9x-2y=-3 \\ 7y-12x=17 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 8p-3q=8 \\ 2p+9q=15 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x-4y=32 \\ 5x+y=38 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 7p-3q=-28 \\ 5q-4p=16 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 7x-y=75 \\ 5x-2y=42 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 12u-16v=24 \\ 3u-4v=6 \end{cases}$
10. $\begin{cases} -5x-15y=2 \\ x+3y=7 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 8x+4y=36 \end{cases}$
12. $\begin{cases} 4p-3q=-2 \\ 20p-15q=-1 \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### *Igualación*

En este método se elige una variable, la cual se despeja de ambas ecuaciones, los despejes se igualan y se resuelve la ecuación de primer grado que resulta. Por último, el valor que se obtiene se sustituye en cualquiera de los despejes para hallar el otro valor.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+6y=-45 \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja $x$ de ambas ecuaciones.

$$2x-3y=9 \qquad\qquad 5x+6y=-45$$
$$2x=3y+9 \qquad\qquad 5x=-6y-45$$
$$x=\frac{3y+9}{2} \qquad\qquad x=\frac{-6y-45}{5}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\frac{3y+9}{2}=\frac{-6y-45}{5}$$
$$5(3y+9)=2(-6y-45)$$
$$15y+45=-12y-90$$
$$15y+12y=-90-45$$
$$27y=-135$$
$$y=\frac{-135}{27}=-5$$

El valor de $y=-5$ se sustituye en cualquiera de los despejes.

$$x=\frac{3y+9}{2}$$
$$x=\frac{3(-5)+9}{2}=\frac{-15+9}{2}$$
$$x=\frac{-6}{2}=-3$$
$$x=-3$$

Por consiguiente, el punto de intersección es (–3, – 5)

2 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6m-7n=4 \\ 2m-14n=-1 \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja $n$ de ambas ecuaciones.

$$6m-7n=4$$
$$-7n=-6m+4$$
$$n=\frac{-6m+4}{-7}$$

$$2m-14n=-1$$
$$-14n=-2m-1$$
$$n=\frac{-2m-1}{-14}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\frac{-6m+4}{-7}=\frac{-2m-1}{-14}$$
$$-14(-6m+4)=-7(-2m-1)$$
$$84m-56=14m+7$$
$$84m-14m=7+56$$
$$70m=63$$
$$m=\frac{63}{70}$$
$$m=\frac{9}{10}$$

El valor de $m=\frac{9}{10}$ se sustituye en cualquiera de los despejes.

$$n=\frac{-2m-1}{-14}.$$
$$n=\frac{-2\left(\frac{9}{10}\right)-1}{-14}$$
$$n=\frac{-\frac{14}{5}}{-14}$$
$$n=\frac{14}{(14)(5)}=\frac{1}{5}$$

Por tanto, la solución es:

$$\begin{cases} m=\frac{9}{10} \\ n=\frac{1}{5} \end{cases}$$

3 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -8x+4y=-20 \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja $y$ de ambas ecuaciones y se obtiene:

$$2x-y=5 \ \rightarrow \ y=\frac{-2x+5}{-1} \ ; \ -8x+4y=-20 \ \rightarrow \ y=\frac{8x-20}{4}$$

Se igualan los despejes:

$$\frac{-2x+5}{-1}=\frac{8x-20}{4} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4(-2x+5)&=-1(8x-20) \\ -8x+20&=-8x+20 \\ -8x+8x&=-20+20 \\ 0x&=0 \end{aligned}$$

La solución son todos los números reales y el conjunto solución corresponde a todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación:

$$2x-y=5$$

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -15x-20y=7 \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja $x$ de ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x+4y&=-2 \\ 3x&=-4y-2 \\ x&=\frac{-4y-2}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -15x-20y&=7 \\ -15x&=20y+7 \\ y&=\frac{20y+7}{-15} \end{aligned}$$

Se igualan los despejes:

$$\frac{-4y-2}{3}=\frac{20y+7}{-15} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} -15(-4y-2)&=3(20y+7) \\ 60y+30&=60y+21 \\ 60y-60y&=21-30 \\ 0y&=-9 \end{aligned}$$

La ecuación no tiene solución, por tanto, el conjunto solución es vacío.

# EJERCICIO 84

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

1. $\begin{cases} x-2y=11 \\ x+5y=-17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -m+n=-1 \\ 4m-2n=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4a+5b=-3 \\ -7b+3a=-13 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x+3y=18 \\ -5y+x=-23 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3p-2q=-5 \\ 2p+q=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+y=-20 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2a+b=1 \\ -5b-6a=-9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3m-5n=1 \\ 9m+15n=9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6u-3v=7 \\ 8u-5v=10 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 6x-24y=36 \\ -3x+12y=-18 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+3y=4 \\ -4x-12y=8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3p-9q=5 \\ p-3q=6 \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Cramer (determinantes)*

**1. Determinante de 2 × 2.** Un determinante de 2 × 2 es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - c\cdot b$$

## EJEMPLOS

1 Encuentra el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$.

**Solución**

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6)-(3)(-5) = -12+15 = 3$$

Por tanto, el resultado es 3

2 ¿Cuál es el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{vmatrix}$?

**Solución**

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)(6) - \left(-\frac{4}{5}\right)(3) = -3+\frac{12}{5} = \frac{-15+12}{5} = -\frac{3}{5}$$

Por consiguiente, el resultado es $-\frac{3}{5}$

3 Determina $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-b^2 & a-b \end{vmatrix}$.

**Solución**

Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-b^2 & a-b \end{vmatrix}=(a)(a-b)-(a^2-b^2)(1)=a^2-ab-a^2+b^2=b^2-ab$$

Por consiguiente, el resultado es $b^2-ab$

4 Resuelve $\dfrac{\begin{vmatrix} x & 3-x \\ 4 & x-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^2+3 \\ 9 & x+9 \end{vmatrix}}$.

**Solución**

Se aplica la definición.

$$\dfrac{\begin{vmatrix} x & 3-x \\ 4 & x-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^2+3 \\ 9 & x+9 \end{vmatrix}}=\frac{(x)(x-3)-(4)(3-x)}{(x^2)(x+9)-(9)(x^2+3)}=\frac{x^2-3x-12+4x}{x^3+9x^2-9x^2-27}=\frac{x^2+x-12}{x^3-27}$$

$$=\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$=\frac{x+4}{x^2+3x+9}$$

Finalmente, el resultado es $\dfrac{x+4}{x^2+3x+9}$

# EJERCICIO 85

Encuentra el valor de los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -6 & -8 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{7}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a & b \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} m-n & m+n \\ m & m-n \end{vmatrix}$

9. $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}$

10. $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b-a \\ b & a-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a & a \end{vmatrix}}$

11. $\dfrac{\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 5 \\ 5 & x \end{vmatrix}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**2. Deducción del método de Cramer.** Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Por el método de reducción se determina "$x$"

$$\begin{array}{l} (a_1x+b_1y=c_1)(b_2) \\ (a_2x+b_2y=c_2)(-b_1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-b_1c_2 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2 \end{array}$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

De forma analoga se determina "$y$"

$$\begin{array}{l} (a_1x+b_1y=c_1)(-a_2) \\ (a_2x+b_2y=c_2)(a_1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -a_1a_2x-a_2b_1y=-a_2c_1 \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \end{array}$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\ y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ con } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

El método de Cramer consiste en aplicar las definiciones anteriores y según los resultados se puede concluir que las rectas son:

- **Concurrentes:** si los determinantes son diferentes de cero.
- **Coincidentes:** si los determinantes son todos iguales a cero.
- **Paralelas:** si únicamente el determinante denominador es igual a cero.

**Rectas concurrentes.** Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,\ \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \ \ y \ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

El sistema tiene una solución que es el punto $P(x, y)$

**Ejemplo**

Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

**Solución**

Se aplica la solución general

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-45-1}{20+3} = \frac{-46}{23} = -2 \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-4+27}{20+3} = \frac{23}{23} = 1$$

Por tanto, la solución es $x = -2$, $y = 1$, las rectas son concurrentes

**Rectas coincidentes.** Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema tiene un conjunto infinito de soluciones, es decir, es un sistema de dos rectas coincidentes. Por tanto, el conjunto está formado por todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones del sistema dado.

**Ejemplo**

Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

**Solución**

Se aplica la solución general

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-8+8}{-4+4} = \frac{0}{0} \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-16}{-4+4} = \frac{0}{0}$$

El sistema son rectas coincidentes, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

**Rectas paralelas.** Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces el sistema no tiene solución, es decir, el sistema representa rectas paralelas.

**Ejemplo**

Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -6x + 3y = 2 \end{cases}$$

**Solución**

Se aplica la solución general:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{15+2}{6-6}=\frac{17}{0}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ -6 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{4+30}{6-6}=\frac{34}{0}$$

Por consiguiente, el sistema no tiene solución.

## EJERCICIO 86

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Cramer:

1. $\begin{cases}3x-4y=15\\ -2x+3y=-12\end{cases}$
2. $\begin{cases}4m+9n=-35\\ 3m-8n=18\end{cases}$
3. $\begin{cases}7a-10b=-64\\ 5b+3a=19\end{cases}$
4. $\begin{cases}3x-8y=-13\\ 5y+2x=-19\end{cases}$
5. $\begin{cases}5p-q=7\\ -2p+3q=5\end{cases}$
6. $\begin{cases}9x-4y=8\\ 6x-2y=3\end{cases}$
7. $\begin{cases}5a-7b=10\\ 8b-6a=-12\end{cases}$
8. $\begin{cases}10m-3n=19\\ 15m-24n=35\end{cases}$
9. $\begin{cases}7u+2v=-5\\ -35u-10v=25\end{cases}$
10. $\begin{cases}2x-9y=3\\ 18x-81y=-5\end{cases}$
11. $\begin{cases}5x-11y=-6\\ 40x-88y=-7\end{cases}$
12. $\begin{cases}60p-25q=15\\ -12p+5q=-3\end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Sistema de dos ecuaciones que se reducen a lineales

Dado un sistema de ecuaciones con dos variables, éste se transforma a:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2x+19=3(y-x)\\ 2(x-5y)=5(y-5)-8y\end{cases}$$

**Solución**

Se realizan las operaciones indicadas en cada ecuación y se simplifican.

$$\begin{aligned}2x+19&=3(y-x)\\ 2x+19&=3y-3x\\ 2x+3x-3y&=-19\\ 5x-3y&=-19\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}2(x-5y)&=5(y-5)-8y\\ 2x-10y&=5y-25-8y\\ 2x-10y-5y+8y&=-25\\ 2x-7y&=-25\end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}5x-3y=-19\\ 2x-7y=-25\end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, reducción.

$$\begin{array}{r} (5x-3y=-19)(-2) \\ (2x-7y=-25)(5) \\ \hline -10x+6y=38 \\ 10x-35y=-125 \\ \hline -29y=-87 \\ y=\frac{-87}{-29} \\ y=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x-3y=-19 \\ 5x-3(3)=-19 \\ 5x-9=-19 \\ 5x=-19+9 \\ 5x=-10 \\ x=\frac{-10}{5} \\ x=-2 \end{array}$$

Entonces, la solución del sistema $\begin{cases} 2x+19=3(y-x) \\ 2(x-5y)=5(y-5)-8y \end{cases}$ es $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

2 Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

**Solución**

Para eliminar las fracciones se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores de cada ecuación.

$$\left(\frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4}\right)(20)$$
$$\frac{20x}{10}-\frac{20y}{5}=\frac{20}{4}$$
$$2x-4y=5$$

$$\left(\frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2}\right)(6)$$
$$\frac{12x}{3}+12y=\frac{30}{2}$$
$$4x+12y=15$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-4y=5 \\ 4x+12y=15 \end{cases}$$

y se elige algún método de solución, en este caso el de igualación.

$$\begin{array}{r} 2x-4y=5 \\ 2x=5+4y \\ x=\frac{5+4y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x+12y=15 \\ 4x=15-12y \\ x=\frac{15-12y}{4} \end{array}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado:

$$\begin{array}{c} \frac{5+4y}{2}=\frac{15-12y}{4} \\ (4)(5+4y)=(2)(15-12y) \\ 20+16y=30-24y \\ 16y+24y=30-20 \\ 40y=10 \\ y=\frac{10}{40}=\frac{1}{4} \end{array}$$

Se sustituye $y=\frac{1}{4}$ en cualquier despeje:

$$x=\frac{5+4y}{2}$$
$$x=\frac{5+4\left(\frac{1}{4}\right)}{2}$$
$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Por consiguiente, la solución del sistema $\begin{cases} \frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2} \end{cases}$ es $\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

3 Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3 \\ \frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5} \end{cases}$$

**Solución**

Se eliminan las fracciones al multiplicarlas por el mínimo común múltiplo y se simplifican las ecuaciones.

$$\left(\frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3\right)(21)$$
$$\frac{(21)(a+5)}{3}+(21)(b)=\frac{(21)(b+5)}{7}+(3)(21)$$
$$7(a+5)+(21)(b)=(3)(b+5)+(3)(21)$$
$$7a+35+21b=3b+15+63$$
$$7a+21b-3b=15+63-35$$
$$7a+18b=43$$

$$\left(\frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5}\right)(5)$$
$$\frac{10(a-3)}{5}+1(5)=\frac{5(b-1)}{5}$$
$$2(a-3)+5=1(b-1)$$
$$2a-6+5=b-1$$
$$2a-b=-1+6-5$$
$$2a-b=0$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7a+18b=43 \\ 2a-b=0 \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, sustitución.

De la segunda ecuación se despeja a $b$.

$$2a-b=0$$
$$2a=b$$

Se sustituye $b=2a$ de la primera, y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$7a+18b=43$$
$$7a+18(2a)=43$$
$$7a+36a=43$$
$$43a=43 \quad \rightarrow \quad a=\frac{43}{43}$$
$$a=1$$

Luego, si $b=2a$ entonces $b=2(1)=2$

Por tanto, la solución del sistema $\begin{cases} \frac{a+5}{3}+b=\frac{b+5}{7}+3 \\ \frac{2(a-3)}{5}+1=\frac{b-1}{5} \end{cases}$ es $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

4 Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5\sqrt{3}x+1=2\left(2\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right) \\ \sqrt{3}\left(\sqrt{3}x-1\right)=2\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

**Solución**

Se resuelven los productos indicados de cada ecuación y se simplifican:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3}x+1&=2\left(2\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right) \\ 5\sqrt{3}x+1&=4\sqrt{3}x+2\sqrt{2}y \\ 5\sqrt{3}x-4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}y&=-1 \\ \sqrt{3}x-2\sqrt{2}y&=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\left(\sqrt{3}x-1\right)&=2\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(\sqrt{3}\right)^2x-\sqrt{3}&=2y-\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \left(\sqrt{3}\right)^2x-\sqrt{3}&=2y-\frac{2\sqrt{2}}{2} \\ 3x-\sqrt{3}&=2y-\sqrt{2} \\ 3x-2y&=\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x-2\sqrt{2}y=-1 \\ 3x-2y=\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto, por ejemplo, Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-1)(-2)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)(-2)-(3)\left(-2\sqrt{2}\right)}=\frac{2+2\sqrt{6}-4}{-2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-2}{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{6}-1\right)}{2\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{6}-1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{3}\sqrt{6}-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18-3}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-(3)(-1)}{\left(\sqrt{3}\right)(-2)-(3)\left(-2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}\sqrt{2}+3}{-2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}=\frac{6-\sqrt{6}}{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\cdot\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{3}-6\sqrt{6}\sqrt{2}-2\sqrt{6}\sqrt{3}}{\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{3}-12\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{72-12}=\frac{30\sqrt{2}}{60}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente, la solución del sistema es $x=\frac{\sqrt{3}}{3}; y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \end{cases}$.

**Solución**

Se multiplica la primera ecuación por 3

$$\begin{array}{l} 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\right) \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-13 \end{array}$$

Se suman las ecuaciones resultantes para eliminar a la variable $y$, entonces se resuelve la ecuación que se obtiene.

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=3-13 \rightarrow \frac{5}{x}=-10 \rightarrow x=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}$$

Luego se sustituye el valor de $x=-\frac{1}{2}$, en la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ y se obtiene el valor de la otra variable.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \rightarrow \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{y}=1 \rightarrow -2+\frac{1}{y}=1 \rightarrow \frac{1}{y}=3 \rightarrow y=\frac{1}{3}$$

Por tanto, la solución al sistema de ecuaciones es $x=-\frac{1}{2}$ ; $y=\frac{1}{3}$

6 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=11 \\ \frac{10}{x}-\frac{2}{y}=-13 \end{cases}$.

**Solución**

El sistema se representa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=11 \\ 10\left(\frac{1}{x}\right)-2\left(\frac{1}{y}\right)=-13 \end{cases}$$

Se propone un cambio de variable:

Sea $u=\frac{1}{x}$ y $v=\frac{1}{y}$, entonces se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2u+3v=11 \\ 10u-2v=-13 \end{cases}$$

Que se resuelve por algún método visto.

Las soluciones del sistema son: $u=-\frac{1}{2}; v=4$

Luego, los resultados se sustituyen en los cambios de variable, para hallar el valor de $x$ y $y$.

Si $u=-\frac{1}{2}$ entonces:

$$u=\frac{1}{x}$$
$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Si $v=4$ entonces:

$$v=\frac{1}{y}$$
$$4=\frac{1}{y}$$
$$(4)(y)=1$$
$$y=\frac{1}{4}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$$

7 Utiliza el método de Cramer para resolver el sistema: $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \\ 2ax-\frac{a^2y}{b}=a^2 \end{cases}$

**Solución**

Se aplica la solución general.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{b} \\ a^2 & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ 2a & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}=\frac{(2)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(a^2)\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(2a)\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{-\frac{2a^2}{b}-\frac{a^2}{b}}{-\frac{a^2}{ab}-\frac{2a}{b}}=\frac{-\frac{2a^2}{b}-\frac{a^2}{b}}{-\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}}$$

$$=\frac{-\frac{3a^2}{b}}{-\frac{3a}{b}}=\frac{(-3a^2)(b)}{(-3a)(b)}=a$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 2 \\ 2a & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ 2a & -\frac{a^2}{b} \end{vmatrix}}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)(a^2)-(2a)(2)}{\left(\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{a^2}{b}\right)-(2a)\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{\frac{a^2}{a}-4a}{-\frac{a^2}{ab}-\frac{2a}{b}}=\frac{\frac{a^2-4a^2}{a}}{-\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}}$$

$$=\frac{-\frac{3a^2}{a}}{-\frac{3a}{b}}=\frac{(-3a^2)(b)}{(-3a)(a)}=\frac{-3a^2b}{-3a^2}=b$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$$

# EJERCICIO 87

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x=y-3 \\ 2y=5+x \end{cases}$

2. $\begin{cases} b=a+7 \\ 3a=2b-17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -7m=2(3n+13) \\ 7n=2(m-5) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7(x+5)+21y=3(y+5)+63 \\ 2(x-3)+5=y-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(m+2)-2(n-4)=2n+m \\ 2(n-1)-m=n \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{12}x-\sqrt{8}y=2 \\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{12}=-\frac{2}{3} \\ 2x=3y-22 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=\frac{9}{10} \\ 5x=2y+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=-\frac{1}{6} \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{2x}{3}+\frac{5}{6}y=1 \\ \frac{3x}{20}+\frac{y}{5}=\frac{1}{4} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{2y}{5}=\frac{12}{5} \\ \frac{3x}{14}-\frac{3y}{2}=\frac{33}{14} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{3p-5q}{4}=5 \\ \frac{q+5p}{6}=4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{x+1}{3}+\frac{2y+5}{2}=\frac{1}{2} \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=\frac{17}{12} \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)+\frac{2y}{7}=0 \\ \frac{3x-1}{4}-\frac{2y}{7}=4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3(a+1)-4=\frac{5-(b+1)}{3} \\ 2(a-2)+b=-4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=5 \\ \frac{2}{m}+\frac{3}{n}=12 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=-1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10} \\ -\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=-\frac{7}{10} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-6 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-16 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{4}{x}-\frac{7}{y}=5 \\ \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=85 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \frac{ax}{2}+\frac{by}{3}=\frac{5ab}{6} \\ \frac{x}{b}+\frac{y}{2a}=\frac{3}{2} \end{cases}$

22. $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a+b \\ \frac{bx}{a}+\frac{ay}{b}=2ab \end{cases}$

23. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2a}{(a+b)(a-b)} \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{a-5b}{a^2-b^2} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x\sqrt{a}+y\sqrt{b}=\frac{a^2-b^2}{a-b} \\ x+y=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales son una herramienta importante para la resolución de problemas que involucran a más de dos variables, cuya aplicación es frecuente en la economía, la administración, la física, etcétera.

1 En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar $1 060, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron $1 100. ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa?

**Solución**

Se plantea con dos variables los precios de los artículos:

$x$: precio de un pantalón.
$y$: precio de una camisa.

Con los datos del problema se plantean las ecuaciones simultáneas:
Se multiplica el número de objetos por el precio de cada uno de ellos y la suma será la cantidad de las ventas.

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1\,060 \\ 7x + 5y = 1\,100 \end{cases}$$

Esta ecuación se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores, en este caso por el de reducción:

$$\begin{array}{r} -35x - 49y = -7\,420 \\ 35x + 25y = \quad 5\,500 \\ \hline -24y = -1\,920 \end{array}$$

$$y = \frac{-1\,920}{-24} = 80$$

Se sustituye $y = 80$ en cualquiera de las ecuaciones originales y se obtiene $x$,

$$5x + 7y = 1\,060$$
$$5x + 7(80) = 1\,060$$
$$5x + 560 = 1\,060$$
$$x = \frac{1\,060 - 560}{5} = 100$$

Por tanto, el precio de un pantalón es de $100 y el de una camisa de $80

2 Al revisar sus facturas de pago, el señor Méndez se percata de que la empresa de mensajería y paquetería La Paloma, le cobró $1 924 por un envío que en total pesaba 29 kilogramos, entonces pide a su secretaria aclarar cuánto le cobraron por paquete. La compañía aclaró que por los paquetes que envió a Monterrey cobró a $92 por kilogramo y por los que mandó a Pachuca $30 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos enviaron a cada ciudad?

**Solución**

Se plantea con dos variables los datos que se deben encontrar:

$x$: cantidad de kilogramos que se mandaron a Monterrey
$y$: cantidad de kilogramos que se enviaron a Pachuca

En total se mandaron 29 kilogramos, entonces,

$$x + y = 29$$

Luego, si por cada kilogramo que se envió a Monterrey y Pachuca se cobró $92 y $30, respectivamente,

$$92x + 30y = 1\,924$$

entonces, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 92x + 30y = 1\,924 \end{cases}$$

el cual se resolverá por el método de sustitución:

despeje de $x$

$$x + y = 29$$
$$x = 29 - y$$

sustitución de $x = 29 - y$ en $92x + 30y = 1\,924$

$$92(29 - y) + 30y = 1\,924$$
$$2\,668 - 92y + 30y = 1\,924$$
$$-62y = 1\,924 - 2\,668$$
$$y = \frac{-744}{-62} = 12$$

Al sustituir $y = 12$ en la primera ecuación,

$$x + y = 29$$
$$x + 12 = 29$$
$$x = 29 - 12$$
$$x = 17$$

Por consiguiente, se mandaron 17 kilos a Monterrey y 12 a Pachuca.

## EJERCICIO **88**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 225 y su diferencia sea 135
2. Si dos ángulos son suplementarios, su suma es de 180°, si la diferencia entre dos ángulos suplementarios es 100°, ¿cuál es el valor de cada ángulo?
3. La diferencia de dos números es 30 y $\frac{1}{5}$ de su suma es 26. Determina los números.
4. Encuentra dos números, cuya diferencia de sus recíprocos sea 2 y la suma de sus recíprocos sea 14.
5. En un parque de diversiones 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$880 y 4 entradas de adulto y 5 de niño, \$570, ¿cuál es el precio de entrada por un adulto y por un niño?
6. Una colección de monedas antiguas de \$5 y \$10, suman la cantidad de \$85. Si hay 12 monedas en total, ¿cuántas monedas de \$10 hay?
7. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, cada lado igual excede en 9 cm al largo de la base. Determina las dimensiones del triángulo.
8. Una agenda electrónica y un traductor cuestan \$1 300. Si la agenda electrónica tiene un costo de \$200 más que el traductor, ¿cuánto cuesta cada artículo?
9. El hermano de Antonio es 3 veces más grande que él, hace 3 años su hermano era 6 veces más grande que Antonio, ¿cuáles son sus edades actualmente?
10. Los $\frac{2}{3}$ de la suma de 2 números es 92 y los $\frac{3}{8}$ de su diferencia es 3. Encuentra los números.
11. Carlos y Gabriel fueron al supermercado a comprar lo necesario para una reunión con amigos del colegio, llevaban un total de \$500 para gastar. Carlos gastó dos terceras partes de su dinero, mientras que Gabriel tres quintas partes, regresaron a casa con un total de \$180, ¿cuánto llevaba cada uno al ir al supermercado?
12. Dividir el número 550 en 2 partes, tales que si de los $\frac{3}{5}$ de la primera se resta $\frac{1}{4}$ de la segunda, se obtiene 160, ¿cuáles son las partes?

13. El cociente de 2 números es 5 y su diferencia es 56, ¿cuáles son los números?

14. La suma de 2 números es 52, su diferencia, dividida entre el menor da 5 como cociente y 3 como residuo, ¿cuáles son los números?

15. Si al dinero que tiene Alejandra se le añaden $30, tendrá el triple de lo que tiene Beatriz, y si a Beatriz se le agregan $10, tendrá la mitad de lo que tiene Alejandra, ¿cuánto dinero tiene Alejandra y Beatriz?

16. Una lancha viajó corriente arriba 36 km en 4 horas. Si la corriente hubiese sido del cuádruplo, el viaje lo hubiera hecho en 6 horas, ¿cuál es la rapidez de la lancha y de la corriente?

17. Un granjero posee cierta cantidad de animales, entre gallinas y borregos, de tal forma que al sumar el número de cabezas el resultado es 44 y la suma de las patas es 126. ¿Cuántas gallinas y cuántos borregos tiene?

18. El mismo granjero al comprar los borregos y las gallinas pagó un total de $6 450. Después y al mismo precio, adquirió 10 borregos y 14 gallinas, por los cuales pagó $3 420, ¿cuál es el costo de cada borrego y cada gallina?

19. Un vendedor de libros de ciencias vendió tres de geometría analítica y 5 de álgebra lineal en $870. Al día siguiente, vendió 2 de geometría analítica y 3 de álgebra lineal en $540, ¿cuál es el precio de cada libro?

20. ¿Cuántos litros de una solución al 6% y cuántos de otra al 30% se deben mezclar para obtener 50 litros de una nueva solución al 12%?

21. Un mexicano especialista en mezclas de café desea exportar el grano en bolsas que contengan un kilogramo. Debe combinar granos de los estados de Chiapas y Veracruz. El costo por kilogramo de estos tipos de café es $30 y $24, respectivamente. Si la bolsa cuesta $25.50, ¿qué cantidad de cada café lleva dicha mezcla?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Métodos para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables

Para resolver un sistema de este tipo, se pueden utilizar los mismos métodos empleados para resolver los sistemas de dos variables, aunque se recomienda emplear el de *reducción* y de *Cramer*.

El sistema puede tener solución única, conjunto infinito de soluciones o no tener solución.

### Reducción (suma y resta)

Se procede de la misma forma que en los sistemas de ecuaciones con dos variables, es decir, se toman dos de las tres ecuaciones y se elimina una de las variables. Posteriormente, se toma cualquiera de las ecuaciones que se eligieron y en la que no se utilizó se elimina la misma variable, de tal manera que se obtienen dos ecuaciones con dos variables; al hallar la solución del sistema se determina el valor de las dos variables, después se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para obtener la tercer variable.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-3y-5z=-19 \\ 3x-4y+z=-2 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} 2x-3y-5z=-19 & \text{ -------}(1) \\ 3x-4y+z=-2 & \text{ -------}(2) \\ x+y+z=6 & \text{ -------}(3) \end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se toman dos ecuaciones, por ejemplo la ecuación $(1)$ y $(2)$ y por el método de eliminación se elimina $x$.

$$\begin{array}{l}(2x-3y-5z=-19)(-3)\\(3x-4y+z=-2)(2)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}-6x+9y+15z=57\\6x-8y+\ \ 2z=-4\\\hline\end{array}$$

$$y+17z=53-----(A)$$

Se toman las ecuaciones $(1)$ y $(3)$, se elimina $x$ y se obtiene la ecuación $(B)$

$$\begin{array}{l}(2x-3y-5z=-19)(1)\\(\ x+y+z=6)(-2)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}2x-3y-5z=-19\\-2x-2y-2z=-12\\\hline\end{array}$$

$$-5y-7z=-31-----(B)$$

Con las ecuaciones $(A)$ y $(B)$ el sistema resultante es:

$$\begin{cases}y+17z=53\\-5y-7z=-31\end{cases}$$

Se resuelve el sistema que resulta de las ecuaciones $(A)$ y $(B)$.

$$\begin{array}{l}(y+17z=53)(5)\\(-5y-7z=-31)(1)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}5y+85z=265\\-5y-7z=-31\\\hline\end{array}$$

$$78z=234$$
$$z=\frac{234}{78}$$
$$z=3$$

Se sustituye el valor de $z=3$ en las ecuaciones $(A)$ o $(B)$ para determinar el valor de $y$.

$$y+17z=53$$
$$y+17(3)=53$$
$$y+51=53$$
$$y=53-51$$
$$y=2$$

Los valores $z=3$, $y=2$, se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales.

$$x+y+z=6\ \rightarrow\ x+2+3=6$$
$$x+5=6$$
$$x=6-5$$
$$x=1$$

Finalmente, la solución del sistema es $x=1$, $y=2$, $z=3$

2 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+2z=6\\3y-5z=-17\\2x+3y=-1\end{cases}$$

**Solución**

$$\begin{array}{l}x\qquad +2z=6---------(1)\\3y-5z=-17-------(2)\\2x+3y\qquad=-1---------(3)\end{array}$$

Se toman las ecuaciones $(2)$ y $(3)$ y se elimina a $y$.

$$\begin{array}{l}(3y-5z=-17)(-1)\\(2x+3y\qquad=-1)(1)\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}-3y+5z=17\\2x+3y\qquad=-1\\\hline\end{array}$$

$$2x\qquad+5z=16------(A)$$

Se toman las ecuaciones $(1)$ y $(A)$ y se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+2z=6 \\ 2x+5z=16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (x+2z=6)(-2) \\ (2x+5z=16)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -2x-4z=-12 \\ 2x+5z=16 \\ \hline z=4 \end{array}$$

El valor de $z = 4$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones $(1)$ o $(A)$

$$\begin{aligned} x+2z&=6 \\ x+2(4)&=6 \\ x+8&=6 \\ x&=6-8 \\ x&=-2 \end{aligned}$$

Para hallar el valor de $y$, se sustituye $z = 4$, en la ecuación ( 2 )

$$\begin{aligned} 3y-5z&=-17 \\ 3y-5(4)&=-17 \\ 3y-20&=-17 \\ 3y&=-17+20 \\ 3y&=3 \\ y&=\frac{3}{3} \\ y&=1 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

3 Determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y-4z=5 \\ 5x-4y-2z=4 \\ 6x-9y-12z=5 \end{cases}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} 2x-3y-4z&=5 \text{ --------- } (1) \\ 5x-4y-2z&=4 \text{ --------- } (2) \\ 6x-9y-12z&=5 \text{ --------- } (3) \end{aligned}$$

Se toman las ecuaciones $(1)$ y $(2)$ y se elimina $x$.

$$\begin{array}{l} (2x-3y-4z=5)(-5) \\ (5x-4y-2z=4)(2) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -10x+15y+20z=-25 \\ 10x-8y-4z=8 \\ \hline 7y+16z=-17 \text{ --------- } (A) \end{array}$$

Se toman las ecuaciones $(2)$ y $(3)$ y se elimina $x$.

$$\begin{array}{l} (5x-4y-2z=4)(-6) \\ (6x-9y-12z=5)(5) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -30x+24y+12z=-24 \\ 30x-45y-60z=25 \\ \hline -21y-48z=1 \text{ --------- } (B) \end{array}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Con las ecuaciones $(A)$ y $(B)$, se resuelve el sistema de ecuaciones que se forma:

$$\begin{cases} 7y+16z=-17 \\ -21y-48z=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (7y+16z=-17)(3) \\ (-21y-48z=1)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 21y+48z=-51 \\ -21y-48z=1 \\ \hline 1y+\ \ 0z=-50 \end{array}$$

No hay solución para la ecuación $0y+0z=-50$, por tanto, el conjunto solución es vacío.

4 Determina el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-5y+2z=6 \\ x-3y-4z=5 \\ 6x-10y+4z=12 \end{cases}$$

**Solución**

$$\begin{array}{r} 3x-5y+2z=6 ---------(1) \\ x-3y-4z=5 ---------(2) \\ 6x-10y+4z=12 ------- (3) \end{array}$$

Se toman las ecuaciones $(1)$ y $(2)$ y se elimina *x*.

$$\begin{array}{l} (3x-5y+2z=6)(1) \\ (\ x-3y-4z=5)(-3) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-5y+\ 2z=6 \\ -3x+9y+12z=-15 \\ \hline \end{array}$$

$$4y+14z=-9 -------(A)$$

Se toman las ecuaciones $(2)$ y $(3)$ y se elimina *x*.

$$\begin{array}{l} (x-3y-4z=5\ )(-6) \\ (6x-10y+4z=12)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -6x+18y+24z=-30 \\ 6x-10y+\ 4z=12 \\ \hline \end{array}$$

$$8y+28z=-18 -------(B)$$

Se resuelve el sistema que forman las ecuaciones $(A)$ y $(B)$.

$$\begin{cases} 4y+14z=-9 \\ 8y+28z=-18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (4y+14z=-9)(-2) \\ (8y+28z=-18)(1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -8y-28z=18 \\ 8y+28z=-18 \\ \hline 0y+0z=0 \end{array}$$

Por consiguiente, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

5 Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{3y}{4}-\frac{5z}{6}=\frac{9}{2} \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=\frac{13}{6} \\ \frac{3x}{2}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{2}=\frac{-7}{2} \end{cases}$$

**Solución**

Se eliminan las fracciones de cada ecuación al multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\left(\frac{x}{6}-\frac{3y}{4}-\frac{5z}{6}=\frac{9}{2}\right)(12) \rightarrow 2x-9y-10z=54 --------- (1)$$

$$\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=\frac{13}{6}\right)(6) \rightarrow x-2y-3z=13 --------- (2)$$

$$\left(\frac{3x}{2}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{2}=\frac{-7}{2}\right)(4) \rightarrow 6x+3y-2z=-14 --------- (3)$$

Se toman las ecuaciones $(1)$ y $(2)$ y se elimina $x$.

$$\begin{array}{l}(2x-9y-10z=54)(-1)\\(x-2y-3z=13)(2)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-2x+9y+10z=-54\\2x-4y-6z=26\\\hline 5y+4z=-28\end{array} ------- (A)$$

Se toman las ecuaciones $(2)$ y $(3)$ y se elimina $x$.

$$\begin{array}{l}(x-2y-3z=13)(-6)\\(6x+3y-2z=-14)(1)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-6x+12y+18z=-78\\6x+3y-2z=-14\\\hline 15y+16z=-92\end{array} ------- (B)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones entre $(A)$ y $(B)$

$$\begin{cases}5y+4z=-28\\15y+16z=-92\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}(5y+4z=-28)(-3)\\(15y+16z=-92)(1)\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}-15y-12z=84\\15y+16z=-92\\\hline 4z=-8\end{array}$$

$$z=-\frac{8}{4}$$

$$z=-2$$

El valor de $z$ se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned}5y+4z&=-28\\5y+4(-2)&=-28\\5y-8&=-28\\5y&=-28+8\\5y&=-20\\y&=-\frac{20}{5}\\y&=-4\end{aligned}$$

Luego los valores de $y=-4, z=-2$ se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para hallar el valor de $x$.

$$\begin{aligned}x-2y-3z&=13\\x-2(-4)-3(-2)&=13\\x+8+6&=13\\x+14&=13\\x&=13-14\\x&=-1\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es:

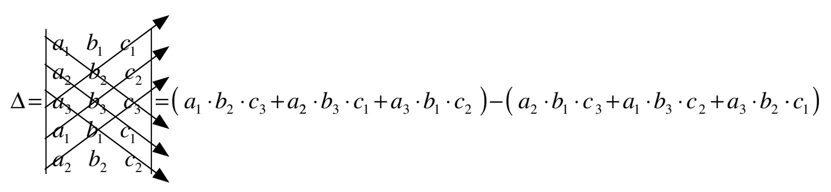
$$\begin{cases}x=-1\\y=-4\\z=-2\end{cases}$$

## Determinantes

Un determinante de tres por tres es un arreglo rectangular de números de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Para hallar el determinante de un arreglo rectangular de números de la forma anterior, se repiten los 2 primeros renglones y su solución está dada por:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2) - (a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 + a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_2 \cdot c_1)$$

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Se aplican las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

## Ejemplo

Determina la solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método de Cramer.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 \\ x - y + 4z = 19 \\ 5x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

### Solución

Se aplican las fórmulas y se hallan los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-12+57+64)-(38-144+8)}{(-3+3+40)-(2-36+5)} = \frac{207}{69} = 3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3&12&-1\\1&19&4\\5&8&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&-1&4\\5&-3&1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}3&12&-1\\1&19&4\\5&8&1\\3&12&-1\\1&19&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&-1&4\\5&-3&1\\3&2&-1\\1&-1&4\end{vmatrix}}=\frac{(57-8+240)-(12+96-95)}{(-3+3+40)-(2-36+5)}=\frac{276}{69}=4$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3&2&12\\1&-1&19\\5&-3&8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&-1&4\\5&-3&1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}3&2&12\\1&-1&19\\5&-3&8\\3&2&12\\1&-1&19\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&-1&4\\5&-3&1\\3&2&-1\\1&-1&4\end{vmatrix}}=\frac{(-24-36+190)-(16-171-60)}{(-3+3+40)-(2-36+5)}=\frac{345}{69}=5$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es: $\begin{cases}x=3\\y=4\\z=5\end{cases}$

## EJERCICIO 89

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases}2x-y+5z=16\\x-6y+2z=-9\\3x+4y-z=32\end{cases}$

2. $\begin{cases}d-e-4f=-4\\2d+2e+f=11\\d+e+3f=13\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-2y+3z=10\\2x+y-6z=1\\4x-2y-9z=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}3x+5y-z=4\\10y-6x-3z=1\\4z-15y+9x=-1\end{cases}$

5. $\begin{cases}4n-2m-3r=1\\m+3n-5r=-4\\3m-5n+r=0\end{cases}$

6. $\begin{cases}\frac{2}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=7\\\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=5\\\frac{4}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=11\end{cases}$

7. $\begin{cases}3x-2y+z=16\\2x+3y-8z=2\\x-y+3z=14\end{cases}$

8. $\begin{cases}a+b=3\\a-c=8\\b-2c=4\end{cases}$

9. $\begin{cases}m+r=8\\2n-3r=3\\2m+3n-4r=19\end{cases}$

10. $\begin{cases}x=2(1+2y)-9z\\y=2(2z-x)-13\\z=2(y+4)+3x\end{cases}$

11. $\begin{cases}x-y+z=4\\2x+y-z=5\\x+3y-4z=-5\end{cases}$

12. $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{3}{b}-\frac{1}{c}=11\\\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=7\\\frac{3}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=8\end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Tres profesores compraron libros: uno de ellos pagó $845 por 3 de álgebra, 5 de geometría analítica y 2 de cálculo diferencial; otro pagó $580 por 2 de geometría analítica, 4 de álgebra y uno de cálculo diferencial; el último de ellos pagó $605 por uno de álgebra, 3 de geometría analítica y 3 de cálculo diferencial. ¿Cuál es el precio de cada libro?

**Solución**

Sea $x$: costo del libro de álgebra
$y$: costo del libro de geometría analítica
$z$: costo del libro de cálculo diferencial

El sistema de ecuaciones que resuelve el problema es:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 845 \ldots\ldots (1) \\ 4x + 2y + z = 580 \ldots\ldots (2) \\ x + 3y + 3z = 605 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción para eliminar $z$:

Al multiplicar por – 2 la ecuación ( 2 ) y sumar con la ecuación ( 1 )

$$\begin{array}{r} -8x - 4y - 2z = -1\,160 \\ 3x + 5y + 2z = 845 \\ \hline -5x + y = -315 \end{array}$$

Al multiplicar por – 3 la segunda ecuación y sumar la ecuación ( 3 )

$$\begin{array}{r} -12x - 6y - 3z = -1\,740 \\ x + 3y + 3z = 605 \\ \hline -11x - 3y = -1\,135 \end{array}$$

Se realiza un nuevo sistema con las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{r} 3(-5x + y = -315) \\ -11x - 3y = -1\,135 \\ \hline -15x + 3y = -945 \\ -11x - 3y = -1\,135 \\ \hline -26x = -2\,080 \end{array}$$

$$x = \frac{-2\,080}{-26}$$

$$x = 80$$

Si $x = 80$, entonces

$$-5(80) + y = -315 \rightarrow -400 + y = -315 \rightarrow y = -315 + 400 = 85$$

Si $x = 80$, $y = 85$, por tanto

$$3(80) + 5(85) + 2z = 845 \rightarrow 240 + 425 + 2z = 845 \rightarrow 2z = 845 - 240 - 425$$

$$= \frac{845 - 240 - 425}{2} = 90$$

Por consiguiente, el libro de álgebra tiene un precio de $80, el de geometría analítica de $85 y el de cálculo diferencial cuesta $90

# EJERCICIO 90

Resuelve los siguientes problemas:

1. José compró cierto día 3 paletas, 5 helados y 2 dulces, por todo pagó $28. Al día siguiente, adquirió 4 paletas, 3 helados y 5 dulces con $25 y el último día, una paleta, un helado y un dulce que le costaron $7. ¿Cuál es el costo de cada golosina?

2. Miguel, Fabián y Juan Carlos cierto día fueron a comprar ropa. Miguel compró 3 camisas, 4 pantalones y 3 playeras; Fabián, 5 camisas, 3 pantalones y 4 playeras y Juan Carlos, 2 camisas, 6 pantalones y una playera. Si pagaron $4 100, $4 600 y $4 000, ¿cuál es el precio de cada prenda?
3. Eduardo, Hugo y Arturo fueron a comprar ropa. Eduardo se compró 3 playeras, 2 pantalones y 5 pares de calcetas y pagó $1 710. Hugo adquirió 2 playeras, 3 pantalones y 4 pares de calcetas con $2 090 y Arturo, 4 playeras, 2 pantalones y 3 pares de calcetas por $1 730. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
4. Un número está formado por 3 dígitos, el dígito de las centenas es la suma de los otros dos, la suma de las decenas y centenas es igual a 7 veces las unidades. Determina el número, de tal manera que si se invierten los dígitos, la diferencia sea 594.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Descomposición de una fracción algebraica en suma de fracciones parciales

Al realizar una suma de fracciones se obtiene la simplificación de la misma, por ejemplo:

$$\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)+1(x+3)}{(x+3)(x+2)}=\frac{2x+4+x+3}{x^2+3x+2x+6}=\frac{3x+7}{x^2+5x+6}$$

Sin embargo, en ocasiones es necesario descomponer una fracción como la suma de sus fracciones parciales, esto es, realizar el proceso inverso.

**Caso I.** Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y

$Q(x) = (x + x_1)(x + x_2)\cdot\ldots\cdot(x + x_n)$, y ninguno se repite, se puede descomponer en la suma de las fracciones parciales como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x+x_1}+\frac{B}{x+x_2}+\ldots+\frac{Z}{x+x_n}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Expresa $\frac{3x+1}{x^2-x-6}$ como una suma de fracciones parciales.

**Solución**

Se factoriza el denominador y a cada factor lineal le corresponde una constante como numerador:

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6}=\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

Se desarrolla la suma de fracciones

$$\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Para que se cumpla esta igualdad se igualan los numeradores, el resultado es el siguiente:

$$3x+1=A(x+2)+B(x-3)$$
$$3x+1=Ax+2A+Bx-3B$$

Al agrupar los términos que contienen $x$ y los independientes, resulta:

$$3x+1=x(A+B)+2A-3B$$

*(continúa)*

(*continuación*)

Entonces se genera un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\begin{cases} A + B = 3 \\ 2A - 3B = 1 \end{cases}$ que al resolverlo da como resultado $A = 2$ y $B = 1$

Por tanto, la fracción como suma de parciales es:

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2}$$

2 Expresa $\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}$ como una suma de fracciones parciales.

**Solución**

Se descompone en factores el denominador de la fracción:

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x} = \frac{x+4}{x(x+2)(x+1)}$$

A cada denominador le corresponde una constante como sigue:

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la suma de fracciones

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A(x+2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x+1)}$$

Los numeradores se igualan:

$$x+4 = A(x+2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x+2)$$
$$x+4 = A\left(x^2+3x+2\right) + Bx(x+1) + Cx(x+2)$$
$$x+4 = Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 + 2Cx$$

Se agrupan términos semejantes:

$$x+4 = x^2(A+B+C) + x(3A+B+2C) + 2A$$

Al igualar los respectivos coeficientes, se obtiene el siguiente sistema, $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+B+2C=1 \\ 2A=4 \end{cases}$

El cual se resuelve y el resultado es: $A = 2$, $B = 1$ y $C = -3$

Por tanto, la fracción expresada como suma de fracciones parciales es:

$$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x+1}$$

3 ¿Cuál es la descomposición en fracciones parciales $\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}$?

**Solución**

Se descompone el denominador:

$$\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x} = \frac{4x^2-2x+1}{x\left(4x^2-1\right)} = \frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}$$

a cada factor del denominador le corresponde una constante de la siguiente manera:

$$\frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x-1}$$

Al resolver la fracción del lado derecho:

$$\frac{4x^2-2x+1}{x(2x+1)(2x-1)}=\frac{A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)}{x(2x+1)(2x-1)}$$

Al igualar los numeradores se obtiene:

$$4x^2-2x+1=A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)$$
$$4x^2-2x+1=A(4x^2-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)$$
$$4x^2-2x+1=4Ax^2-A+2Bx^2-Bx+2Cx^2+Cx$$

Al agrupar términos semejantes, se determina que:

$$4x^2-2x+1=x^2(4A+2B+2C)+x(-B+C)-A$$

Al igualar los coeficientes se obtiene el siguiente sistema, $\begin{cases}4A+2B+2C=4\\-B+C=-2\\-A=1\end{cases}$

Este sistema de ecuaciones se resuelve por cualquier método algebraico, del cual resultarán los siguientes valores, $A=-1$, $B=3$ y $C=1$, por tanto, la descomposición de fracciones parciales es:

$$\frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}$$

**Caso II.** Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y

$Q(x)=(x+x_1)^n(x+x_2)^n\cdot\ldots\cdot(x+x_3)^n$, todo factor que se repite $n$ veces, se descompone en la suma de fracciones parciales como sigue:

$$\frac{A}{(x+x_1)}+\frac{B}{(x+x_1)^2}+\ldots+\frac{Z}{(x+x_1)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa la fracción: $\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}$ como una suma de fracciones parciales.

**Solución**

Se descompone el denominador en factores:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2+x-1}{x(x^2+2x+1)}=\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

A cada denominador le corresponde una constante como numerador:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Se resuelve la suma de fracciones:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

Se igualan los numeradores:

$$x^2+x-1 = A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx$$

Al agrupar términos semejantes se determina que:

$$x^2+x-1 = x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A$$

Se igualan los coeficientes de ambos lados para obtener el siguiente sistema, $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=1 \\ A=-1 \end{cases}$

Que al resolverlo por cualquier método, da como resultado: $A=-1$, $B=2$ y $C=1$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2+x} = -\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

2 ¿Cuál es la descomposición como una suma de fracciones parciales de $\dfrac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12}$?

**Solución**

Se descompone el denominador:

$$\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12} = \frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2}$$

A cada factor lineal le corresponde una constante como numerador,

$$\frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2} = \frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Al resolver la suma de fracciones parciales resulta que:

$$\frac{8+3x-x^2}{(2x+3)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2+B(2x+3)(x+2)+C(2x+3)}{(2x+3)(x+2)^2}$$

Se desarrollan los productos e igualan los numeradores:

$$8+3x-x^2 = A\left(x^2+4x+4\right)+B\left(2x^2+7x+6\right)+C\left(2x+3\right)$$

Ahora, al agrupar términos semejantes,

$$8+3x-x^2 = x^2\left(A+2B\right)+x\left(4A+7B+2C\right)+4A+6B+3C$$

Se igualan los coeficientes de ambos lados para formar el siguiente sistema, $\begin{cases} A+2B=-1 \\ 4A+7B+2C=3 \\ 4A+6B+3C=8 \end{cases}$

Que al resolverlo por cualquier método se determina que: $A=5$, $B=-3$ y $C=2$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{8+3x-x^2}{2x^3+11x^2+20x+12} = \frac{5}{2x+3}-\frac{3}{x+2}+\frac{2}{\left(x+2\right)^2}$$

## EJERCICIO 91

Descompón en suma de fracciones parciales las siguientes fracciones

1. $\frac{5x+1}{(x+1)(x-1)}$
2. $\frac{29x-56}{(3x-7)(2x-3)}$
3. $\frac{8}{(5x-4)(5x+4)}$
4. $\frac{x-12}{(x+2)(x-5)}$
5. $\frac{19-4x}{x^2-11x+28}$
6. $\frac{2(2x+7)}{4x^2-1}$
7. $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$
8. $\frac{5x-13}{6x^2+13x-5}$
9. $\frac{5x+1}{12+x-x^2}$
10. $\frac{-11(x+3)}{14-3x-2x^2}$
11. $\frac{3x-5}{9x^2-12x+4}$
12. $\frac{4x^2+7x-12}{x(x+2)(x-3)}$
13. $\frac{2x^2+7x+14}{(x+1)(x-2)(x+4)}$
14. $\frac{3x^2-5x-17}{(x+3)(x-2)^2}$
15. $\frac{16x^2-48x+15}{2x^3-7x^2+3x}$
16. $\frac{9x^2+4x-4}{x^3+x^2-2x}$
17. $\frac{30-30x-29x^2}{6x^3+5x^2-6x}$
18. $\frac{2x^2-6x-26}{x^3+2x^2-5x-6}$
19. $\frac{4x^2+9x+11}{2x^3-x^2-5x-2}$
20. $\frac{-x^2}{x^3+3x^2+3x+1}$
21. $\frac{-x^3-2x^2+5x-1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$
22. $\frac{2x^3-30x}{x^4-18x^2+81}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

**Caso III.** Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y $Q(x)$ contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite, entonces se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{a_1x^2+b_1x+c_1}+...+\frac{Mx+N}{a_nx^2+b_nx+c_n} \text{ P}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa como una suma de fracciones parciales la siguiente expresión: $\frac{4x^2+6}{x^3+3x}$

**Solución**

Se factoriza el denominador:

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{4x^2+6}{x\left(x^2+3\right)}$$

El denominador se conforma de un factor lineal y un factor cuadrático, entonces la suma se representa como:

$$\frac{4x^2+6}{x\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Se resuelve la suma de fracciones y se igualan numeradores:

$$\frac{4x^2+6}{x\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x}+\frac{(Bx+C)}{x^2+3}=\frac{A\left(x^2+3\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+3\right)}$$

$$4x^2+6 = A(x^2+3)+(Bx+C)\,(x)$$
$$4x^2+6 = Ax^2+3A+Bx^2+Cx$$
$$4x^2+6 = x^2(A+B)+Cx+3A$$

Para que se cumpla la igualdad, los numeradores deben ser iguales, entonces se forma el siguiente sistema $\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases}$, que al resolverse da: $A = 2$, $B = 2$ y $C = 0$, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{2}{x}+\frac{2x+0}{x^2+3}=\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+3}$$

2 Descompón en una suma de fracciones parciales la expresión: $\frac{4x^3-11x^2+17x}{\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+2\right)}$

**Solución**

El denominador contiene únicamente factores de segundo grado, por tanto, las fracciones parciales quedan de la siguiente manera:

$$\frac{4x^3-11x^2+17x}{\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+2\right)} = \frac{Ax+B}{x^2-3x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Al resolver la suma de fracciones e igualando numeradores se obtiene:

$$4x^3-11x^2+17x = (Ax+B)\left(x^2+2\right)+(Cx+D)\left(x^2-3x+1\right)$$
$$4x^3-11x^2+17x = Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3-3Cx^2+Cx+Dx^2-3Dx+D$$

Se agrupan términos semejantes:

$$4x^3 - 11x^2 + 17x = x^3(A+C) + x^2(B-3C+D) + x(2A+C-3D) + 2B + D$$

Para que se cumpla la igualdad, los numeradores deben ser iguales, entonces:

$$\begin{aligned} A + C &= 4 \\ B - 3C + D &= -11 \\ 2A + C - 3D &= 17 \\ 2B + D &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se determina que: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ y $D = -4$
Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x^3 - 11x^2 + 17x}{(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 2)} = \frac{x+2}{x^2 - 3x + 1} + \frac{3x - 4}{x^2 + 2}$$

**Caso IV.** Una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x)$ es menor que $Q(x)$ y $Q(x)$ contiene factores de segundo grado y alguno de ellos se repite, entonces a cada factor de la forma: $(ax^2 + bx + c)^n$ le corresponde una suma de fracciones:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \ldots + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

## Ejemplo

Expresa en suma de fracciones parciales la siguiente: $\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + 2x^3 + x}$

### Solución

Al factorizar el denominador se obtiene:

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x(x^2+1)^2}$$

La descomposición es:

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Se resuelve la suma de fracciones:

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x) + (Dx+E)(x)(x^2+1)}{x(x^2+1)^2}$$

Se igualan los numeradores y se desarrollan los productos:

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Dx^4 + Dx^2 + Ex^3 + Ex$$

Se agrupan también los términos semejantes:

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = x^4(A+D) + x^3(E) + x^2(2A+B+D) + x(C+E) + A$$

(*continúa*)

(*continuación*)

De esta igualdad se forma el sistema de ecuaciones $\begin{cases} A+D=3 \\ E=1 \\ 2A+B+D=4 \\ C+E=6 \\ A=3 \end{cases}$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes valores:

$$A=3,\ B=-2,\ C=5,\ D=0 \text{ y } E=1$$

Por tanto, la descomposición como suma de fracciones parciales es:

$$\frac{3x^4+x^3+4x^2+6x+3}{x^5+2x^3+x} = \frac{3}{x}+\frac{5-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x^2+1}$$

# EJERCICIO 92

Expresa como una suma de fracciones parciales a las siguientes:

1. $\frac{4x^2+x-9}{x^3-3x}$
2. $\frac{4x^2-x-1}{3x^3+3x^2+x+1}$
3. $\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x-2}$
4. $\frac{x^2-19}{x^4-2x^2-35}$
5. $\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}$
6. $\frac{-6x^3+x^2-32x+3}{x^4+8x^2+15}$
7. $\frac{x^4-2x^3-4x^2-11x-6}{x^5+x^3-6x}$
8. $\frac{5x^2-9x-8}{x^3-5x^2+5x+3}$
9. $\frac{11x^3-5x^2-30x-8}{2x^4+3x^2-35}$
10. $\frac{-7x^2-42x+24}{x^3+5x^2-3x}$
11. $\frac{5x^2-18x-1}{2x^3+4x^2-6x-20}$
12. $\frac{x^4+x^3-5x^2-2x+9}{x^5-6x^3+9x}$
13. $\frac{x^3+x^2+x+1}{\left(x^2+x-1\right)^2}$
14. $\frac{-5x^4-9x^2+x-7}{x^6+3x^4+3x^2+1}$
15. $\frac{2x^4-x^3-9x^2+3x+11}{x^5+x^4-4x^3-4x^2+4x+4}$
16. $\frac{2x^4+10x^3+24x^2+27x+16}{x\left(x^2+3x+4\right)^2}$
17. $\frac{-x^5+x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x^6+2x^4+x^2}$
18. $\frac{4\left(x^2+1\right)}{x^8+4x^6+4x^4}$
19. $\frac{3x^5-3x^3+4x^2-6x-5}{\left(x^2-2\right)^2\left(x^2+1\right)}$
20. $\frac{2x^5-4x^4+13x^3-3x^2+5x-5}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-x+1\right)^2}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 9

## Potenciación

**Reseña HISTÓRICA**

*Exponente de una potencia*

El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Nicolás Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, lo colocaba directamente en el coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como $5^2$.

En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, salvo en el detalle de utilizar números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$.

Sería Descartes quien sustituyó en su obra *Geometrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos. No deja de ser curioso, sin embargo, que para la potencia cuadrada no utilizara la notación elevada, sino que siguiera escribiendo, como muchos hasta entonces, $x^2$ como *xx*.

Estas expresiones son residuos de la época griega, en la cual los productos *xx* ($x^2$) o *xxx* ($x^3$) sólo se entendían como áreas o volúmenes. Por eso nosotros, cuando calculamos el producto de un número *x* por sí mismo, decimos que estamos elevando *x* "al cuadrado", aunque no pensemos en absoluto en calcular el área de un cuadrado de lado *x*.

## Definición

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente.

**$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a...}_{n\text{ - veces}}$, donde $a$ es la base y $n$ el exponente.**

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Al desarrollar $x^4$, se obtiene:

**Solución**

Al ser el exponente 4, la base $x$ se multiplica 4 veces ella misma:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

Por consiguiente, cuando se tiene $x^4$, es lo mismo que si se multiplica 4 veces la base $x$.

2 ¿Cuál es el resultado de $(-2x)^3$?

**Solución**

Se multiplica la base por sí misma tres veces, por tanto:

$$(-2x)^3 = (-2x)(-2x)(-2x) = -8x^3$$

Finalmente, se obtiene: $(-2x)^3 = -8x^3$

## Teoremas de los exponentes

Si $a, b, m, n \in R$ y $a, b \neq 0$, entonces:

**$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$**

### Demostración

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{n\text{ veces}}\ \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{m\text{ veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n+m\text{ veces}} = a^{n+m}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $x^3 \cdot x^5$?

**Solución**

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

2 Encuentra el resultado de $(-5m)(8m^3)(-2m^2)$.

**Solución**

Se multiplican los coeficientes $(-5)(8)(-2)$, después se aplica el teorema y se obtiene:

$$(-5m)(8m^3)(-2m^2) = 80m^{1+3+2} = 80m^6$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Demostración

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{n \text{ veces}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n \text{ veces}} = a^{m-n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $\frac{m^5}{m^2}$?

**Solución**

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$\frac{m^5}{m^2} = m^{5-2} = m^3$$

2 Encuentra el resultado de: $\frac{-27m^7}{-3m^3}$.

**Solución**

Primero se dividen los coeficientes y después se aplica el teorema:

$$\frac{-27m^7}{-3m^3} = \frac{-27}{-3}m^{7-3} = 9m^4$$

$$a^0 = 1$$

Demostración

Al aplicar el teorema de división, con $m = n$, resulta que:

$$1 = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

## Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\left(-12m^7\right)^0$?

**Solución**

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\left(-12m^7\right)^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Demostración

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

**Ejemplo**

¿Cuál es el resultado de $(-3x)^{-2}$?

**Solución**

Se aplica el teorema y después se desarrolla la potencia:

$$(-3x)^{-2} = \frac{1}{(-3x)^2} = \frac{1}{(-3x)(-3x)} = \frac{1}{9x^2}$$

Por tanto, se tiene que: $(-3x)^{-2} = \frac{1}{9x^2}$

- $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$

Demostración

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n)(a^n)(a^n)\ldots(a^n)}_{m \text{ veces}} = a^{n+n+n+\ldots+n} = a^{n\cdot m}$$

**Ejemplo**

¿Cuál es una expresión equivalente a $(m^4)^3$?

**Solución**

Se aplica el teorema y se determina que:

$$(m^4)^3 = m^{(4)(3)} = m^{12}$$

- $\boldsymbol{(a\cdot b\cdot c)^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n}$

Demostración

Al aplicar el teorema de multiplicación, con $m = n$, entonces se obtiene:

$$(a\cdot b\cdot c)^n = \underbrace{(a\cdot b\cdot c)(a\cdot b\cdot c)\ldots(a\cdot b\cdot c)}_{n \text{ veces}} = (a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)(c\cdot c\cdot\ldots\cdot c) = a^n b^n c^n$$

**Ejemplo**

Determina una expresión equivalente a: $(x^3\cdot y^4\cdot z^2)^4$.

**Solución**

Al aplicar el teorema se obtiene que: $(x^3\cdot y^4\cdot z^2)^4 = x^{(3)(4)}y^{(4)(4)}z^{(2)(4)} = x^{12}\cdot y^{16}\cdot z^8$

- $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Demostración

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\ldots\left(\frac{a}{b}\right)}^{n \text{ veces}} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

**Ejemplo**

¿Cuál es el resultado de desarrollar $\left(\frac{m^4\cdot n^3}{r^2}\right)^5$?

**Solución**

Aplica el teorema, y determina que:

$$\left(\frac{m^4\cdot n^3}{r^2}\right)^5=\frac{\left(m^4\cdot n^3\right)^5}{\left(r^2\right)^5}=\frac{\left(m^4\right)^5\cdot\left(n^3\right)^5}{\left(r^2\right)^5}=\frac{m^{20}\cdot n^{15}}{r^{10}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Demostración

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

**Ejemplo**

¿Cuál es el resultado de desarrollar $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}$?

**Solución**

Se aplica el teorema y se obtiene que:

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}=\left(\frac{3y}{2x}\right)^{2}$$

Luego, al elevar al cuadrado se tiene el desarrollo:

$$\left(\frac{3y}{2x}\right)^{2}=\frac{(3y)^2}{(2x)^2}=\frac{9y^2}{4x^2}$$

Por tanto, $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}=\frac{9y^2}{4x^2}$

## EJERCICIO **93**

Aplica la definición y desarrolla las siguientes potencias:

1. $\left(3x^2\right)^3$
2. $(-4xy)^2$
3. $\left(\frac{2}{5}a^4\right)^4$
4. $\left(-6x^2y^3\right)^3$
5. $-\left(2a^6\right)^5$
6. $\left(\frac{7}{4}m^{-2}\right)^2$
7. $\left(\frac{6a}{3b}\right)^5$
8. $\left[-(2ax)^2\right]^2$

Simplifica las siguientes expresiones y muestra el resultado sin exponentes negativos:

9. $(3y)\left(-5y^2\right)$
10. $x^3y^4x^{-2}y^3$
11. $x^{\frac{4}{5}}x^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{3}{5}}$
12. $\left(-m^3n^{-1}\right)\left(m^{-2}n^2\right)$
13. $\frac{a^5}{a^{-3}}$
14. $\frac{9m^{-4}}{m^2}$
15. $\frac{3a^5b^{-7}}{a^3b^{-6}}$
16. $\frac{m^3n^{-5}}{m^{-2}n^{-2}}$
17. $\frac{3a^{-2}b^2}{17a^2b^3}$
18. $\left(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)^6$
19. $\left(-\frac{1}{3}m^2\right)^5$
20. $(-2x)^4$

21. $-9x^0$

22. $2(x-5y)^0$

23. $5x^{-3}$

24. $-(6x)^{-2}$

25. $(a^{-3}b^2)^{-1}$

26. $(b\cdot b^2\cdot b^3)^{-2}$

27. $(z^{-2}\cdot z^3\cdot z^0)^{-3}$

28. $\left[(x+2y)^{-3}\right]^{-2}$

29. $(2a^3)^2(3a)^3$

30. $\left(\frac{4}{3}x^2y^3\right)^3\left(\frac{3}{16x^5}\right)^2$

31. $\frac{(4x^3)^2}{(-2x^5)^3}$

32. $\frac{(-a^4b^5)^4}{(a^8b^{10})^2}$

33. $\frac{(ab)^2(a^2b^2)^3}{(a^3b^3)^2}$

34. $\frac{(6a^4)^5}{(2a^2)^2(3a)^3}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Simplificación*

Se aplican los teoremas de los exponentes, según se presenten en la expresión; esto significa que el orden en que se realicen estará determinado por las operaciones correspondientes, así como por los signos de agrupación que estén involucrados.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Simplifica la siguiente expresión y da el resultado con exponentes positivos.

$$(x^2y^{-2})^{-3}$$

**Solución**

Se aplica el teorema $(a\cdot b)^n = a^n\, b^n$ y posteriormente se realiza el producto de los exponentes.

$$(x^2y^{-2})^{-3} = (x^2)^{-3}(y^{-2})^{-3} = x^{-6}y^6$$

El elemento con exponente negativo se transforma a potencia positiva y se realiza la multiplicación de fracciones.

$$x^{-6}y^6 = \frac{1}{x^6}\cdot y^6 = \frac{y^6}{x^6}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{y^6}{x^6}$

2 Simplifica la siguiente expresión y elimina los exponentes negativos.

$$\frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

**Solución**

En esta expresión la base involucrada es el binomio $x^2 + 1$, por lo que se trabaja únicamente con los exponentes, se simplifica el numerador y después se simplifica la división como sigue:

$$\frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{-1}$$

Al eliminar el exponente negativo la expresión resultante es:

$$\left(x^2+1\right)^{-1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\frac{1}{x^2+1}$

3 Simplifica la siguiente expresión:

$$\left(\frac{6x^3y^{-2}z^4}{3x^{-1}y^4z^3}\right)^{-2}$$

**Solución**

Se realiza la división dentro del paréntesis:

$$\left(\frac{6x^3y^{-2}z^4}{3x^{-1}y^4z^3}\right)^{-2} = \left(2x^{3-(-1)}y^{-2-4}z^{4-3}\right)^{-2} = \left(2x^4y^{-6}z\right)^{-2}$$

Se eleva cada uno de los factores al exponente "– 2", aquellos que resulten con exponente negativo se transforman a su expresión equivalente con exponente positivo hasta obtener la simplificación deseada.

$$\left(2x^4y^{-6}z\right)^{-2} = 2^{-2}x^{-8}y^{12}z^{-2} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{x^8}\cdot y^{12}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{y^{12}}{4x^8z^2}$$

4 Simplifica al máximo la siguiente expresión:

$$\frac{\left(2m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2m^{-2}n^6\right)^{-1}\left(2mn\right)^5}$$

**Solución**

Se resuelven las potencias para cada uno de los paréntesis:

$$\frac{\left(2m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2m^{-2}n^6\right)^{-1}\left(2mn\right)^5} = \frac{2^6m^{\frac{6}{3}}n^{\frac{30}{6}}}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)} = \frac{2^6m^2n^5}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)}$$

Se multiplican los factores del denominador y por último se realiza la división:

$$\frac{2^6m^2n^5}{\left(2^{-1}m^2n^{-6}\right)\left(2^5m^5n^5\right)} = \frac{2^6m^2n^5}{2^{-1+5}m^{2+5}n^{-6+5}} = \frac{2^6m^2n^5}{2^4m^7n^{-1}} = 2^{6-4}m^{2-7}n^{5-(-1)} = 2^2m^{-5}n^6$$

El resultado contiene exponentes negativos, entonces se convierte a exponente positivo para obtener la simplificación final:

$$2^2m^{-5}n^6 = 2^2\cdot\frac{1}{m^5}\cdot n^6 = \frac{4n^6}{m^5}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{4n^6}{m^5}$

5 Simplifica la siguiente expresión al máximo y que no contenga exponentes negativos.

$$\left(\frac{\left(x^{-3}y^{-1}z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{2}y^{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{-2}y^{-3}z^{-1}\right)^{-1}}\right)^{3}$$

**Solución**

Se desarrollan los paréntesis internos al elevar cada uno de los factores al exponente correspondiente:

$$\left(\frac{\left(x^{-3}y^{-1}z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{2}y^{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{-2}y^{-3}z^{-1}\right)^{-1}}\right)^{3}=\left(\frac{\left(x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}$$

Se resuelve el producto en el numerador de la fracción y se realiza la división:

$$\left(\frac{\left(x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}z}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(\frac{x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{5}{6}}z}{x^{2}y^{3}z}\right)^{3}=\left(x^{-\frac{5}{6}-2}y^{\frac{5}{6}-3}z^{1-1}\right)^{3}$$

$$=\left(x^{-\frac{17}{6}}y^{-\frac{13}{6}}z^{0}\right)^{3}$$

Se eleva cada uno de los factores a la potencia 3:

$$\left(x^{-\frac{17}{6}}y^{-\frac{13}{6}}\right)^{3}=x^{\left(-\frac{17}{6}\right)(3)}y^{\left(-\frac{13}{6}\right)(3)}=x^{-\frac{17}{2}}y^{-\frac{13}{2}}$$

Los exponentes resultantes son negativos, por lo que se transforman a otro factor equivalente con exponente positivo

$$x^{-\frac{17}{2}}y^{-\frac{13}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{17}{2}}}\cdot\frac{1}{y^{\frac{13}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{17}{2}}y^{\frac{13}{2}}}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\dfrac{1}{x^{\frac{17}{2}}y^{\frac{13}{2}}}$

6 Reduce a su mínima expresión:

$$\left[\frac{\left(a^{4}b^{7}\right)^{-2}\cdot\left[(bc)^{7}\right]^{0}}{(abc)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\left(a^{3}b^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

**Solución**

Se desarrollan los paréntesis internos:

$$\left[\frac{\left(a^{4}b^{7}\right)^{-2}\cdot\left[(bc)^{7}\right]^{0}}{(abc)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\left(a^{3}b^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}=\left[\frac{a^{-8}b^{-14}}{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

Luego, si una fracción está elevada a un exponente negativo, ésta es igual a su recíproco elevado al exponente positivo, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ entonces:

$$\left[\frac{a^{-8}b^{-14}}{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}b}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}=\left[\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}{a^{-8}b^{-14}}\right]\cdot\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b}\right)$$

La expresión resultante se simplifica de diversas formas, una de ellas es multiplicar las fracciones y por último realizar la división resultante:

$$\left[\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3}}{a^{-8}b^{-14}}\right]\cdot\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b}\right)=\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-3+\frac{1}{3}}}{a^{-8+\frac{3}{2}}b^{-14+1}}=\frac{a^{-3}b^{-3}c^{-\frac{8}{3}}}{a^{-\frac{13}{2}}b^{-13}}=a^{-3+\frac{13}{2}}b^{-3+13}c^{-\frac{8}{3}}=a^{\frac{7}{2}}b^{10}c^{-\frac{8}{3}}$$

El factor con exponente negativo se transforma en otro equivalente de exponente positivo:

$$a^{\frac{7}{2}}b^{10}c^{-\frac{8}{3}}=a^{\frac{7}{2}}b^{10}\cdot\frac{1}{c^{\frac{8}{3}}}=\frac{a^{\frac{7}{2}}b^{10}}{c^{\frac{8}{3}}}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{a^{\frac{7}{2}}b^{10}}{c^{\frac{8}{3}}}$

7 Reduce a su mínima expresión:

$$\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}}$$

**Solución**

Se transforman cada uno de los sumandos a exponente positivo y se simplifica la fracción compleja resultante:

$$\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}}=\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1+x}{x^3}}{\frac{1+x}{x^2}}=\frac{x^2(1+x)}{x^3(1+x)}=\frac{1}{x}$$

Por tanto, la simplificación es: $\frac{1}{x}$

8 Simplifica la siguiente expresión y elimina los exponentes negativos.

$$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$$

**Solución**

Cada uno de los sumandos con exponente negativo se expresa en otro equivalente con exponente positivo:

$$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Las transformaciones dan como resultado una fracción compleja, la cual al simplificarla se obtiene:

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{ab\left(b^2-a^2\right)}{a^2b^2\left(b+a\right)}=\frac{ab(b+a)(b-a)}{a^2b^2\left(b+a\right)}=\frac{b-a}{ab}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $\frac{b-a}{ab}$

# EJERCICIO 94

Aplica los teoremas de los exponentes y simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1. $\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{12}$
2. $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{6}{4}}$
3. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{6}}}$
4. $\left(\dfrac{x^{-3}y^{-1}z^{-2}}{2x^{-3}y^{-1}}\right)^2$
5. $\left(\dfrac{-3x^4y^2}{-6x^6y^{-2}}\right)^{-1}$
6. $\dfrac{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{2}}}$
7. $\dfrac{\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}}{\left(6x^{-2}y^{-1}\right)^{-1}}$
8. $\dfrac{4a^5b^{-4}}{\left(2a^{-2}b^3\right)^{-2}}$
9. $\left(\dfrac{8x^3y^{-2}z^4}{4x^{-2}y^4z^{-3}}\right)^{-2}$
10. $\dfrac{(x-3)^{-2}(x-3)^5}{(x-3)^3}$
11. $\dfrac{(x+3y)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+3y)^{-\frac{2}{3}}}{(x+3y)^{-\frac{4}{3}}}$
12. $\left[\dfrac{\left(x^3y^{-2}\right)^{-1}}{\left(2x^2y^{-3}\right)^{-2}}\right]^{-3}$
13. $\left(\dfrac{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}\right)^{-2}$
14. $\dfrac{\left(5x^2y^{-2}\right)^{-2}\cdot\left(5x^{-3}y^2\right)^2}{\left(x^3y^{-2}\right)^{-1}}$
15. $\left[\dfrac{\left(x^2y^{-\frac{3}{4}}z^{\frac{1}{2}}\right)^4}{\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{-6}}\right]^{-1}$
16. $\dfrac{\left(a^4b^{-2}c^6\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{6}}\right)^6}$
17. $\dfrac{1}{\left(3a^2b^3\right)^{-2}}\cdot\left(2ab^{-2}\right)^{-3}$
18. $\dfrac{\left(m^8n^{12}\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(m^9n^6\right)^{\frac{1}{3}}}$
19. $\left[\left(4x^2y^3\right)^{-2}\cdot\left(2x^2y^{-2}\right)^2\right]^{-2}$
20. $\dfrac{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{4}}\right]^4}{\left(x^2+y^2\right)^{-2}}$
21. $\left[\dfrac{(x-2y)^{-2}\cdot(x-2y)^{-5}}{(x-2y)^{-6}}\right]^{-2}$
22. $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-3}+b^{-3}}$
23. $\dfrac{x^{-1}y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$
24. $\left(\dfrac{y^0-y^{-2}}{x^0-y^{-1}}\right)^{-1}$
25. $\left(x^{-2}+y^{-3}\right)\left(x^{-2}-y^{-3}\right)$
26. $\dfrac{x^2y^2\left(y^{-2}-x^{-2}\right)}{x-y}$
27. $\dfrac{xy^{-2}+x^{-2}y}{x^{-1}+y^{-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Potencia de un binomio

### Factorial de un número

A la expresión $r!$ se le denomina "factorial de $r$" y se define como el producto de todos los números naturales anteriores a $r$.

$$r! = r(r-1)(r-2)\cdot \ldots \cdot 1 \quad \text{con } r > 0$$

Si $r = 0$, entonces $0! = 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de: 4!

**Solución**

Al aplicar la definición, se obtiene que:

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

Por tanto, $4! = 24$

2 Determina el resultado de 6!

**Solución**

Se desarrolla cada uno de los factoriales y se realiza la operación resultante:

$$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

Por consiguiente, $6! = 720$

### Binomio de Newton

Para un número $n$ el desarrollo de:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

El procedimiento anterior se llama *teorema del binomio de Newton* o fórmula para el binomio de Newton.

**Si $n$ es natural, el desarrollo de $(a+b)^n$ cumple con las siguientes características:**

*a*) El primer término es $a^n$ y el último término es $b^n$.

*b*) Al desarrollar el binomio se obtienen $(n + 1)$ términos.

*c*) Conforme aumentan los términos, la potencia del primer término a disminuye en 1 y la del segundo término $b$ aumenta en 1.

*d*) Para obtener el $i$-ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla: $(x + 2y)^4$.

**Solución**

Se aplica el desarrollo del binomio de Newton, hasta obtener el segundo término elevado al exponente 4:

$$(x+2y)^4 = (x)^4 + 4(x)^{4-1}(2y)^1 + \frac{4(4-1)}{2!}(x)^{4-2}(2y)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(x)^{4-3}(2y)^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}(x)^{4-4}(2y)^4$$

Se desarrollan los factoriales en los denominadores de cada fracción, se desarrollan las potencias y se simplifica al máximo cada uno de los sumandos:

$$= (x)^4 + 4(x)^3(2y)^1 + \frac{4(3)}{2\cdot 1}(x)^2(2y)^2 + \frac{4(3)(2)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^1(2y)^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^0(2y)^4$$

$$= x^4 + 4(x^3)(2y) + 6(x^2)(4y^2) + 4(x)(8y^3) + (x^0)(16y^4)$$

Finalmente, se realizan los productos y se obtiene el desarrollo:

$$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

2 Desarrolla: $(2x^2 - 3y^2)^5$.

**Solución**

Se aplica el teorema del binomio de Newton y se tiene que:

$$(2x^2-3y^2)^5 = (2x^2)^5 + 5(2x^2)^{5-1}(-3y^2)^1 + \frac{5(5-1)}{2!}(2x^2)^{5-2}(-3y^2)^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2x^2)^{5-3}(-3y^2)^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2x^2)^{5-4}(-3y^2)^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2x^2)^{5-5}(-3y^2)^5$$

Se simplifican las fracciones y se desarrollan las potencias:

$$= (2x^2)^5 + 5(2x^2)^4(-3y^2)^1 + \frac{5(4)}{2\cdot 1}(2x^2)^3(-3y^2)^2 + \frac{5(4)(3)}{3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^2(-3y^2)^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^1(-3y^2)^4 + \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x^2)^0(-3y^2)^5$$

$$= 32x^{10} + 5(16x^8)(-3y^2) + 10(8x^6)(9y^4) + 10(4x^4)(-27y^6) + 5(2x^2)(81y^8) + (2x^2)^0(-243y^{10})$$

Por último, se realizan los productos y se obtiene el desarrollo:

$$= 32x^{10} - 240x^8y^2 + 720x^6y^4 - 1\,080x^4y^6 + 810x^2y^8 - 243y^{10}$$

**Si $n$ es entero negativo o fraccionario, el desarrollo de $(a + b)^n$ cumple con las siguientes características:**

*a*) El primer término es $a^n$ y no existe un último término.

*b*) El número de términos es infinito.

*c*) El desarrollo de estos binomios recibe el nombre de series.

*d*) Conforme aumentan los términos la potencia del primer término $a$ disminuye en 1, y la del segundo término $b$, aumenta en 1.

*e*) Para obtener el $i$-ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Desarrolla: $(x + 1)^{-3}$.

**Solución**

Se aplica el desarrollo de Newton hasta obtener los términos deseados, en este caso se desarrolla hasta cinco términos

$$(x+1)^{-3} = (x)^{-3} + (-3)(x)^{-3-1}(1) + \frac{(-3)(-3-1)}{2!}(x)^{-3-2}(1)^2 + \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{3!}(x)^{-3-3}(1)^3 + \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)(-3-3)}{4!}(x)^{-3-4}(1)^4 + ...$$

Se simplifican todos y cada uno de los coeficientes de cada término, así como los exponentes:

$$= (x)^{-3} + (-3)(x)^{-4}(1) + \frac{(-3)(-4)}{2\cdot 1}(x)^{-5}(1)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^{-6}(1)^3 + \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^{-7}(1)^4 - \ldots$$

$$= x^{-3} - 3(x^{-4})(1) + 6(x^{-5})(1) - 10(x^{-6})(1) + 15(x^{-7})(1) - \ldots$$

$$= x^{-3} - 3x^{-4} + 6x^{-5} - 10x^{-6} + 15x^{-7} - \ldots$$

Como los exponentes son negativos, éstos se expresan en su equivalente positivo, lo que resulta en:

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^5} - \frac{10}{x^6} + \frac{15}{x^7} - ...$$

2 Desarrolla: $(x+2)^{\frac{1}{2}}$.

**Solución**

Al aplicar el teorema de Newton hasta cinco términos:

$$(x+2)^{\frac{1}{2}} = (x)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)(x)^{\frac{1}{2}-1}(2)^1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2\,!}(x)^{\frac{1}{2}-2}(2)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x)^{\frac{1}{2}-3}(2)^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}(x)^{\frac{1}{2}-4}(2)^4 + ...$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se simplifica cada uno de los sumandos al máximo:

$$= (x)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)(x)^{\frac{1}{2}-1}(2)^1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-2}(2)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-3}(2)^3 +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x)^{\frac{1}{2}-4}(2)^4 + ...$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(2) - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}(4) + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}(8) - \frac{5}{128}\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)(16) + ...$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{8}x^{-\frac{7}{2}} + ...$$

Por último, se convierten los exponentes negativos a positivos y se obtiene el desarrollo:

$$= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{8x^{\frac{7}{2}}} + ...$$

# EJERCICIO 95

Desarrolla los siguientes binomios:

1. $(3-2x)^3$
2. $(1+x)^4$
3. $(x-2y)^3$
4. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^3$
5. $(x-1)^6$
6. $(2-x)^4$
7. $(x^2+y^2)^5$
8. $\left(\frac{x}{2}-1\right)^5$
9. $\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)^4$
10. $(x^3+5y^3)^3$
11. $(x^2-1)^{-1}$
12. $(2x-1)^{-3}$
13. $(x-1)^{-4}$
14. $(3x+1)^{\frac{1}{3}}$
15. $(x+2)^{\frac{4}{3}}$
16. $(x-2)^{-\frac{3}{4}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Cálculo del *i-ésimo* término

Para determinar el *i-ésimo* término del binomio $(a + b)^n$, se utiliza la siguiente fórmula:

$$i\text{-ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Calcula el cuarto término de $(2x+3)^5$.

**Solución**

En este caso $i = 4$, por tanto, en el numerador sólo habrá tres factores numéricos:

$$4\text{o. término} = \frac{5(5-1)(5-2)}{(4-1)!}(2x)^{5-4+1}(3)^{4-1} = \frac{5(4)(3)}{3(2)(1)}(2x)^2(3)^3 = 10(4x^2)(27) = 1\,080x^2$$

Entonces, el cuarto término del binomio $(2x+3)^5$ es: $1\,080x^2$

2 Determina el sexto término de $(x+1)^{\frac{1}{2}}$.

**Solución**

Para encontrar el sexto término se toma en cuenta que $i = 6$ y, por tanto, sólo se tienen cinco términos en el numerador, luego:

$$\text{Sexto término} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)}{(6-1)\,!}(x)^{\frac{1}{2}-6+1}(1)^{6-1} = \frac{7}{256}x^{-\frac{9}{2}}(1)^5 = \frac{7}{256x^{\frac{9}{2}}}$$

Por tanto, el sexto término del binomio $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ es: $\frac{7}{256x^{\frac{9}{2}}}$

## EJERCICIO 96

Determina el término que se indica en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Tercer término de $(3x+5)^7$
2. Quinto término de $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^8$
3. Cuarto término de $(4xy-7)^6$
4. Sexto término de $(8x+1)^{\frac{1}{3}}$
5. Octavo término de $(3x-5)^{10}$
6. Sexto término de $(x-2)^{-4}$
7. Quinto término de $(x-1)^{-1}$
8. Cuarto término de $(4x+9)^{\frac{1}{2}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Triángulo de Pascal

Al desarrollar el binomio $(a + b)^n$, los elementos tienen como coeficientes:

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{2!}\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ \text{etcétera.}$$

Específicamente:

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

y así sucesivamente.

El *triángulo de Pascal* se forma con los coeficientes de los elementos al elevar un binomio a una potencia $n$ con $n \in Z^+$. Entonces se toman los coeficientes de los términos:

| | |
|---|---|
| $(a+b)^0$ | 1 |
| $(a+b)^1$ | 1 1 |
| $(a+b)^2$ | 1 2 1 |
| $(a+b)^3$ | 1 3 3 1 |
| $(a+b)^4$ | 1 4 6 4 1 |
| ⋮ | ⋮ |

Ahora bien, los extremos de cada potencia siempre son la unidad y los siguientes números de cada potencia se obtienen al sumar dos a dos los dígitos que se tienen en el renglón inmediato superior.

## EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Halla los coeficientes de $(a+b)^5$.

**Solución**

A este binomio le antecede $(a+b)^4$, cuyos coeficientes son:

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

luego se coloca la unidad a los extremos y se suman dos a dos de la siguiente forma:

1 1 + 4 4 + 6 6 + 4 4 + 1 1

Finalmente, los coeficientes son:

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

**2** Desarrolla el siguiente binomio $(3x-2y)^4$.

**Solución**

Al tomar los números del triángulo en la fila de un binomio con potencia 4, se tiene:

$$(3x-2y)^4 = \mathbf{1}(3x)^4 + \mathbf{4}(3x)^3(-2y) + \mathbf{6}(3x)^2(-2y)^2 + \mathbf{4}(3x)(-2y)^3 + \mathbf{1}(-2y)^4$$
$$= (81x^4) + 4(27x^3)(-2y) + 6(9x^2)(4y^2) + 4(3x)(-8y^3) + (16y^4)$$
$$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$$

**3** Desarrolla el siguiente binomio $(x^2+2y)^6$.

**Solución**

Se utilizan los coeficientes para la potencia 6 y se obtiene:

$$(x^2+2y)^6 =$$
$$= \mathbf{1}(x^2)^6 + \mathbf{6}(x^2)^5(2y) + \mathbf{15}(x^2)^4(2y)^2 + \mathbf{20}(x^2)^3(2y)^3 + \mathbf{15}(x^2)^2(2y)^4 + \mathbf{6}(x^2)(2y)^5 + \mathbf{1}(2y)^6$$
$$= (x^{12}) + 6(x^{10})(2y) + 15(x^8)(4y^2) + 20(x^6)(8y^3) + 15(x^4)(16y^4) + 6(x^2)(32y^5) + (64y^6)$$
$$= x^{12} + 12x^{10}y + 60x^8y^2 + 160x^6y^3 + 240x^4y^4 + 192x^2y^5 + 64y^6$$

## EJERCICIO 97

Desarrolla los siguientes binomios con el triángulo de Pascal:

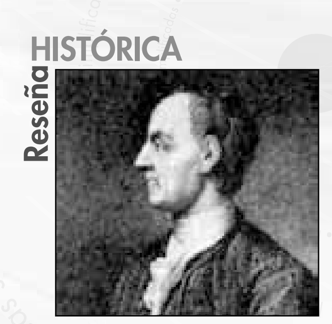
1. $(2x+1)^4$
2. $(3-2y)^7$
3. $(x+1)^8$
4. $(1-x)^6$
5. $(5m-2n)^5$
6. $(a+2b)^8$
7. $(x^2+5y)^6$
8. $\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\right)^7$
9. $(x+y-2)^3$
10. $\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^5$
11. $(x-1)^{12}$
12. $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\right)^5$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 10

## Radicación

**Reseña HISTÓRICA**



*El signo radical*

Christoph Rudolff (1500-1545), alemán, publica en 1525 el primer tratado de álgebra en alemán vulgar titulado *Coss*. En esta obra aparece, por primera vez, el símbolo Ö, para indicar la raíz cuadrada. La raíz cuadrada de un número se designaba antes del siglo XVI con un punto delante del número.

En el siglo XVIII Leonhard Euler utilizó por primera vez nuestro actual símbolo de raíz, originado de la deformación de la letra "**r**", la primera letra de la palabra *radix* con la que se designaba a la raíz cuadrada.

Leonhard Euler (1707-1783)

## Radical

La expresión $\sqrt[n]{a}$ recibe el nombre de radical y se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

### Elementos de un radical

Un radical es una expresión algebraica, que se forma con los siguientes elementos:

coeficiente, radicando e índice de raíz

**Ejemplos**

| | Coeficiente | Radicando | Índice de raíz |
|---|---|---|---|
| $2\sqrt{3}$ | 2 | 3 | 2 |
| $\sqrt[3]{2xy}$ | 1 | $2xy$ | 3 |
| $5x\sqrt[4]{3x^2y}$ | $5x$ | $3x^2y$ | 4 |

### Raíz principal de un radical

Sea $a$ un número real y $n$ entero positivo mayor a 1:

- **Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$**

- **Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$ tal que $b^n = a$**

**Ejemplos**

$\sqrt{25} = \pm 5$ porque $(5)^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

- **Si $a < 0$ y $n$ impar, entonces $\sqrt[n]{a} = b$ con $b < 0$**

**Ejemplo**

$\sqrt[5]{-1\,024} = -4$ porque $(-4)^5 = -1\,024$.

- **Si $a < 0$ y $n$ par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es número real.**

**Ejemplo**

$\sqrt{-9}$ no es un número real, ya que no existe un número $x$, tal que: $x^2 = -9$.

## Radical como exponente

Sea $\sqrt[n]{a}$ un número real, entonces este radical se expresa como:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

## Teoremas

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Demostración

Se expresa el radical $\sqrt[n]{a}$ como exponente, se eleva la expresión y se obtiene:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Por consiguiente, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

**Ejemplo**

Obtén el resultado de $\left(\sqrt{3}\right)^2$.

**Solución**

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

- $\sqrt[n]{a^n} = a$ **si** $a < 0$ **y** $n$ **es impar**

**Ejemplo**

Determina el resultado de $\sqrt[3]{(-2)^3}$.

**Solución**

Se aplica el teorema y se obtiene:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ **si** $a < 0$ **y** $n$ **es par**

**Ejemplo**

Obtén la siguiente raíz: $\sqrt[4]{(-81)^4}$.

**Solución**

Se aplica el teorema y el resultado es:

$$\sqrt[4]{(-81)^4} = |-81| = 81$$

- **Sea el radical** $\sqrt[n]{a^m}$ **la expresión equivalente es** $a^{\frac{m}{n}}$**, donde el índice es el denominador de la fracción y el exponente del radicando el numerador.**

Demostración

El radical se expresa como exponente fraccionario y se multiplican los exponentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Expresa $\sqrt[5]{x^4}$ con exponente fraccionario.

**Solución**

Al dividir el exponente del radicando por el índice de la raíz resulta:

$$\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$$

2 Expresa $\sqrt{m}$ con exponente fraccionario.

**Solución**

En este caso se trata de una raíz cuadrada y el exponente de la base es 1, por tanto, el índice es 2, entonces:

$$\sqrt{m} = \sqrt[2]{m^1} = m^{\frac{1}{2}}$$

3 Expresa el radical $\sqrt[5]{(a+b)^3}$ con exponente fraccionario.

**Solución**

Se divide el exponente por el índice y resulta:

$$\sqrt[5]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{5}}$$

4 Expresa el radical $\sqrt[3]{x^4+y^4}$ con exponente fraccionario.

**Solución**

El radicando es un polinomio que se toma como un solo elemento, esto es:

$$\sqrt[3]{x^4+y^4}=\sqrt[3]{(x^4+y^4)^1}$$

Se aplica la división del exponente entre el índice y se obtiene:

$$\sqrt[3]{x^4+y^4}=\sqrt[3]{(x^4+y^4)^1}=(x^4+y^4)^{\frac{1}{3}}$$

EJERCICIO **98**

Representa en forma de exponente fraccionario los siguientes radicales:

1. $\sqrt{m^5}$
2. $\sqrt[7]{x^2}$
3. $\sqrt[3]{y^4}$
4. $\sqrt[5]{a^2}$
5. $\sqrt{b^{11}}$
6. $\sqrt{5x}$
7. $\sqrt[6]{(2x)^5}$
8. $\sqrt[4]{(3y^2)^3}$
9. $\sqrt{(2xy)^9}$
10. $\sqrt[9]{(x^2y)^2}$
11. $\sqrt[8]{x^4y^4}$
12. $\sqrt[3]{x^6+y^6}$
13. $\sqrt{x^7-y^7}$
14. $\sqrt[3]{(x^2+y^2)^4}$
15. $\sqrt[5]{(x+2y)^{11}}$
16. $\sqrt[5]{a^9}-\sqrt[7]{b^3}$
17. $\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^5}$
18. $\sqrt[4]{m^7}\,\sqrt[5]{n^3}$
19. $\sqrt{m(n+p)^3}$
20. $\sqrt[3]{a^2m^{13}}\,\sqrt[4]{n^7}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Representación de un exponente fraccionario como radical

Dada la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ su representación como un radical es: $\sqrt[n]{a^m}$, donde el numerador es el exponente del radical y el denominador el índice de la raíz.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en forma de radical: $y^{\frac{1}{3}}$.

**Solución**

El exponente del radicando es la unidad y el índice de la raíz es 3, por tanto:

$$y^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{y^1}=\sqrt[3]{y}$$

2 Escribe como radical: $4(m+n)^{\frac{2}{5}}$.

**Solución**

El exponente del radicando es 2 y el índice de la raíz es 5, el coeficiente 4 permanece igual, por lo que resulta:

$$4(m+n)^{\frac{2}{5}} = 4\sqrt[5]{(m+n)^2}$$

3 Transforma a radical la siguiente expresión: $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$.

**Solución**

Se transforma a radical cada uno de los sumandos y se obtiene:

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

## EJERCICIO 99

Representa en forma de radical.

1. $2^{\frac{1}{3}}$
2. $5^{\frac{4}{7}}$
3. $m^{\frac{2}{3}}$
4. $(3y)^{\frac{11}{2}}$
5. $(2xy^2)^{\frac{3}{4}}$
6. $(x^3y)^{\frac{1}{2}}$
7. $7y^{\frac{2}{5}}$
8. $3a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{8}{7}}$
9. $\frac{3}{4}z^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}$
10. $m^{\frac{2}{5}} - n^{\frac{1}{3}}$
11. $a^{\frac{1}{7}} + b^{\frac{1}{7}}$
12. $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{4}}$
13. $(2x+y)^{\frac{4}{5}}$
14. $(m+n)^{\frac{1}{2}}$
15. $(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$
16. $(m^{-1}-n^{-2})^{\frac{3}{7}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Teoremas

Los teoremas de los exponentes también se aplican a los radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

Demostración

Se expresa el radical como exponente fraccionario y se aplica el teorema correspondiente de exponentes para obtener:

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

### Ejemplo

Realiza: $\sqrt[3]{2x^2y}$.

**Solución**

Se aplica el teorema y se determina que:

$$\sqrt[3]{2x^2y} = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Demostración

Se expresa el radical como exponente fraccionario y se aplica el teorema: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, para demostrar que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**Ejemplo**

Efectúa: $\sqrt{\frac{5a}{3}}$.

**Solución**

Se aplica el teorema para la división y después el del producto para obtener como resultado:

$$\sqrt{\frac{5a}{3}} = \frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Demostración

Al aplicar los teoremas de los exponentes, se demuestra que:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

**Ejemplo**

Desarrolla: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3x}}$.

**Solución**

Con los respectivos teoremas se determina que:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3x}} = \sqrt[(3)(4)]{3x} = \sqrt[12]{3x} = \sqrt[12]{3}\sqrt[12]{x}$$

## Cálculo de raíces

Para obtener raíces de cantidades numéricas o expresiones algebraicas, se aplica la fórmula como se ilustra en los siguientes ejemplos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén: $\sqrt{16}$.

**Solución**

Se descompone el radicando en sus factores primos y se aplica la fórmula anterior para obtener como resultado:

$$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$$

2 Obtén el resultado de: $\sqrt[5]{-243}$.

**Solución**

Se expresa el radicando de la siguiente manera:

$$-243=(-3)^5$$

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=(-3)^{\frac{5}{5}}=-3$$

3 Determina la raíz de: $\sqrt[3]{64x^3}$.

**Solución**

Se expresa cada uno de los elementos del radicando de la siguiente manera:

$$64x^3=2^6x^3$$

Se aplica el respectivo teorema de radicales para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{64x^3}=\sqrt[3]{2^6x^3}=\sqrt[3]{2^6}\sqrt[3]{x^3}=2^{\frac{6}{3}}x^{\frac{3}{3}}=2^2x=4x$$

4 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt[5]{\dfrac{32x^5}{243y^{10}}}$.

**Solución**

Se descomponen los coeficientes en factores primos y se aplican los respectivos teoremas para obtener:

$$\sqrt[5]{\frac{32x^5}{243y^{10}}}=\sqrt[5]{\frac{2^5x^5}{3^5y^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{2^5x^5}}{\sqrt[5]{3^5y^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{2^5}\sqrt[5]{x^5}}{\sqrt[5]{3^5}\sqrt[5]{y^{10}}}=\frac{2^{\frac{5}{5}}x^{\frac{5}{5}}}{3^{\frac{5}{5}}y^{\frac{10}{5}}}=\frac{2x}{3y^2}$$

5 Encuentra el resultado de: $\dfrac{3x}{5y^2}\sqrt{\dfrac{25y^4}{81x^2}}$.

**Solución**

Se aplica el teorema de la división y se extrae la raíz:

$$\frac{3x}{5y^2}\sqrt{\frac{25y^4}{81x^2}}=\frac{3x}{5y^2}\sqrt{\frac{5^2y^4}{3^4x^2}}=\frac{3x}{5y^2}\left(\frac{5^{\frac{2}{2}}y^{\frac{4}{2}}}{3^{\frac{4}{2}}x^{\frac{2}{2}}}\right)=\frac{3x}{5y^2}\left(\frac{5y^2}{3^2x}\right)$$

Se multiplican las expresiones y se simplifica el resultado para finalmente obtener:

$$=\frac{15xy^2}{45xy^2}=\frac{1}{3}$$

6 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{(1-3x)^6}$ ?

**Solución**

Se aplica la fórmula para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{(1-3x)^6}=(1-3x)^{\frac{6}{3}}=(1-3x)^2$$

7 Obtén el resultado de $\sqrt{1-8x^2y^2+16x^4y^4}$.

**Solución**

Se factoriza la expresión:

$$1-8x^2y^2+16x^4y^4=\left(1-4x^2y^2\right)^2$$

Se aplica la fórmula para extraer la raíz:

$$\sqrt{1-8x^2y^2+16x^4y^4}=\sqrt{\left(1-4x^2y^2\right)^2}=\left(1-4x^2y^2\right)^{\frac{2}{2}}=\left|1-4x^2y^2\right|$$

Por tanto, la raíz de la expresión es: $\left|1-4x^2y^2\right|$

## EJERCICIO 100

Determina las siguientes raíces:

1. $\sqrt{729}$
2. $\sqrt[3]{8}$
3. $\sqrt[4]{81}$
4. $\sqrt{196}$
5. $\sqrt[4]{256}$
6. $\sqrt{\frac{81}{16}}$
7. $\sqrt[3]{216}$
8. $4\sqrt[5]{-32}$
9. $\sqrt[3]{-64}$
10. $\sqrt{4x^2y^4}$
11. $\sqrt[3]{27m^6n^9}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{216x^{12}}$
13. $xy^2\sqrt[4]{16x^8y^{12}}$
14. $m^4n^3\sqrt[5]{\frac{32}{m^5n^{10}}}$
15. $\frac{y^{2n}}{x^m}\sqrt{\frac{25x^{2m}}{y^{8n}}}$
16. $\sqrt{25m^{4-2x}n^{8y-6}}$
17. $\frac{2}{x}\sqrt[3]{\left(x+x^2\right)^3}$
18. $\frac{\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4}}{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}$
19. $\frac{3x}{2x-10y}\sqrt{x^2-10xy+25y^2}$
20. $\sqrt{\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2y^2}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Simplificación

Un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m \geq n$, se puede simplificar expresando $a^m$ como un producto de bases donde el exponente de una de ellas es múltiplo de $n$.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Simplifica el siguiente radical: $\sqrt[3]{x^{13}}$.

**Solución**

El radicando se descompone en factores, de la siguiente manera:

$$x^{13}=x^{12}x$$

Se aplica el teorema de radicales para el producto y se obtiene:

$$\sqrt[3]{x^{13}}=\sqrt[3]{x^{12}x}=\sqrt[3]{x^{12}}\;\sqrt[3]{x}=x^{\frac{12}{3}}\sqrt[3]{x}=x^4\sqrt[3]{x}$$

2 Reduce la siguiente expresión: $\sqrt{72x^3y^4z^5}$.

**Solución**

El coeficiente 72 se descompone en sus factores primos y las bases se expresan como:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \qquad x^3 = x^2x \qquad z^5 = z^4z$$

Se aplican los teoremas correspondientes y el radical se simplifica como sigue:

$$\sqrt{72x^3y^4z^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 x^2xy^4z^4z} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} x^{\frac{2}{2}} y^{\frac{4}{2}} z^{\frac{4}{2}} \sqrt{2xz} = 6xy^2z^2\sqrt{2xz}$$

Por consiguiente, la simplificación es: $6xy^2z^2\sqrt{2xz}$

3 Simplifica: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{128x^6y^5z}$.

**Solución**

Se descompone 128 en factores primos y la base $y$ se expresa de esta manera:

$$128 = 2^7 = 2^6 \cdot 2 \qquad y^5 = y^3y^2$$

Se procede a simplificar la expresión:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{128x^6y^5z} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^6 \cdot 2x^6y^3y^2z} = \frac{1}{2}\left(2^{\frac{6}{3}}x^{\frac{6}{3}}y^{\frac{3}{3}}\sqrt[3]{2y^2z}\right) = \frac{1}{2}\left(2^2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}\right) = 2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}$$

Finalmente, el resultado es: $2x^2y\sqrt[3]{2y^2z}$

4 Simplifica la expresión: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{54a^4b^6c^7}{8x^4}}$.

**Solución**

Se descompone cada uno de los elementos que conforman el radicando y se simplifica para obtener como resultado:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{54a^4b^6c^7}{8x^4}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^3a^3ab^6c^6c}{2^3x^3x}} = \frac{2}{3}\left(\frac{3^{\frac{3}{3}}a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}c^{\frac{6}{3}}}{2^{\frac{3}{3}}x^{\frac{3}{3}}}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3ab^2c^2}{2x}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}\right)$$

$$= \frac{ab^2c^2}{x}\sqrt[3]{\frac{2ac}{x}}$$

## EJERCICIO 101

Simplifica los siguientes radicales:

1. $\sqrt{x^3}$
2. $\sqrt{27x^2y^7}$
3. $\sqrt{64m^3n^2z^4}$
4. $\sqrt[3]{27m^5n^{15}}$
5. $\sqrt[3]{x^5y^4z^6}$
6. $\sqrt[4]{625x^5y^8}$
7. $3\sqrt{50a^4b^3}$
8. $5\sqrt{9p^4q^7}$
9. $2\sqrt[4]{243x^5y^4z}$
10. $5\sqrt[4]{80a^3b^7c^4}$
11. $2\sqrt[5]{729m^8n^{12}}$
12. $2x\sqrt[3]{x^4y^5z^9}$

13. $-3m\sqrt[4]{128m^9n^{14}}$

14. $\frac{1}{3}\sqrt{18a^5}$

15. $\frac{5}{2}\sqrt[5]{32a^6b^4}$

16. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{160m^4n^9p^2}$

17. $\frac{1}{3x}\sqrt[3]{27x^6y^4}$

18. $\frac{2}{3x^2y}\sqrt[4]{81x^5y^4}$

19. $\sqrt{\frac{18x^3}{2y^2}}$

20. $\sqrt[3]{\frac{16a^4b^6}{3m^5}}$

21. $\sqrt[4]{\frac{x^7y^5}{16z^{12}}}$

22. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{2a^5b^3}{27cd^7}}$

23. $\frac{3x}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{48x^4}}$

24. $\frac{x}{y}\sqrt[4]{\frac{80y^4}{81x^6}}$

25. $\sqrt{9m^3-18m^2n}$

26. $\sqrt{16x^5+40x^3y^3+25xy^6}$

27. $\sqrt[3]{27a^7b^3-54a^4b^4}$

28. $\sqrt[4]{(m^2-2mn+n^2)^3}$

29. $\sqrt[5]{243(x+y)^7(x-y)^7}$

30. $\frac{\sqrt{4-4m+m^2}}{\sqrt[3]{(2-m)^5}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Introducción de factores

Se escribe el factor o los factores que se desean introducir en el radical, elevados a un exponente igual al índice del radical.

$$a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\left(a^m\right)^n b}$$

**EJEMPLOS**

1 Introduce el coeficiente del radical $3\sqrt{2}$ a la raíz.

**Solución**

El coeficiente se introduce en el radical elevado al cuadrado:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{(3)^2 \cdot 2}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y se obtiene:

$$= \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

Por tanto: $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

2 Introduce en la raíz $2x\sqrt[3]{y}$ el coeficiente.

**Solución**

Se coloca dentro del radical el coeficiente $2x$ elevado al exponente 3:

$$2x\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{(2x)^3 \cdot y}$$

Se desarrolla la potencia y se realiza el producto para obtener como resultado:

$$= \sqrt[3]{\left(8x^3\right) \cdot y} = \sqrt[3]{8x^3y}$$

3 Introduce los factores en el radical $2x^2y\sqrt[4]{xy^2}$.

**Solución**

Se coloca el coeficiente dentro de la raíz con exponente 4:

$$2x^2y\sqrt[4]{xy^2} = \sqrt[4]{\left(2x^2y\right)^4 xy^2}$$

Se desarrolla la potencia y se realiza la multiplicación:

$$= \sqrt[4]{16x^8y^4xy^2} = \sqrt[4]{16x^9y^6}$$

Por tanto, el resultado es: $\sqrt[4]{16x^9y^6}$

4 Introduce el coeficiente en el radical: $\frac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{2b}{a}}$.

**Solución**

La fracción entra elevada al índice del radical, se realizan las operaciones y se obtiene:

$$\frac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{2b}{a}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3a}{b^2}\right)^3\frac{2b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{27a^3}{b^6}\frac{2b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{54a^3b}{ab^6}} = \sqrt[3]{\frac{54a^2}{b^5}}$$

5 Introduce $3a$ en el radical de la expresión: $\frac{3a}{\sqrt{2a^3x}}$.

**Solución**

Se siguen los mismos pasos que en los ejemplos anteriores y se obtiene como resultado:

$$\frac{3a}{\sqrt{2a^3x}} = \sqrt{\frac{(3a)^2}{2a^3x}} = \sqrt{\frac{9a^2}{2a^3x}} = \sqrt{\frac{9}{2ax}}$$

6 Introduce el coeficiente del radical $\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}$ a la raíz.

**Solución**

El coeficiente se introduce y se eleva al cuadrado y la fracción resultante se simplifica:

$$\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}\left(x^2-y^2\right)} = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}} = \sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}} = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

## EJERCICIO 102

Introduce a la raíz los factores:

1. $3\sqrt{5}$
2. $5\sqrt{7}$
3. $4\sqrt[3]{2}$
4. $\frac{5}{4}\sqrt{2}$
5. $\frac{2}{3}\sqrt[5]{3}$
6. $x\sqrt{x}$
7. $2x\sqrt[3]{x^2}$
8. $m^3n\sqrt[4]{mn}$
9. $xy^2\sqrt[4]{xy}$
10. $5a^2b^3c\sqrt{2ac}$
11. $\frac{1}{2a}\sqrt[3]{2a^2}$
12. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{4b}{5a}}$

13. $\frac{3y^2}{4x}\sqrt[4]{\frac{2x^2}{3y}}$

14. $\frac{3ax}{\sqrt{3a}}$

15. $\frac{2x}{\sqrt[3]{2x^2}}$

16. $(2a+b)\sqrt{ab}$

17. $\frac{3a}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a^2}}$

18. $\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$

19. $\frac{1}{x-2}\sqrt[3]{x^3-8}$

20. $\frac{2a^2x}{x+a}\sqrt{\frac{x^2+a^2+2ax}{2ax}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma y resta

Estas operaciones se efectúan si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a+b-c)\sqrt[n]{d}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$.

**Solución**

Los radicales son semejantes, por tanto, se realiza la operación únicamente con los coeficientes y se obtiene como resultado:

$$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+4)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$$

2 Simplifica la siguiente operación: $5\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}$.

**Solución**

Los radicales son semejantes, entonces se realiza la operación con los coeficientes y el resultado es:

$$5\sqrt{3x}+6\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}=(5+6-10)\sqrt{3x}=\sqrt{3x}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt[4]{5}$?

**Solución**

Se agrupan los radicales semejantes:

$$\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt[4]{5}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Se realiza la reducción:

$$=\left(\frac{2}{3}-1\right)\sqrt[4]{5}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{6}=-\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}+\frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}+\frac{1}{4}\sqrt{6}$

4 Reduce la siguiente expresión: $3y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+5y\sqrt{2x}+7x\sqrt{3y}$.

**Solución**

Se agrupan los términos semejantes y se simplifican para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}3y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+5y\sqrt{2x}+7x\sqrt{3y} &= 3y\sqrt{2x}+5y\sqrt{2x}-2x\sqrt{3y}+7x\sqrt{3y}\\ &=(3y+5y)\sqrt{2x}+(-2x+7x)\sqrt{3y}\\ &=8y\sqrt{2x}+5x\sqrt{3y}\end{aligned}$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $3\sqrt{20}+4\sqrt{12}-2\sqrt{45}-\sqrt{75}$.

**Solución**

Los radicales no son semejantes, entonces se efectúan las simplificaciones de cada radical:

$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5} \qquad \sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3} \qquad \sqrt{45}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5} \qquad \sqrt{75}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$$

Se reemplazan los radicales y se realiza la reducción para obtener:

$$\begin{aligned}3\sqrt{20}+4\sqrt{12}-2\sqrt{45}-\sqrt{75} &= 3\left(2\sqrt{5}\right)+4\left(2\sqrt{3}\right)-2\left(3\sqrt{5}\right)-5\sqrt{3}\\ &=6\sqrt{5}+8\sqrt{3}-6\sqrt{5}-5\sqrt{3}=(6-6)\sqrt{5}+(8-5)\sqrt{3}=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

6 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt{18x^2y^3}+x\sqrt{32y^3}-5\sqrt{2x^2y^3}$.

**Solución**

Se simplifica cada uno de los radicales y se realiza la operación, el resultado es:

$$\begin{aligned}\sqrt{18x^2y^3}+x\sqrt{32y^3}-5\sqrt{2x^2y^3} &= \sqrt{3^2\cdot 2x^2y^2y}+x\sqrt{2^4\cdot 2y^2y}-5\sqrt{2x^2y^2y}\\ &=3xy\sqrt{2y}+2^2xy\sqrt{2y}-5xy\sqrt{2y}\\ &=3xy\sqrt{2y}+4xy\sqrt{2y}-5xy\sqrt{2y}=2xy\sqrt{2y}\end{aligned}$$

7 Simplifica $a\sqrt{12ab}+\sqrt{98b^3c}-5\sqrt{3a^3b}-b\sqrt{18bc}+a\sqrt{3ab}$.

**Solución**

Se simplifica cada uno de los radicales:

$$\begin{aligned}&=a\sqrt{2^2\cdot 3ab}+\sqrt{2\cdot 7^2b^2bc}-5\sqrt{3a^2ab}-b\sqrt{2\cdot 3^2bc}+a\sqrt{3ab}\\ &=a\left(2\sqrt{3ab}\right)+7b\sqrt{2bc}-5\left(a\sqrt{3ab}\right)-b\left(3\sqrt{2bc}\right)+a\sqrt{3ab}\\ &=2a\sqrt{3ab}+7b\sqrt{2bc}-5a\sqrt{3ab}-3b\sqrt{2bc}+a\sqrt{3ab}\end{aligned}$$

Se agrupan los términos semejantes y se reducen para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}&=2a\sqrt{3ab}-5a\sqrt{3ab}+a\sqrt{3ab}+7b\sqrt{2bc}-3b\sqrt{2bc}\\ &=-2a\sqrt{3ab}+4b\sqrt{2bc}\end{aligned}$$

# EJERCICIO 103

Realiza las siguientes operaciones con radicales:

1. $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
2. $2\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}$
3. $4\sqrt{7}-8\sqrt{7}+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}$
4. $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}-4\sqrt{5}+6\sqrt{7}$
5. $2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{2}-10\sqrt{3}-\sqrt{2}$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{10}-\frac{1}{6}\sqrt{13}+\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{2}{3}\sqrt{13}$
7. $\frac{\sqrt{5}}{12}-\frac{3\sqrt{6}}{8}+\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$
8. $6\sqrt[3]{m}-10\sqrt[3]{m}$
9. $\frac{4}{3}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{13}{6}\sqrt{x}$
10. $5\sqrt[4]{xy}-2\sqrt[4]{xy}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{xy}$
11. $\sqrt{28}+\sqrt{175}-\sqrt{63}$
12. $2\sqrt{18}+5\sqrt{50}-4\sqrt{2}$
13. $3\sqrt{75}+2\sqrt{12}-4\sqrt{243}$
14. $2\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{20}-\sqrt{8}$
15. $2\sqrt{72}-4\sqrt{18}+5\sqrt{12}-3\sqrt{48}$
16. $2\sqrt{98}-3\sqrt{80}-\sqrt{338}+\sqrt{20}$
17. $3\sqrt{405}-2\sqrt{99}+2\sqrt{500}-4\sqrt{1331}$
18. $\frac{1}{5}\sqrt{450}-\frac{1}{4}\sqrt{800}-\frac{2}{5}\sqrt{320}+\sqrt{80}$
19. $\sqrt{343a^4}+a^2\sqrt{175}-3\sqrt{7a^4}$
20. $a\sqrt{4b}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{25a^2b}$
21. $\sqrt[3]{24x^4}+4x\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{375x^4}$
22. $\sqrt[4]{32x^8}-4x^2\sqrt[4]{512}$
23. $2a\sqrt{xy^2}-3\sqrt{a^2xy^2}+4y\sqrt{a^2x}$
24. $\sqrt{2a^2b^3}+a\sqrt{\frac{243}{4}b^3}+b\sqrt{\frac{50}{36}a^2b}-\sqrt{\frac{75}{16}a^2b^3}$
25. $a^2b\sqrt{c}+\frac{1}{4}a^2\sqrt{b^2c}-\frac{1}{3}b\sqrt{a^4c}+\frac{1}{2}a^2b\sqrt{c}$
26. $\frac{\sqrt[4]{2a^9b^5}}{6}-\frac{b\sqrt[4]{162a^9b}}{4}+a^2\sqrt[4]{\frac{2ab^5}{16}}-\frac{7a^2b\sqrt[4]{2ab}}{8}$
27. $\sqrt{49x^2y}-\sqrt{50x^4y}+x\sqrt{9y}-2x\sqrt{2x^2y}$
28. $\sqrt{x^3y^5}-\sqrt{48x^5y^2}-xy\sqrt{4xy^3}+y\sqrt{27x^5}$
29. $3x\sqrt{2y}+\sqrt{75xy^2}-2\sqrt{2x^2y}-\sqrt{3xy^2}$
30. $2a\sqrt{50b^2c}+5c\sqrt{27a^2b}-3\sqrt{32a^2b^2c}+\sqrt{3a^2bc^2}$
31. $3\sqrt[3]{8x^3y^2}-5\sqrt[3]{4xy^3}-2x\sqrt[3]{64y^2}+y\sqrt[3]{32x}$
32. $15b\sqrt[4]{5a^6b^3}+6a\sqrt[4]{3a^5b^{14}}-5\sqrt[4]{5a^6b^7}-6\sqrt[4]{48a^9b^{14}}$
33. $\frac{1}{3}\sqrt{20a^3}+\frac{1}{6}\sqrt{3ab^3}-\frac{1}{3}a\sqrt{5a}-b\sqrt{\frac{3}{4}ab}$
34. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{y}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4y^5}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^3y}+\frac{2}{3}xy\sqrt[3]{xy^2}$
35. $\frac{5ab}{3}\sqrt{\frac{2a^5}{9b}}+\frac{1}{3}a\sqrt{\frac{5ab^6}{12}}-a^2b\sqrt{\frac{8a^3}{9b}}+2\sqrt{\frac{5a^3b^6}{48}}$
36. $\sqrt{16a-32}+\sqrt{25a-50}-\sqrt{9a-18}$
37. $\sqrt{x^3+2x^2}+3x\sqrt{x+2}-5\sqrt{x^2(x+2)}$

38 $9\sqrt{x^3y^2-3x^2y^3}-2xy\sqrt{4x-12y}+5x\sqrt{xy^2-3y^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Multiplicación

**Con índices iguales.** Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y se simplifica, de ser posible, el resultado.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Multiplica y simplifica la siguiente expresión: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$.

**Solución**

Se multiplican los radicandos y el radical resultante se simplifica, el resultado es:

$$\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(8)(2)}=\sqrt{16}=\sqrt{2^4}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}=2^2=4$$

2 Realiza la siguiente multiplicación: $\sqrt[3]{9xy^2}\cdot\sqrt[3]{9x^4y}$.

**Solución**

Se realiza el producto de los términos internos de los radicales y el resultado se simplifica:

$$\sqrt[3]{9xy^2}\cdot\sqrt[3]{9x^4y}=\sqrt[3]{\left(9xy^2\right)\left(9x^4y\right)}=\sqrt[3]{81x^5y^3}=\sqrt[3]{3^4x^5y^3}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3x^3x^2y^3}=3xy\sqrt[3]{3x^2}$$

3 Efectúa el siguiente producto: $\frac{xy}{4}\cdot\sqrt{6x^3y^5}\cdot\sqrt{8xy^4}$.

**Solución**

Se realiza el producto de los radicales y el resultado se multiplica por el coeficiente para obtener como resultado:

$$\frac{xy}{4}\sqrt{6x^3y^5}\sqrt{8xy^4}=\frac{xy}{4}\sqrt{\left(6x^3y^5\right)\left(8xy^4\right)}=\frac{xy}{4}\sqrt{48x^4y^9}=\frac{xy}{4}\left(2^2x^2y^4\sqrt{3y}\right)=x^3y^5\sqrt{3y}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\frac{2}{3}\sqrt{xy}\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}-\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)$.

**Solución**

Se realiza el producto del monomio por cada uno de los términos del binomio:

$$\frac{2}{3}\sqrt{xy}\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}-\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)=\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy}\right)\left(\frac{3}{4}x\sqrt{xy^3}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy}\right)\left(\frac{1}{2}y\sqrt{x^2y}\right)$$

$$=\frac{6}{12}x\sqrt{x^2y^4}-\frac{2}{6}y\sqrt{x^3y^2}$$

Se simplifican los radicales y el resultado final es:

$$=\frac{1}{2}x\left(xy^2\right)-\frac{1}{3}y\left(xy\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy^2\sqrt{x}$$

## EJERCICIO 104

Efectúa y simplifica las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
2. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}$
3. $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6}$
4. $\left(3\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{15}\right)$
5. $\sqrt{xy^3}\cdot\sqrt{xy}$
6. $\sqrt[3]{x^2y^4}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$
7. $\frac{2}{3}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{x^5}$
8. $\left(2\sqrt{3ab}\right)\left(3\sqrt{6a^3b^2}\right)$
9. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{xy^2}\right)\left(\sqrt{27x^2y^5}\right)$
10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a^5}$
11. $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{2a^2}\cdot\sqrt[4]{8a^4}$
12. $\left(-4\sqrt[3]{2a^2b^5}\right)\left(2\sqrt[3]{3ab^2}\right)$
13. $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3a^3}\cdot\sqrt{6a^{-1}}$
14. $\left(2\sqrt[4]{x^3}\right)\left(\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x^3}\right)$
15. $\left(-2\sqrt{3ab}\right)\left(\sqrt{6a^2b}\right)\left(\sqrt{a^3b^5}\right)$

16. $\left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3a}{x}}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6a^3}{x^3}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$

17. $\sqrt{\frac{3am}{2x}}\sqrt{\frac{8x^3}{a^3m^5}}$

18. $\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-4\right)$

19. $\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\right)$

20. $\sqrt{x}\left(\frac{4}{3}\sqrt{8x^3}-\sqrt{x}\right)$

21. $\left(\sqrt{3}-4\right)^2$

22. $\left(7\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(7\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

23. $\left(\sqrt{2m}+n\right)\left(\sqrt{2m}-4n\right)$

24. $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$

25. $\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x^2-y^2}$

26. $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{y}}$

27. $\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-x}$

28. $\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{3x^2-6xy+3y^2}$

29. $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}\sqrt{(x+y)^2}$

30. $\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{3}}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Con índices diferentes

Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de *mínimo común índice*.

**EJEMPLOS**

**1** Realiza la siguiente operación: $\sqrt[3]{5x^2}\sqrt{3x}$.

**Solución**

Los índices de las raíces son 3 y 2 respectivamente, se busca el índice común:

| | |
|---|---|
| 3, 2 | 2 |
| 3, 1 | 3 |
| 1, 1 | |

el mínimo común índice es 6

Se transforman las raíces a un índice 6, de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{5x^2}=\sqrt[(3)(2)]{\left(5x^2\right)^2}=\sqrt[6]{5^2x^4}\qquad \sqrt{3x}=\sqrt[(2)(3)]{(3x)^3}=\sqrt[6]{3^3x^3}$$

Se efectúa la multiplicación, se simplifica el radical y se obtiene como resultado:

$$\sqrt[6]{5^2x^4}\sqrt[6]{3^3x^3}=\sqrt[6]{\left(5^2x^4\right)\left(3^3x^3\right)}=\sqrt[6]{5^2\cdot 3^3\cdot x^7}=\sqrt[6]{5^2\cdot 3^3\cdot x^6x}=x\sqrt[6]{675x}$$

**2** Realiza la siguiente operación: $\sqrt[4]{x^3y}\sqrt{xy}$.

**Solución**

Se busca el mínimo común índice de 4 y 2

| | |
|---|---|
| 4, 2 | 2 |
| 2, 1 | 2 |
| 1, 1 | |

mínimo común índice = 4

Se transforman las raíces a índice 4 y se realiza la multiplicación:

$$\sqrt[4]{x^3y}\sqrt{xy}=\sqrt[4]{x^3y}\sqrt[(2)(2)]{(xy)^2}=\sqrt[4]{x^3y}\sqrt[4]{x^2y^2}=\sqrt[4]{\left(x^3y\right)\left(x^2y^2\right)}=\sqrt[4]{x^5y^3}=x\sqrt[4]{xy^3}$$

# EJERCICIO 105

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[6]{2}$
2. $\sqrt[6]{x^5}\,\sqrt[3]{x^2}$
3. $\sqrt{x}\,\sqrt[16]{x^7}$
4. $\sqrt{3xy^2}\,\sqrt[3]{2x^3y}$
5. $3x\sqrt{x^3y}\,\sqrt[4]{xy^2}$
6. $\sqrt{2ab}\,\sqrt[4]{a^3b}$
7. $\sqrt[3]{3x^2}\,\sqrt{2x}$
8. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4xy}\right)\left(\sqrt{2xy}\right)$
9. $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a}\,\sqrt[4]{a}$
10. $\sqrt[6]{x^4}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{x}$
11. $\sqrt[12]{y^5}\,\sqrt{y}\,\sqrt[4]{y}$
12. $\frac{1}{y^2}\sqrt[4]{2y}\,\sqrt[3]{xy^2}\,\sqrt[12]{2y^5}$
13. $\left(\frac{n}{2m}\sqrt[3]{2m^2n}\right)\left(\frac{3}{n^2}\sqrt[9]{m^4n^8}\right)$
14. $\left(\frac{3x}{4y}\sqrt[5]{4x^3y^2}\right)\left(\sqrt{4xy^2}\right)$
15. $\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt[6]{z}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## División

### Con índices iguales

Se realiza la división de los radicandos y se simplifica el resultado.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

**EJEMPLOS**

1 Resuelve la siguiente operación: $\frac{\sqrt[3]{81x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}$.

**Solución**

Se hace la división y el resultado se simplifica para obtener:

$$\frac{\sqrt[3]{81x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[3]{\frac{81x^5}{3x^2}} = \sqrt[3]{27x^3} = \sqrt[3]{3^3x^3} = 3x$$

2 Efectúa la siguiente operación: $\frac{\sqrt{128a^3b^5}}{\sqrt{8a^2b}}$.

**Solución**

Se dividen las expresiones, se simplifica el resultado y se obtiene que:

$$\frac{\sqrt{128a^3b^5}}{\sqrt{8a^2b}} = \sqrt{\frac{128a^3b^5}{8a^2b}} = \sqrt{16ab^4} = \sqrt{2^4ab^4} = 2^2b^2\sqrt{a} = 4b^2\sqrt{a}$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{\sqrt[3]{135x^9y^{12}z}}{\sqrt[3]{320x^2y^2z^4}}$?

**Solución**

Los coeficientes de las expresiones se simplifican y se realiza la división con las bases:

$$\frac{\sqrt[3]{135x^9y^{12}z}}{\sqrt[3]{320x^2y^2z^4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}x^7y^{10}z^{-3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}x^7y^{10}\frac{1}{z^3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}\frac{x^7y^{10}}{z^3}}$$

Se simplifica el radical para obtener finalmente:

$$= \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^6}\frac{x^6xy^9y}{z^3}} = \frac{3}{2^2}\frac{x^2y^3}{z}\sqrt[3]{xy} = \frac{3x^2y^3}{4z}\sqrt[3]{xy}$$

4 Obtén: $\dfrac{\sqrt[4]{8^{-2}a^5b^{-3}c^5}}{\sqrt[4]{4a^{-3}bc^{-7}}}$.

**Solución**

Se descomponen los coeficientes en sus factores primos y se aplican los respectivos teoremas de exponentes:

$$\frac{\sqrt[4]{8^{-2}a^5b^{-3}c^5}}{\sqrt[4]{4a^{-3}bc^{-7}}}=\sqrt[4]{\frac{\left(2^3\right)^{-2}a^5b^{-3}c^5}{2^2a^{-3}bc^{-7}}}=\sqrt[4]{\frac{2^{-6}a^5b^{-3}c^5}{2^2a^{-3}bc^{-7}}}=\sqrt[4]{2^{-6-2}a^{5-(-3)}b^{-3-1}c^{5-(-7)}}$$

$$=\sqrt[4]{2^{-8}a^8b^{-4}c^{12}}=\sqrt[4]{\frac{1}{2^8}a^8\frac{1}{b^4}c^{12}}=\sqrt[4]{\frac{a^8c^{12}}{2^8b^4}}=\frac{a^2c^3}{2^2b}=\frac{a^2c^3}{4b}$$

Por consiguiente, el resultado es: $\dfrac{a^2c^3}{4b}$

# EJERCICIO 106

Realiza los siguientes cocientes de radicales:

1. $\dfrac{\sqrt[4]{m^6n^5}}{\sqrt[4]{m^4n}}$
2. $\dfrac{\sqrt[6]{x^8y^{15}}}{\sqrt[6]{xy^2}}$
3. $\dfrac{\sqrt{45a^7b^4c^3}}{\sqrt{5ac}}$
4. $\dfrac{\sqrt{128x^5y^4}}{\sqrt{8x^4y^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{162x^7y^6}}{\sqrt[3]{2xy}}$
6. $\dfrac{\sqrt[4]{3888a^5b^6}}{\sqrt[4]{3ab^2}}$
7. $\dfrac{\sqrt{4a^7b}}{\sqrt{25ab^9}}$
8. $\dfrac{\sqrt{567m^4x^6}}{\sqrt{7x^2}}$
9. $\dfrac{\sqrt{9m^{-5}n^{-1}}}{\sqrt{16m^{-1}n^{-13}}}$
10. $\dfrac{\sqrt[3]{16z^{-4}w^{-8}}}{\sqrt[3]{54z^{-1}w^{-2}}}$
11. $\dfrac{\sqrt{50z^3x^3}}{\sqrt{18x^3z^{-1}}}$
12. $\dfrac{\sqrt{44u^4v^6}}{\sqrt{275u^{-2}v^2}}$
13. $\dfrac{\sqrt{112b^{-2}a}}{\sqrt{63b^2a^{-3}}}$
14. $\dfrac{\sqrt{1404x^4y^{-3}}}{\sqrt{624x^{-2}y^5}}$
15. $\dfrac{\sqrt{68m^{-3}n^{-2}}}{\sqrt{153m^3n^2p^{-8}}}$
16. $\dfrac{\sqrt{216mn^{-2}p^{-2}}}{\sqrt{54mn^{-6}p^2}}$
17. $\dfrac{\sqrt[3]{243y^{\frac{3}{2}}x^{-2}}}{\sqrt[3]{72y^{-\frac{4}{6}}x}}$
18. $\dfrac{\sqrt[5]{3125y^4z^7}}{\sqrt[5]{32y^{-6}z^2}}$
19. $\dfrac{\sqrt[3]{-375m^{-2}n^{-2}}}{\sqrt[3]{192m^4n^{-7}}}$
20. $\dfrac{\sqrt[3]{72x^4y^{-2}}}{\sqrt[3]{576x^{-8}y^{-14}}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Con índices diferentes

Se transforman los radicales a un índice común y se realiza la división.

EJEMPLOS

1 Efectúa la siguiente división: $\dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}}$.

**Solución**

El mínimo común índice de 2 y 3 es 6, se expresa cada uno de los radicales con este índice:

$$\sqrt{128}=\sqrt{2^7}=\sqrt[(2)(3)]{\left(2^7\right)^3}=\sqrt[6]{2^{21}}\qquad \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[(3)(2)]{\left(2^4\right)^2}=\sqrt[6]{2^8}$$

Se remplazan los radicales y se efectúa la división:

$$\frac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}}=\frac{\sqrt[6]{2^{21}}}{\sqrt[6]{2^8}}=\sqrt[6]{\frac{2^{21}}{2^8}}=\sqrt[6]{2^{13}}=2^2\ \sqrt[6]{2}=4\ \sqrt[6]{2}$$

2 Simplifica: $\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[4]{x^3y}}$.

**Solución**

Se encuentra el índice común de 8 y 4, se transforman los radicales y se obtiene:

$$\frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[4]{x^3y}} = \frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[(2)(4)]{\left(x^3y\right)^2}} = \frac{\sqrt[8]{x^3y^{-2}}}{\sqrt[8]{x^6y^2}} = \sqrt[8]{\frac{x^3y^{-2}}{x^6y^2}} = \sqrt[8]{\frac{1}{x^3y^4}} = \frac{\sqrt[8]{1}}{\sqrt[8]{x^3y^4}} = \frac{1}{\sqrt[8]{x^3y^4}}$$

## EJERCICIO 107

Efectúa las siguientes divisiones:

1. $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{\sqrt{4y^2}}{\sqrt[3]{2y^4}}$
3. $\frac{\sqrt[3]{12x^3y}}{\sqrt{6x^2}}$
4. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{8ab} \div \frac{1}{12}\sqrt{4a^2}$
5. $\frac{\sqrt[3]{2a^2b}}{\sqrt[5]{a^3b^2}}$
6. $\frac{1}{6}\sqrt{3a} \div \frac{1}{12}\sqrt[6]{24a^4}$
7. $\sqrt[3]{5a^4} \div \sqrt[9]{125a^2}$
8. $\frac{\sqrt{12a^3b^2}}{\sqrt[3]{4ab}}$
9. $\frac{x\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^3y}}$
10. $\frac{\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt{x^3y}}$
11. $\frac{\sqrt[3]{16x^2y}}{\sqrt{4xy^2}}$
12. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n+1]{x}}$
13. $\frac{\sqrt[n]{(x+1)^{n+1}}}{\sqrt[n+1]{(x+1)^{n+2}}}$
14. $\frac{\sqrt[6]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{x-1}}$
15. $\frac{\sqrt[4]{(a-b)^5}}{\sqrt[6]{(a-b)^5}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Racionalización

### Racionalización del denominador de una fracción

Esta operación transforma al denominador en una cantidad racional.

- **Denominador monomio.** En una fracción de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con $m < n$ se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$ :

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m+m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el denominador de: $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

**Solución**

El factor, por el que se multiplica el numerador y el denominador, resulta de la expresión $\sqrt[3]{2}$ y es igual a: $\sqrt[3]{2^{3-1}} = \sqrt[3]{2^2}$. Se realiza la multiplicación y se obtiene:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

2 Racionaliza el denominador de: $\dfrac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}}$.

**Solución**

El factor que multiplica la expresión es $\sqrt[4]{(5xy)^{4-1}} = \sqrt[4]{(5xy)^3}$

Al realizar la multiplicación, se determina que:

$$\frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}} = \frac{3xy}{\sqrt[4]{5xy}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(5xy)^3}}{\sqrt[4]{(5xy)^3}} = \frac{3xy\sqrt[4]{(5xy)^3}}{\sqrt[4]{(5xy)^4}} = \frac{3xy\sqrt[4]{(5xy)^3}}{5xy} = \frac{3}{5}\sqrt[4]{5^3x^3y^3} = \frac{3}{5}\sqrt[4]{125x^3y^3}$$

3 Racionaliza el denominador de la expresión $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4x}}$.

**Solución**

Se separa la expresión como el cociente de raíces, se multiplica numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt[3]{2^2x}$ y se racionaliza para obtener como resultado:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4x}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^{3-2}x^{3-1}}}{\sqrt[3]{2^{3-2}x^{3-1}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{2^3x^3}} = \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{2x} = \frac{1}{2x}\sqrt[3]{6x^2}$$

- **Denominador binomio.** Una expresión de la forma $\dfrac{c}{a \pm b}$ se racionaliza multiplicando al numerador y denominador por el conjugado del denominador, esto es:

Si el denominador es de la forma $a + b$, entonces el conjugado es $a - b$.
Si el denominador es de la forma $a - b$, entonces el conjugado es $a + b$.

El producto de binomios conjugados es una diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En la multiplicación aplican las leyes de los exponentes y los radicales para simplificar las expresiones, como se muestra a continuación en los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Racionaliza el numerador de la expresión: $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$.

**Solución**

El conjugado de $\sqrt{5}-2$ es $\sqrt{5}+2$ que multiplica al numerador y denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-2} = \frac{3}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{3\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-(2)^2} = \frac{3\sqrt{5}+6}{5-4} = \frac{3\sqrt{5}+6}{1} = 3\sqrt{5}+6$$

Entonces, el resultado de la racionalización es: $3\sqrt{5}+6$

2 Racionaliza el denominador de la expresión: $\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}$.

**Solución**

El conjugado del denominador es $\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}$, al multiplicar el numerador y el denominador se reduce la expresión y el resultado es:

$$\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}=\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}+3\sqrt{2y}}\cdot\frac{\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}}{\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}}=\frac{\left(\sqrt{3x}\right)^2-3\sqrt{6xy}-\sqrt{6xy}+3\left(\sqrt{2y}\right)^2}{\left(\sqrt{3x}\right)^2-\left(3\sqrt{2y}\right)^2}$$

$$=\frac{3x-4\sqrt{6xy}+3(2y)}{3x-9(2y)}$$

$$=\frac{3x-4\sqrt{6xy}+6y}{3x-18y}$$

Al final, el resultado de la racionalización es: $\frac{3x-4\sqrt{6xy}+6y}{3x-18y}$

Para racionalizar una expresión, cuyo índice del radical es 3, se multiplica por una expresión que dé como resultado una suma o diferencia de cubos.

Si el denominador es de la forma $(a+b)$, su conjugado es $(a^2-ab+b^2)$.
Si el denominador es de la forma $(a-b)$, su conjugado es $(a^2+ab+b^2)$.

Los resultados de la multiplicación son los siguientes:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

**Ejemplo**

Racionaliza el denominador de la expresión: $\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

**Solución**

Entonces, el conjugado del denominador $\sqrt[3]{x}-1$ es:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)(1)+(1)^2 \text{ o bien } \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, resulta una expresión equivalente que carece de raíces en el denominador.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(1)^3}=\frac{2\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2}{x-1}$$

## EJERCICIO 108

Racionaliza el denominador en las siguientes expresiones:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
3. $\sqrt[3]{\frac{25}{18}}$
4. $\frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $\frac{6x^2y}{\sqrt{3xy}}$
6. $\frac{2}{\sqrt[4]{2xy}}$
7. $\frac{3a}{\sqrt[5]{2a}}$
8. $\frac{3a^2}{\sqrt[3]{9a^4b}}$

9. $\sqrt{\frac{3y^2}{8x^3y}}$

10. $\sqrt[4]{\frac{16ab^3}{25a^2b^5}}$

11. $\frac{-1}{1-2\sqrt{3}}$

12. $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$

13. $\frac{\sqrt{5x}}{1-\sqrt{5x}}$

14. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

15. $\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}{2\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}$

16. $\frac{3a-2b}{\sqrt{3a}-\sqrt{2b}}$

17. $\frac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}$

18. $\frac{2xy}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

19. $\frac{1-x}{\sqrt[3]{x}-1}$

20. $\frac{3a+b}{\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{b}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Racionalización del numerador de una fracción

Esta operación permite transformar el numerador en una cantidad racional.

Sea la fracción $\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}$, la racionalización del numerador es:

$$\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}=\frac{\sqrt[n]{b^m}}{a}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{b^n}}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{b}{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}$$

### EJEMPLOS

1 Racionaliza el numerador en la expresión: $\frac{\sqrt{5x}}{3x}$.

**Solución**

El factor por el cual se multiplicará tanto numerador como denominador es $\sqrt{5x}$

$$\frac{\sqrt{5x}}{3x}=\frac{\sqrt{5x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}}=\frac{\sqrt{5^2x^2}}{3x\sqrt{5x}}=\frac{5x}{3x\sqrt{5x}}=\frac{5}{3\sqrt{5x}}$$

2 Racionaliza el numerador en la expresión: $\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{4x^2-9y^2}$.

**Solución**

Se factoriza el denominador y se multiplica por el conjugado de la expresión $\sqrt{2x}-\sqrt{3y}$ para obtener:

$$\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{4x^2-9y^2}=\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{(2x+3y)(2x-3y)}\cdot\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{3y}}{\sqrt{2x}+\sqrt{3y}}=\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(\sqrt{3y}\right)^2}{(2x+3y)(2x-3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

$$=\frac{2x-3y}{(2x+3y)(2x-3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

$$=\frac{1}{(2x+3y)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)}$$

3 Racionaliza la expresión: $\sqrt{x}+\sqrt{3}$.

**Solución**

Se multiplica la expresión por su conjugado, tanto en el numerador como en el denominador, en este caso $\sqrt{x}-\sqrt{3}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

4 Racionaliza el numerador en la expresión: $\dfrac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}$.

**Solución**

Debido a que las raíces son cúbicas, se toma el conjugado de la expresión: $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}$ como $\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}$

Por tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}=\frac{\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{2}}{y+2}\cdot\frac{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\left(\sqrt[3]{y}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{(y+2)\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$=\frac{y+2}{(y+2)\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}}$$

## EJERCICIO 109

Racionaliza los numeradores de las siguientes fracciones:

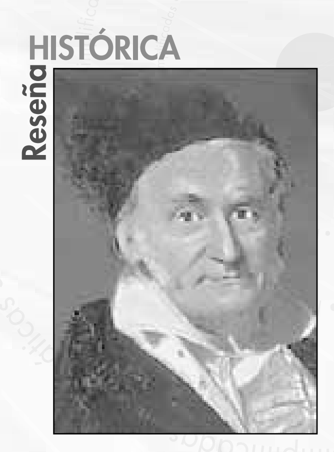
1. $\sqrt{3}$
2. $\dfrac{5\sqrt{8}}{2}$
3. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{2xy^2}$
6. $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{3x}$
7. $\dfrac{3\sqrt{6x}}{12x}$
8. $\dfrac{\sqrt[3]{2x^2}}{4x}$
9. $\dfrac{\sqrt[5]{16x^3}}{x^2}$
10. $\dfrac{\sqrt{3x^3}}{6xy}$
11. $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$
12. $\dfrac{5-\sqrt{2}}{23}$
13. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
14. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{x^2-9}$
15. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$
16. $\dfrac{\sqrt{5x}-\sqrt{6y}}{10x-12y}$
17. $\sqrt{x}-\sqrt{5}$
18. $\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$
19. $\dfrac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{a-8b}$
20. $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{y}}{y^2-4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# Capítulo 11

## Números complejos

**Reseña HISTÓRICA**



*Los números complejos*

- En el siglo XVI Rafaello Bombelli fue uno de los primeros en admitir la utilidad de que los números negativos tuviesen raíces cuadradas. Fue el primero en escribir las reglas de suma, resta y producto de los complejos.
- En 1777 el matemático suizo Leonhard Euler simbolizó la raíz cuadrada de $-1$ con la letra $i$ (por imaginario), introdujo la forma binómica $i^2 = -1$ y con él definitivamente se introducen los imaginarios a la matemática.
- Gauss, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra: todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja, y estableció en 1831 la interpretación geométrica de los complejos: $x + yi \rightarrow (x, y)$.
- Otros términos que han sido usados para referirse a los números complejos son: "sofisticados" por Cardano, "sin sentido" por Néper, "inexplicables" por Girard, "incomprensibles" por Huygens e "imposibles" (diversos autores).

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

## Números imaginarios

El conjunto de los números imaginarios surge de la necesidad de obtener la raíz cuadrada de un número negativo para lo cual se define como unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$.

### Número imaginario puro

Se denomina así a los números de la forma $bi$ donde $b$ es un número real y $b \neq 0$.

**Ejemplos**

Las siguientes cantidades son números imaginarios puros:

$$2i\,,\ -4i\,,\ \frac{6}{5}i\,,\ \sqrt{3}\,i$$

En los siguientes ejemplos se ilustra cómo obtener números imaginarios puros:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de: $\sqrt{-25}$.

**Solución**

Se expresa el radicando como: $-25 = 25(-1)$ y se aplican los teoremas correspondientes de radicales:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$$

Se sustituye $\sqrt{-1} = i$ para obtener:

$$\sqrt{-25} = 5\sqrt{-1} = 5i$$

2 ¿Cuál es el resultado de $2 - \sqrt{-\frac{25}{16}}$?

**Solución**

Se aplica el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior y se obtiene como resultado:

$$2 - \sqrt{-\frac{25}{16}} = 2 - \sqrt{\frac{25}{16}(-1)} = 2 - \sqrt{\frac{25}{16}}\sqrt{-1} = 2 - \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}i = 2 - \frac{5}{4}i$$

## EJERCICIO 110

Representa las siguientes raíces en términos de la unidad imaginaria $i$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\sqrt{-16}$ | 5. $\sqrt{-625}$ | 9. $\sqrt{-125}$ | 13. $3 + \sqrt{-36}$ |
| 2. $\sqrt{-36}$ | 6. $\sqrt{-8}$ | 10. $\sqrt{-162}$ | 14. $2 - \sqrt{-112}$ |
| 3. $\sqrt{-49}$ | 7. $\sqrt{-50}$ | 11. $\sqrt{-\frac{12}{49}}$ | 15. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{-45}$ |
| 4. $\sqrt{-121}$ | 8. $\sqrt{-54}$ | 12. $\sqrt{-\frac{75}{4}}$ | 16. $\frac{4}{5} - \frac{2}{7}\sqrt{-98}$ |

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma y resta

Para realizar estas operaciones se suman o restan los coeficientes de $i$:

$$ai + bi - ci = (a + b - c)\,i$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Efectúa la siguiente operación: $\sqrt{-36} + 4\sqrt{-9}$.

**Solución**

Se obtienen los números imaginarios puros:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6\sqrt{-1} = 6i \qquad \sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

Se remplazan los radicales y se realiza la operación para obtener como resultado:

$$\sqrt{-36} + 4\sqrt{-9} = 6i + 4(3i) = 6i + 12i = (6+12)i = 18i$$

2 ¿Cuál es el resultado de: $\sqrt{-5} + \frac{2}{3}\sqrt{-45} - \frac{1}{2}\sqrt{-20}$?

**Solución**

Se expresan las raíces en términos de la unidad imaginaria:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5}i \qquad \sqrt{-45} = \sqrt{3^2 \cdot 5(-1)} = 3\sqrt{5}i \qquad \sqrt{-20} = \sqrt{2^2 \cdot 5(-1)} = 2\sqrt{5}i$$

Se sustituyen los números y se realizan las operaciones:

$$\begin{aligned}\sqrt{-5} + \frac{2}{3}\sqrt{-45} - \frac{1}{2}\sqrt{-20} &= \sqrt{5}i + \frac{2}{3}\left(3\sqrt{5}i\right) - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}i\right)\\ &= \sqrt{5}i + 2\sqrt{5}i - \sqrt{5}i\\ &= \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5}\right) i\\ &= 2\sqrt{5}\, i\end{aligned}$$

3 Determina el resultado de: $\frac{1}{2}\sqrt{-4} + \frac{2}{5}\sqrt{-9} - \frac{1}{3}\sqrt{-25}$.

**Solución**

Se extraen las raíces, se multiplican por los coeficientes y se realiza la operación para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{-4} + \frac{2}{5}\sqrt{-9} - \frac{1}{3}\sqrt{-25} &= \frac{1}{2}(2i) + \frac{2}{5}(3i) - \frac{1}{3}(5i) = i + \frac{6}{5}i - \frac{5}{3}i\\ &= \left(1 + \frac{6}{5} - \frac{5}{3}\right)i = \frac{8}{15}i\end{aligned}$$

4 Realiza la siguiente operación: $\sqrt{-72} + \sqrt{-48} - \sqrt{-162} - \sqrt{-300}$.

**Solución**

Se expresa cada uno de los radicales en términos de la unidad imaginaria:

$$\sqrt{-72} = \sqrt{36 \cdot 2} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{2}i \qquad \sqrt{-48} = \sqrt{16 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-162} = \sqrt{81 \cdot 2} \cdot \sqrt{-1} = 9\sqrt{2}i \qquad \sqrt{-300} = \sqrt{100 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 10\sqrt{3}i$$

*(continúa)*

(*continuación*)

Se sustituye y se procede a efectuar la operación:

$$\begin{aligned}\sqrt{-72}+\sqrt{-48}-\sqrt{-162}-\sqrt{-300} &= 6\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i-9\sqrt{2}i-10\sqrt{3}i\\ &= 6\sqrt{2}i-9\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i-10\sqrt{3}i\\ &= \left(6\sqrt{2}-9\sqrt{2}\right)i+\left(4\sqrt{3}-10\sqrt{3}\right)i\\ &= -3\sqrt{2}i-6\sqrt{3}i\\ &= \left(-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)i \text{ o } = -3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)i\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado de la operación es: $\left(-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)i$ o $=-3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)i$

## EJERCICIO 111

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{-9}+3\sqrt{-4}$
2. $\sqrt{-16}+\sqrt{25}-\sqrt{-9}-\sqrt{4}$
3. $\sqrt{-4}-3\sqrt{-1}+4\sqrt{-9}-5\sqrt{-16}$
4. $3\sqrt{-16}-\frac{1}{2}\sqrt{-64}+\sqrt{-9}$
5. $\sqrt{-54}+\sqrt{-150}-\sqrt{-24}$
6. $3\sqrt{-2}+2\sqrt{-8}-\sqrt{-32}-\sqrt{-18}$
7. $\sqrt{-18}+\sqrt{-75}-\sqrt{-98}-\sqrt{-12}$
8. $\frac{2}{3}\sqrt{-27}+\frac{1}{2}\sqrt{-50}-\frac{3}{4}\sqrt{-12}$
9. $\frac{1}{2}\sqrt{4}\,i+3\sqrt{9}-\frac{1}{5}\sqrt{-100}+2$
10. $13-\sqrt{(9)(4)}+4\sqrt{-25}-20i$
11. $\sqrt{-x^2}+x\sqrt{-9}-\sqrt{-16x^2}$
12. $\sqrt{-18x^3}+x\sqrt{-8x}-5x\sqrt{-2x}$
13. $\sqrt[8]{-6\,561}+\sqrt[8]{-256}$
14. $\sqrt[4]{-\frac{16}{81}x^5}+\frac{5}{4}x\sqrt[4]{-x}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Potencias de *i*

Se obtienen al elevar la unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$ a la enésima potencia, con $n \in N$.

$$i^1 = i \qquad i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i \qquad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

Para las potencias mayores que 4, los resultados son equivalentes a los anteriores; con el fin de poder determinarlos, la potencia se descompone de la siguiente manera:

$$i^n = i^{4m+k} = i^k \text{ con } n = 4m+k$$

Donde $n$, $m$ y $k \in N$, además $n > 4$ y $k < 4$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el resultado de $i^{13}$?

**Solución**

La potencia $i^{13}$ se representa como sigue:

$$i^{13} = i^{12+1} = i^{4(3)+1}$$

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$i^{13} = i^{4(3)+1} = i^1 = i$$

Por tanto, se deduce que: $i^{13} = i$

2 Obtén el resultado de: $i^6 + 2i^9 - i^{11}$.

**Solución**

Se obtienen los valores de las potencias de $i$:

$$i^6 = i^{4(1)+2} = i^2 = -1 \qquad i^9 = i^{4(2)+1} = i^1 = i \qquad i^{11} = i^{4(2)+3} = i^3 = -i$$

Al sustituir estas equivalencias y realizar las operaciones se determina que:

$$i^6 + 2i^9 - i^{11} = -1 + 2i - (-i) = -1 + 2i + i = -1 + 3i\ .$$

## EJERCICIO 112

Desarrolla las potencias y simplifica las operaciones:

1. $i^{14}$
2. $i^{15}$
3. $3i^{31}$
4. $i^{58}$
5. $i^{65}$
6. $2i^3 + 3i^5$
7. $i^8 - i^9 + i^{10}$
8. $i^4 + i^3 - 3i^{16} + 4i^5$
9. $2i^{17} + 3i^{21} - i^5$
10. $i^{55} - i^{34} + i^{77}$
11. $i^9 - 2i^{12} + i^{15} - 3i^{23}$
12. $i^{100} - i^{24}$
13. $i^2 + i^4 + i^6 + i^8 + \ldots + i^{2n}$ si $n$ es impar
14. $i^3 + i^5 + i^7 + i^9 + \ldots + i^{2n+1}$ si $n$ es par o impar
15. Halla el resultado de: $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{100}$
16. Verifica la siguiente igualdad: $i^{n+1} + i^{n+2} = -i^n + i^{n+1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

### Multiplicación y división

Para realizar estas operaciones, los radicales se tienen que expresar en términos de $i$, posteriormente se aplican las siguientes fórmulas:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\ , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Para números imaginarios la operación $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} \neq \sqrt{(-2)(-2)}$, ya que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ y $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ sólo son verdaderas si $a$ y $b$ son positivos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\sqrt{\frac{-9}{16}}\cdot\sqrt{-4}$.

**Solución**

Se expresan las raíces en términos de *i*, para después realizar la operación:

$$\sqrt{\frac{-9}{16}}\cdot\sqrt{-4}=\left(\frac{3}{4}i\right)(2i)=\frac{6}{4}i^2=\frac{3}{2}(-1)=-\frac{3}{2}$$

2 Efectúa el producto de: $\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-28}\cdot\sqrt{-\frac{4}{7}}$.

**Solución**

Se expresan las raíces en términos de *i*, se realiza el producto y el resultado es:

$$\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-28}\cdot\sqrt{-\frac{4}{7}}=(3i)\left(2\sqrt{7}\,i\right)\left(\frac{2}{\sqrt{7}}i\right)=\frac{12\sqrt{7}}{\sqrt{7}}i^3=12(-i)=-12i$$

3 Efectúa $\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$.

**Solución**

Se obtienen las raíces:

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25(-1)}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=5i \qquad \sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$$

Se sustituyen las equivalencias y se determina que:

$$\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}=\frac{5i}{2i}=\frac{5}{2}$$

4 Obtén el cociente de: $\frac{\sqrt{-48}+\sqrt{-75}-\sqrt{-147}}{\sqrt{-12}}$.

**Solución**

Se simplifican los radicales, se realiza la división y se obtiene como resultado:

$$\frac{\sqrt{-48}+\sqrt{-75}-\sqrt{-147}}{\sqrt{-12}}=\frac{4\sqrt{3}\,i+5\sqrt{3}\,i-7\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}\,i}=\frac{2\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}\,i}=1$$

5 Simplifica la siguiente expresión: $\frac{i^4-2i^2+1}{i^3-i^5}$.

**Solución**

Se sustituyen las equivalencias de cada potencia y se simplifica:

$$\frac{i^4-2i^2+1}{i^3-i^5}=\frac{(1)-2(-1)+1}{(-i)-(i)}=\frac{1+2+1}{-2i}=\frac{4}{-2i}=-\frac{2}{i}$$

# EJERCICIO 113

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-27}$
2. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-18}\cdot\sqrt{-3}$
3. $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-6}$
4. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{-9}\right)$
5. $\frac{1}{8}\sqrt{-16}\cdot\sqrt{-9}-\frac{1}{4}\sqrt{-25}$
6. $\sqrt{-\frac{16}{25}}\cdot\sqrt{-\frac{81}{4}}$
7. $\sqrt{-25}\left(3\sqrt{-4}+2\sqrt{-9}\right)$
8. $\sqrt{-18}\left(\sqrt{-2}+\sqrt{-3}\right)$
9. $\frac{\sqrt{-144}}{\sqrt{9}}$
10. $\frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-4}}$
11. $\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-75}}$
12. $\frac{\sqrt{-8}-\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}$
13. $\frac{\sqrt{-4}+\sqrt{-49}}{\sqrt{100}}$
14. $\frac{\sqrt{-5}+\sqrt{-45}+\sqrt{-20}}{\sqrt{-125}}$
15. $\left(\sqrt{-8}+\sqrt{-18}-\sqrt{-50}\right)\div\sqrt{-32}$
16. $\left(i^3+i^5\right)\div(1-i)$
17. $\frac{1}{i^4-2i^2+1}$
18. $\frac{i^n\cdot i^{2n+2}}{i^{2n}}$
19. $\frac{i^{n+2}+i^{n-2}}{\sqrt[n+1]{i^{n^2-2n-3}}}$
20. $\frac{i+i^2+i^3+\ldots+i^{1001}}{i+i^2+i^3+\ldots+i^{999}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Números complejos

Se forman por una parte real y una imaginaria.

Son de la forma $z = a + bi$, con $a, b \in R$, donde:

$$a = \text{Re}(z) \text{ parte real y } b = \text{Im}(z) \text{ parte imaginaria}$$

Un número complejo se representa de las siguientes formas:

| **forma rectangular o binomial** | **forma cartesiana** |
|---|---|
| $z = a + bi$ | $z = (a,b)$ |
| $z = a$ | $z = (a,0)$ |
| $z = bi$ | $z = (0,b)$ |

EJEMPLOS

1 Representa en forma cartesiana los números complejos: $z_1 = -4 + 5i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 8$.

**Solución**

| | **Forma cartesiana** |
|---|---|
| $z_1 = -4 + 5i$ | $z_1 = (-4, 5)$ |
| $z_2 = 2i$ | $z_2 = (0, 2)$ |
| $z_3 = 8$ | $z_3 = (8, 0)$ |

2 Representa en forma binomial o rectangular los siguientes números complejos: $z_1 = (3, -1)$, $z_2 = (2, 0)$ y $z_3 = (0, -3)$.

**Solución**

| | Forma binomial |
|---|---|
| $z_1 = (3, -1)$ | $z_1 = 3 - i$ |
| $z_2 = (2, 0)$ | $z_2 = 2$ |
| $z_3 = (0, -3)$ | $z_3 = -3i$ |

# EJERCICIO 114

Representa los siguientes números complejos en su forma binomial o cartesiana, según sea el caso:

1. $2 + 3i$
2. $(-1, 5)$
3. $7i$
4. $\frac{2}{3} - \frac{5}{4}i$
5. $5 - 2i$
6. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{6}{7}\right)$
7. $(0, -2)$
8. $-\frac{1}{3}$
9. $(3, 0)$
10. $5 - \frac{2}{11}i$
11. $\left(\frac{5}{2}, -8\right)$
12. $1 - i$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma y resta

Sean los números complejos $z = a + bi$, $w = c + di$

Se define:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i = (a + c, b + d) \qquad z - w = (a - c) + (b - d)i = (a - c, b - d)$$

**EJEMPLOS**

1 Sean los números complejos $z = 2 + 3i$ y $w = -4 + 6i$, realiza: $(z + w)$ y $(z - w)$.

**Solución**

Se aplica la fórmula para la suma y la resta, para obtener:

$$z + w = (2 + 3i) + (-4 + 6i) = (2 + (-4)) + (3 + 6)i = -2 + 9i$$
$$z - w = (2 + 3i) - (-4 + 6i) = (2 - (-4)) + (3 - 6)i = 6 - 3i$$

2 ¿Cuál es el resultado de $(4 - 2i) + (-3 + 4i)$?

**Solución**

Se aplica la fórmula de la resta y se obtiene:

$$(4 - 2i) + (-3 + 4i) = (4 + (-3)) + (-2 + 4)i = 1 + 2i = (1, 2)$$

3 Efectúa la siguiente operación: (– 5, – 4) – (– 6, 1).

**Solución**

Se representan ambos complejos en su forma rectangular y se realiza la operación:

$$(-5,-4)-(-6,1)=(-5-4i)-(-6+i)=(-5-(-6))+(-4-1)\,i=1-5i$$

Este resultado también se representa como (1, – 5)

4 Resuelve: $\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2,\frac{1}{3}\right)$.

**Solución**

Se expresa el segundo sumando en su forma rectangular y se efectúa la suma:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2,\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}i\right)+\left(-2+\frac{1}{3}i\right)=\left(\frac{3}{2}-2\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)i$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}i \quad \text{o} \quad \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$$

Por consiguiente, el resultado es: $-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}i$ o $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$

## Multiplicación por un escalar

Para efectuar la operación se multiplica el escalar por la parte real e imaginaria del número complejo como lo indica la siguiente fórmula:

$$c(a+bi)=ac+bci$$

**EJEMPLOS**

1 Realiza la operación: $3(2-5i)$.

**Solución**

Se realiza la multiplicación de 3 por ambos elementos del número complejo:

$$3(2-5i)=3(2)-3(5i)=6-15i$$

Por tanto, el resultado de la operación es: $6-15i$

2 Obtén el resultado de: $3(7-4i)-2(-3+2i)$.

**Solución**

Se realiza el producto de los escalares por los números complejos:

$$3(7-4i)-2(-3+2i)=((3)(7)-(3)(4)i)+((-2)(-3)+(-2)(2)i)$$
$$=(21-12i)+(6-4i)$$
$$=(21+6)+(-12-4)i$$
$$=27-16i$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\frac{3}{4}(2-5i)+\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}i\right)$?

**Solución**

Se multiplican los coeficientes, se agrupan los términos semejantes y se reducen:

$$\frac{3}{4}(2-5i)+\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}i\right)=\left(\frac{3}{4}(2)+\frac{3}{4}(-5i)\right)+\left(\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}i\right)\right)$$
$$=\left(\frac{6}{4}-\frac{15}{4}i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}i\right)$$
$$=\left(\frac{6}{4}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{15}{4}+\frac{1}{4}\right)i$$
$$=3-\frac{7}{2}i$$

Por consiguiente, el resultado es: $3-\frac{7}{2}i$

# EJERCICIO 115

Resuelve las siguientes operaciones:

1. $(3, 2)+(7, -1)$
2. $(-2, 5)-(-3, 5)$
3. $(1, -3)+(-3, -2)$
4. $(0, -6)-(-5, 0)$
5. $\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4},\frac{1}{6}\right)$
6. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$
7. $\left(\frac{4}{5},0\right)+\left(0,-\frac{1}{2}\right)$
8. $(\sqrt{2},-3)-(0, 2)$
9. $(\sqrt{3},\sqrt{2})-(0, 0)$
10. Si $z=2+3i$ y $z_1=5-4i$, encuentra $z+z_1$
11. Si $z_1=3-2i$ y $z_2=3+2i$, obtén $z_1+z_2$
12. Si $z_1=4-5i$ y $z_2=4-5i$, encuentra $z_1-z_2$
13. Si $w=3-4i$ y $w_1=2+7i$, realiza $w_1-w$
14. Si $z=1-i$, $z_1=1+i$ y $z_2=i$, encuentra $z_1-z+z_2$
15. Si $z_1=7-3i$ y $z_2=4-\frac{1}{2}i$, calcula $z_1+z_2$
16. Si $z=2-3i$, $z_1=10i$ y $z_2=2+3i$, realiza $z+z_2-z_1$

17. Si $z_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{6}i$ y $z_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right)$, encuentra $z_1 + z_2$

18. Si $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ y $z_3 = \frac{1}{4} - 2\,i$ , obtén $z_1 - (z_2 + z_3)$

19. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 5i$ y $z_3 = 1 + 3i$, encuentra $z_1 - z_2 + z_3$

20. Si $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -4 - i$, y $z_3 = -2 - 3i$, ¿cuál es el resultado de $2z_1 - 3z_2 + z_3$?

21. Si $z_1 = 7 + 4i$, $z_2 = 6 - 2i$ y $z_3 = -3 - 3i$. Efectúa: $z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{2}{3}z_3$

22. Si $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$, $z_2 = 4 - \frac{2}{3}i$, y $z_3 = 1 + \frac{3}{2}i$. Efectúa: $4z_1 - \frac{3}{4}z_2 + 5z_3$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Multiplicación

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se define el producto como:

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

**EJEMPLOS**

**1** Realiza la siguiente operación: $(3 - 2i)(-4 + 5i)$.

**Solución**

Se observa que: $a = 3$, $b = -2$, $c = -4$ y $d = 5$, aplicando la definición se obtiene:

$$\begin{aligned}(3 - 2i)(-4 + 5i) &= [(3)(-4) - (-2)(5)] + [(3)(5) + (-2)(-4)]i \\ &= (-12 + 10) + (15 + 8)i \\ &= -2 + 23i \quad \text{o} \quad (-2, 23)\end{aligned}$$

**2** Halla el resultado de: $(2 - 5i)(2 + 5i)$.

**Solución**

Se identifican los valores

$$a = 2 \quad b = -5 \quad c = 2 \quad d = 5$$

Se aplica la definición: $(ac - bd) + (ad + bc)i$, para determinar que:

$$\begin{aligned}(2 - 5i)(2 + 5i) &= [(2)(2) - (-5)(5)] + [(2)(5) + (-5)(2)]i \\ &= (4 + 25) + (10 - 10)i \\ &= 29 + 0i \text{ o } (29, 0)\end{aligned}$$

**3** ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{2} + 3i\right)\left(2 - \frac{3}{5}i\right)$?

**Solución**

Al aplicar la definición se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2} + 3i\right)\left(2 - \frac{3}{5}i\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2) - (3)\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + (3)(2)\right]i$$

(*continúa*)

(*continuación*)

$$=\left[1+\frac{9}{5}\right]+\left[-\frac{3}{10}+6\right]i$$
$$=\frac{14}{5}+\frac{57}{10}i$$

# EJERCICIO 116

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $(3-4i)(-3-2i)$
2. $(2, 3)(1, -1)$
3. $(2, 0)(3, 2)$
4. $(1-i)(2, -1)$
5. $(1+2i)^2$
6. $(\sqrt{2},\sqrt{3})(\sqrt{2},\sqrt{3})$
7. Si $z=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ y $w=(2,3)$, determina $z\cdot w$
8. Si $z_1=\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ y $z_2=(0,\sqrt{2})$, efectúa $z_1\cdot z_2$
9. Si $w=6-2i$ y $w_1=3i$, encuentra $w\cdot w_1$
10. Si $z=(4,-1)$ $z_1=(2,-3)$ y $z_2=(-1,1)$ obtén $z_2(z+z_1)$
11. Si $z=1-3i$ $w=\left(\frac{1}{3},0\right)$ y $v=2+i$, determina $z(w-v)$
12. Si $z=(1,2)$ $z_1=(2,0)$ y $z_2=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, encuentra $z\cdot z_1-4z_2$
13. Si $z=1-3i$, determina $z^2$
14. Si $w=\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{4}\right)$, efectúa $w^2$
15. Si $z_1=3+2i$ y $z_2=1-3i$, encuentra $(z_1\cdot z_2)^2$
16. Si $z=1+i$ y $w=1-i$, realiza $z^2\cdot w^2$
17. Si $z=2i-3$, $w=1-2i$ y $v=4+3i$, realiza la operación: $2z-3w+v$
18. Si $z_1=6-3i$, $z_2=4+2i$ y $z_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$, determina: $\left(\frac{1}{3}z_1+\frac{1}{2}z_2-6z_3\right)^2$
19. Prueba que si $z=a+bi$ y $w=a-bi$, entonces $z\cdot w=\operatorname{Re}(z)^2+\operatorname{Im}(z)^2$
20. Prueba que si $z_1=1+i$ y $z_2=1-i$, entonces $z_1{}^n\cdot z_2{}^n=[\operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2)]^n$
21. Prueba que si $w=(1,1)$ entonces $w^{2n}=(-1)^{\frac{n}{2}}(2,0)^n$ con $n$ par $\in N$
22. Prueba que si $w=(1,1)$ entonces $w^{2n}=(0,2)^n$ con $n$ impar $\in N$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División

Sean los complejos $z = a + bi$, $w = x + yi$, la división $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi}$

Se define como:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{bx-ay}{x^2+y^2}\right)i$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente operación: $\frac{6+4i}{3-5i}$.

**Solución**

Se identifican los valores:

$$a=6 \quad b=4 \quad x=3 \quad y=-5$$

Se aplica la definición:

$$\frac{6+4i}{3-5i}=\left[\frac{(6)(3)+(4)(-5)}{(3)^2+(-5)^2}\right]+\left[\frac{(4)(3)-(6)(-5)}{(3)^2+(-5)^2}\right]i=\frac{(18)+(-20)}{9+25}+\frac{(12)-(-30)}{9+25}i$$

$$=\frac{18-20}{9+25}+\frac{12+30}{9+25}i$$

$$=-\frac{2}{34}+\frac{42}{34}i$$

$$=-\frac{1}{17}+\frac{21}{17}i$$

Por tanto, $\frac{6+4i}{3-5i} = -\frac{1}{17}+\frac{21}{17}i$ o $\left(-\frac{1}{17},\frac{21}{17}\right)$

2 Halla el resultado de: $\frac{4-i}{2+3i}$.

**Solución**

Los valores de $a = 4$, $b = -1$, $x = 2$, $y = 3$, se aplica la definición:

$$\frac{4-i}{2+3i}=\left[\frac{(4)(2)+(-1)(3)}{(2)^2+(3)^2}\right]+\left[\frac{(-1)(2)-(4)(3)}{(2)^2+(3)^2}\right]i=\frac{(8)+(-3)}{4+9}+\frac{(-2)-(12)}{4+9}i$$

$$=\frac{8-3}{4+9}-\frac{-2-12}{4+9}i$$

$$=\frac{5}{13}+\frac{-14}{13}i$$

$$=\frac{5}{13}-\frac{14}{13}i$$

Por consiguiente, $\frac{4-i}{2+3i} = \frac{5}{13}-\frac{14}{13}i$, el cual en su forma cartesiana es $\left(\frac{5}{13},-\frac{14}{13}\right)$

3 Realiza la siguiente operación: $\frac{2}{3-i}$.

**Solución**

Se obtienen los respectivos valores:

$$a=2 \qquad b=0 \qquad x=3 \qquad y=-1$$

Sustituyendo en la definición, se obtiene:

$$\frac{2}{3-i}=\left(\frac{(2)(3)+(0)(-1)}{(3)^2+(-1)^2}\right)+\left(\frac{(0)(3)-(2)(-1)}{(3)^2+(-1)^2}\right)i=\left(\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{2}{10}\right)i=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

4 Determina el resultado de: $\frac{i}{1+i}$.

**Solución**

Al aplicar la definición se obtiene:

$$\frac{i}{1+i}=\left[\frac{(0)(1)+(1)(1)}{(1)^2+(1)^2}\right]+\left[\frac{(1)(1)-(0)(1)}{(1)^2+(1)^2}\right]i=\frac{0+1}{1+1}+\frac{1-0}{1+1}i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Por tanto, $\frac{i}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

# EJERCICIO 117

Efectúa las siguientes operaciones:

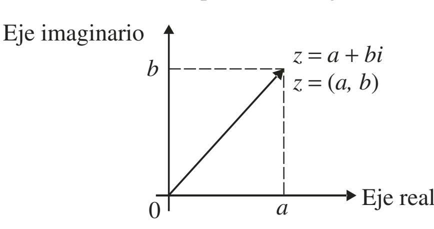
1. $\frac{i}{1-2i}$
2. $\frac{3-2i}{3+2i}$
3. $\frac{1-3i}{i}$
4. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$
5. $\frac{1-2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$
6. $\frac{2}{1-i}$
7. $\frac{2-i}{1-i}$
8. Si $z_1=3+2i$ y $z_2=1-2i$, encuentra $\frac{z_1}{z_2}$
9. Si $z_1=3+2i$ y $z=1-$ i, realiza $\frac{z_1}{z^2}$
10. Si $z=1-7i$ y $w=1+2i$, determina $\frac{z}{w}$
11. Si $z=4-3i$ y $w=1+2i$, efectúa $\frac{w}{z}$
12. Si $z=1-3i$ y $w=2+7i$, ¿cuál es el resultado de $\frac{w^2}{z}$ ?
13. Si $z_1=3-i$, $z_2=1+i$ y $z_3=\sqrt{2}+i$, realiza $\frac{z_1+z_2}{z_3}$
14. Si $z_1=2+i$, $z_2=1+2i$, $z_3=3-2i$ y $z_4=-2+3i$, efectúa: $\frac{z_1-z_2}{z_3+z_4}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Representación gráfica

Para representar en el plano cartesiano cualquier número complejo de la forma $z=a+bi$, se ubica a la *parte real* en el eje horizontal (eje real) y a la *parte imaginaria* en el eje vertical (eje imaginario).

Sea el número complejo $z = a + bi$, entonces su representación gráfica es:



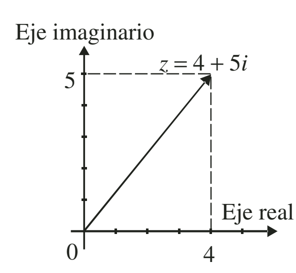

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica el siguiente número complejo: $z = 4 + 5i$.

**Solución**

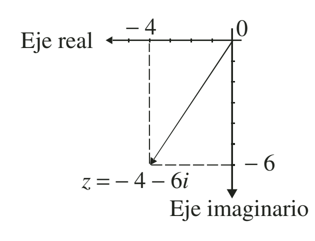
Se convierte en la forma cartesiana $z = (4, 5)$, y su gráfica es:




2 Grafica: $z_2 = -4 - 6i$.

**Solución**

Se ubica el punto $(-4, -6)$ en el plano y se une con el origen mediante un segmento de recta, y se obtiene la representación gráfica de $z_2$:




## EJERCICIO 118

Grafica los siguientes números complejos:

1. $z_1 = -6 + 5i$
2. $z_2 = (3, -4)$
3. $z_3 = (-1, -2)$
4. $z_4 = -2 + 4i$
5. $z_5 = 5 - 2i$
6. $z_6 = (6, 2)$
7. $w = (1, 2) + (-3, -5)$
8. $z = (-4, 6) - (1, -3)$
9. $v = (2, 3)(1, -1)$
10. $w_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$
11. $w_2 = (3, -1)(2, 0) - (-1, -1)$
12. $w_3 = \dfrac{(1, 2) - (2, -1)}{(0, 1)}$

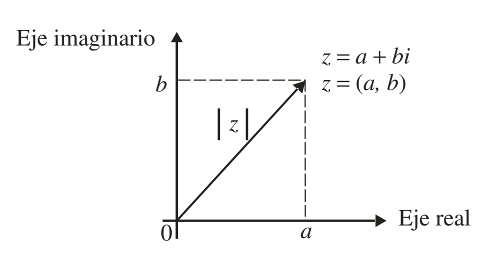
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Valor absoluto o módulo

El módulo de un complejo es la distancia que existe del origen al punto que determina el número complejo. Su magnitud está dada por la fórmula:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

y su representación gráfica es:




### *Propiedades del valor absoluto*

Sean los números complejos $z$ y $z_1$, entonces:

1. $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$
2. $|z + z_1| \leq |z| + |z_1|$
3. $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Obtén el módulo de $z = 3 - 4i$.

**Solución**

Se sustituye $a = 3$ y $b = -4$ en la fórmula y se obtiene como resultado:

$$|z| = |3-4i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

El resultado indica que existen 5 unidades del origen al punto $z = (3, -4)$

2 ¿Cuál es el módulo del número complejo $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$?

**Solución**

Se sustituyen los valores y se obtiene:

$$|z_2| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

3 Determina el valor absoluto del número complejo $z_4 = (1, 7)$.

**Solución**

Se sustituyen los valores en la fórmula y resulta que el módulo de $z_4$ es:

$$|z_4| = \sqrt{(1)^2+(7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

4 Para $z = 3 + 4i$ y $w = 2 - i$, prueba que $|z+w| \leq |z|+|w|$.

**Solución**

Se obtiene $|z+w|$

$$|z+w| = |(3+4i)+(2-i)| = |5+3i|$$
$$= \sqrt{(5)^2+(3)^2}$$
$$= \sqrt{34}$$

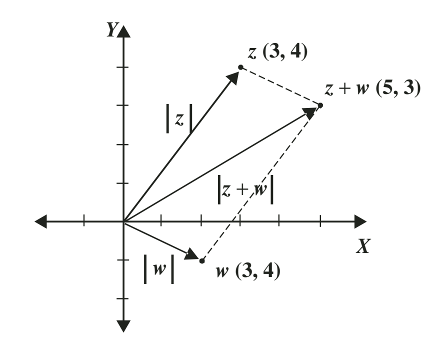
luego,

$$|z|+|w| = |3+4i|+|2-i|$$
$$= \sqrt{(3)^2+(4)^2} + \sqrt{(2)^2+(-1)^2}$$
$$= 5 + \sqrt{5}$$

Por tanto, se comprueba que:

$$|z+w| \leq |z|+|w|$$
$$\sqrt{34} \leq 5 + \sqrt{5}$$

Las magnitudes de los números complejos en el plano cartesiano se representan de la siguiente manera:




## Conjugado

El conjugado del complejo $z = a + bi$, se define como:

$$\bar{z} = a - bi$$

### Ejemplos

| Complejo | Conjugado |
|---|---|
| $3 + 7i$ | $3 - 7i$ |
| $-4 - 8i$ | $-4 + 8i$ |
| $-3$ | $-3$ |
| $-4i$ | $4i$ |

Teorema: sea $z = a + bi$ entonces $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

*Propiedades*

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\bar{z} + z = Re(z)$
4. $\bar{z} - z = -2\, Im(z)$
5. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
6. Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Demostraciones

1. Se determina la suma de los complejos $z$ y $w$:

$$z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Luego el conjugado de $z+w$ se define como:

$$\overline{z+w}=(a+c)-(b+d)i$$

Se desarrolla la operación, asociando como se observa y se determina que:

$$\overline{z+w}=(a+c)-(b+d)i=(a+c)+(-b-d)i=(a-b)+(c-d)i=\bar{z}+\bar{w}$$

2. El producto de los complejos $z$ y $w$ es:

$$z\cdot w=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Luego, el conjugado de $z\cdot w$ se define como:

$$\overline{z\cdot w}=(ac-bd)-(ad+bc)i$$

Se desarrolla la operación y se agrupan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(ac-bd)-(ad+bc)i&=(ac-bd)+(-ad-bc)i\\&=(ac-(-b)(-d))+(a(-d)+(-b)(c))i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\bar{z}\cdot\bar{w}\end{aligned}$$

3. Se determina la suma del complejo $z$ y su conjugado $\bar{z}$:

$$\bar{z}-z=(a-bi)+(a+bi)=(a+a)+(-b+b)i=2a+0i=2a$$

Pero $a$ es la parte real del complejo $z$, por lo tanto

$$\bar{z}+z=2\,\text{Re}(z)$$

4. Se obtiene la diferencia del conjugado $\bar{z}$ y el complejo $z$:

$$\bar{z}-z=(a-bi)-(a+bi)=(a-a)+(-b-b)i=0a-2bi=-2bi$$

Pero $bi$ es la parte imaginaria de $z$, entonces:

$$\bar{z}-z=2\,\text{Im}(z)$$

5. Se obtiene el valor absoluto de $z$ y se eleva al cuadrado:

$$|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$$

Pero si $z=a+bi$ entonces $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$ por lo tanto:

$$|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2=z\cdot\bar{z}$$

6. Siendo $z=a+bi$, se realiza la división $\frac{1}{z}$ obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}=\frac{1+0i}{a+bi}=\left[\frac{(1)(a)+(0)(b)}{a^2+b^2}\right]+\left[\frac{(0)(a)-(1)(b)}{a^2+b^2}\right]i&=\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i\\&=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\end{aligned}$$

El denominador de cada término es el mismo, entonces se tiene que:

$$\frac{1}{z}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Pero $\bar{z}=a-bi$ y $|z|^2=a^2+b^2$, entonces se obtiene:

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $z=2+3i$ y $w=-1+i$, determina $\overline{\left(\frac{z+w}{z\cdot w}\right)}$.

**Solución**

Se aplican las propiedades de los complejos:

$$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}=(2-3i)+(-1-i)=(2-1)+(-3-1)i=1-4i$$
$$\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}=(2-3i)(-1-i)=-5+i$$

Luego,

$$\overline{\left(\frac{z+w}{z\cdot w}\right)}=\frac{1-4i}{-5+i}=-\frac{9}{26}+\frac{19}{26}i$$

2 Si $z=-4+i$ y $w=-2+5i$, determina $\frac{z\cdot\bar{z}}{(\bar{w}+w)(\bar{z}-z)}$

**Solución**

Se aplican las propiedades de los complejos y se obtiene:

$$\frac{z\cdot\bar{z}}{(\bar{w}+w)(\bar{z}-z)}=\frac{|z|^2}{[2\text{Re}(w)]\cdot[-2\text{Im}(z)]}$$

Se sustituyen el valor absoluto de $z$, el número real de $w$ y el número imaginario de $z$:

$$\frac{|z|^2}{[2\text{Re}(w)]\cdot[-2\text{Im}(z)]}=\frac{(-4)^2+(1)^2}{[2(-2)]\cdot[-2(i)]}=\frac{17}{(-4)(-2i)}=\frac{17}{8i}$$

Se realiza la división:

$$\frac{17}{8i}=\frac{17}{8}\cdot\frac{1}{i}$$

Pero $\frac{1}{i}=\frac{\bar{i}}{|i|^2}=\frac{-i}{(0)^2+(1)^2}=-i$, entonces se obtiene::

$$=\frac{17}{8}(-i)=-\frac{17}{8}i$$

# EJERCICIO 119

Encuentra el valor absoluto o módulo de los siguientes números complejos:

1. $2+3i$
2. $5-4i$
3. $4-5i$
4. $3i$
5. $1-2i$
6. $6-7i$
7. $\frac{1}{2}+\sqrt{2}\,i$
8. $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$
9. $\left(\sqrt{2},0\right)$
10. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},5\right)$
11. $\frac{4}{3}-2i$
12. $\sqrt{2}-3\,i$

Determina el conjugado de los siguientes números complejos:

13. $5+4i$
14. $(-5,0)$
15. $1+i$
16. $5i$
17. $\frac{1}{2}i$
18. $(2,1)$
19. $(0,-3)$
20. $-\frac{3}{7}-\frac{2}{5}i$
21. $-2+6i$
22. $(-1,-1)$
23. $-2+\frac{11}{4}i$
24. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

Sean los números complejos $z=2i+1$, $z_1=4-2i$ y $z_2=(5,1)$ demuestra que:

25. $|z+z_1|\le|z|+|z_1|$
26. $|z\cdot z_1|=|z|\cdot|z_1|$
27. $|z_1+z_2+z|\le|z_1+z_2|+|z|$
28. $|(z_1+z_2)(z)|=|z_1+z_2|\cdot|z|$
29. $|z\cdot z_1\cdot z_2|=|z|\cdot|z_1|\cdot|z_2|$
30. $|z_1\cdot z_2|+|z_2\cdot z|\le|z_2|\left(|z_1|+|z|\right)$

Nota: Estas demostraciones no se incluyen en las soluciones.

Sean los complejos $z=2-3i$, $w=1+i$ y $v=2-i$, determina:

31. $\overline{z+w}$
32. $\overline{w+v}-\overline{z-w}$
33. $\overline{z\cdot v}$
34. $\overline{w\cdot v}-\overline{z\cdot v}$
35. $\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{v}-v\right)$
36. $\left(z\cdot\overline{z}\right)-\left(\overline{w}\cdot w\right)$
37. $\left(\overline{v}-v\right)\left(\overline{z+w}\right)$
38. $\left(\overline{z-w}\right)\left(\overline{w-v}\right)$
39. $\dfrac{\overline{z+w}}{\overline{w+v}}$
40. $\dfrac{v\cdot\overline{v}}{z-\overline{z}}$
41. $\dfrac{\overline{z\cdot w}}{\overline{z+w}}$
42. $\dfrac{\overline{v}}{|v|^2}$
43. $\dfrac{\overline{v+w}}{|v+w|^2}$
44. $\dfrac{v\cdot\overline{v}}{\left(\overline{w}-w\right)\left(\overline{z}-z\right)}$
45. $\dfrac{\overline{w+z}-\overline{v+w}}{\left(z\cdot\overline{z}\right)-\left(v\cdot\overline{v}\right)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# Capítulo 12

## Ecuaciones de segundo grado

**Reseña HISTÓRICA**

Área = $x^2 + 2x + 2x + 4$
$= x^2 + 4x + 4$

En la reseña del capítulo 2 se mencionó a al-Khwarizmi y su método geométrico para resolver ecuaciones de segundo grado, que se conoce como método de completar el cuadrado y consiste en lo siguiente:

**Ejemplo**

Sea la ecuación $x^2 + 4x = 45$

- Se comienza por construir un cuadrado de lado $x$, $ABCD$, cuya área será $x^2$.
- Se prolonga el lado $AB$ y $AD$ en 2 unidades, resultan 2 rectángulos; la suma de dichas áreas es $2x + 2x = 4x$, que da como resultado el segundo término de la ecuación.
- La figura se completa con un cuadrado de 2 unidades por lado, cuya área es $2 \cdot 2 = 4$ unidades cuadradas.
- El área total del cuadrado es $x^2 + 4x + 4$.
- Se suman 4 unidades cuadradas en ambos términos y se resuelve la ecuación.

$$x^2 + 4x = 45$$
$$x^2 + 4x + 4 = 45 + 4$$
$$(x + 2)^2 = 49$$

Por tanto, una solución es $x = 5$.

## Definición

La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$, es una ecuación de segundo grado; al término $ax^2$ se le llama cuadrático, a $bx$ lineal, $c$ es el término independiente y se clasifican de la siguiente forma:

Ecuaciones de segundo grado
- Completas: $ax^2 + bx + c = 0$
- Incompletas:
  - Mixtas: $ax^2 + bx = 0$, con $c = 0$
  - Puras: $ax^2 + c = 0$, con $b = 0$

## Solución de una ecuación de segundo grado completa

Las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones, también se denominan raíces.

Existen tres métodos para resolver una ecuación de segundo grado:

**Completando el trinomio cuadrado perfecto**

Para completar el trinomio cuadrado perfecto se suman, en ambos miembros de la igualdad, el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal de la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

**Solución**

Se dejan los términos en $x$ en el primer miembro de la ecuación.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -3$$

Se suma $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ en ambos miembros $\quad x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x+2)^2 = 1$

Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros $\quad x + 2 = \pm\sqrt{1}$

$x + 2 = \pm 1$

Se despeja a la incógnita $\quad x = -2 \pm 1$

de la igualdad se obtienen los valores de $x$,

$$x_1 = -2 + 1 = -1 \text{ o } x_2 = -2 - 1 = -3$$

Por tanto, las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = -1$ o $x_2 = -3$

2 Determina las raíces de la ecuación: $x^2 - 6x - 27 = 0$.

**Solución**

Se dejan los términos en $x$ en el primer miembro y se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 - 6x - 27 = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 27$$

se suma $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ en ambos miembros $\quad x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x-3)^2 = 36$

se aplica raíz cuadrada en ambos miembros, $\quad x - 3 = \pm\sqrt{36}$

$x - 3 = \pm 6$

de la igualdad se obtienen los valores de $x$,

$$x_1 = 3+6 = 9 \text{ o } x_2 = 3-6 = -3$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 9$ o $x_2 = -3$

3 Encuentra las raíces de la ecuación: $x^2 - 5x - 6 = 0$.

**Solución**

El término independiente se coloca del lado derecho del signo igual y se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x = 6$$

Se suma $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ en ambos miembros $\quad x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 6 + \frac{25}{4}$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto $\quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

Se aplica raíz cuadrada $\quad x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}}$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

de la igualdad se obtienen los valores de $x$,

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \text{ o } x_2 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = -1 \text{ o } x_2 = 6$$

4 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$.

**Solución**

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -5$$
$$x^2 + 4x + 4 = -5 + 4$$
$$(x+2)^2 = -1$$
$$x+2 = \pm\sqrt{-1}$$
$$x+2 = \pm i$$
$$x = -2 \pm i$$

de la igualdad se obtienen los valores de $x$, que son los números complejos:

$$x_1 = -2+i \text{ o } x_1 = -2-i$$

5 Resuelve la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

**Solución**

Se divide la ecuación entre 2 y se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

Se suma $\left(\frac{\frac{7}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$ en ambos miembros $\quad x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16}$

*(continúa)*

(*continuación*)

se factoriza el miembro izquierdo, $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

se aplica raíz cuadrada en ambos miembros. $x+\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$

$$x=-\frac{7}{4}\pm\frac{5}{4}$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1=-\frac{1}{2}$ o $x_2=-3$

6 Determina las soluciones de la ecuación $3x^2-5x+2=0$.

**Solución**

Se dividen ambos miembros de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrático, que en este caso es 3,

$$3x^2-5x+2=0 \;\rightarrow\; x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$$

En la ecuación resultante se completa el trinomio cuadrado perfecto y se despeja $x$.

$$x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0 \;\rightarrow\; x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}=-\frac{2}{3}+\frac{25}{36}$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

$$x-\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{1}{6}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1=1$ o $x_2=\frac{2}{3}$

7 Encuentra las raíces de la ecuación $6x^2-11xy+3y^2=0$, con $y$ como una constante.

**Solución**

Se divide la ecuación entre 6 y se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2-\frac{11}{6}xy+\frac{3}{6}y^2=0 \;\rightarrow\; x^2-\frac{11}{6}xy=-\frac{3}{6}y^2$$

$$x^2-\frac{11}{6}xy+\frac{121}{144}y^2=-\frac{3}{6}y^2+\frac{121}{144}y^2$$

$$\left(x-\frac{11}{12}y\right)^2=\frac{49}{144}y^2$$

$$x-\frac{11}{12}y=\pm\frac{7}{12}y$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación son:

$$x_1=\frac{7}{12}y+\frac{11}{12}y=\frac{18}{12}y=\frac{3}{2}y\,,\;\; x_2=-\frac{7}{12}y+\frac{11}{12}y=\frac{4}{12}y=\frac{1}{3}y$$

# EJERCICIO 120

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado y completa el trinomio cuadrado perfecto, donde *x*, *y*, *z* y *w* son variables y *a* y *b* constantes.

1. $x^2 + 5x + 4 = 0$
2. $6x - 27 = -x^2$
3. $x^2 + 11x + 30 = 0$
4. $y^2 + 10 = 6y$
5. $w^2 - 40 = 3w$
6. $z^2 - 30 = 13z$
7. $x^2 - 10x + 24 = 0$
8. $x^2 + 8x = 240$
9. $2x + 5 = -x^2$
10. $3x^2 = x + 2$
11. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
12. $10w^2 - 13w - 3 = 0$
13. $-3x^2 + 7x + 6 = 0$
14. $36x = 13 + 36x^2$
15. $4x^2 + 5bx = -b^2$
16. $-32aw - 15a^2 = -7w^2$
17. $x^2 + 3bx - 10b^2 = 0$
18. $b^2x^2 = bx + 30$
19. $a^2y^2 + 3aby + 2b^2 = 0$
20. $27ay - 14y^2 = 10a^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Fórmula general

### *Deducción de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado*

Sea la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La ecuación se divide entre *a*,

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

El término independiente se coloca en el segundo miembro

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

se factoriza el lado izquierdo, y se realiza la resta en el segundo miembro

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

se realiza el despeje para *x*,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, las soluciones o raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

**Solución**

Se identifican los valores de $a$, $b$ y $c$ de acuerdo con la ecuación dada.

$$a = 3,\ b = -5,\ c = -2$$

Se sustituyen en la fórmula general.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Para concluir, las raíces son:

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ o } x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2 Determina las raíces de la ecuación $2x^2 - 3x = 0$.

**Solución**

De acuerdo con la ecuación: $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-0}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{3 \pm 3}{4}$$

Por tanto, las raíces son: $x_1 = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ o $x_2 = \frac{3-3}{4} = \frac{0}{4} = 0$

3 Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

**Solución**

De acuerdo con la ecuación: $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$, se sustituyen los valores en la fórmula general,

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{-0 \pm \sqrt{0+36}}{2} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

Por consiguiente, la soluciones son: $x_1 = -3$ o $x_2 = 3$

4 Determina las raíces de la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$.

**Solución**

De acuerdo con la ecuación: $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$, los valores se sustituyen en la fórmula general,

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1 = -2 + i$, $x_2 = -2 - i$

## EJERCICIO 121

Emplea la fórmula general y encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 15 = 8x$
2. $x^2 = x + 6$
3. $x^2 + 6x = -8$
4. $x^2 - 2x - 15 = 0$
5. $4x^2 - 20x + 25 = 0$
6. $6x^2 + 13x - 5 = 0$
7. $5y^2 - 2y - 3 = 0$
8. $x^2 - 6x + 2 = 0$

9. $x^2+2x-5=0$
10. $x^2-4x+5=0$
11. $4x^2=-4x-17$
12. $36y^2-24y=-85$
13. $w^2-5w=0$
14. $\frac{1}{3}z^2+\frac{5}{6}z=0$
15. $y^2-\frac{1}{3}ay=0$
16. $ax^2-bx=0$
17. $x^2-25=0$
18. $x^2-\frac{1}{4}=0$
19. $a^2x^2+b^2=0$
20. $a^2w^2-16=0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Propiedades de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado*

La expresión $I=b^2-4ac$ es el discriminante de una ecuación de segundo grado, y permite determinar si las raíces son reales o imaginarias.

1. Si $I>0$, las raíces son reales y diferentes.
2. Si $I=0$, entonces las raíces son reales e iguales y su valor es: $x=-\frac{b}{2a}$.
3. Si $I<0$, entonces las raíces son complejas.

## EJEMPLOS

1 Determina el carácter de las raíces de la ecuación $20x^2-x-1=0$.

**Solución**

Al sustituir los valores de $a=20$, $b=-1$, $c=-1$ en el discriminante, se obtiene:

$$I=(-1)^2-4(20)(-1)=1+80=81$$

De acuerdo con el resultado $I>0$, se deduce que la ecuación tiene 2 soluciones reales y diferentes.

2 Encuentra el carácter de las raíces de la ecuación $4y^2-8y+7=0$.

**Solución**

Al sustituir los valores de $a=4$, $b=-8$, $c=7$ en el discriminante, se determina que:

$$I=(-8)^2-4(4)(7)=64-112=-48$$

En este caso $I<0$, por tanto, las raíces son complejas.

## EJERCICIO 122

Determina el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2-8x+12=0$
2. $x^2+6x+16=0$
3. $\frac{4}{3}x^2-4x+\frac{10}{3}=0$
4. $36x^2-60x+25=0$
5. $4x^2-3x=0$
6. $x^2+81=0$
7. $x^2+4x-5=0$
8. $w^2-2w+5=0$
9. $\sqrt{6}y^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)y-1=0$
10. $x^2+6x+9=0$
11. $x^2-4x+5=0$
12. $\frac{1}{5}x^2+2x+5=0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Factorización

Otra forma de resolver una ecuación de segundo grado es factorizando la expresión e igualando a cero cada factor, para posteriormente despejar a la incógnita.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$.

**Solución**

Con la forma $x^2 + bx + c$ se factoriza el trinomio.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$x - 5 = 0 \text{ o } x - 2 = 0$$
$$x = 5 \text{ o } x = 2$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son: $x_1 = 5$ o $x_2 = 2$

2 Determina para $x$ la ecuación $x^2 + 11ax + 10a^2 = 0$.

**Solución**

Se factoriza el trinomio.

$$x^2 + 11ax + 10a^2 = 0$$
$$(x + 10a)(x + a) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación,

$$x + 10a = 0 \text{ o } x + a = 0$$
$$x = -10a \text{ o } x = -a$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación son: $x_1 = -10a$ o $x_2 = -a$

3 Resuelve la ecuación $6x^2 - 7x - 3 = 0$.

**Solución**

Con la forma $ax^2 + bx + c$ se factoriza la expresión

$$6x^2 - 7x - 3 = 0 \rightarrow \frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = 0$$
$$\frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = 0$$
$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6} = 0$$

El denominador se descompone en sus factores primos ($6 = 3 \cdot 2$)

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{3 \cdot 2} = 0$$

Se realiza la simplificación

$$(2x - 3)(3x + 1) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$2x - 3 = 0 \text{ o } 3x + 1 = 0$$
$$2x = 3 \text{ o } 3x = -1$$

Por tanto, las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{3}{2}$ o $x_2 = -\frac{1}{3}$

**4** Determina las raíces de la ecuación $3x^2 + 19x - 14 = 0$.

**Solución**

Se aplica el factor por agrupación de términos y se factoriza la expresión.

$$3x^2 + 19x - 14 = 0$$

Se descompone $19x$ en $21x - 2x$, $\quad 3x^2 + 21x - 2x - 14 = 0$

Se agrupan términos y se factoriza $\quad 3x(x + 7) - 2(x + 7) = 0$

$$(3x - 2)(x + 7) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$3x - 2 = 0 \text{ o } x + 7 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ o } x = -7$$

Finalmente, las raíces son: $x_1 = \frac{2}{3}$ o $x_2 = -7$

**5** Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 3\sqrt{2}\,x - 8 = 0$.

**Solución**

Se factoriza el trinomio,

$$x^2 - 3\sqrt{2}\,x - 8 = 0$$

$$\left(x - 4\sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$x - 4\sqrt{2} = 0, \text{ o } x + \sqrt{2} = 0$$

$$x = 4\sqrt{2} \text{ o } x = -\sqrt{2}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 4\sqrt{2}$ o $x_2 = -\sqrt{2}$

## EJERCICIO 123

Emplea el método factorización y resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 5x - 6 = 0$
2. $x^2 + 11x + 24 = 0$
3. $y^2 - y - 20 = 0$
4. $x^2 = x + 90$
5. $-w^2 + 5w - 4 = 0$
6. $3y^2 - 11y + 10 = 0$
7. $3x^2 - x - 2 = 0$
8. $2y^2 = 4 - 7y$
9. $3x^2 - 6 = 7x$
10. $14x^2 - 33x - 5 = 0$
11. $20x^2 + 3x - 2 = 0$
12. $5z^2 = 17z - 14$
13. $10w^2 = 7w + 6$
14. $14x^2 + 17x - 6 = 0$
15. $-2x^2 = 7x - 15$
16. $6x^2 + 11bx = 10b^2$
17. $2x^2 + 2a^2b^2 = 5abx$
18. $a^2x^2 - 2ax - 3 = 0$
19. $a^2x^2 + abx = 6b^2$
20. $z^2 - \sqrt{3}z = 6$
21. $x^2 - 2\sqrt{3}x = 45$
22. $x^2 = 7\sqrt{7}x - 70$
23. $5y^2 + \frac{17}{6}y + \frac{1}{6} = 0$
24. $x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{6} = 0$
25. $w^2 - \frac{1}{15}w - \frac{2}{15} = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Solución de una ecuación de segundo grado incompleta

### Mixtas

Tiene la forma $ax^2 + bx = 0$; para obtener las raíces de la expresión se aplica el factor común, y una de sus raíces siempre es cero.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x = 0$.

**Solución**

Se factoriza por factor común.

$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x - 5) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación de primer grado.

$$x = 0 \text{ o } x - 5 = 0$$
$$x = 5$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 5$$

2 Determina las raíces de la ecuación $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$.

**Solución**

Se desarrollan los productos notables y se simplifica la expresión:

$$(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$$
$$x^2 - 6x + 9 - (4x^2 + 20x + 25) + 16 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 - 4x^2 - 20x - 25 + 16 = 0$$
$$-3x^2 - 26x = 0$$

Se aplica factorización por factor común.

$$x(-3x - 26) = 0$$

Se iguala a cero cada factor.

$$x = 0 \text{ o } -3x - 26 = 0$$
$$-3x = 26$$
$$x = -\frac{26}{3}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 0 \text{ o } x_2 = -\frac{26}{3}$$

# EJERCICIO 124

Encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 6x = 0$
2. $4x^2 - 8x = 0$
3. $5x - x^2 = 0$
4. $3x^2 + 2x = 0$
5. $x^2 - x = 0$
6. $7x^2 - 5x = 0$
7. $\frac{x-9}{6} + \frac{3}{2} - \frac{x^2}{3} = 0$
8. $(y+4)^2 = (4-y)(4+y)$
9. $\frac{x+4}{x+2} = \frac{8}{4-x}$
10. $5(x+3) - 5(x^2-1) = x^2 + 7(3-x) - 1$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Puras

Son de la forma $ax^2 + c = 0$, para obtener sus raíces o soluciones se despeja $x$ o se factoriza la expresión.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

**Solución**

Se realiza el despeje para obtener los siguientes valores de $x$,

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

Por tanto $x_1 = 3$ o $x_2 = -3$

2 Encuentra las soluciones de la ecuación $\frac{2x-3}{x-3} = \frac{x-2}{x-1}$.

**Solución**

Se eliminan los denominadores y se simplifica la expresión,

$$\frac{2x-3}{x-3} = \frac{x-2}{x-1} \rightarrow (2x-3)(x-1) = (x-2)(x-3)$$
$$2x^2 - 2x - 3x + 3 = x^2 - 3x - 2x + 6$$
$$2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x + 2x - 6 = 0$$
$$x^2 - 3 = 0$$

se despeja a $x$,

$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \sqrt{3}$ o $x_2 = -\sqrt{3}$

3 ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $4x^2 - 1 = 0$?

**Solución**

Se factoriza la expresión como una diferencia de cuadrados, se iguala a cero cada factor y se despeja $x$.

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow (2x-1)(2x+1) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \;;\; 2x + 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ o } x_2 = -\frac{1}{2}$$

4 Encuentra las soluciones de la ecuación $x^2 + 4 = 0$.

**Solución**

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$$
$$x = \pm 2i$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 2i \text{ o } x_2 = -2i$$

5 Encuentra las soluciones de la ecuación $2x^2 + 162 = 0$.

**Solución**

$$2x^2 + 162 = 0 \rightarrow 2x^2 = -162$$
$$x^2 = -81$$

Se extrae raíz cuadrada a ambos miembros $\quad x = \pm\sqrt{-81}$

$$x = \pm 9i$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = -9i \text{ o } x_2 = 9i$$

# EJERCICIO 125

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 4 = 0$
2. $1 - x^2 = 0$
3. $w^2 - 100 = 0$
4. $3x^2 - 192 = 0$
5. $4y^2 - 12 = 0$
6. $16x^2 - a^2 = 0$
7. $25z^2 - 36 = 0$
8. $135 = (2y + 3)(2y - 3)$
9. $(w + 2)(2w - 1) = (w - 2)(w + 5) + 15$
10. $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-3}{2x-3}$
11. $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{x-\dfrac{1}{3}}$
12. $2 + \dfrac{3}{(2x+1)(2x-1)} = 3$
13. $y^2 + 16 = 0$
14. $w^2 + 25 = 0$
15. $x^2 + 1 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Existen diversos problemas cuya solución se obtiene al plantear y resolver una ecuación de segundo grado.

1 La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?

**Solución**

Primer número: $x$
Segundo número: $18 - x$

Ecuación:

$$x^2 + (18 - x)^2 = 180$$
$$x^2 + 324 - 36x + x^2 - 180 = 0$$
$$2x^2 - 36x + 144 = 0 \quad \text{al dividir entre 2}$$
$$x^2 - 18x + 72 = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación}$$
$$(x - 12)(x - 6) = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$x - 12 = 0 \text{ o } x - 6 = 0 \quad \text{cada factor se iguala con cero}$$
$$x = 12 \text{ o } x = 6$$

Finalmente, tenemos que los números son 12 y 6

2 En $t$ segundos la altura $h$, en metros sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 80t - 5t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 320 m sobre el nivel del suelo?

**Solución**

Con la ecuación $h = 80t - 5t^2$, se obtiene la altura del proyectil en cualquier instante.

Para determinar el tiempo que tarda el proyectil en tener una altura de 320 m, este valor se evalúa en la ecuación dada, es decir:

$$h = 80t - 5t^2$$
$$320 = 80t - 5t^2$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve para $t$

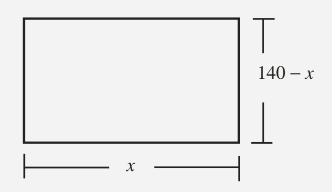
$$320 = 80t - 5t^2 \quad \text{se iguala con cero}$$
$$5t^2 - 80t + 320 = 0 \quad \text{se divide entre 5}$$
$$t^2 - 16t + 64 = 0$$
$$(t - 8)^2 = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$t - 8 = 0 \quad \text{se extrae raíz en ambos miembros}$$
$$t = 8 \quad \text{se obtiene el valor de } t$$

por tanto, el proyectil tardará 8 segundos en estar a 320 m sobre el nivel del suelo.

3 Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280 m y su área es de 4 000 m$^2$.

**Solución**

$$2(\text{base}) + 2(\text{altura}) = \text{perímetro}$$
$$2x + 2(\text{altura}) = 280$$
$$x + (\text{altura}) = 140$$
$$\text{altura} = 140 - x$$



El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura:

$$\text{Área: } x(140 - x) = 4\,000$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado.

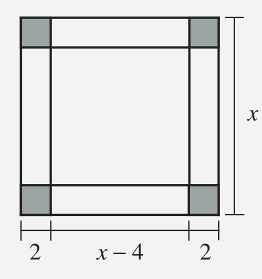
$$x(140 - x) = 4\,000$$
$$140x - x^2 - 4\,000 = 0$$
$$-x^2 + 140x - 4\,000 = 0 \quad \text{al multiplicar por } -1$$
$$x^2 - 140x + 4\,000 = 0 \quad \text{se obtiene una ecuación de segundo grado}$$
$$(x - 40)(x - 100) = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación y se obtiene:}$$
$$x - 40 = 0 \text{ o } x - 100 = 0$$
$$x = 40 \text{ o } x = 100$$

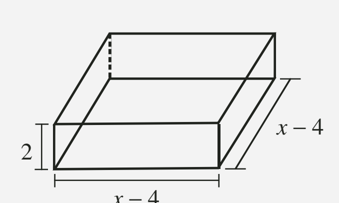
De acuerdo con lo anterior, las dimensiones del rectángulo son 40 y 100 metros.

4 A partir de una pieza cuadrada de hoja de lata, se desea construir una caja con base cuadrada y sin tapa, quitando cuadrados en las esquinas de 2 cm por lado y doblando hacia arriba los lados; si la caja debe tener 98 $cm^3$, ¿cuáles son las dimensiones de la pieza de hoja de lata que deberá usarse?

**Solución**

Se construye una figura con los datos que se proporcionaron.




El volumen de la caja es:

$V$ = (Alto)(Largo)(Ancho)
$V = 2(x - 4)(x - 4) = 2(x - 4)^2 = 2(x^2 - 8x + 16) = 2x^2 - 16x + 32$, entonces
$V = 98 = 2x^2 - 16x + 32$, se obtiene una ecuación de segundo grado.

Se resuelve la ecuación:

$$2x^2 - 16x + 32 = 98$$
$$2x^2 - 16x + 32 - 98 = 0$$
$$2x^2 - 16x - 66 = 0 \quad \text{se divide entre 2}$$
$$x^2 - 8x - 33 = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$(x - 11)(x + 3) = 0$$

Los valores son: $x = 11$ o $x = -3$, la longitud de los lados de la hoja de lata no pueden ser negativos. Finalmente, la longitud del cuadrado es de 11 cm por lado.

5 Un comerciante compró determinado número de pelotas con \$720 y vendió algunas, excepto 18, ganó \$6 en cada una. Sabía que con el dinero de la venta podría haber comprado 3 pelotas más que antes, calcula el precio de cada pelota.

**Solución**

Precio de compra de cada pelota: $x$

Número de pelotas: $\frac{720}{x}$

Precio de venta de cada pelota: $x + 6$

Total de la venta: $\left(\frac{720}{x} - 18\right)(x+6)$

Número de pelotas compradas con el total de la venta: $\frac{720}{x} + 3$

Costo de la compra de 3 pelotas más: $x\left(\frac{720}{x} + 3\right)$

Ecuación:

$$\left(\frac{720}{x} - 18\right)(x+6) = x\left(\frac{720}{x} + 3\right)$$

$$\left(\frac{720 - 18x}{x}\right)(x+6) = x\left(\frac{720 + 3x}{x}\right)$$

$$\frac{(720 - 18x)(x+6)}{x} = \frac{x(720 + 3x)}{x}$$

$$720x + 4\ 320 - 18x^2 - 108x = 720x + 3x^2$$

$$21x^2 + 108x - 4\ 320 = 0 \qquad \text{al dividir entre 3}$$

$$7x^2 + 36x - 1\ 440 = 0$$

Se aplica la fórmula general,

$$x = \frac{-(36) \pm \sqrt{(36)^2 - 4(7)(-1\ 440)}}{2(7)} = \frac{-36 \pm \sqrt{41\ 616}}{14} = \frac{-36 \pm 204}{14}$$

Entonces, las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-36 - 204}{14} = -\frac{240}{14} = -\frac{120}{7} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-36 + 204}{14} = \frac{168}{14} = 12$$

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = -\frac{120}{7}$ *o* $x_2 = 12$, pero el precio de un artículo no puede ser negativo, por tanto, el precio de cada pelota es $12.

## EJERCICIO 126

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra 2 números enteros que sumen 42 y cuyo producto sea 405.
2. Encuentra 2 números naturales que su producto sea 360 y el cociente del mayor entre el menor sea $\frac{5}{2}$.
3. Encuentra 3 números consecutivos impares, cuya suma de sus cuadrados sea 83.
4. Encuentra 3 números enteros consecutivos pares, cuya suma de sus cuadrados sea 596.

5. La suma de un número y su recíproco es $\frac{26}{5}$. Halla los números.
6. La suma de 2 números es 25 y la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{4}$. Encuentra los números.
7. Un agricultor tiene necesidad de cercar 25 000 $m^2$ de su parcela; dicha propiedad es rectangular y colinda con un río, por lo que no necesita cercar ese lado. ¿Qué dimensiones tiene el terreno si el propietario dispone de 450 m de cerca?
8. La base de un triángulo es 3 veces su altura. Su área es de 150 $m^2$, ¿cuáles son las dimensiones de la base y la altura?
9. Encuentra la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, cuya superficie es de 6 $m^2$, perímetro de 12 m e hipotenusa de 5 m.
10. Se desea construir un recipiente, sin tapa, de fondo cuadrado y lados rectangulares, con una altura de 6 m, si el material para el fondo cuesta $800 por metro cuadrado y el de los lados $1 200, ¿cuál es el volumen que se puede obtener con $128 000?
11. Determina las dimensiones de un rectángulo cuya altura es $\frac{1}{3}$ de su base y su área es de 972 $cm^2$.
12. Alejandro tiene 4 años más que Alfredo y el cuadrado de la edad de Alejandro, aumentado en el cuadrado de la edad de Alfredo, equivalen a 80 años. Encuentra las edades de Alejandro y Alfredo.
13. El cuadrado de un número disminuido en 13 equivale al exceso de 50 sobre el doble del número. Determina dicho número.
14. En cierto parque de la Ciudad de México se desea plantar 195 árboles, de tal manera que el número de éstos por fila exceda en 2 al número de filas. Determina la cantidad de filas, así como el número de árboles por fila.
15. Un productor de conservas en almíbar desea envasar su producto en una lata cilíndrica, cuya altura es de 8 centímetros y su volumen de $128\pi$ $cm^3$. Encuentra el radio de la lata.
16. Mario va a construir una caja sin tapa, cuyo volumen debe ser de 312 $cm^3$; utilizará una lámina rectangular en la cual cortará cuadrados de 2 centímetros por lado en las esquinas. Si él sabe que la superficie total de la hoja al quitar los cuadrados es de 256 $cm^2$, ¿cuáles son las dimensiones de dicha hoja?
17. La edad actual de Ricardo son trece medios de la edad de su hijo, el próximo año su edad será igual al cuadrado de la edad de su hijo disminuido en 9 años. Determina la edad actual de Ricardo.
18. Un famoso jugador de béisbol lanza una pelota verticalmente hacia arriba, tan fuerte como le es posible. La altura que alcanza la pelota después de $t$ segundos la determina la ecuación $h = 40t - 8t^2$. ¿Cuánto tiempo le llevará a la pelota regresar al suelo?
19. En $t$ segundos la altura $h$ en pies, sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 240t - 16t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 900 ft sobre el nivel del suelo?
20. Dos llaves llenan un depósito en 6 horas, ¿cuánto tiempo necesitaría cada una, por separado, para llenarlo si una tarda 16 h más que la otra?
21. Una persona gastó $2 000 en regalos, obsequió 30 a sus familiares y amigos, el resto los vendió y ganó $10 por regalo. Una vez vendidos todos los obsequios, se dio cuenta de que podía comprar la misma cantidad inicial de regalos y 5 más. ¿Cuál es el costo de cada presente?
22. Encuentra las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, si su perímetro es de 24 unidades y su área es de 24 unidades cuadradas.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Función cuadrática

La función cuadrática es una función polinomial de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a$, $b$, $c$ y $x \in R$ con $a \neq 0$

### Análisis de una función cuadrática

1. La función cuadrática representa una parábola, la cual puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo, depende del coeficiente del término cuadrático.
2. La función toma su valor máximo o mínimo en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, el cual se llama vértice de la parábola.
3. Si $a > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba y su vértice representa el punto mínimo de la función.
4. Si $a < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa el punto máximo de la función.
5. Si la gráfica interseca al eje $X$ en 2 puntos, éstos se conocen como soluciones o raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; si es tangente, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sólo tiene una raíz cuyo valor es $-\frac{b}{2a}$, en caso de que la función no interseque al eje de las $X$, entonces las raíces no son reales.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

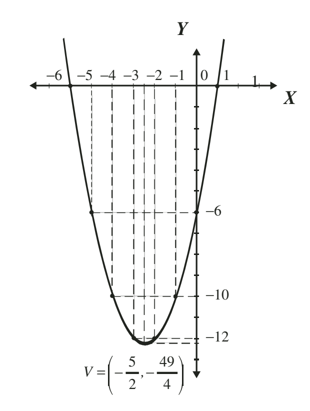
1 Grafica $y = x^2 + 5x - 6$ e indica las raíces.

**Solución**

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para $x$, los cuales se sustituyen en la función.

Tabla de valores

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-6$ | $0$ |
| $-5$ | $-6$ |
| $-4$ | $-10$ |
| $-3$ | $-12$ |
| $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{49}{4}$ |
| $-2$ | $-12$ |
| $-1$ | $-10$ |
| $0$ | $-6$ |
| $1$ | $0$ |




La parábola corta el eje de las $X$ en los valores $x = -6$ y $x = 1$
Por tanto, las raíces son: $x = -6$ o $x = 1$

2 Encuentra las coordenadas del vértice, las raíces y traza la gráfica de la parábola: $y = x^2 - 4x + 4$.

**Solución**

Se identifican los valores de $a$, $b$ y $c$ y se sustituyen en la fórmula,

$$a = 1,\ b = -4,\ c = 4$$

Se observa que el valor de $a$ es mayor que cero, entonces la parábola es cóncava hacia arriba y su vértice representa un punto mínimo.

Para determinar las coordenadas del vértice se utiliza la fórmula

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

(*continúa*)

(*continuación*)

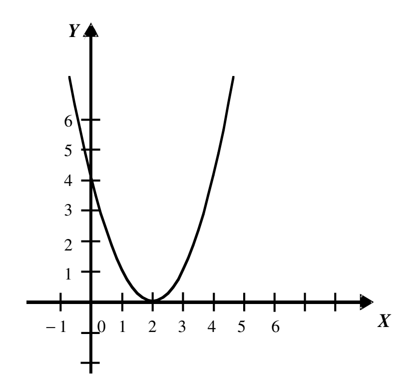
Al sustituir los valores en la fórmula se obtiene:

$$V\left(-\frac{(-4)}{2(1)},\frac{4(1)(4)-(4)^2}{4(1)}\right) = V(2,0)$$

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para $x$, los que se sustituirán en la función.

Tabla de valores

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| − 1 | 9 |
| 0 | 4 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |
| 5 | 9 |




La parábola interseca en un solo punto del eje de las $X$, es decir, la parábola es tangente al eje $X$.
Por tanto, la raíz de la ecuación es $x = 2$

3 Determina las coordenadas del vértice, las raíces y traza la gráfica de la parábola: $y = -x^2 + 2x - 4$

**Solución**

Se identifican los valores de $a$, $b$ y $c$ y se sustituyen en la fórmula,

$$a = -1,\ b = 2,\ c = -4$$

Se observa que el valor de $a$ es menor que cero, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa un punto máximo.

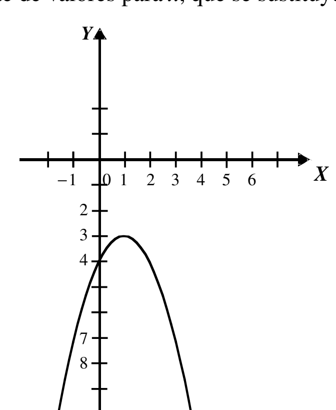
Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right) = V\left(-\frac{(2)}{2(-1)},\frac{4(-1)(-4)-(2)^2}{4(-1)}\right) = V(1,\ -3)$$

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para $x$, que se sustituyen en la función.

Tabla de valores

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| − 2 | − 12 |
| − 1 | − 7 |
| 0 | − 4 |
| 1 | − 3 |
| 2 | − 4 |
| 3 | − 7 |
| 4 | − 12 |




La parábola no interseca al eje $X$.
Por consiguiente, las raíces no son reales

# EJERCICIO 127

Encuentra las coordenadas del vértice y determina las raíces de las siguientes funciones:

1. $y = 2x^2 - 8x + 6$
2. $y = -2x^2 + 2x + 12$
3. $y = x^2 - x - 20$
4. $y = x^2 + 4x - 3$
5. $y = x^2 + 2x + 5$
6. $y = x^2 - 2x + 1$
7. $y = x^2 - 4x + 13$
8. $y = 10x - 25 - x^2$
9. $y = -9 - x^2$
10. $y = 2x^2 - 6x$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Para encontrar la solución óptima (máximo o mínimo) de un problema, es necesario plantear una función cuadrática; la abscisa del vértice representa el valor que optimiza a la función y la ordenada el valor óptimo.

1 Encuentra 2 números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

**Solución**

Primer número = $x$
Segundo número = $20 - x$
Producto = $(x)(20 - x)$
Se obtiene la función $P(x) = (x)(20 - x) = 20x - x^2$

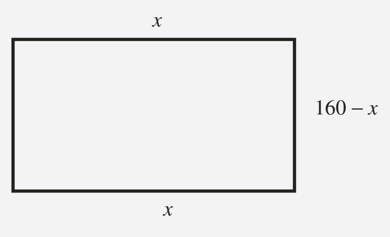
La gráfica de la función representa una parábola cóncava hacia abajo, entonces el vértice será el punto máximo; esto significa que el valor de $x$ en el vértice dará un valor máximo.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = -\frac{20}{-2} = 10$$

Si $x$ es 10, entonces el valor de $20 - x$, es 10
Por tanto, los valores son 10 y 10

2 Un granjero desea cercar un terreno rectangular y dispone de 320 m de alambre, ¿qué dimensiones debe tener el terreno para que su área sea máxima?

**Solución**




Se determinan las dimensiones en términos de una variable,
2 (base) + 2 (altura) = perímetro
$2x + 2$ (altura) = 320
$x +$ (altura) = 160
altura = $160 - x$

El área es el producto de la base por la altura, se hace el producto y con esto se obtiene la función $A(x)$.

$$A(x) = x(160 - x)$$
$$A(x) = 160x - x^2$$

La ecuación representa una parábola cóncava hacia abajo, por lo que el vértice será el punto máximo; esto significa que el valor de $x$ en el vértice dará un área máxima.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{160}{2(-1)} = -\frac{160}{-2} = 80$$

Se deduce que las dimensiones del terreno son 80 metros de largo por 80 de ancho.

3 Encuentra dos números enteros cuya diferencia es 12 y cuyo producto sea mínimo.

**Solución**

Primer número: $x$
Segundo número: $x + 12$
Producto = $(x)\,(x + 12)$
Se obtiene la función $P(x) = (x)\,(x + 12) = x^2 + 12x$

La función representa una parábola cóncava hacia arriba, entonces el vértice será el punto mínimo; esto significa que el valor de $x$ en el vértice dará un valor mínimo.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(12)}{2(1)} = -\frac{12}{2} = -6$$

Si $x$ es $-6$, entonces el valor de $12 + x$, es 6

Por tanto, los valores son 6 y $-6$

## EJERCICIO 128

Plantea funciones cuadráticas y resuelve los siguientes problemas.

1. Encuentra 2 números cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.
2. Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea 20 y su producto sea mínimo.
3. La suma de 2 números es 40, ¿cuáles son los números si la suma de sus cuadrados es un valor mínimo?
4. Se quiere cercar un terreno rectangular con 220 metros de alambre. Encuentra las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.
5. Se arroja una pelota con una velocidad de 96 pies por segundo, la altura $s$ que alcanza en un tiempo $t$ lo determina la siguiente ecuación: $s = 96t - 32t^2$. Calcula la altura máxima que alcanza.
6. De una hoja rectangular de 76 cm de perímetro se cortan cuadrados de 2 cm por lado para construir una caja sin tapa. Determina las dimensiones de la hoja para obtener el volumen máximo.
7. Una editorial vende a los expendios de revistas una publicación científica a $60 el ejemplar, y cada 50 ejemplares que excedan los 500, el precio de venta disminuye $2, ¿cuántos ejemplares extras debe adquirir un expendio para que la editorial tenga un ingreso máximo?
8. Una juguetería vende $x$ pelotas a $p$ pesos con $p = 150 - 4x$, el costo de producción de $x$ pelotas es $C = 70x - 2x^2$. Determina el número de pelotas que debe vender la juguetería para obtener una ganancia máxima.
9. Un fabricante de lápices distribuye a las papelerías 30 cajas con 100 lápices cada una a un precio de $0.80 por lápiz, y por cada caja que exceda las 30 el precio de venta disminuye en 2 centavos por lápiz. ¿Cuántas cajas debe vender el fabricante a las papelerías para obtener ingresos máximos?
10. Un trozo de alambre de 100 cm se parte en dos trozos, un de ellos se dobla para formar un triángulo equilátero, y el trozo restante se dobla para formar un cuadrado, ¿cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y cuadrado sea mínima?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Relación entre las raíces de una ecuación de segundo grado

Entre los coeficientes y las raíces de una ecuación de segundo grado existen dos relaciones, la suma y el producto.

Sean las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*Suma de raíces*

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Entonces, la suma de las raíces es:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

*Producto de raíces*

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{(2a)^2}$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Por tanto, el producto de las raíces es:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Halla el valor de la suma de las raíces de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

**Solución**

Se determinan los valores de los coeficientes de la ecuación y se sustituyen en la fórmula.

$$a = 1,\ b = 1,\ c = -6$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{1} = -1$$

Por consiguiente, $x_1 + x_2 = -1$

Comprobación

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$

$x_1 + x_2 = -3 + 2 = -1$

2 Encuentra el valor del producto de las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

**Solución**

Se determinan los valores de los coeficientes de la ecuación y se sustituyen en la fórmula.

$$a = 1,\ b = -6,\ c = 9$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{9}{1} = 9$$

Por tanto, $x_1 \cdot x_2 = 9$

Comprobación

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$

$(x_1)(x_2) = (3)(3) = 9$

# EJERCICIO 129

Determina el valor de la suma y el producto de las raíces mediante la relación entre ellas.

1. $4x^2 - 9 = 0$
2. $x^2 - 25 = 0$
3. $x^2 - x = 0$
4. $3x^2 + 8x = 0$
5. $x^2 - 5x + 6 = 0$
6. $x^2 + 4x + 3 = 0$
7. $-x^2 + x + 12 = 0$
8. $2x^2 + x - 1 = 0$
9. $9x^2 + 27x + 14= 0$
10. $x^2 + 7ax + 12a^2 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Deducción de una ecuación de segundo grado dadas las raíces

Sean $x_1$, $x_2$, las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x_1 + x_2 = -b \text{ y } x_1 \cdot x_2 = c$$

Por tanto, la ecuación es:

$$x^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

### EJEMPLOS

**1** Determina la ecuación de segundo grado, si las raíces son: – 3, 5.

**Solución**

Se determina $x_1$, $x_2$, y se sustituyen en la fórmula.

$$x_1 = -3 \text{ o } x_2 = 5$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - (-3+5)x + (-3)(5) = 0 \quad \text{se simplifica}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación es: $x^2 - 2x - 15 = 0$

**2** Encuentra la ecuación de segundo grado, si las raíces son: $1 - 4i$, $1 + 4i$.

**Solución**

Se determina $x_1$, $x_2$, y se sustituyen en la fórmula.

$$x_1 = 1 - 4i \text{ o } x_2 = 1 + 4i$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - [(1-4i)+(1+4i)]x + [(1-4i)(1+4i)] = 0$$

Se simplifican las operaciones $\quad x^2 - 2x + 17 = 0$

Finalmente, la ecuación es: $x^2 - 2x + 17 = 0$

**3** Determina la ecuación de segundo grado, si sus raíces son: $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$.

**Solución**

Se sustituyen en la fórmula $x_1 = \frac{1}{4}$ , $x_2 = -\frac{2}{5}$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$
$$x^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = 0$$
$$x^2 + \frac{3}{20}x - \frac{2}{20} = 0 \quad \text{se multiplica por 20}$$
$$20x^2 + 3x - 2 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación es:

$$20x^2 + 3x - 2 = 0$$

## EJERCICIO **130**

Determina la ecuación de segundo grado, que tiene como raíces los valores dados.

1. $3, -3$
2. $-7, 0$
3. $4i, -4i$
4. $4, 1$
5. $-5, -3$
6. $-2 + 5i, -2 - 5i$
7. $\frac{1}{2}, 2$
8. $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{5}$
9. $b, -3b$
10. $2a, 5a$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuaciones con radicales

En este tipo de ecuaciones se recomienda despejar de la expresión un radical, que se eleva al cuadrado la igualdad para que se genere una ecuación de primero o segundo grado; en caso de que existan dos o más radicales, se repite lo anterior.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $\sqrt{x-5} - 4 = 0$.

**Solución**

Se despeja el radical y se elevan ambos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{x-5} = 4 \rightarrow \left(\sqrt{x-5}\right)^2 = (4)^2 \rightarrow x - 5 = 16 \rightarrow x = 16 + 5$$
$$x = 21$$

2 Resuelve $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = x + 1$.

**Solución**

Se elevan ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x^2 - 4x + 1}\right)^2 = (x+1)^2$$

*(continúa)*

(*continuación*)

Se realizan las operaciones y se simplifican los términos

$$3x^2-4x+1=x^2+2x+1$$
$$3x^2-4x-x^2-2x-1+1=0$$
$$2x^2-6x=0$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado y se factoriza para resolver:

$$2x(x-3)=0$$
$$2x=0 \text{ o } x-3=0$$
$$x=0 \text{ o } x=3$$

Por tanto, las soluciones son: $x=0$ o $x=3$

3 Resuelve la siguiente ecuación: $\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4$.

**Solución**

Se despeja uno de los radicales,

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4 \;\rightarrow\; \sqrt{x+3}=4-\sqrt{5x-1}$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(4-\sqrt{5x-1}\right)^2 \;\rightarrow x+3=16-8\sqrt{5x-1}+\left(\sqrt{5x-1}\right)^2$$
$$x+3=16-8\sqrt{5x-1}\;+5x-1$$
$$x+3-5x+1-16=-8\sqrt{5x-1}$$
$$-4x-12=-8\sqrt{5x-1}$$

se divide por $-4$, $$x+3=2\sqrt{5x-1}$$

Para eliminar la raíz, de nuevo se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$(x+3)^2=\left(2\sqrt{5x-1}\right)^2 \;\rightarrow x^2+6x+9=4(5x-1)$$
$$x^2+6x+9=20x-4$$
$$x^2-14x+13=0$$
$$(x-13)(x-1)=0$$
$$x-13=0 \quad \text{o} \quad x-1=0$$
$$x=13 \quad \text{o} \quad x=1$$

Se sustituyen los valores que se obtienen en la ecuación dada; si la igualdad no se cumple o se obtienen radicandos negativos, entonces la solución no se admite.

Comprobación

Si $x=13$

$$\sqrt{13+3}+\sqrt{5(13)-1}=4$$
$$\sqrt{16}+\sqrt{64}=4$$
$$4+8=4$$
$$12\neq 4$$

Si $x=1$

$$\sqrt{1+3}+\sqrt{5(1)-1}=4$$
$$\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$$
$$2+2=4$$
$$4=4$$

Por consiguiente, $x=13$ no es solución, finalmente, $x=1$ sí es solución.

# EJERCICIO 131

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x}-5=2$
2. $\sqrt{1-x}=3$
3. $\sqrt{2x-4}-3=0$
4. $\sqrt{9-x}=x-3$
5. $7=x+\sqrt{x-1}$
6. $\sqrt{2x+5}-x=1$
7. $2x=5+\sqrt{4-x}$
8. $\sqrt{x+2}+x=10$
9. $\sqrt{4x+13}+2x=1$
10. $\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-1}=3$
11. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$
12. $\sqrt{x+3}-\sqrt{8x+1}=-1$
13. $2+4\sqrt{x}=\sqrt{16x+5}$
14. $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+3}=1$
15. $\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}-1$
16. $\sqrt{2-x}+\sqrt{11+x}=5$
17. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=\sqrt{2}$
18. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=3+\sqrt{10}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Sistema de ecuaciones cuadráticas

Geométricamente este tipo de sistemas de ecuaciones se generan cuando se intersecan una recta y una curva con ecuación cuadrática (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) o dos ecuaciones cuadráticas; la solución que satisface ambas ecuaciones son los puntos de intersección.

### Procedimiento para la resolución de un sistema de ecuaciones cuadrático-lineal con dos incógnitas

1. De la ecuación lineal se despeja una incógnita.
2. El valor de la incógnita que se despejó se sustituye en la misma incógnita de la ecuación cuadrática, y se obtiene una ecuación cuadrática con una sola incógnita.
3. Se obtienen las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática, posteriormente éstos se evalúan en el despeje, obteniendo los puntos de intersección.

**Ejemplo**

Resuelve el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

**Solución**

Se despeja de la ecuación lineal $x+y-2=0$ una de las incógnitas,

$$x=2-y$$

se sustituye en la ecuación cuadrática la incógnita despejada y se resuelve la ecuación:

$$x^2+y^2=10 \quad \rightarrow (2-y)^2+y^2=10$$
$$4-4y+y^2+y^2-10=0$$
$$2y^2-4y-6=0$$
$$y^2-2y-3=0$$
$$(y-3)(y+1)=0$$
$$y=3 \quad \text{o} \quad y=-1$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se sustituyen los valores de $y = 3$, $y = -1$ en $x = 2 - y$, se obtiene:

$$\text{Si } y = 3,\ x = 2 - 3 = -1,\ \text{si } y = -1,\ x = 2 - (-1) = 3$$

Por tanto, la solución del sistema son los puntos:

$$(-1, 3) \text{ y } (3, -1)$$

## Procedimiento para la resolución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimina una de las dos incógnitas.
2. Se resuelve la ecuación de segundo grado que se obtuvo en el punto anterior.
3. Para concluir, las raíces obtenidas se evalúan en alguna de las dos ecuaciones originales, para obtener los puntos de intersección.

### Ejemplo

Resuelve el $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

#### Solución

Al aplicar el método de reducción, se multiplica por 3 la segunda ecuación,

$$\begin{array}{r} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 9x^2 - 3y^2 = \ \ 9 \\ \hline 10x^2 \qquad = 40 \end{array}$$

al resolver la ecuación, se determina que,

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Estos resultados se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones dadas para encontrar el valor de $y$.

$$\text{Si } x = 2,\quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\text{Si } x = -2,\quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(-2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

Finalmente, las soluciones son:

$$(2, 3), (2, -3), (-2, 3) \text{ y } (-2, -3)$$

## Procedimiento para la resolución de un sistema cuadrático mixto

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimine el término independiente.
2. Del punto anterior se obtiene una ecuación cuadrática con dos incógnitas igualada a cero, la cual se factoriza.
3. Cada uno de los factores se igualan a cero y se despeja una de las dos incógnitas, quedando una en función de la otra.
4. Los despejes anteriores se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales, lo que genera una ecuación de segundo grado con una incógnita.
5. Se determinan las raíces de la ecuación de segundo grado y se evalúan en su respectiva igualdad obtenida en el paso 3, finalmente se obtienen los puntos de intersección.

**Ejemplo**

Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2a^2 - 3ab + b^2 = 15 \\ a^2 - 2ab + b^2 = 9 \end{cases}$$

**Solución**

Se elimina el término independiente,

$$\begin{array}{r} 3\left(2a^2 - 3ab + b^2 = 15\right) \\ -5\left(a^2 - 2ab + b^2 = 9\right) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 6a^2 - 9ab + 3b^2 = 45 \\ -5a^2 + 10ab - 5b^2 = -45 \\ \hline a^2 + ab - 2b^2 = 0 \end{array}$$

La ecuación resultante se resuelve para $a$:

$$(a + 2b)(a - b) = 0$$

$$a = -2b \quad \text{o} \quad a = b$$

Se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve para $b$, y se determina que,

$$\text{si } a = -2b, \text{ entonces } (-2b)^2 - 2(-2b)(b) + b^2 = 9$$

$$9b^2 = 9$$

$$b = \pm 1$$

$$\text{si } a = b, \text{ entonces } (b)^2 - 2(b)(b) + b^2 = 9$$

$$0 \neq 9$$

Para $a = b$, la ecuación es inconsistente.
Se calculan los valores de $a$ sustituyendo $b = 1$ y $b = -1$, en la relación,

$$a = -2b$$

Por consiguiente, las soluciones en el orden $(a, b)$ son:

$$(-2, 1), (2, -1)$$

## EJERCICIO 132

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a + b = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x - y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -w^2 + wz - z^2 + 7 = 0 \\ w = 2z - 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} b^2 + 3a^2 = 57 \\ -a^2 - 3b^2 = -43 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x^2 - 2y^2 = 1 \\ 9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} a^2 - b^2 = -28 \\ a^2 + b^2 = 36 \end{cases}$

10. $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 49 \\ a^2 - ab - 2b^2 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + \frac{7}{2}xy - \frac{1}{2}y^2 = 42 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 32 \end{cases}$

12. $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 27 \\ -b^2 - ab = -6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} w^2 + 2wz + z^2 = 4 \\ w^2 + 3wz - 4 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} a^2 - 2ab - b^2 = -7 \\ a^2 - 3ab + b^2 = -5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3w^2 + 2wz + 2z^2 = 18 \\ 6w^2 + 3wz + 2z^2 = 24 \end{cases}$

16. $\begin{cases} a^2 - ab = -\frac{1}{4}b^2 \\ 3a^2 - b^2 + 9 = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6m^2 - 6mn + 3n^2 - 15 = 0 \\ m^2 + \frac{7}{2}n^2 = \frac{60}{8} \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2p^2 - 3pq + q^2 = 15 \\ \frac{1}{3}p^2 - \frac{2}{3}pq + \frac{1}{3}q^2 = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 10r^2 - 15rs - 5s^2 - 10 = 0 \\ -r^2 + \frac{5}{3}rs - \frac{1}{3}s^2 = -1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} ab + 6a^2 = 10 \\ 8a^2 - 6ab - 4b^2 + 80 = 0 \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 13

## Desigualdades

### Reseña HISTÓRICA

*Thomas Harriot (1560-1621)*

Ingresó a la Universidad de Oxford en el año 1577, cuando tenía 17 años de edad.

Fue un excelente astrónomo y el primer inglés que tuvo un telescopio, además, uno de los primeros que observó y habló de las manchas solares con lo que rompió en definitiva con la antigua concepción de la perfección solar.

A lo largo de su vida escribió miles de páginas detallando sus estudios y observaciones en campos tan diversos como la óptica, la química, la balística, la astronomía y las matemáticas. Diez años después de su muerte editaron su tratado sobre ecuaciones, en el que se pone de manifiesto su destreza en la resolución de algunas ecuaciones de tercer y cuarto grado.

En este tratado de álgebra se dan algunas novedades en la notación. Una de ellas es el empleo de los signos **menor que** y **mayor que** empleados en la actualidad. Muchos matemáticos, por tanto, le han atribuido la paternidad de los signos **<** y **>**.

Thomas Harriot (1560-1621)

## Definición

Es la relación de orden que existe entre dos cantidades y se representa con los símbolos menor que (<) y mayor que (>).

Dada la expresión $3x - 2 < 8$, donde $x$ es una variable, su solución es encontrar el conjunto de valores que la satisfagan, si esto ocurre recibe el nombre de conjunto solución de la desigualdad.

### Ejemplo

Verifica cuál de los siguientes elementos del conjunto $\{-3, 2, 4, 5\}$, son soluciones de la desigualdad $3x - 2 < 8$.

#### Solución

Se sustituye cada valor en la desigualdad:

Para $x = -3$

$3(-3) - 2 < 8$

$-9 - 2 < 8$

$-11 < 8$ Desigualdad verdadera

Para $x = 2$

$3(2) - 2 < 8$

$6 - 2 < 8$

$4 < 8$ Desigualdad verdadera

Para $x = 4$

$3(4) - 2 < 8$

$12 - 2 < 8$

$10 < 8$ Desigualdad falsa

Para $x = 5$

$3(5) - 2 < 8$

$15 - 2 < 8$

$13 < 8$ Desigualdad falsa

En este ejemplo los valores que hicieron verdadera la desigualdad son soluciones de la expresión.

## Propiedades de las desigualdades

Sean $a, b, c \in R$.

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

*Tabla de desigualdades*

| Desigualdad | Intervalo | Gráfica 1 | Gráfica 2 |
|---|---|---|---|
| $x > a$ | $(a, \infty)$ | a ∞ | a ∞ |
| $x < a$ | $(-\infty, a)$ | −∞ a | −∞ a |
| $x \geq a$ | $[a, \infty)$ | a ∞ | a ∞ |
| $x \leq a$ | $(-\infty, a]$ | −∞ a | −∞ a |
| $a < x < b$ | $(a, b)$ | a b | a b |
| $a \leq x \leq b$ | $[a, b]$ | a b | a b |
| $a < x \leq b$ | $(a, b]$ | a b | a b |
| $a \leq x < b$ | $[a, b)$ | a b | a b |
| $-\infty < x < \infty$ | $(-\infty, \infty)$ | −∞ 0 ∞ | |

Nota: $(a, b)$ es un intervalo abierto, $[a, b]$ es cerrado y $(a, b]$ o $[a, b)$ semiabierto o semicerrado.

## Desigualdad lineal con una variable

Para determinar el conjunto solución de una desigualdad, se procede de la misma manera como en una ecuación lineal: se despeja la variable y se toman en consideración las propiedades de las desigualdades.

### EJEMPLOS

1 Resuelve la desigualdad $6x - 10 > 3x + 5$.

**Solución**

Al despejar $x$ se agrupan todos los términos que contengan la variable en uno de sus miembros, y los términos independientes en el otro, finalmente, se simplifica.

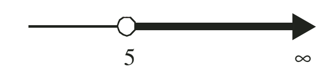
$$6x - 10 > 3x + 5 \quad \rightarrow \quad 6x - 3x > 5 + 10$$

$$3x > 15 \quad \text{se divide por 3}$$

$$x > \frac{15}{3}$$

Por la propiedad 3, el sentido de la desigualdad no cambia $\quad x > 5$

La desigualdad $x > 5$, tiene la forma $x > a$ de la tabla, por tanto, el intervalo que representa el conjunto solución es $(5, \infty)$, y su representación gráfica es:



2 Determina el intervalo y grafica el conjunto solución de la desigualdad: $2x-6+3x \geq 8x+21$.

**Solución**

$$2x-6+3x \geq 8x+21 \quad \rightarrow \quad 2x+3x-8x \geq 21+6$$
$$-3x \geq 27$$

Por la propiedad 4, el sentido del signo de la desigualdad cambia

$$x \leq \frac{27}{-3}$$
$$x \leq -9$$

La desigualdad $x \leq -9$, tiene la forma $x \leq a$ de la tabla, por tanto, el intervalo que representa el conjunto solución es $(-\infty, -9]$ y su representación gráfica es:

3 Determina el conjunto solución de $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$.

**Solución**

Se multiplica la desigualdad por 5, para eliminar el denominador.

$$3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7 \rightarrow (3)(5) \leq 2x-3 < (7)(5) \rightarrow 15 \leq 2x-3 < 35 \rightarrow 15+3 \leq 2x < 35+3$$

Se suma 3 a cada extremo de la desigualdad $\quad 18 \leq 2x < 38$

Se divide entre 2 todos los miembros $\quad \frac{18}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{38}{2}$

Por la propiedad 2, el signo de la desigualdad no cambia $\quad 9 \leq x < 19$

La desigualdad tiene la forma $a \leq x < b$, por tanto, el intervalo solución es $[9, 19)$ y la gráfica es:

4 ¿Cuál es el intervalo solución para la siguiente desigualdad $4 > \frac{2-3x}{7} > -2$?

**Solución:**

$$4 > \frac{2-3x}{7} > -2 \rightarrow (4)(7) > 2-3x > (-2)(7) \rightarrow 28 > 2-3x > -14$$

Se resta 2 a cada miembro $\quad 28-2 > -3x > -14-2$

$$26 > -3x > -16$$

Se divide entre $-3$ y se cambia el sentido de la desigualdad $\quad \frac{26}{-3} < x < \frac{-16}{-3}$

$$-\frac{26}{3} < x < \frac{16}{3}$$

La desigualdad tiene la forma $a < x < b$, por consiguiente, el intervalo solución es:

$$\left(-\frac{26}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

5 Determina el conjunto solución de $(5x+2)^2 - 2x > (5x-4)(5x+4)$.

**Solución**

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$(5x+2)^2 - 2x > (5x-4)(5x+4) \rightarrow 25x^2 + 20x + 4 - 2x > 25x^2 - 16$$

Se agrupan los términos y se simplifican $\quad 25x^2 + 20x - 2x - 25x^2 > -16 - 4$

Se divide entre 18 y se simplifica $\quad 18x > -20$

Por la propiedad 3, el signo no cambia $\quad x > \dfrac{-20}{18}$

Por la propiedad 3, el signo no cambia $\quad x > -\dfrac{10}{9}$

Finalmente, resulta que el conjunto solución es el intervalo $\left(-\dfrac{10}{9}, \infty\right)$

## EJERCICIO 133

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $12x - 4 > 7x + 11$
2. $3x + 9 > 7x - 3$
3. $2x - 5 < x - 9$
4. $4x - 2 \geq 12x + 6$
5. $2x - 1 > 27 + 6x$
6. $x - 9 \leq 8x - 1$
7. $2x - 4 + 6x < 10x - 7$
8. $3x + 7 - 2x > 4x - 3 + 2x$
9. $0.6x + 3.4 \leq 8.4 + 0.1x$
10. $4(x-3) - 8 \leq 5 - x$
11. $16x + (5 - x) > 30$
12. $(8x+1)(x-7) \geq (2x-3)(4x+5)$
13. $x(x+12) > (x-4)^2$
14. $(4x+1)(2x-2) > 8x(x+5)$
15. $\dfrac{5x-1}{3} > 3$
16. $-5 - \dfrac{x+4}{5} > 11 - 3x$
17. $\dfrac{y-1}{2} - 2 \leq \dfrac{3y-2}{5}$
18. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}x \leq \dfrac{5}{6}x - \dfrac{5}{3}$
19. $\dfrac{1}{2}x - 4 \leq -9 - \dfrac{1}{3}x$
20. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{8}{7} \leq 3x + \dfrac{2}{3}$
21. $\dfrac{5}{6}x - \dfrac{2}{5} > \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{10}$
22. $\dfrac{5-x}{2} - \dfrac{x-17}{4} \geq \dfrac{x}{3} - \dfrac{7x-3}{12}$
23. $-7 < 4x + 1 < 13$
24. $-6 < 2x - 3 < 4$
25. $-8 \leq 3x + 1 \leq -2$
26. $-10 \leq x - 1 < -2$
27. $-11 < 3x - 2 < 7$
28. $-15 \leq x + 8 < -2$
29. $-5 < 3x + 1 < 13$
30. $8 - x \leq 5x + 32 < x + 36$
31. $-100 < 0.1x < 10$
32. $x^2 + 2 \leq x^2 + 5x \leq x^2 + 3$
33. $-1 < \dfrac{5-x}{3} \leq 7$
34. $-6 < \dfrac{2x-3}{4} < 2$
35. $-3 \leq \dfrac{4-2x}{5} < 1$
36. $-5 \leq \dfrac{2-3x}{6} \leq 2$
37. $2 < \dfrac{4-x}{3} < 6$
38. $0 \leq 6 - \dfrac{3}{2}x \leq 9$
39. $4 \leq x - \dfrac{1}{2} \leq 9$
40. $\dfrac{1}{3} > \dfrac{x-1}{5} > \dfrac{1}{9}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Desigualdad cuadrática con una variable

### Método por casos

Para encontrar el conjunto solución, se factoriza la expresión cuadrática, la expresión que se obtiene se divide en casos, a los que se hace un análisis de signos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo**

Determina el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + x - 6 < 0$.

**Solución**

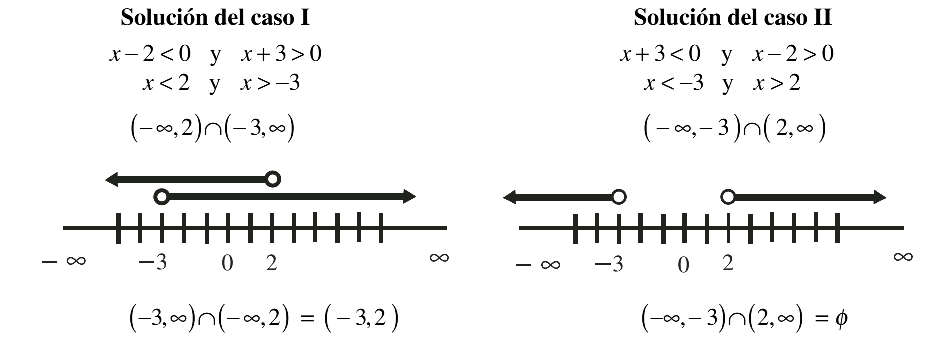
Se factoriza la desigualdad y se analizan sus factores:

$$(x+3)(x-2)<0$$

El producto de los binomios es negativo, entonces existen 2 casos:

| **Caso I** | **Caso II** |
|---|---|
| $x-2<0$ y $x+3>0$ | $x+3<0$ y $x-2>0$ |

El conjunto solución de cada caso resulta de la intersección de los intervalos que se obtienen al resolver las desigualdades que dan origen a cada caso.




La unión de los intervalos es el conjunto solución de la desigualdad.

$$(-3,2)\cup\phi=(-3,2)$$

Para concluir, el conjunto solución es el intervalo: $(-3,2)$

### Método por intervalos

Se factoriza la expresión cuadrática, después se buscan valores que hagan cero a cada factor, entonces los valores se indican en la recta numérica y se forman los intervalos a analizar.

**Ejemplo**

Resuelve la desigualdad $x^2 - 5x - 6 > 0$.

**Solución**

Se factoriza la expresión cuadrática.

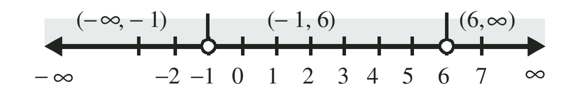
$$(x-6)(x+1)>0$$

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo.

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$x-6=0 \quad \text{y} \quad x+1=0$$
$$x=6 \qquad\quad x=-1$$

Los valores son 6 y – 1, se localizan en la recta numérica y se forman los intervalos.




De cada intervalo se toma un valor cualquiera, el cual se sustituye en los factores para determinar los signos de éstos. Posteriormente, se multiplican los signos para tomar como solución el intervalo o los intervalos que cumplen con la desigualdad dada.

*Para el intervalo* $(-\infty, -1)$

Se toma el valor de $x = -4$ y se sustituye en cada factor:

$$(-4-6)(-4+1) = (-10)(-3) = 30$$

El producto es positivo $(-)(-) = +$

*Para el intervalo* $(-1, 6)$

Se toma el valor de $x = 0$ y se sustituye en los factores:

$$(0-6)(0+1) = (-6)(1) = -6$$

El producto es negativo $(-)(+) = -$

*Para el intervalo* $(6, \infty)$

Se toma el valor de $x = 7$ y se sustituye en cada factor:

$$(7-6)(7+1) = (1)(8) = 8$$

El producto es positivo $(+)(+) = +$

El intervalo solución es la unión de los intervalos donde el producto es positivo, es decir,

$$(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$$

Otra forma de resolver una desigualdad cuadrática mediante intervalos, es construir una tabla que indique los signos resultantes de cada factor y el signo resulta del producto de dichos factores.

## Ejemplo

Resuelve la desigualdad $x^2 - 25 \geq 0$.

### Solución

Se factoriza la expresión cuadrática.

$$x^2 - 25 \geq 0$$
$$(x+5)(x-5) \geq 0$$

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$x+5=0 \qquad\qquad x-5=0$$
$$x=-5 \qquad\qquad x=5$$

Los valores que hacen cero al producto son $x = 5$ y $x = -5$, entonces los intervalos que se forman son:

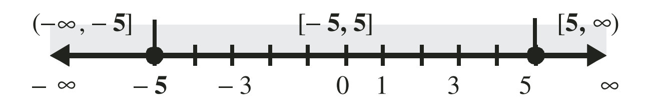



*Tabla de signos*

| Intervalo | (− ∞, − 5] para x = − 6 | [− 5, 5] para x = 0 | [5, ∞) para x = 6 |
|---|---|---|---|
| Signo de $x - 5$ | $-6 - 5 = -11$ | $0 - 5 = -5$ | $6 - 5 = +1$ |
| Signo de $x + 5$ | $-6 + 5 = -1$ | $0 + 5 = +5$ | $6 + 5 = +11$ |
| Signo del producto $(x - 5)(x + 5)$ | $(-)(-) = +$ | $(-)(+) = -$ | $(+)(+) = +$ |

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo o cero.
Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

## Ejemplo

Resuelve la siguiente desigualdad: $6x^2 < 7x + 3$.

### Solución

Se acomodan los términos en uno de los miembros y se factoriza la expresión cuadrática.

$$6x^2 < 7x + 3 \rightarrow 6x^2 - 7x - 3 < 0$$

$$(2x - 3)(3x + 1) < 0$$

$$2x - 3 = 0 \qquad\qquad 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = -\frac{1}{3}$$

Entonces los intervalos que se forman son:

$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

$-\infty$ $-2$ $-1$ $-\frac{1}{3}$ $1$ $\frac{3}{2}$ $2$ $\infty$

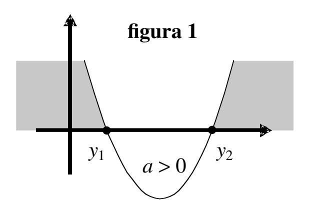
*Tabla de signos*

| Intervalo | $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ Para $x = -1$ | $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ Para $x = 1$ | $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ Para $x = 2$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $2x - 3$ | – | – | + |
| Signo de $3x + 1$ | – | + | + |
| Signo del producto $(2x - 3)(3x + 1)$ | $(-)(-) = +$ | $(-)(+) = -$ | $(+)(+) = +$ |

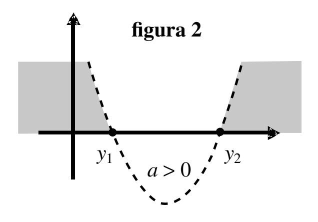
El producto es menor que cero, entonces el intervalo solución es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

## Método gráfico

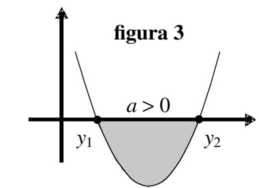
En las siguientes gráficas la parte sombreada representa al conjunto solución de las diferentes desigualdades cuadráticas, la línea continua representa un intervalo cerrado y la línea discontinua o punteada indica que el intervalo solución es abierto, éste se determina al encontrar las raíces de la ecuación de segundo grado.



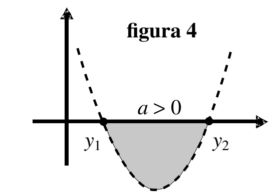

$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$



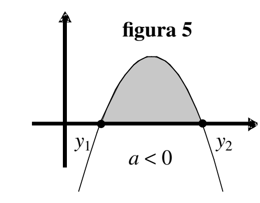

$ax^2 + bx + c > 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$



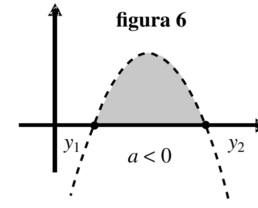

$ax^2 + bx + c \leq 0 \;\rightarrow\; [x_1, x_2]$



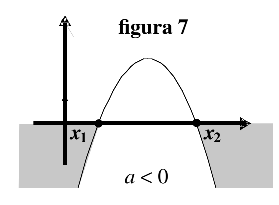

$ax^2 + bx + c < 0 \;\rightarrow\; (x_1, x_2)$



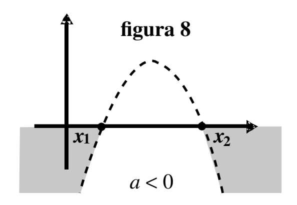

$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\rightarrow\; [x_1, x_2]$




$ax^2 + bx + c > 0 \;\rightarrow\; (x_1, x_2)$




$ax^2 + bx + c \leq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$




$ax^2 + bx + c < 0 \;\rightarrow\; (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

Los valores de $x_1$ y $x_2$ son las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $x_1 < x_2$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina por método grafico el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + 2x - 8 \geq 0$.

**Solución**

Se determinan las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$, por cualquier método, por ejemplo factorización.

$$(x+4)(x-2) = 0$$

*(continúa)*

(*continuación*)

Después, cada factor se iguala a cero y se obtienen las raíces:

$$x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \text{ y } x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Por tanto, las raíces son: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, ya que $x_1 < x_2$

La desigualdad tiene la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ de la figura 1, con $a$ positivo; la fórmula que representa el conjunto solución es: $(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$

Finalmente, el conjunto solución es: $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$

2 Resuelve por método grafico la desigualdad $-3x^2 > 2x - 1$.

**Solución**

Se acomodan los términos, $-3x^2 - 2x + 1 > 0$, se determinan las raíces de la ecuación $-3x^2 - 2x + 1 = 0$, las cuales son: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

la desigualdad tiene la forma: $ax^2 + bx + c > 0$

De la figura 6 con $a$ negativo, entonces el intervalo es: $(x_1, x_2)$, con $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{1}{3}$

Por tanto, el intervalo de solución es:

$$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

## EJERCICIO **134**

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades por cualquier método.

1. $-x^2 + 9 > 0$
2. $16 - x^2 \geq 0$
3. $25 - x^2 \leq 0$
4. $x^2 - 36 > 0$
5. $x - 3x^2 \geq 0$
6. $-x^2 + 5x < 0$
7. $-2x^2 + 8x < 0$
8. $x^2 - x - 20 > 0$
9. $2x^2 - 5x - 3 < 0$
10. $6x^2 - 7x - 3 \leq 0$
11. $x^2 + 3x + 6 > -2x + 2$
12. $(2x + 5)(2x - 3) \geq 3x - 12$
13. $(3x - 2)(x + 5) < 14x - 8$
14. $(x - 3)(2x + 1) \geq 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Desigualdad racional

En este tipo de desigualdades se analiza el signo del numerador y del denominador, para obtener el signo del cociente, según sea la desigualdad dada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la desigualdad $\frac{2}{3x-6}<0$.

**Solución**

En el primer miembro el numerador es positivo, entonces para que la división sea negativa, como lo indica la desigualdad, es necesario que el denominador sea negativo, es decir:

$$3x-6<0 \rightarrow x<2$$

Por tanto, el intervalo solución es $(-\infty, 2)$

2 Resuelve la desigualdad $\frac{4}{5x-2}>0$.

**Solución**

En el primer miembro el numerador es positivo, entonces para que la división sea positiva es necesario que el denominador sea positivo, es decir:

$$5x-2>0 \rightarrow x>\frac{2}{5}$$

Por consiguiente, el intervalo solución es $\left(\frac{2}{5},\infty\right)$

### Método por casos

La desigualdad dada se transforma a otra, la cual se compara con cero y se analizan los signos del cociente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el conjunto solución de $\frac{x}{x+1}\geq 2$.

**Solución**

Se agrupan los términos en un miembro de la desigualdad y se realizan las operaciones indicadas:

$$\frac{x}{x+1}-2\geq 0 \rightarrow \frac{x-2(x+1)}{x+1}\geq 0 \rightarrow \frac{x-2x-2}{x+1}\geq 0 \rightarrow \frac{-x-2}{x+1}\geq 0 \quad -\frac{x+2}{x+1}\geq 0$$

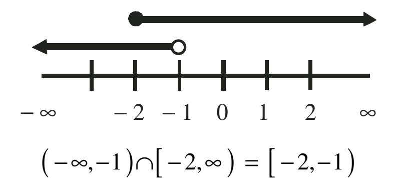
Al aplicar la propiedad 4 de las desigualdades, la nueva desigualdad a resolver es:

$$\frac{x+2}{x+1}\leq 0$$

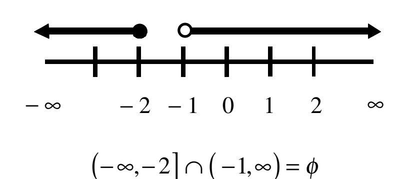
En un cociente el denominador debe ser distinto de cero, entonces éste representa un intervalo abierto; en este ejemplo el cociente es menor o igual a cero, entonces existen 2 casos.

| **Caso I** | **Caso II** |
|---|---|
| $x+1<0$ | $x+1>0$ |

**Solución del caso I**

| | |
|---|---|
| $\frac{x+2}{x+1} \leq 0$ <br> Si $x + 1 < 0$, entonces, por la propiedad 4, al multiplicar por $(x + 1)$ se invierte el signo de la desigualdad. <br> $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)(x+1) \geq 0(x+1)$ <br> $x+2 \geq 0$ | La solución es la intersección de los intervalos. <br> $x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow (-\infty,-1)$ <br> $x+2\geq 0 \rightarrow x\geq -2 \rightarrow [-2,\infty)$ <br> $(-\infty,-1)\cap[-2,\infty)$ <br>   <br> $(-\infty,-1)\cap[-2,\infty) = [-2,-1)$ |

**Solución del caso II**

| | |
|---|---|
| $\frac{x+2}{x+1} \leq 0$ <br> Si $x + 1 > 0$, entonces por la propiedad 3, no se invierte el signo de la desigualdad al multiplicar por $(x + 1)$. <br> $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)(x+1) \leq 0(x+1)$ <br> $x+2 \leq 0$ | La solución es la intersección de los intervalos. <br> $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$ <br> $x+2\leq 0 \rightarrow x\leq -2 \rightarrow (-\infty,-2]$ <br> $(-1,\infty)\cap(-\infty,-2]$ <br>   <br> $(-\infty,-2]\cap(-1,\infty) = \phi$ |

El intervalo de soluciones es la unión de los intervalos resultantes en cada caso.

$$[-2,-1)\cup\phi=[-2,-1)$$

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $[-2,-1)$

2 Resuelve la siguiente desigualdad $\frac{1}{2-x} \geq \frac{2}{x+1}$.

**Solución**

De acuerdo con la desigualdad, existen 4 casos, los cuales se indican de la siguiente forma:

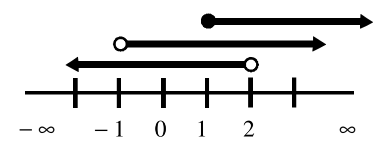
**Caso I**
$2-x>0$ y $x+1>0$

**Caso II**
$2-x>0$ y $x+1<0$

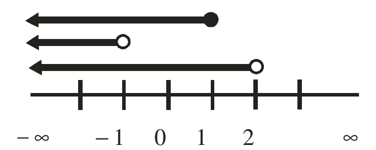
**Caso III**
$2-x<0$ y $x+1>0$

**Caso IV**
$2-x<0$ y $x+1<0$

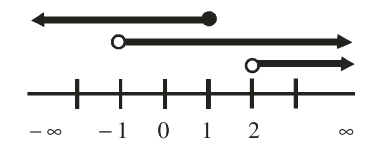
**Solución del caso I**

| | |
|---|---|
| Si $2-x>0 \rightarrow x<2 \rightarrow (-\infty,2)$<br>Si $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$<br>Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es positivo, entonces, el sentido de la desigualdad no cambia de dirección.<br>$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1)\geq\frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$<br>$1(x+1)\geq 2(2-x)$<br>$x+1\geq 4-2x$<br>$x+2x\geq 4-1 \rightarrow 3x\geq 3$<br>$x\geq 1 \rightarrow [1,\infty)$ | La solución del primer caso es la intersección de los 3 intervalos.<br>$(-1,\infty) \cap [1,\infty) \cap (-\infty,2)$<br><br>La solución es:<br>$(-\infty,2)\cap(-1,\infty)\cap[1,\infty)=[1,2)$ |

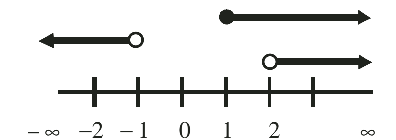
**Solución del caso II**

| | |
|---|---|
| Si $2-x>0 \rightarrow x<2 \rightarrow (-\infty,2)$<br>Si $x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow (-\infty,-1)$<br>Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es negativo, entonces el sentido de la desigualdad cambia de dirección.<br>$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1)\leq\frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$<br>$1(x+1)\leq 2(2-x)$<br>$x+1\leq 4-2x$<br>$x+2x\leq 4-1 \rightarrow 3x\leq 3$<br>$x\leq 1 \rightarrow (-\infty,1]$ | La solución del segundo caso es la intersección de los 3 intervalos.<br>$(-\infty,-1) \cap (-\infty,1] \cap (-\infty,2)$<br><br>La solución es:<br>$(-\infty,-1)$ |

**Solución del caso III**

| | |
|---|---|
| Si $2-x<0 \rightarrow x>2 \rightarrow (2,\infty)$<br>Si $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow (-1,\infty)$<br>Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es negativo, entonces el sentido de la desigualdad cambia de dirección.<br>$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1)\leq\frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$<br>$1(x+1)\leq 2(2-x)$<br>$x+1\leq 4-2x$<br>$x+2x\leq 4-1$<br>$3x\leq 3$<br>$x\leq 1 \rightarrow (-\infty,1]$ | La solución del tercer caso es la intersección de los 3 intervalos<br>$(2,\infty)\cap(-1,\infty)\cap(-\infty,1]$<br><br>La solución es:<br>$(2,\infty)\cap(-1,\infty)\cap(-\infty,1]=\phi$ |

**Solución del caso IV**

| | |
|---|---|
| Si $2-x<0 \rightarrow x>2 \rightarrow (2,\infty)$<br>Si $x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow (-\infty,-1)$<br>Se multiplica la desigualdad por el producto $(2-x)(x+1)$, el cual es positivo, entonces el sentido de la desigualdad no cambia de dirección.<br>$\frac{1}{2-x}(2-x)(x+1) \geq \frac{2}{x+1}(2-x)(x+1)$<br>$1(x+1) \geq 2(2-x)$<br>$x+1 \geq 4-2x$<br>$x+2x \geq 4-1$<br>$3x \geq 3$<br>$x \geq 1 \rightarrow [1,\infty)$ | La solución del cuarto caso es la intersección de los 3 intervalos<br>$(2,\infty) \cap (-\infty,-1) \cap [1,\infty)$<br><br><br>La solución es:<br>$(2,\infty) \cap (-\infty,-1) \cap [1,\infty) = \phi$ |

La unión de los intervalos es la solución de la desigualdad.

$$(-\infty,-1) \cup [1,2) \cup \phi \cup \phi = (-\infty,-1) \cup [1,2)$$

## Método por intervalos

Consiste en encontrar los valores que hagan cero al numerador y al denominador, para determinar los intervalos y realizar el análisis de signos, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Resuelve $\frac{3}{2x+3} < \frac{1}{x-2}$.

**Solución**

Se agrupan los términos en un miembro de la desigualdad y se realiza la operación indicada.

$$\frac{3}{2x+3} < \frac{1}{x-2} \rightarrow \frac{3}{2x+3} - \frac{1}{x-2} < 0 \rightarrow \frac{3(x-2)-(2x+3)}{(2x+3)(x-2)} < 0 \rightarrow \frac{3x-6-2x-3}{(2x+3)(x-2)} < 0$$

$$\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)} < 0$$

Se determinan aquellos valores que hacen cero al numerador y al denominador, para obtener los posibles intervalos que darán el conjunto solución.

$$x-9=0 \rightarrow x=9 \quad ; \quad 2x+3=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2} \quad ; \quad x-2=0 \rightarrow x=2$$

El denominador debe de ser diferente de cero, por consiguiente, para $x=-\frac{3}{2}$ y $x=2$, los intervalos son abiertos y para $x=9$, es cerrado, entonces los intervalos que se van a analizar son:

$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ $\left(-\frac{3}{2},2\right)$ $(2,9]$ $[9,\infty)$

$-\infty$ $-2$ $-\frac{3}{2}$ 0 **2** 4 6 **9** $\infty$

*Tabla de signos*

| Intervalo | $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ | $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ | (2, 9] | [9, ∞) |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $x - 9$ | – | – | – | + |
| Signo de $2x + 3$ | – | + | + | + |
| Signo de $x - 2$ | – | – | + | + |
| Signo de $\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)}$ | $\frac{(-)}{(-)(-)} = -$ | $\frac{(-)}{(+)(-)} = +$ | $\frac{(-)}{(+)(+)} = -$ | $\frac{(+)}{(+)(+)} = +$ |

Si $\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)} < 0$, entonces el intervalo solución de la desigualdad es $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, 9]$

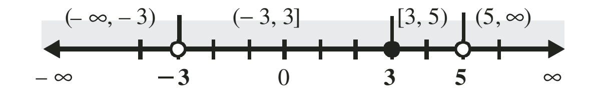
2 Resuelve la desigualdad $\frac{(3-x)(x^2+2)}{(x-5)(x+3)} \geq 0$.

**Solución**

Se buscan los valores que hacen cero los factores, con estos valores se construyen los intervalos que dan origen al conjunto solución de la desigualdad.

| | |
|---|---|
| Para el factor $(x^2 + 2)$, $x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \sqrt{-2}$ La raíz es imaginaria, esto significa que el factor siempre tendrá un valor positivo. | Para el factor $(3 - x)$, $3 - x = 0 \rightarrow x = 3$ Para el factor $(x - 5)$, $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$ Para el factor $(x + 3)$, $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$ |

Luego, el denominador debe ser distinto de cero, entonces para $x = 5$ y $x = -3$, los intervalos son abiertos y para $x = 3$, el intervalo es cerrado.




Se construye la tabla, no se toma en cuenta el factor $(x^2 + 2)$, ya que es positivo en todos los valores de $x$, y no afecta al signo del cociente.

| Intervalo | (– ∞, – 3) | (– 3, 3] | [3, 5) | (5, ∞) |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $3 - x$ | + | + | – | – |
| Signo de $x - 5$ | – | – | – | + |
| Signo de $x + 3$ | – | + | + | + |
| Signo de $\frac{(3-x)(x^2+2)}{(x-5)(x+3)}$ | $\frac{(+)}{(-)(-)} = \frac{+}{+} = +$ | $\frac{(+)}{(-)(+)} = \frac{+}{-} = -$ | $\frac{(-)}{(-)(+)} = \frac{-}{-} = +$ | $\frac{(-)}{(+)(+)} = \frac{-}{+} = -$ |

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $(-\infty, -3) \cup [3, 5)$

# EJERCICIO 135

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $\frac{5}{4x-3}>0$
2. $\frac{3}{2x-5}\leq 0$
3. $\frac{x-2}{2x-5}<0$
4. $\frac{6}{(x-2)^2}>0$
5. $\frac{5}{6-2x}\geq 0$
6. $\frac{2x+6}{2x-4}\leq 0$
7. $\frac{x+1}{x-3}\geq 0$
8. $\frac{3}{x+1}>\frac{2}{x-3}$
9. $\frac{4}{3x+1}\leq\frac{2}{x-4}$
10. $\frac{3}{x+2}\leq\frac{1}{x-2}$
11. $\frac{x^2(x+4)}{(x-1)(x+2)}>0$
12. $\frac{(x-3)^2(2x-3)}{(x+2)(x-4)}\leq 0$
13. $\frac{(4-x)(x+3)^2}{(x+6)(x-1)}\geq 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Desigualdad que tiene la expresión $(x - a)(x - b)(x - c)$...

Una forma práctica para determinar el conjunto solución, es construir una tabla con los intervalos que se forman al encontrar los valores que hacen cero a cada factor, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo

Resuelve la desigualdad $(x-2)(x-4)(x+2)\geq 0$.

### Solución

Se determinan los valores que hacen cero a cada factor para formar los intervalos.

Para $x-2=0 \rightarrow x=2$ ; Para $x-4=0 \rightarrow x=4$ ; Para $x+2=0 \rightarrow x=-2$

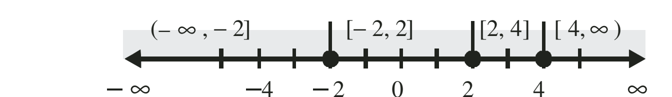



*Tabla de signos*

| Intervalo | (−∞, −2] | [−2, 2] | [2, 4] | [4, ∞) |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $x-2$ | – | – | + | + |
| Signo de $x-4$ | – | – | – | + |
| Signo de $x+2$ | – | + | + | + |
| Signo de $(x-2)(x-4)(x+2)$ | ( – )( – )( – ) = – | ( – )( – )( + ) = + | ( + )( – )( + ) = – | ( + )( + )( + ) = + |

La desigualdad indica que el producto es positivo, entonces se toman los intervalos cuyo producto es positivo, es decir, $[-2,2]$ y $[4,\infty)$, luego, la unión de estos intervalos es el conjunto solución.

Finalmente, la solución de la desigualdad es: $[-2,2]\cup[4,\infty)$

# EJERCICIO 136

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $(x+2)(x-4)(2-x)(x+1) \geq 0$
2. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$
3. $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$
4. $x^3 - 12x + 16 < 0$
5. $x^3 > 9x$
6. $x^4 - 11x^2 - 18x - 8 > 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Desigualdades con valor absoluto

El conjunto solución de una desigualdad que involucra valor absoluto, está dado por las siguientes propiedades:

Sean $a, b \in R$ y $b > 0$

1. $|a| < b$ se expresa como:
   $-b < a < b$ o bien $a > -b$ y $a < b$
2. $|a| \leq b$ se expresa como:
   $-b \leq a \leq b$ o bien $a \geq -b$ y $a \leq b$
3. $|a| > b$ se expresa como:
   $-a > b$ o $a > b$ o bien $a < -b$ o $a > b$
4. $|a| \geq b$ se expresa como:
   $-a \geq b$ o $a \geq b$ o bien $a \leq -b$ o $a \geq b$

**EJEMPLOS**

1 Determina el conjunto solución de $|x+1| < 7$.

**Solución**

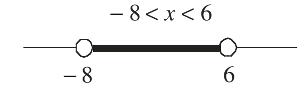
La desigualdad $|x+1| < 7$, tiene la forma de la propiedad 1, entonces:

$$-7 < x + 1 < 7$$

O bien:

$$-7 < x + 1 \qquad x + 1 < 7$$
$$-7 - 1 < x \qquad x < 7 - 1$$
$$-8 < x \qquad x < 6$$

$-8 < x < 6$




Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo $(-8, 6)$

2 Encuentra el conjunto solución de $|2x - 1| \geq 7$.

**Solución**

La desigualdad $|2x - 1| \geq 7$ tiene la forma de la propiedad 4, entonces:

$$-(2x-1) \geq 7 \qquad 2x - 1 \geq 7$$
$$-2x + 1 \geq 7 \qquad 2x \geq 7 + 1$$
$$-2x \geq 7 - 1 \qquad 2x \geq 8$$
$$x \leq \frac{6}{-2} \qquad x \geq \frac{8}{2}$$
$$x \leq -3 \qquad x \geq 4$$

$-3 \geq x \geq 4$

$-\infty$ **−3** **4** $\infty$

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$

## Casos especiales de desigualdades con valor absoluto

En este tipo de desigualdades se aplican las propiedades anteriores, para obtener dos desigualdades lineales; el conjunto solución de la desigualdad es la unión o intersección de los intervalos solución de cada desigualdad obtenida.

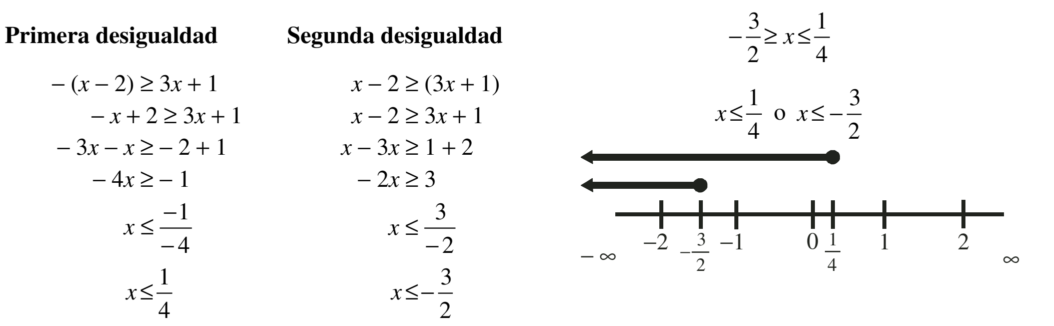
**EJEMPLOS**

1 Determina el conjunto solución de la desigualdad $|x - 2| \geq 3x + 1$.

**Solución**

La desigualdad $|x - 2| \geq 3x + 1$ tiene la forma de la fórmula 4, entonces se representa como:

| **Primera desigualdad** | **Segunda desigualdad** |
|---|---|
| $-(x-2) \geq 3x+1$ | $x - 2 \geq (3x+1)$ |
| $-x+2 \geq 3x+1$ | $x - 2 \geq 3x + 1$ |
| $-3x - x \geq -2 + 1$ | $x - 3x \geq 1 + 2$ |
| $-4x \geq -1$ | $-2x \geq 3$ |
| $x \leq \frac{-1}{-4}$ | $x \leq \frac{3}{-2}$ |
| $x \leq \frac{1}{4}$ | $x \leq -\frac{3}{2}$ |




Finalmente, las soluciones de cada desigualdad son:

$$x \leq \frac{1}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \quad ; \quad x \leq -\frac{3}{2} \rightarrow \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$

Se determina la unión de los intervalos:

$$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$$

Para concluir, la solución de la desigualdad es:

$$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$$

2 Resuelve la desigualdad $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| > 4$.

**Solución**

La desigualdad tiene la forma de la propiedad 3, entonces se tienen las siguientes desigualdades.

$$\frac{x-1}{x+2} > 4 \text{ o } -\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 4$$

La desigualdad $\frac{x-1}{x+2} > 4$, se transforma a:

$$\frac{x-1}{x+2} > 4 \rightarrow \frac{x-1}{x+2} - 4 > 0 \rightarrow \frac{-3x-9}{x+2} > 0$$

Al aplicar el procedimiento para resolver una desigualdad racional, por el método de intervalos, los valores que hacen cero al numerador y al denominador son $x = -3$ y $x = -2$, respectivamente, el denominador debe ser distinto de cero; entonces el intervalo es abierto, lo mismo para el numerador ya que la desigualdad es estrictamente mayor que cero, por tanto los intervalos que se forman son:

$$(-\infty, -3), (-3, -2), (-2, \infty)$$

*Tabla de signos*

| Intervalo | $(-\infty, -3)$ | $(-3, -2)$ | $(-2, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $-3x-9$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| Signo de $x+2$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo de $\frac{3x-9}{x+2}$ | $\frac{+}{-} = -$ | $\frac{-}{-} = +$ | $\frac{-}{+} = -$ |

El conjunto solución para la desigualdad $\frac{x-1}{x+2} > 4$ es: $(-3, -2)$, de manera similar, se obtiene el conjunto solución de la desigualdad $-\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 4$, dando como solución el intervalo $\left(-2, -\frac{7}{5}\right)$; la unión de las soluciones obtenidas da origen al conjunto solución de la desigualdad original, por consiguiente la solución es:

$$(-3, -2) \cup \left(-2, -\frac{7}{5}\right)$$

3 Resuelve la desigualdad $|x + 1| \geq |1 - 2x|$.

**Solución**

Una forma de resolver el ejercicio es elevar al cuadrado ambos miembros,

$$(|x+1|)^2 \geq (|1-2x|)^2 \rightarrow (x+1)^2 \geq (1-2x)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$0 \geq 1 - 4x + 4x^2 - x^2 - 2x - 1$$

$$0 \geq 3x^2 - 6x$$

o bien, $\quad 3x^2 - 6x \leq 0$

factorizar, $\quad 3x(x-2) \leq 0$

Los valores con factores iguales a cero son: $x = 0$ y $x = 2$, por consiguiente, los intervalos se definen como: $(-\infty, 0]$, $[0, 2]$ y $[2, \infty)$

*Tabla de signos*

| Intervalo | $(-\infty, 0]$ | $[0, 2]$ | $[2, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $3x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo de $x-2$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo de $3x(x-2)$ | $(-)(-) = +$ | $(+)(-) = -$ | $(+)(+) = +$ |

El intervalo de solución es $[0, 2]$

# EJERCICIO 137

Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $|x| \geq 7$
2. $|x| < 7$
3. $|x - 5| > 4$
4. $|5x - 3| \leq 12$
5. $|8 - 2x| > 2$
6. $|7x - 1| < 0$
7. $|2x - 1| \leq 19$
8. $\left|6 - \frac{3}{4}x\right| > 9$
9. $\left|\frac{5}{4}(x - 10)\right| \leq 10$
10. $\left|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{8}$
11. $|x - 1| < 2x$
12. $|2x + 3| \geq x + 3$
13. $|2 - 2x| \leq x - 4$
14. $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 1$
15. $\left|\frac{x+4}{x}\right| > 2$
16. $|x| \leq |x - 1|$
17. $|3x - 4| > |x + 4|$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Gráfica de una desigualdad lineal con dos variables

Una desigualdad lineal que tiene la forma:

*a*) $y < mx + b$ no incluye a la recta

*b*) $y \leq mx + b$ incluye a la recta

*c*) $y > mx + b$ no incluye a la recta

*d*) $y \geq mx + b$ incluye a la recta

En una desigualdad lineal de dos variables, el conjunto solución es la región que se forma por el conjunto de todos los pares ordenados $(x, y)$ que satisfacen la desigualdad.

### EJEMPLOS

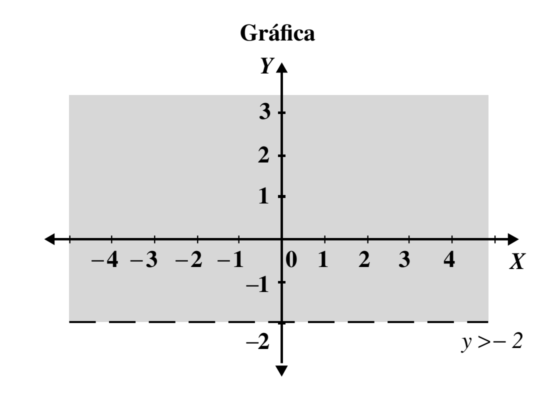
Ejemplos

1 Determina la gráfica del conjunto solución de $y > -2$.

**Solución**

Primero, se grafica la recta $y = -2$, con una línea punteada, ya que el signo de la desigualdad representa un intervalo abierto.

Luego se sombrea la región que contiene a todos los puntos de ordenada estrictamente mayores que $-2$, en este caso son todos los puntos que se encuentran por arriba de la recta punteada.

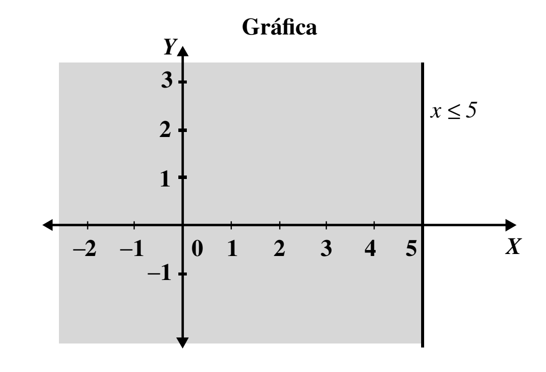


2 Encuentra la región del conjunto solución de $x \leq 5$.

**Solución**

Se grafica la recta $x = 5$, el signo de la desigualdad indica que la línea es continua.

El conjunto solución son los puntos del plano cuyas abscisas son menores o iguales a 5.




3 Determina la gráfica del conjunto solución de $y > x + 2$.

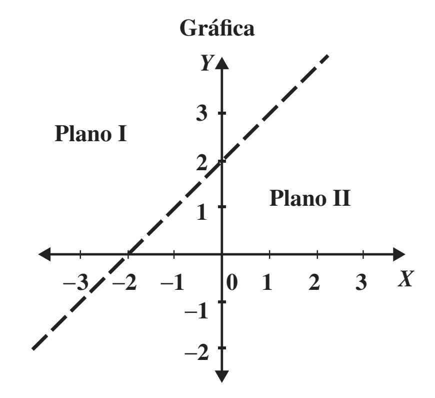
**Solución**

Se grafica $y = x + 2$; ésta se representa con una recta punteada, ya que el signo representa intervalo abierto, la recta divide al plano cartesiano en 2 planos.

Para determinar la región solución del sistema, se sustituye un punto perteneciente a una de las regiones y se verifica que cumpla con la desigualdad. Por ejemplo, el punto: $(-1, 4)$

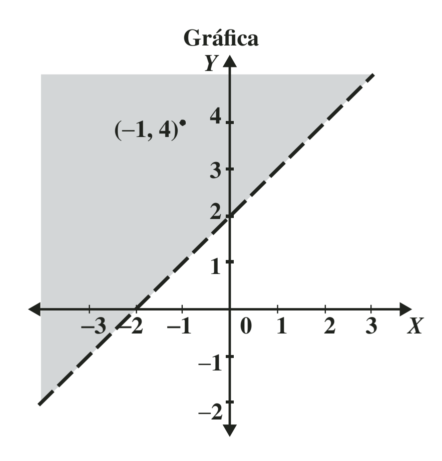
$$y > x + 2$$
$$4 > -1 + 2$$
$$4 > 1$$

El punto sí satisface la desigualdad.




La región que es la solución de la desigualdad, es el conjunto de puntos que están en la región por arriba de la recta punteada, es decir, el conjunto de puntos que se encuentran en el plano I.

Por el contrario, si el punto elegido no satisface la desigualdad, la región que representa el conjunto solución será el plano contrario al punto.



# EJERCICIO 138

Grafica las siguientes desigualdades lineales:

1. $y > 6$
2. $y \leq -5$
3. $y \geq 4$
4. $y < 3$
5. $x > 4$
6. $x \leq -3$
7. $x < -3$
8. $x \geq 4$
9. $2x - y > 3$
10. $3x - 2y \leq 0$
11. $x + y < 1$
12. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Sistema de desigualdades lineales con dos variables

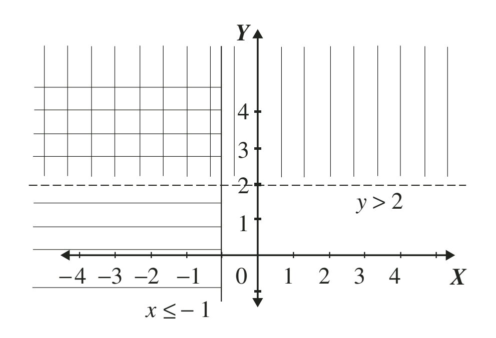
El conjunto solución de un sistema de desigualdades es la intersección de las regiones solución de cada desigualdad lineal.

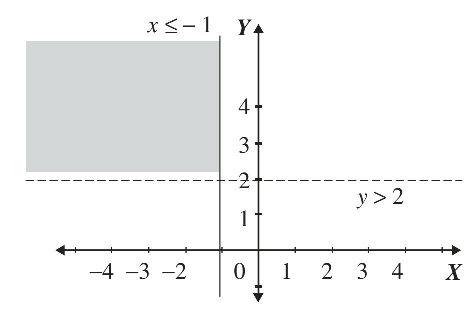
**EJEMPLOS**

1 Representa gráficamente el conjunto solución del sistema $\begin{cases} y > 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

**Solución**

Se encuentra la región solución de cada desigualdad. La solución es el conjunto de todos los puntos que se encuentren en la intersección de las regiones.




2 Determina gráficamente el conjunto solución del sistema $\begin{cases} y \geq x - 2 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$.

**Solución**

El sistema tiene la forma:

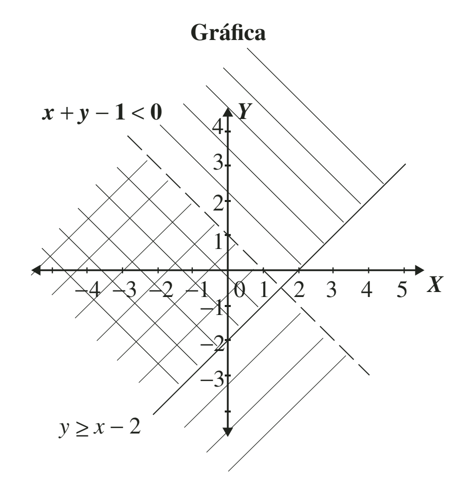
$$y \geq x - 2$$

$$y < 1 - x$$

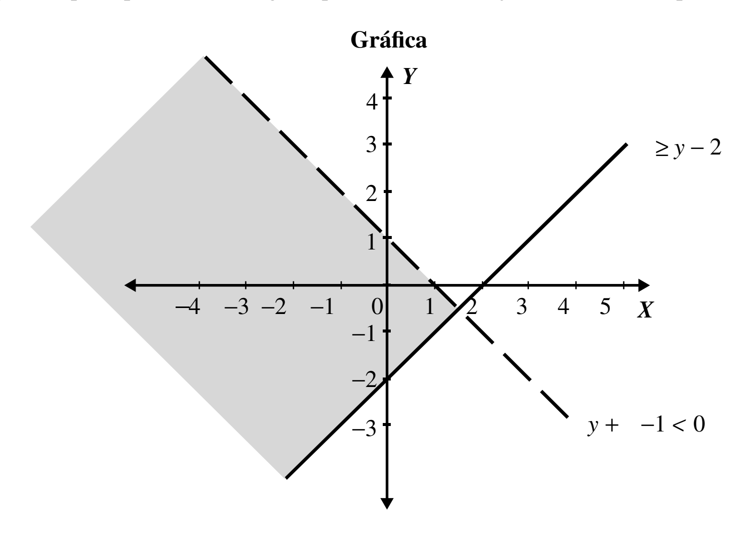
Se grafica la recta $y = x - 2$, con línea continua ya que el signo de la desigualdad indica intervalo cerrado; luego, se grafica la recta $y = 1 - x$, con una línea punteada, ya que el signo de la desigualdad indica intervalo abierto.

Se grafica la región solución de cada desigualdad y la intersección de las regiones son todos los puntos que satisfacen el conjunto solución del sistema.

**Gráfica**



Finalmente, la gráfica que representa a la región que contiene el conjunto de todos los pares ordenados es:




## EJERCICIO 139

Determina la región que es solución de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} y>2 \\ x\leq 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y<-3 \\ x<4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2<x<2 \\ y\geq 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -1\leq y\leq 4 \\ 0< x<3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y>3 \\ x-y\leq 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-3y>9 \\ y<3x-10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+y\leq 1 \\ x-y>2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y>0 \\ x-3y<0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x<y \\ x+y\leq 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y<x-4 \\ y\leq 1-x \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 14

## LOGARITMOS

### Reseña HISTÓRICA

*John Napier*

El término logaritmo lo acuñó el matemático escocés John Napier, a partir de los términos griegos *lógos* (razón) y *arithmós* (número) para designar a la correspondencia, que había descubierto, entre los términos de una progresión aritmética y otra geométrica. Al principio los llamó "números artificiales", pero luego cambió de opinión.

Al logaritmo que tiene por base el número **e** se le llama, en su honor, neperiano.

Pero fue el inglés Henry Briggs, un amigo de Napier, quien comenzó a usar los logaritmos con base 10. Briggs escribió acerca de su nuevo descubrimiento: "Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, con su empleo se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, y se transforman en algo completamente simple, a través de la sustitución de la multiplicación por la adición y la división por la substracción. Además, el cálculo de las raíces también se realiza con gran facilidad".

John Napier (1550-1617)

## Definición

El $\log_b N = a$, es el exponente $a$, al que se eleva la base $b$ para obtener el argumento $N$.

$$\log_b N = a \iff N = b^a$$

Con $N$ y $b$ números reales positivos y $b$ diferente de 1

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Emplea la definición de logaritmo para transformar las siguientes expresiones a su forma exponencial:

| Forma logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| 1. $\log_3 243 = 5$ | $243 = 3^5$ |
| 2. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$ | $\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ |
| 3. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ | $2^{-3} = \frac{1}{8}$ |
| 4. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$ | $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ |

2 Transforma las siguientes expresiones exponenciales en expresiones logarítmicas:

| Forma exponencial | Forma logarítmica |
|---|---|
| 1. $N = \left(\sqrt{2}\right)^3$ | $\log_{\sqrt{2}} N = 3$ |
| 2. $\frac{1}{125} = 5^{-3}$ | $\log_5 \frac{1}{125} = -3$ |
| 3. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$ | $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$ |
| 4. $x^p = y$ | $\log_x y = p$ |

## EJERCICIO 140

Convierte a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 8 = 3$
2. $\log_x 16 = 4$
3. $\log_3 81 = 4$
4. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
5. $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$
6. $\log_7 343 = x$
7. $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{2}$
8. $\log_3 (x-1) = 2$
9. $\log_w 625 = 4$
10. $\log_{(x-1)} 128 = 7$
11. $\log_{3x} 243 = 5$
12. $\log_{(2x-1)} 256 = 8$

Transforma a su forma logarítmica las siguientes expresiones:

13. $17^2 = a$
14. $625 = 5^4$
15. $64^{\frac{1}{3}} = 4$
16. $\frac{1}{16} = N^2$
17. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
18. $(x+3) = 2^4$
19. $2^x = 256$
20. $(x-2)^3 = 8$
21. $x^w = z$
22. $\frac{1}{81} = 3^{-4}$
23. $5^{-3x} = 125$
24. $441 = (3x+2)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Aplicación de la definición de logaritmo

En los siguientes ejemplos se aplica la definición de logaritmo para encontrar el valor de la incógnita.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de $a$ en la expresión: $\log_a 216 = 3$.

**Solución**

Se escribe el logaritmo en su forma exponencial y se despeja la incógnita:

$$\log_a 216 = 3 \quad \rightarrow \quad 216 = a^3 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{216} = a \quad \rightarrow \quad 6 = a$$

Por consiguiente, el resultado es: $a = 6$

2 Encuentra el valor de $m$ en $\log_{\sqrt{2}} m = 3$.

**Solución**

Se transforma a su forma exponencial la expresión y se desarrolla el exponente:

$$\log_{\sqrt{2}} m = 3 \quad \rightarrow \quad m = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, el resultado es: $m = 2\sqrt{2}$

3 Determina el valor de $x$ en la expresión: $\log_3 \frac{1}{729} = x$.

**Solución**

La expresión se transforma a la forma exponencial.

$$\log_3 \frac{1}{729} = x \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{729}$$

El número 729 se descompone en factores primos y la ecuación se expresa como:

$$3^x = \frac{1}{729} \rightarrow 3^x = \frac{1}{3^6} \rightarrow 3^x = 3^{-6}$$

De la última igualdad se obtiene: $x = -6$

## EJERCICIO 141

Encuentra el valor de las incógnitas en las siguientes expresiones:

1. $\log_x 25 = 2$
2. $\log_x 64 = 3$
3. $\log_y 81 = 4$
4. $\log_b 3125 = -5$
5. $\log_x 32 = \frac{5}{2}$
6. $\log_a 49 = \frac{2}{3}$
7. $\log_3 x = 4$
8. $\log_2 m = 3$
9. $\log_{0.5} y = 5$
10. $\log_4 N = \frac{3}{2}$
11. $\log_{27} w = \frac{1}{3}$
12. $\log_{\frac{3}{2}} x = -2$
13. $\log_{32} b = 0.2$
14. $\log_8 x = 0.333...$
15. $\log_6 216 = x$
16. $\log_{32} \frac{1}{4} = a$
17. $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$
18. $\log_{16} 0.5 = y$
19. $\log_{\frac{1}{8}} 512 = x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Propiedades

Para cualquier $M, N, b > 0$ y $b \neq 0$, se cumple que:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b M^n = n \log_b M$
4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
7. $\log_e M = \ln M$, ln = logaritmo natural y $e = 2.718281...$

Importante: las siguientes expresiones no son igualdades.

$$\log_b(M+N) \neq \log_b M + \log_b N \qquad \log_b\left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$$

Demostraciones de las propiedades de los logaritmos:

1. $\log_b 1 = 0$

Demostración:
Sea $\log_b 1 = a$, esta expresión se transforma a su forma exponencial:

$$\log_b 1 = a \quad \rightarrow \quad 1 = b^a$$

Para que $b^a = 1$, se debe cumplir que $a = 0$, entonces, al sustituir este resultado se determina que:

$$\log_b 1 = a = 0$$

2. $\log_b b = 1$

Demostración:
Sea $\log_b b = a$, se aplica la definición de logaritmo y la expresión exponencial es la siguiente:

$$\log_b b = a \quad \rightarrow \quad b = b^a$$

Pero $b = b^1$, por consiguiente $b^1 = b^a$ y $a = 1$
Al sustituir este resultado se obtiene: $\log_b b = a = 1$

3. $\log_b M^n = n\log_b M$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$, su forma exponencial es $b^x = M$, al elevar esta expresión a la enésima potencia se determina que:

$$\left(b^x\right)^n = M^n \quad \rightarrow \quad b^{nx} = M^n$$

La forma logarítmica de esta expresión: $\log_b M^n = nx$
Se sustituye $x = \log_b M$, y se obtiene: $\log_b M^n = n\log_b M$

4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$

Demostración:

Sea $x = \log_b M$, su forma exponencial es $b^x = M$, se extrae la raíz enésima en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt[n]{b^x} = \sqrt[n]{M}$$

El primer miembro de esta igualdad se expresa como: $b^{\frac{x}{n}}=\sqrt[n]{M}$

Ahora esta nueva igualdad se transforma a su forma logarítmica: $\log_b \sqrt[n]{M}=\frac{x}{n}$

Se sustituye $x=\log_b M$, y se determina que: $\log_b \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_b M$

5. $\log_b MN=\log_b M+\log_b N$

Demostración:
Sea $x=\log_b M$ y $y=\log_b N$, ésta es la forma exponencial de ambas expresiones:

$$b^x=M \;\; ; \;\; b^y=N$$

Al multiplicar estas expresiones se obtiene: $\left(b^x\right)\left(b^y\right)=MN \quad \rightarrow \quad b^{x+y}=MN$
Se transforma a su forma logarítmica: $\log_b MN=x+y$
Se sustituye $x=\log_b M$ y $y=\log_b N$, éste es el resultado:

$$\log_b MN=\log_b M+\log_b N$$

6. $\log_b \frac{M}{N}=\log_b M-\log_b N$

Demostración:
Sea $x=\log_b M$ y $y=\log_b N$, ésta es su forma exponencial:

$$b^x=M \;\; ; \;\; b^y=N$$

Se divide la primera expresión entre la segunda:

$$\frac{b^x}{b^y}=\frac{M}{N} \quad \rightarrow \quad b^{x-y}=\frac{M}{N}$$

Además se transforma a su forma logarítmica la última expresión:

$$\log_b \frac{M}{N}=x-y$$

Al final se sustituye $x=\log_b M$ y $y=\log_b N$ y resulta que:

$$\log_b \frac{M}{N}=\log_b M-\log_b N$$

## Aplicación de las propiedades para el desarrollo de expresiones

El logaritmo de una expresión algebraica se representa de forma distinta mediante sus propiedades y viceversa; una expresión que contiene varios logaritmos se transforma a otra que contenga un solo argumento.

EJEMPLOS

1 Con la aplicación de las propiedades de los logaritmos desarrolla esta expresión: $\log_3 x^{12}$.

**Solución**

La base $x$ se encuentra afectada por el exponente 12, por tanto se aplica la propiedad 3 y se obtiene:

$$\log_3 x^{12}=12\log_3 x$$

2 Desarrolla la siguiente expresión: $\log_2 3x^4\sqrt{y}$.

**Solución**

Se aplica la propiedad para el logaritmo de un producto (propiedad 5):

$$\log_2 3x^4\sqrt{y} = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 \sqrt{y}$$

Se aplican las propiedades 3 y 4 y la expresión queda así:

$$= \log_2 3 + 4\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y$$

3 Desarrolla a su forma más simple la expresión: $\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3}$.

**Solución**

Se aplica la propiedad 4 para el radical:

$$\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3} = \frac{1}{4}\log_y (x-5)^3$$

Ahora al aplicar la propiedad 3, se determina que:

$$= \frac{1}{4}\left[3\log_y (x-5)\right] = \frac{3}{4}\log_y (x-5)$$

4 ¿Cuál es el desarrollo de la expresión $\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}$?

**Solución**

Se aplica la propiedad para la división (propiedad 6):

$$\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = \log_a (x+y)^3 - \log_a (x-y)^2$$

Para obtener la expresión que muestre el desarrollo final se aplica la propiedad 3:

$$= 3\log_a (x+y) - 2\log_a (x-y)$$

5 Desarrolla la siguiente expresión: $\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3$.

**Solución**

Se aplican las propiedades de los logaritmos y se simplifica al máximo, para obtener:

$$\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3 = 3\left[\ln\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]$$

Enseguida se aplica la propiedad del cociente y el producto (propiedades 5 y 6).

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - \ln 2x^2\right]$$

En el sustraendo se aplica nuevamente la propiedad del producto, y resulta que:

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - \left(\ln 2 + \ln x^2\right)\right]$$

Finalmente, se aplica la propiedad del exponente y se eliminan los signos de agrupación:

$$= 3\left[3x\ln e + \ln(x+1) - \ln 2 - 2\ln x\right] = 9x + 3\ln(x+1) - 3\ln 2 - 6\ln x$$

6 Desarrolla la siguiente expresión: $\log\sqrt[3]{\dfrac{3x^4}{2y^5}}$.

**Solución**

Se aplica la propiedad para la raíz de un número (propiedad 4):

$$\log\sqrt[3]{\frac{3x^4}{2y^5}} = \frac{1}{3}\log\frac{3x^4}{2y^5}$$

Después se aplica la propiedad para el logaritmo de un cociente (propiedad 6):

$$= \frac{1}{3}\left(\log 3x^4 - \log 2y^5\right)$$

Al aplicar la propiedad para el logaritmo de una multiplicación se obtiene:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + \log x^4\right) - \left(\log 2 + \log y^5\right)\right]$$

Se aplica también la propiedad 3 para exponentes:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + 4\log x\right) - \left(\log 2 + 5\log y\right)\right]$$

Se cancelan los signos de agrupación y éste es el desarrollo de la expresión:

$$= \frac{1}{3}\left[\log 3 + 4\log x - \log 2 - 5\log y\right]$$
$$= \frac{1}{3}\log 3 + \frac{4}{3}\log x - \frac{1}{3}\log 2 - \frac{5}{3}\log y$$

7 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\log x + \log y - \log z$.

**Solución**

La suma de 2 logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del producto de los argumentos:

$$\log x + \log y - \log z = \log xy - \log z$$

La diferencia de logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del cociente de los argumentos:

$$\log xy - \log z = \log\frac{xy}{z}$$

Por tanto:

$$\log x + \log y - \log z = \log\frac{xy}{z}$$

8 Expresa como logaritmo: $2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1)$.

**Solución**

Se sabe que $\log_a a = 1$, entonces:

$$2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1) = 2\log_a a + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1)$$

*(continúa)*

(*continuación*)

Los coeficientes representan los exponentes de los argumentos:

$$= \log_a a^2 + \log_a (a+1)^3 - \log_a (a-1)^{\frac{1}{4}}$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos para la suma y diferencia:

$$= \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{(a-1)^{\frac{1}{4}}} = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

Por consiguiente:

$$2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1) = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

9 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{3}\log(x-2) - 2\log x - 3\log(x+3)$.

**Solución**

Al aplicar las propiedades de los logaritmos y simplificar se obtiene:

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2 - \log(x+3)^3$$

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[\log x^2 + \log(x+3)^3\right]$$

$$= \log(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2(x+3)^3$$

$$= \log \frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3} = \log \frac{((x+1)(x-1))^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3}$$

$$= \log \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2(x+3)^3}$$

10 Expresa como logaritmo: $x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1)$.

**Solución**

Se sabe que $\ln e = 1$, entonces:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = (x-3)\ln e + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}(x+1)$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos, se tiene que:

$$\ln e^{(x-3)} + \ln(x-2)^{\frac{2}{3}} - \ln(x+1)^{\frac{1}{3}} = \ln \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}} e^{(x-3)}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2 e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

Por consiguiente:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2 e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

# EJERCICIO 142

Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

1. $\log_a 7^4$
2. $\log_6 3^{-\frac{3}{2}}$
3. $\log_e \sqrt[3]{e^7 x}$
4. $\log 5xy^2$
5. $\log_3 x^3y^2z$
6. $\ln\left(3e^4x^2\right)^2$
7. $\log(x+y)^3(x-z)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{7}{x^2}$
9. $\ln \frac{xy^2}{e^3z^4}$
10. $\log_5 \frac{3x^3(1-2x)^6}{2x^y\left(x^2-y^2\right)}$
11. $\log_4 \sqrt{3x^2y^4}$
12. $\log \sqrt{(x+y)^4 z^5}$
13. $\log \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$
14. $\log \frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt[3]{c^2d}}$
15. $\log_2 \frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^4}$
16. $\log \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3}(x+z)^2}$
17. $\log \sqrt{\frac{(x+3)(y-5)}{(x+6)^4\sqrt{y-2}}}$
18. $\ln \sqrt[3]{\frac{e^2\sqrt{(x+1)^4(x-1)^3}}{e^x\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}}$

Aplica las propiedades de los logaritmos para expresar los siguientes logaritmos como el logaritmo de un solo argumento:

19. $2\ln 5 + 2\ln x$
20. $3\log m - 2\log n$
21. $\frac{1}{2}\log_7 x + \frac{1}{3}\log_7 y$
22. $\ln 8 + 4x$
23. $\frac{2}{5}\log m + 4\log n$
24. $2x + \log_2 3$
25. $-\frac{2}{3}\log_b(x+1) - \frac{1}{4}\log_b(x+2)$
26. $\log 3 + \log y - \log x$
27. $\log_2 x - \log_2 y - \log_2 z$
28. $1 - \log_4(m-1) - \log_4(m+1)$
29. $\frac{1}{8}\log x + \frac{1}{3}\log y - \frac{1}{4}\log z$
30. $\ln 5 + 1 + \ln y - 7\ln x$
31. $2 - x + 3\ln(x+y) - 3\ln(x-y)$
32. $\frac{2}{3}\log(x-2) - \frac{4}{5}\log(x+2) + 2\log(x+1)$
33. $\frac{1}{2} + 7\log_2 x - \frac{3}{2}\log_2 y$
34. $\frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{6}\log x - 1$
35. $x^2 + x + 1 - 2\log x + 3\log(x+1)$
36. $2\ln 9 + 4\ln m + 2\ln p - 2\ln 7 - 2\ln x - 6\ln y$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuaciones logarítmicas

En estas ecuaciones las incógnitas se encuentran afectadas por logaritmos, su solución se obtiene al aplicar las propiedades y la definición de logaritmo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $\log_5(2x+1)=2$.

**Solución**

Al aplicar la definición de logaritmo, la expresión $\log_5(2x+1)=2$ se convierte en:

$$2x+1=5^2$$

Ahora al resolver esta ecuación, se obtiene:

$$2x+1=5^2 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}2x+1&=25\\2x&=24\\x&=12\end{aligned}$$

2 ¿Cuáles son los valores de $x$ que satisfacen la ecuación $\log(x+2)+\log(x-1)=1$?

**Solución**

Se aplica la propiedad 5 para expresarla en término de un solo logaritmo:

$$\log(x+2)+\log(x-1)=1 \quad\rightarrow\quad \log(x+2)(x-1)=1 \quad\rightarrow\quad \log\left(x^2+x-2\right)=1$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve factorizando la ecuación que resulta:

$$\log\left(x^2+x-2\right)=1 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}x^2+x-2&=10^1\\x^2+x-2-10&=0\\x^2+x-12&=0\\(x+4)(x-3)&=0\\x+4=0 \quad \text{y} \quad x-3&=0\end{aligned}$$

Por consiguiente, los valores que satisfacen las igualdades son: $x=-4$ y $x=3$, y el valor que satisface la ecuación es $x=3$

3 Resuelve: $\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1)$.

**Solución**

Se agrupan los logaritmos en el primer miembro de la igualdad y se aplica la propiedad 6:

$$\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1) \quad\rightarrow\quad \log_3(4x-5)-\log_3(2x+1)=0 \quad\rightarrow\quad \log_3\frac{4x-5}{2x+1}=0$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve la ecuación que resulta:

$$\frac{4x-5}{2x+1}=3^0 \quad\rightarrow\quad \frac{4x-5}{2x+1}=1 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}4x-5&=2x+1\\2x&=6\\x&=3\end{aligned}$$

4 Resuelve la ecuación: $\log_2\sqrt{3x-1}=1-\log_2\sqrt{x+1}$.

**Solución**

Se agrupan los logaritmos en un solo miembro de la igualdad:

$$\log_2\sqrt{3x-1}+\log_2\sqrt{x+1}=1$$

Se aplica la propiedad 5 para expresar la suma de logaritmos como el logaritmo de un producto:

$$\log_2\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=1$$

Se transforma la expresión a su forma exponencial y se multiplican los factores:

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=2^1 \quad\rightarrow\quad \sqrt{3x^2+2x-1}=2$$

Para eliminar la raíz se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2=(2)^2 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1=4$$

Se resuelve la ecuación resultante:

$$3x^2+2x-1=4 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1-4=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-5=0$$

$$3x^2+5x-3x-5=0$$

$$x(3x+5)-1(3x+5)=0$$

$$(3x+5)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{5}{3},\ x=1$$

Por consiguiente, los valores de la incógnita son: $-\frac{5}{3}$ y 1 , el valor que satisface la ecuación logarítmica es $x = 1$

5 Resuelve la ecuación: $\ln(x+5)=2+\ln x$.

**Solución**

Los logaritmos se colocan de un solo lado de la igualdad:

$$\ln(x+5)-\ln x=2$$

Se aplica la propiedad de división de argumentos:

$$\ln\frac{x+5}{x}=2$$

Se transforma a su forma exponencial y se resuelve la ecuación resultante:

$$e^2=\frac{x+5}{x} \qquad xe^2=x+5 \qquad xe^2-x=5$$

$$x(e^2-1)=5$$

$$x=\frac{5}{e^2-1}$$

# EJERCICIO 143

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log_2(x+3)=2$
2. $\log_4(4-3x)=3$
3. $\log_6(5x-9)^2=4$
4. $\log_4\sqrt{15x+1}=2$
5. $\log\sqrt{x^2+64}=1$
6. $\log_3 81-\log_3(x-4)=2$
7. $\log_7(x+9)+\log_7 49=4$
8. $\log_5 25-\log_5(x+100)=-1$

9. $\log(x+3)^2 = 1+\log(3x-11)$

10. $\log_3 x + \log_3(2x-3) = 3$

11. $\log(x+2) = -1+\log(3x-14)^2$

12. $\log_5(4-x)^3 = \log_5(6+x)^3$

13. $\log(2x+10)^2 - \log(1-x) = 2$

14. $\log_8(x-4)+\log_8(x-1) = \log_8 5x - \log_8 3$

15. $\log_6 \sqrt[3]{3x+1} = \log_6 \sqrt[3]{10} + \log_6 \sqrt[3]{x-2}$

16. $\log(8x+4) + \log(7x+16) = \log(x-2)^2 + 2$

17. $\log_2(x-1) - \log_2(3x+1) = 3 - \log_2(6x+2)$

18. $\log_{\sqrt{2}}(x-3)+\log_{\sqrt{2}}(x+2) = 4+\log_{\sqrt{2}} x$

19. $\log_2(x+1) + \log_2(3x-5) = \log_2(5x-3)+2$

20. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}+1\right) = 1+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1}$

21. $\ln(x+1) = 1+\ln(x-1)$

22. $\ln x + \ln(x-3e) = \ln 4 + 2$

23. $\ln(x-2) = \ln 12 - \ln(x+2)$

24. $\ln(x-1) - \ln(x-2) = \frac{1}{2}$

25. $\ln(2x-3) - \ln(x+1) = e$

26. $\ln(x^2+x) + \ln e = \ln(x+1)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente se llaman ecuaciones exponenciales y su solución se obtiene al aplicar los siguientes métodos:

1. Si el argumento o resultado se puede expresar como potencia de la base, sólo se igualan exponentes.
2. Se aplican las propiedades de los logaritmos para encontrar el valor de la incógnita.

### EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación: $2^{x+1} = 32$.

**Solución**

Se expresa a 32 como $2^5$, se sustituye en la ecuación:

$$2^{x+1} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{x+1} = 2^5$$

En la ecuación resultante las bases son iguales, entonces, también los exponentes:

$$x + 1 = 5$$

Al resolver esta ecuación, se determina que: $x = 4$

**2** Obtén el valor de la incógnita en la ecuación: $9^{x-1} = 81^x$.

**Solución**

El resultado $81^x$ se expresa como $9^{2x}$, al sustituir la equivalencia:

$$9^{x-1} = 81^x \quad \rightarrow \quad 9^{x-1} = 9^{2x}$$

Para que la igualdad se cumpla, tanto bases como exponentes deben ser iguales, entonces:

$$x - 1 = 2x$$

Se resuelve la ecuación y resulta que: $x = -1$

3 Resuelve la siguiente ecuación: $4^{x-2} = 8^{1-x}$.

**Solución**

Ambas bases se descomponen en sus factores primos y la ecuación se expresa como:

$$4^{x-2} = 8^{1-x} \rightarrow (2^2)^{x-2} = (2^3)^{1-x} \rightarrow 2^{2(x-2)} = 2^{3(1-x)}$$

Se eliminan las bases y se igualan los exponentes, para obtener la ecuación:

$$2(x-2) = 3(1-x)$$

Finalmente se resuelve la ecuación y se determina el valor de la incógnita:

$$2(x-2) = 3(1-x)$$
$$2x - 4 = 3 - 3x$$
$$2x + 3x = 3 + 4$$
$$5x = 7$$
$$x = \frac{7}{5}$$

Otra forma de resolver una ecuación exponencial es aplicar logaritmos, como ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $5^x = 625^2$.

**Solución**

Se aplican logaritmos a los dos miembros de la igualdad:

$$\log 5^x = \log 625^2$$

Se aplica la propiedad 3 para despejar a $x$ y se efectúan las operaciones:

$$x \log 5 = 2 \log 625$$

$$x = \frac{2\log 625}{\log 5} = \frac{2(2.7959)}{0.6989} = 8$$

Por tanto, $x = 8$

2 ¿Cuál es el valor de la incógnita en la siguiente ecuación: $3^{2x-1} = 7$?

**Solución**

Se aplican logaritmos en ambos miembros de la igualdad,

$$\log 3^{2x-1} = \log 7$$

Se aplica la propiedad 3, se despeja $x$ y se obtiene como resultado:

$$(2x-1)\log 3 = \log 7 \rightarrow 2x - 1 = \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x = \frac{\frac{\log 7}{\log 3} + 1}{2} = 1.3856$$

3 ¿Cuál es el valor de $x$ en la ecuación $3^{2x}-5(3^x)+6=0$?

**Solución**

Esta ecuación se expresa como una ecuación de segundo grado, de la forma:

$$(3^x)^2-5(3^x)+6=0$$

Se factoriza y se resuelven las ecuaciones resultantes:

$$\left(3^x-3\right)\left(3^x-2\right)=0$$

$$3^x-3=0 \qquad\qquad 3^x-2=0$$

$$3^x=3 \qquad\qquad 3^x=2$$

$$\log 3^x=\log 3 \qquad\qquad \log 3^x=\log 2$$

$$x\log 3=\log 3 \qquad\qquad x\log 3=\log 2$$

$$x=\frac{\log 3}{\log 3}=\frac{0.4771}{0.4771}=1 \qquad\qquad x=\frac{\log 2}{\log 3}=\frac{0.3010}{0.4771}=0.6309$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: 1 y 0.6309

4 Resuelve la ecuación: $\frac{e^{2y}+4}{e^{2y}}=3$.

**Solución**

La ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$e^{2y}+4=3e^{2y}$$

Se despeja el término $e^{2y}$:

$$e^{2y}-3e^{2y}=-4 \qquad\qquad -2e^{2y}=-4$$

$$e^{2y}=2$$

En ambos miembros de la igualdad se aplica el logaritmo natural y se obtiene:

$$\ln e^{2y}=\ln 2 \qquad\qquad 2y\ln e=\ln 2 \qquad\qquad 2y(1)=\ln 2$$

$$2y=\ln 2$$

$$y=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$y=\ln\sqrt{2}$$

## EJERCICIO 144

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $5^x=625$
2. $3^x=8$
3. $9^{2x}=9^0$
4. $64^x=8$
5. $(2.37)^x=2.83$
6. $(2.4)^x=5.76$
7. $5^{x-1}=25$
8. $7^{3x-3}=343$
9. $3^{2x+3}=3$
10. $4^{x+1}=16^{x-1}$
11. $5^{2x-3}=4$
12. $3^x=0.15$
13. $(0.125)^x=128$
14. $2^{3x+1}=256$
15. $5^x=625^{3+x}$
16. $49^{1-2x}=7^x$
17. $25^{x-2}=5^{1-x}$
18. $3^x=243^{x-2}$
19. $2^{-(x+3)}=32^x$
20. $3^{x^2}=729$
21. $2^{x^2-2x}=8$

22. $25^x + 5^{x+1} = 750$

23. $6^{2x+5} - 36 = 0$

24. $4^{x^2+3x} = \frac{1}{16}$

25. $7(3)^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

26. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right) = \log_2\left(3^{x-1}+1\right)^2$

27. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

28. $12^{x^2-2x+3} = 1\,728$

29. $5\left(7^{2x-1}\right) = 7\left(5^{x+2}\right)$

30. $2^{-2x} + 2^{-x} = 2$

31. $\frac{e^y - 1}{2 - 3e^y} = \frac{2}{7}$

32. $e^{2x} - e^{x+2} = e^{x+1} - e^3$

33. $\frac{4e^{3x} - 5}{e^{3x} - 1} = 3$

34. $\frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{3}{e^x + 2} = \frac{6}{e^{2x} - 4}$

35. $e^{2x} + 2\sqrt{e^{2x+1}} = 1 - e$

36. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{3}{2}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los logaritmos son una herramienta excelente para la solución de problemas propios de las ciencias, a continuación se ejemplifica su uso:

### Química

En química los logaritmos se emplean para calcular la acidez de las soluciones.

$$\text{pH} = -\log\left[\ H^+\ \right]$$

Donde:
pH = acidez de una solución.

$\left[\ H^+\ \right]$ = concentración de iones de hidrógeno en iones-gramo equivalente por litro.

1 Determina el pH de una solución, que tiene una concentración de iones de hidrógeno de $10^{-8}$ iones-g/lt.

**Solución**

La concentración de iones de hidrogeno en la solución es de:

$$\left[\ H^+\ \right] = 10^{-8} \text{ iones-g/lt}$$

Se sustituye este valor en la fórmula y se obtiene:

$$\text{pH} = -\log\left[\ H^+\ \right]$$
$$\text{pH} = -\log\left[\ 10^{-8}\ \right] \quad \text{se aplica la propiedad 3}$$
$$\text{pH} = -(-8)\log\left[\ 10\right] = (8)(1)$$
$$\text{pH} = 8$$

2 Encuentra la concentración de iones de hidrógeno de una solución, si su pH es de 7.

**Solución**

Se sustituye pH = 7 en la fórmula y se despeja $\left[\ H^+\ \right]$

$$\text{pH} = -\log\left[\ H^+\ \right]$$
$$7 = -\log\left[\ H^+\ \right]$$
$$-7 = \log\left[\ H^+\ \right]$$
$$\text{anti}\log(-7) = \left[\ H^+\ \right]$$

Por consiguiente, la concentración de iones de hidrógeno de una solución es:

$$\left[\ H^+\ \right] = 10^{-7} \text{ iones-g/lt}$$

**Sismología**

En sismología los logaritmos se emplean para calcular la intensidad de un sismo por medio del siguiente modelo matemático:

$$I_R = \log \frac{A}{t}$$

Donde:

$I_R$ = intensidad del sismo (escala Richter)
$A$ = amplitud (micrómetros)
$t$ = periodo (tiempo en segundos que dura una oscilación)

3 ¿Cuál es la intensidad de un sismo en la escala Richter si su amplitud es de 8 000 micrómetros y su periodo de 0.09 segundos?

**Solución**

Se sustituye $A$ = 8 000 micrómetros y $P$ = 0.09 segundos en la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \qquad I_R = \log \frac{8\,000}{0.09}$$
$$= \log (88\,888.89)$$
$$= 4.95$$

Por tanto, el sismo tiene una intensidad de 4.95 grados en la escala Richter.

4 Un sismo tiene una intensidad de 5.7 grados en la escala Richter, si la amplitud del movimiento es de 9 021.37 micrómetros, ¿cuál es su periodo?

**Solución**

Se despeja la amplitud de la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \quad \rightarrow \quad \text{anti}\log I_R = \frac{A}{t}$$
$$t = \frac{A}{\text{anti}\log I_R}$$

Se sustituye en esta última fórmula $I_R = 5.7$ y $A$ = 9 021.37 micrómetros:

$$t = \frac{9\,021.37}{\text{anti}\log 5.7}$$
$$= \frac{9\,021.37}{501187.23} = 0.0179$$

Por consiguiente, el periodo de una oscilación es de 0.0179 segundos.

**Decaimiento radiactivo**

Otra aplicación de los logaritmos se lleva a cabo en el decaimiento radiactivo. El decaimiento radiactivo de un material está dado por la fórmula:

$$C = C_0 (2)^{-\frac{t}{n}}$$

Donde:

$C$ = cantidad de material radiactivo después de cierto tiempo
$t$ = antigüedad del material
$C_0$ = cantidad presente cuando $t = 0$
$n$ = vida media del material

5 El tiempo de vida media de un material es de 25 años, ¿cuánto de dicho material queda después de haber transcurrido 15 años?

**Solución**

Se sustituye en la fórmula $n = 25$ y $t = 15$ años:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad C = C_0(2)^{-\frac{15}{25}}$$
$$C = C_0(2)^{-0.6}$$
$$C = C_0(0.659) = 0.659C_0$$

Por consiguiente, queda $0.659C_0$ o 65.9% del material inicial.

6 ¿Cuál es la antigüedad de una figura de madera que tiene la cuarta parte de su contenido original de carbono 14, si la vida media del material es de 5 900 años?

**Solución**

Con las propiedades de los logaritmos se despeja $t$:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{C_0} = (2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \log\left(\frac{C}{C_0}\right) = \log(2)^{-\frac{t}{n}}$$

$$\log\left(\frac{C}{C_0}\right) = -\frac{t}{n}\log(2) \quad \rightarrow \quad -\frac{n\log\left(\frac{C}{C_0}\right)}{\log 2} = t$$

Se sustituye $C = \frac{1}{4}C_0$ y $n = 5\,900$ en la última fórmula:

$$t = -\frac{(5\,900)\log\left(\frac{\frac{1}{4}C_0}{C_0}\right)}{\log 2} = -\frac{(5\,900)\log(0.25)}{\log 2} = -\frac{(-3552.15)}{0.3010} = 11\,801.16 \text{ años}$$

Por tanto, la antigüedad de la pieza es de 11 801.16 años.

7 La desintegración de cierta sustancia radiactiva se rige por el modelo matemático:

$$p = p_0 e^{-0.0072\,t}$$

Donde $p_0$ es la cantidad inicial de sustancia y $t$ es el tiempo en años. ¿Calcula el tiempo de vida media de la sustancia?

**Solución**

El tiempo de vida media es el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia se desintegre, es decir $p = \frac{1}{2}p_0$, entonces, se despeja $t$ de la fórmula:

$$p = p_0 e^{-0.0072t} \qquad \frac{p}{p_0} = e^{-0.0072t} \qquad \ln\frac{p}{p_0} = \ln e^{-0.0072t}$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -0.0072\,t\ln e \qquad -\frac{\ln\frac{p}{p_0}}{0.0072} = t$$

Se sustituye $p=\frac{1}{2}p_0$ y se realizan las operaciones:

$$t=-\frac{\ln\frac{p}{p_0}}{0.0072} \qquad t=-\frac{\ln\frac{\frac{1}{2}p_0}{p_0}}{0.0072}=-\frac{\ln 0.5}{0.0072}=96.27$$

Por consiguiente, el tiempo de vida media de dicha sustancia es de 96.27 años.

**Población**

El crecimiento de población está determinado por la fórmula:

$$N=N_o\,e^{kt}$$

Donde:

$N$ = número de habitantes de una población en determinado tiempo
$N_o$ = número de habitantes en una población inicial, cuando $t=0$
$K$ = constante
$t$ = tiempo

8 El modelo matemático que rige el crecimiento de una población es:

$$N=3500e^{0.025t}$$

Calcula el número de habitantes que habrá en 20 años.

**Solución**

Se sustituye el valor de $t=20$ en la fórmula:

$$N=3500e^{0.025(20)}$$
$$=3500e^{0.5}=5\,770.52$$

Por tanto, en 20 años habrá aproximadamente 5 770 habitantes.

9 El siguiente modelo muestra el crecimiento de una población de insectos:

$$N=850(3)^{0.094t}$$

Donde $N$ es el número de insectos y $t$ el tiempo en días. ¿En qué tiempo la población será de 10 200 insectos?

**Solución**

Se despeja $t$ de la fórmula:

$$N=850(3)^{0.094t} \qquad \frac{N}{850}=(3)^{0.094t} \qquad \ln\frac{N}{850}=0.094t\ln(3) \qquad \frac{\ln\frac{N}{850}}{0.094\ln(3)}=t$$

Se sustituye $N=10\,200$ en la última fórmula:

$$t=\frac{\ln\frac{10\,200}{850}}{0.094\ln(3)}=\frac{\ln 12}{0.094\ln(3)}=\frac{2.4849}{0.1032}=24.07 \text{ días}$$

Por consiguiente, deben transcurrir 24.07 días para que se incremente la población de insectos a 10 200.

10 En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 480 a 1 200 en cinco horas. ¿Cuánto tardará la población en aumentar a 8 000?

**Solución**

Se determina el valor de $k$ para la población inicial, donde $N_o = 480$, $N = 1\,200$, $t = 5$,

$$N = No\ e^{kt} \quad \rightarrow \quad 1\,200 = 480\ e^{k(5)} \quad \rightarrow \quad \frac{1200}{480} = e^{5k} \quad \rightarrow \quad e^{5k} = 2.5$$

Se aplica logaritmo natural para despejar $k$:

$$\ln(e^{5k}) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad 5k \ln(e) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 2.5}{5} = \frac{0.9162}{5} = 0.183$$

Entonces, el modelo matemático se expresa como: $N = N_o e^{0.183\,t}$
Se sustituye en la fórmula $N = 8\,000$ y $N_o = 480$

$$8\,000 = 480e^{(0.183)\,t}$$

Para despejar $t$ se aplican logaritmos naturales:

$$\frac{8\,000}{480} = e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = \ln e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = 0.183t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\ln\frac{8\,000}{480}}{0.183} = 15.37$$

Por tanto, en 15.37 horas o en 15 horas 22 minutos 12 segundos, las bacterias aumentarán de 480 a 8 000

**Ley del enfriamiento de Newton**

Con esta ley se obtiene la temperatura $T$ de un cuerpo en función del tiempo $t$; donde $T'$ es la temperatura ambiente, el modelo matemático que la rige es:

$$T = T' + Ce^{kt}$$

Donde:

$T'$ = temperatura del ambiente
$T$ = temperatura del cuerpo después de cierto tiempo, además $T < T'$
$C$ y $k$ = constantes

11 Una barra de metal se extrae de un horno cuya temperatura es de 250°C. Si la temperatura del ambiente es de 32°C y después de 10 minutos la temperatura de la barra es de 90°C, ¿cuál es su temperatura después de 30 minutos?

**Solución**

La temperatura del ambiente es $T' = 32$°C, la temperatura de la barra al momento de sacarla del horno es de $T = 250$°C y $t = 0$. Al sustituir estos valores en la ley del enfriamiento de Newton.

$$T = T\ + Ce^{kt} \qquad 250 = 32 + Ce^{k(0)} \qquad 250 = 32 + C$$

$$250 - 32 = C$$

$$218 = C$$

Se sustituye el valor de $C = 218$°C en la ley:

$$T = 32 + 218e^{kt}$$

Se sustituye $t = 10$ minutos y $T = 90$°C en la ley y se despeja $e^{k(10)}$

$$90 = 32 + 218e^{k(10)} \qquad \frac{90 - 32}{218} = e^{k(10)} \qquad 0.2660 = e^{10k}$$

En la última igualdad se aplica logaritmo natural a ambos miembros para despejar a $k$:

$$\ln 0.2660 = \ln e^{10k} \qquad \ln 0.2660 = 10k \ln e \qquad \frac{\ln 0.2660}{10} = k$$

$$-0.1324 = k$$

Al sustituir este valor se obtiene que la ley del enfriamiento para la barra es:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324t}$$

Finalmente, se sustituye $t = 30$ minutos en la fórmula anterior:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324(30)} \qquad T = 32 + 218e^{-3.972}$$
$$= 32 + 218(0.01883)$$
$$= 32 + 4.1049$$
$$= 36.1049\,°C$$

Por consiguiente, la temperatura de la barra después de 30 minutos es de: $36.1049\,°C$

## EJERCICIO 145

Resuelve los siguientes problemas:

1. Obtén el pH de una solución, cuya concentración es de $1.90 \times 10^{-5}$ iones de hidrógeno/lt.
2. La concentración de una conserva de vinagre de iones de hidrógeno es de $6 \times 10^{-4}$. Determina su pH.
3. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrógeno de una sustancia, cuyo pH es de 9?
4. Un sismo se presenta con 6 000 micrómetros de amplitud y un periodo de 0.3 segundos. Determina la intensidad del movimiento sísmico en la escala Richter.
5. Encuentra el periodo de un sismo de 90 000 micrómetros con intensidad de 5 grados en la escala Richter.
6. Un sismo tiene un periodo 0.35 segundos de duración y alcanza 4 grados en la escala Richter. ¿Cuál es su amplitud?
7. El tiempo de vida media de un material es de 40 años. ¿Cuánto de dicho material queda después de 30 años?
8. La vida media del tritio es de 12.5 años. ¿Cuánto tardará en desintegrarse 30% de una muestra de este metal?
9. La desintegración de una sustancia radiactiva está dada por el siguiente modelo:

   $$V = V_0 e^{-0.005t}$$

   Donde $V_0$ es la cantidad inicial de material y $t$ es el tiempo. ¿Cuál es el tiempo de vida media de dicho material?
10. El modelo que rige el crecimiento poblacional de una ciudad es:

    $$N = 15\,000e^{0.02t}$$

    Donde $N$ es el número de habitantes y $t$ el tiempo en años. ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 10 años?
11. En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 150 a 830 en 2 horas. ¿Cuánto tardarán en llegar a 3 000?
12. La población actual de ratas en una ciudad es de 40 000; si se duplican cada 8 años, ¿cuándo habrá 500 000 roedores?
13. Del horno de una estufa se saca una rosca, cuya temperatura es de 180°C. Si la temperatura del ambiente es de 25°C, y después de 8 minutos la temperatura de la rosca es de 100°C, ¿cuál es su temperatura después de 15 minutos?

14. La temperatura del ambiente una tarde es de 21°C. Si se sirve agua para café con una temperatura de 95°C, y después de 4 minutos la temperatura del agua es de 80°C, ¿cuál es su temperatura después de 20 minutos?

15. Una barra de aluminio se encuentra a una temperatura de 400°C y la temperatura ambiental es de 28°C. Si después de 30 minutos la temperatura de la barra es de 300°C, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que su temperatura sea de 120°C?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 15

## PROGRESIONES

**Reseña HISTÓRICA**

*Sucesión de Fibonacci*

Leonardo de Pisa nació en Italia y fue educado en África del norte. Su obra principal es *Liber Apaci* (*Libro acerca del ábaco*), donde expone la importancia del sistema de numeración indoarábiga. Escrita en 1202 sólo se conserva una versión de 1228, donde aparece un problema sobre el nacimiento de conejos, que da origen a la sucesión de Fibonacci. Por muchos años fue objeto de numerosos estudios que permitieron descubrir muchas de sus propiedades, además de que Kepler la relacionó con la sección áurea y el crecimiento de las plantas.

La sucesión de Fibonacci se define por:

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Leonardo de Pisa "Fibonacci"
(1170-1250)

## Sucesión infinita

Una sucesión es de la forma:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

donde $a_n$ es el término general y se denota por:

$$a_n = f(n) \text{ o } \{a_n\}$$

Siendo $n$ un número natural, así: $a_1$ representa el primer término, $a_2$ el segundo término, $a_3$ el tercer término, $a_{26}$ el vigésimo sexto término y $a_n$ el $n$-ésimo término de la sucesión.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 La sucesión con $n$-ésimo término $a_n = \frac{1}{4n}$, con $n \in N$, se escribe como:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots \frac{1}{4n}, \ldots$$

2 Escribe la sucesión con $n$-ésimo término $\{3^n\}$.

**Solución**

Ya que $n$ es natural entonces toma los valores 1, 2, 3, 4,…,

$$a_1 = 3^1 \qquad a_2 = 3^2 \qquad a_3 = 3^3 \qquad a_4 = 3^4 \qquad \ldots \qquad a_n = 3^n$$

Por consiguiente, la sucesión es:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^n, \ldots \quad \text{o} \quad 3, 9, 27, 81, \ldots$$

3 Encuentra los términos que conforman la sucesión con término general $a_n = \frac{2n-1}{n}$.

**Solución**

El término general es:

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

Para determinar los elementos de la sucesión, se sustituyen los números naturales:

Si $n = 1$, $a_1 = \frac{2(1)-1}{1} = \frac{2-1}{1} = \frac{1}{1} = 1$

Si $n = 2$, $a_2 = \frac{2(2)-1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

Si $n = 3$, $a_3 = \frac{2(3)-1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$

Por tanto, los términos de la sucesión son: $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{n}$

4 Determina los 4 primeros términos de $\{(-1)^{n+1} - 2n\}$.

**Solución**

Se sustituyen los valores de $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general:

$$\text{Si } n = 1,\ a_1 = (-1)^{1+1} - 2(1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{Si } n = 2,\ a_2 = (-1)^{2+1} - 2(2) = (-1)^3 - 4 = -1 - 4 = -5$$

$$\text{Si } n = 3,\ a_3 = (-1)^{3+1} - 2(3) = (-1)^4 - 6 = 1 - 6 = -5$$

$$\text{Si } n = 4,\ a_4 = (-1)^{4+1} - 2(4) = (-1)^5 - 8 = -1 - 8 = -9$$

Se concluye que los cuatro primeros términos son:

$$-1, -5, -5, -9$$

5 Determina los 5 primeros términos de la sucesión, si $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 3a_n$.

**Solución**

De acuerdo con la regla general se tiene que:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3a_1 = 3(2) = 6$$

$$a_3 = 3a_2 = 3(6) = 18$$

$$a_4 = 3a_3 = 3(18) = 54$$

$$a_5 = 3a_4 = 3(54) = 162$$

Por consiguiente, los 5 primeros términos de la sucesión son:

$$2, 6, 18, 54, 162$$

## EJERCICIO 146

Escribe los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $a_n = 10 - (0.1)^n$
3. $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$
4. $a_n = \frac{2^{n-1}}{n+3}$
5. $a_n = \frac{2n-1}{n!}$
6. $\left\{(-1)^n n^2\right\}$
7. $\{(n-1)(n-2)\}$
8. $\left\{(-1)^{2n-1} \frac{n}{n+1}\right\}$
9. $\left\{\frac{n!}{(n-1)!}\right\}$
10. $\left\{(-1)^{n+1} \frac{2n}{n+1}\right\}$
11. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$
12. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{3}{2} - a_n$
13. $a_1 = \frac{2}{3},\ a_{n+1} = a_n - 1$
14. $a_1 = 27,\ a_{n+1} = -\frac{1}{3} a_n$
15. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = na_n$
16. $a_1 = -2,\ a_{n+1} = (a_n)^2$
17. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{n}}$
18. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = (-a_n)^{n-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma

Dada una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, la suma de los primeros $m$ términos se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$$

donde 1 y $m$ son los valores mínimo y máximo de la variable de la suma $j$.

**Evaluación de una suma.** Es el resultado de la suma de los primeros $m$ términos de una sucesión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{5} j^2$.

**Solución**

Se sustituyen los valores 1, 2, 3, 4, 5 en el término general y se realiza la suma:

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Por tanto, la suma es: 55

2 Encuentra el resultado de la suma: $\sum_{j=3}^{6} (j+2)$.

**Solución**

Se sustituyen los valores: 3, 4, 5, 6 en el término general, y se suman los resultados parciales para obtener como resultado final:

$$\sum_{j=3}^{6} (j+2) = (3+2)+(4+2)+(5+2)+(6+2) = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

3 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{7} 3$.

**Solución**

Debido a que no existe $j$ en la fórmula de sustitución, 3 se suma 7 veces y se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{7} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\sum_{j=1}^{5} (j+2)(j-3)$ ?

**Solución**

Se sustituyen los enteros del 1 al 5:

$$\sum_{j=1}^{5} (j+2)(j-3) = (1+2)(1-3) + (2+2)(2-3) + (3+2)(3-3) + (4+2)(4-3) + (5+2)(5-3)$$

Se realizan las operaciones de los paréntesis y, por último, se efectúa la suma para obtener:

$$= (3)(-2) + (4)(-1) + (5)(0) + (6)(1) + (7)(2)$$
$$= -6 - 4 + 0 + 6 + 14$$
$$= 10$$

Por tanto: $\sum_{j=1}^{5} (j+2)(j-3) = 10$

**5** Determina el valor de $c$ que cumpla con la siguiente igualdad: $\sum_{j=1}^{4}(cj-1)^2 = 214$.

**Solución**

Se desarrolla la suma:

$$(c-1)^2+(2c-1)^2+(3c-1)^2+(4c-1)^2 = 214$$

Se desarrollan los binomios y se reducen los términos semejantes, para luego resolver la ecuación resultante:

$$c^2 - 2c + 1 + 4c^2 - 4c + 1 + 9c^2 - 6c + 1 + 16c^2 - 8c + 1 = 214$$
$$30c^2 - 20c - 210 = 0$$
$$3c^2 - 2c - 21 = 0$$

Por consiguiente: $c = 3$ y $-\frac{7}{3}$

## EJERCICIO 147

Determina las siguientes sumas:

1. $\sum_{j=1}^{8}(2j-3)$
2. $\sum_{j=0}^{10}(j^2-4j)$
3. $\sum_{j=0}^{5}\frac{j+1}{j+2}$
4. $\sum_{j=1}^{6}2^j$
5. $\sum_{j=1}^{6}\left(\sqrt{j+1}-\sqrt{j}\right)$
6. $\sum_{j=1}^{9}2$
7. $\sum_{j=0}^{4}(-2)^{j-1}$
8. $\sum_{j=4}^{10}3$
9. $\sum_{j=1}^{n}n$
10. $\sum_{j=1}^{n}j$

Determina el valor de $c$ que cumpla con las siguientes igualdades:

11. $\sum_{j=1}^{20}2c = 120$
12. $\sum_{j=2}^{8}\frac{c}{3} = \frac{7}{3}$
13. $\sum_{j=4}^{9}(cj-2) = 105$
14. $\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{cj-1}{3}\right)^2 = \frac{286}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Progresión aritmética o sucesión aritmética

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, es una progresión aritmética si existe un número real $r$, tal que para todo número natural $m$ se cumple que:

$$a_m = a_{m-1} + r$$

Donde la diferencia común o razón es $r = a_m - a_{m-1}$

**Ejemplos**

Determina si las siguientes sucesiones son aritméticas:

*a*) $2, 6, 10, 14, \ldots, 4n-2$

*b*) $-3, -5, -7, -9, \ldots, -2n-1$

*c*) $2, 4, 7, 11, \ldots, \frac{n^2+n+2}{2}$

**Solución**

*a*) De la sucesión: 2, 6, 10, 14,…, $4n-2$, determina la diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[4(m)-2\right]-\left[4(m-1)-2\right] = \left[4m-2\right]-\left[4m-4-2\right]$$
$$= 4m - 2 - 4m + 4 + 2$$
$$= 4$$

Esto significa que los términos de la sucesión se encuentran sumando 4 al término anterior, por tanto, la sucesión es aritmética.

*b*) Se determina la diferencia común de la sucesión:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[-2(m)-1\right]-\left[-2(m-1)-1\right] = \left[-2m-1\right]-\left[-2m+2-1\right]$$
$$= -2m - 1 + 2m - 2 + 1$$
$$= -2$$

Por consiguiente, la sucesión es aritmética.

*c*) Se determina la razón o diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[\frac{(m)^2+(m)+2}{2}\right]-\left[\frac{(m-1)^2+(m-1)+2}{2}\right] = \left[\frac{m^2+m+2}{2}\right]-\left[\frac{m^2-m+2}{2}\right]$$
$$= \frac{2m}{2}$$
$$= m$$

La diferencia no es constante, entonces la sucesión no es aritmética.

## Fórmula para determinar el *n*-ésimo término en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética $\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, con razón $r$, entonces el $n$-ésimo término de la sucesión está dado por:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Para todo $n > 1$

Donde:

$a_n$ = $n$-ésimo término de la progresión

$a_1$ = primer término de la progresión

$n$ = número de términos en la progresión

$r$ = razón o diferencia común $\rightarrow$ $r = a_n - a_{n-1} = \ldots = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Determina el 8º término de la progresión $\div\, 1, 4, 7, 10, \ldots$

**Solución**

Se identifica el primer término, el número de términos y la razón para sustituir en la fórmula del $n$-ésimo término:

$$a_1 = 1,\ n = 8\ \text{ y }\ r = 4 - 1 = 3$$

Por consiguiente:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_8 &= 1+(8-1)(3) \\ a_8 &= 1+(7)(3) \\ a_8 &= 1+21 = 22 \end{aligned}$$

Entonces, el 8º término de la progresión es 22

2 ¿Cuál es el 7º término en la progresión $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6} \ldots$ ?

**Solución**

Se determinan los valores de los elementos

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad n = 7 \text{ y } r = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{2} + (7-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} + 6\left(\frac{1}{3}\right) \\ a_7 &= \frac{1}{2} + 2 \\ a_7 &= \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, el 7º término es $\frac{5}{2}$

3 Si en una progresión aritmética el tercer y noveno término son 11 y 35, determina el séptimo término.

**Solución**

De acuerdo al problema:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + (3-1)\,r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ 11 &= a_1 + 2r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_9 &= a_1 + (9-1)\,r \\ a_9 &= a_1 + 8r \\ 35 &= a_1 + 8r \end{aligned}$$

Se genera un sistema de ecuaciones con incógnitas $a_1$ y $r$:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 11 \\ a_1 + 8r = 35 \end{cases}$$

Del cual, al resolverlo, se obtiene que:

$$a_1 = 3 \text{ y } r = 4$$

Luego, el séptimo término es:

$$a_7 = a_1 + (7-1)r = 3 + (6)(4) = 3 + 24 = 27$$

## Fórmulas para determinar el primer término, número de términos y la razón

Todas estas fórmulas se deducen de la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ y dependen de los elementos que se tengan como datos.

- Para encontrar el primer término se despeja $a_1$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n - (n-1)r = a_1$$

Por tanto:

$$a_1 = a_n - (n-1)r$$

- Para encontrar la razón se despeja $r$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n - a_1 = (n-1)r \quad \rightarrow \quad r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Por consiguiente:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

- Para obtener el número de términos se despeja $n$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \frac{a_n - a_1}{r} = n - 1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

En consecuencia:

$$n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Encuentra el primer término de una progresión aritmética, si se sabe que el 13º término es $-28$ y la razón es $-6$.

**Solución**

Se determinan los valores de los elementos:

$$a_{13} = -28,\ n = 13 \ \text{ y } \ r = -6$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene $a_1$:

$$a_1 = a_{13} - (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_1 = -28 - (13-1)(-6)$$

$$a_1 = -28 - (12)(-6)$$

$$a_1 = -28 + 72$$

$$a_1 = 44$$

Por tanto, el primer término es 44

El procedimiento de los despejes es el mismo si se sustituyen los valores directamente en la fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)r$

**2** Determina la razón de la progresión aritmética cuyo primer término es 6 y el 16º es 9.

**Solución**

Se determinan los elementos que se tienen como datos:

$$a_n = a_{16} = 9,\ a_1 = 6 \ \text{ y } \ n = 16$$

Al sustituir en la fórmula y despejar $r$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 9 = 6 + (16-1)r$$

$$9 - 6 = (15)r$$

$$r = \frac{9-6}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Finalmente, la razón de la progresión aritmética es $\frac{1}{5}$

3 ¿Cuál es el número de términos que tiene la progresión aritmética ÷ 4.5, 6.6,…, 25.5?

**Solución**

Se obtienen los datos:

$$a_1 = 4.5,\ a_n = 25.5 \text{ y } r = 6.6 - 4.5 = 2.1$$

Se sustituyen los valores y se despeja $n$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 25.5 = 4.5 + (n-1)(2.1)$$

$$n = \frac{25.5 - 4.5 + 2.1}{2.1}$$

$$n = \frac{23.1}{2.1} = 11$$

Entonces, la progresión tiene 11 términos.

## EJERCICIO 148

Determina cuáles de las siguientes sucesiones son aritméticas:

1. $4, 9, 14, \ldots, 5n - 1$
2. $2, 4, 8, \ldots, 2^n$
3. $\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \ldots, \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}\right)$
4. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$
5. $2, 4, 6, \ldots, 2n$
6. $k + 1, 2k + 3, 3k + 5, \ldots, nk + 2n - 1$

Encuentra el término que se indica para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

7. El 8º término en: ÷ 2, 5, 8,...
8. El 11º término en: ÷ $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$
9. El 15º término en: ÷ $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{4}, \ldots$
10. El 10º término en: ÷ 1, 7, 13,…
11. El 16º término en: ÷ $3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \ldots$
12. El 7º término en: ÷ 120, 108, 96,...
13. El 12º término en: ÷ 0.5, 0, – 0.5,...
14. El 18º término en: ÷ –5, 22, 49,...
15. El 13º término en: ÷ 15, 11.5, 8,...
16. El 17º término en: ÷ $\frac{3}{4}$, 0.875, 1,...

Dados algunos elementos de una progresión aritmética, determina el elemento que se pide:

17. El 1er término si el 13º término es 67 y la razón es 5
18. La razón si el 1er término es 7 y el 10º es – 11
19. El número de elementos de la progresión: ÷ 120, 519,…, 3 312
20. La razón si el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el 8º $-\frac{13}{12}$
21. El 11º término si el 3º es – 4 y el 7º es – 16
22. El 1er término si el 20º es – 62.5 y la razón es – 2.5
23. El número de términos de la progresión: ÷ $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{11}{8}$
24. El 1er término si el 5º es – 9 y el 9º es – 25
25. El 1er término si el 11º es $-\frac{19}{2}$ y la razón $-\frac{2}{3}$
26. Si la razón es $\frac{1}{25}$ del número de términos y el 1er y último término son: 0.15 y 3.75, respectivamente, determina el número de términos.

27. La razón si el cuarto término es $\frac{1}{4}$ y el 11º es 2
28. El 5º término si el 2º es $-\frac{3}{4}$ y el octavo es $-\frac{27}{4}$
29. El 7º término si el 3ero es $4n - 1$ y el 10º es $11n - 8$
30. El 4º término si el 8º es $\frac{44n-19}{6}$ y el 15º $\frac{43n-20}{3}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma de los *n* primeros términos en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$$

Entonces, la suma de los primeros $n$ términos se define como:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Demostración:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots\ldots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r]$$

Al cambiar el orden de los términos y realizar una suma vertical, se obtiene:

$$\begin{aligned} & S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots\ldots\ldots\ldots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r] \\ + \quad & S = [a_1 + (n-1)r] + [a_1 + (n-2)r] + \ldots\ldots\ldots + [a_1 + r] + a_1 \\ \hline & 2S = \underbrace{[2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r] + \ldots\ldots\ldots + [2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r]}_{n \text{ veces}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$2S = n\,[2a_1 + (n-1)\,r] \quad \rightarrow \quad S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]$$

Además sabemos que $a_n = a_1 + (n-1)r$, entonces:

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)r\right]$$

Luego, la fórmula para hallar la suma de los primeros $n$ términos está determinada por:

$$S = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 12 términos de la progresión aritmética:

$$\div\, 2, 7, 12, ...$$

### Solución

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = 2,\ n = 12 \ \text{ y } \ r = 7 - 2 = 5$$

Por consiguiente, el 12º término es:

$$a_{12} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_{12} &= 2 + (12-1)(5) \\ a_{12} &= 2 + (11)(5) \\ a_{12} &= 2 + 55 = 57 \end{aligned}$$

Luego, para encontrar la suma de los 12 términos se sustituyen en la fórmula los siguientes valores:

$$a_1 = 2,\ a_{12} = 57 \text{ y } n = 12$$

Finalmente,

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{12} = \frac{12\left(2+57\right)}{2} = \frac{12(59)}{2} = 354$$

Entonces, la suma de los 12 términos es: 354

2 Encuentra la suma de los 15 primeros términos de la progresión:

$$\div\ \frac{19}{3},\ \frac{17}{3},\ 5,...$$

**Solución**

De esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{19}{3} \quad n = 15 \text{ y } r = \frac{17}{3} - \frac{19}{3} = -\frac{2}{3}$$

Se encuentra el 15º término:

$$a_{15} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (15-1)\left(-\frac{2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (14)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$a_{15} = \frac{19}{3} - \frac{28}{3} = -3$$

Para encontrar la suma de los 15 términos, se sustituye en la fórmula:

$$a_1 = \frac{19}{3} \quad n = 15 \quad a_{15} = -3$$

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{15} = \frac{15\left(\frac{19}{3} + (-3)\right)}{2} = \frac{15\left(\frac{10}{3}\right)}{2} = 25$$

Entonces, la suma de los 15 primeros términos es 25

## EJERCICIO **149**

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuál es la suma de los primeros 8 términos de: $\div$ 1, 7, 13,…?
2. Determina la suma de los 9 términos que conforman la progresión: $\div -5,...,7$
3. Encuentra la suma de los primeros 8 términos de: $\div\ 3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2},...$
4. ¿Cuál es la suma de los 9 primeros términos de: $\div$ 120, 108, 96,…?
5. Encuentra la suma de los 13 términos de: $\div$ 15, 11.5, 8,...
6. Determina la suma de los 12 primeros términos de la progresión: $\div$ 21, 24, 27…
7. Determina la suma de los 11 primeros términos de: $\div -15, -12, -9,...$
8. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: $\div$ 1 000, 988,..., $-188$?
9. Determina la suma de los términos en la progresión: $\div\ 1, 2, 3,\ldots,n$
10. Encuentra la suma de los términos de la progresión: $\div\ 2, 4, 6,\ldots,2n$

11. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: ÷ 1, 3, 5,…, $2n - 1$?
12. ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es 42. Si el último término es 31 y la razón es 5?
13. Determina el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es $\frac{65}{4}$, si el primer término es $\frac{1}{2}$ y la razón $\frac{1}{4}$.
14. La suma de 32 elementos en una progresión aritmética es 1 200. Si la razón es 3, determina el primer término.
15. La suma de 50 términos de una progresión aritmética es 2 550. Si la razón es 2, ¿cuál es el primer y último término de la progresión?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un constructor apila cierto número de bloques de granito de la siguiente manera: 15 bloques en la base y 2 menos en cada fila superior a la anterior. Si en la última fila superior colocó 1, encuentra el total de bloques que apiló.

**Solución**

El problema indica que el primer término de la progresión aritmética es 15, y que al disminuir de 2 bloques por fila, resulta:

$$\div\ 15, 13, 11, \ldots$$

Los datos conocidos son: $a_1 = 15$, $r = -2$ y $a_n = 1$, entonces se debe de calcular el número de filas que se pueden apilar.

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \qquad n = \frac{1-15}{-2} + 1 = 7 + 1 = 8$$

Luego, la suma está determinada por:

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \qquad S_8 = \frac{8\left(15+1\right)}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

Entonces, el constructor apiló 64 bloques de granito.

## EJERCICIO 150

1. El estacionamiento de un centro comercial tiene la siguiente disposición de lugares: la primera fila tiene 50, la segunda 47, y cada fila subsiguiente tiene 3 menos que la anterior. Si la última fila tiene 23 lugares, ¿de cuántos lugares dispone el estacionamiento?
2. Un albañil apilará ladrillos de tal forma que la base tenga 50, la segunda capa 48, la tercera 46, y así sucesivamente hasta que la capa superior tenga 24, ¿cuántos ladrillos en total apilará el albañil?
3. Una empresa va a repartir entre 18 de sus empleados $13 275, como bono de puntualidad. Si la diferencia entre cada uno de los bonos es de $75, determina cuánto recibió el trabajador más puntual.
4. Se apilan 135 rollos de tela de tal manera que la base tendrá el doble de rollos que la última, y la diferencia de rollos entre cada una de las capas será de 1. ¿Cuántos rollos debe tener la última capa?
5. Se van a colocar en filas los asientos para un auditorio, de tal manera que la primera tenga 20, la segunda 23, la tercera 26 y así sucesivamente. Si en total se colocaron 819 asientos, ¿cuántas filas se formaron?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Interpolación de medios aritméticos

Los medios aritméticos son los términos que se encuentran entre el primer y el último término, y dependen directamente del valor de la razón.

La interpolación de medios aritméticos consiste en encontrar los términos de toda la progresión a partir de conocer el primer y último término.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Interpola 4 medios aritméticos entre 5 y 32.5.

**Solución**

En esta progresión los elementos dados son:

$$a_1 = 5 \text{ y } a_n = 32.5$$

Para encontrar el número de términos es necesario sumar los medios aritméticos más 2 (primer y último término), entonces:

$$n = 6$$

Con los datos anteriores se encuentra la razón:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{32.5-5}{6-1}$$

$$r = \frac{27.5}{5}$$

$$r = 5.5$$

Por tanto, la progresión está determinada por:

$$\div\, 5, (5+5.5), (10.5+5.5), (16+5.5), (21.5+5.5), 32.5$$
$$\div\, 5, \quad 10.5, \quad 16, \quad 21.5, \quad 27, \quad 32.5$$

Y los 4 medios aritméticos son:

$$10.5, 16, 21.5, 27$$

2 Interpola 5 medios aritméticos entre 11 y – 13.

**Solución**

Los términos dados son,

$$a_1 = 11, \ a_n = -13 \text{ y } n = 7$$

Se obtiene la razón,

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-13-11}{7-1} = \frac{-24}{6} = -4$$

Por consiguiente, los medios aritméticos son:

$$7, 3, -1, -5, -9$$

## Media aritmética o promedio aritmético

- Sean los números $x_1$ y $x_2$, entonces la media aritmética o promedio aritmético se define por:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Sea el conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, en consecuencia la media aritmética o promedio aritmético se determina así:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 En el grupo de danza se inscribieron 9 alumnos, cuyas edades son: 12, 13, 13, 14, 15, 12, 14, 15, 11. Determina la edad promedio del grupo.

**Solución**

Se suman todas las edades y el resultado se divide entre el número de éstas, entonces:

$$\text{Edad promedio} = \frac{12+13+13+14+15+12+14+15+11}{9} = 13.2$$

Por tanto, la edad promedio es de 13.2 años.

2 Un alumno tiene en sus 4 primeras evaluaciones las siguientes calificaciones: 7.6, 9, 8.4 y 7.8. ¿Qué calificación necesita tener en la quinta evaluación para exentar la materia con 8?

**Solución**

Sea $x$ la quinta evaluación y el promedio 8, entonces:

$$\text{Promedio} = \frac{\text{suma de las evaluaciones}}{\text{total de evaluaciones}} \qquad 8 = \frac{7.6+9+8.4+7.8+x}{5}$$

Al despejar $x$ de la expresión se obtiene:

$$5(8) - (7.6 + 9 + 8.4 + 7.8) = x$$
$$40 - 32.8 = x$$
$$7.2 = x$$

Por consiguiente, la calificación mínima que necesita para exentar es 7.2

## EJERCICIO 151

Resuelve los siguientes problemas:

1. Interpola 5 medios aritméticos en la progresión, cuyo primer y último término son: 21 y 60.
2. Interpola 7 medios aritméticos en la progresión, cuyos extremos son: 5 y 17.
3. Interpola 6 medios aritméticos entre $\frac{2}{3}$ y 3.
4. Interpola 7 medios aritméticos entre 0.5 y $8\frac{1}{2}$.
5. Interpola 6 medios aritméticos entre $-3$ y 0.5.
6. Interpola 3 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{3}$.
7. ¿Cuál es el promedio de un alumno cuyas calificaciones son: 6, 9, 8.4, 7.8 y 10?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

La compañía de dulces La Pasita compró una máquina registradora a un precio de $12 000. Al cabo de 6 años la vendió en $5 520. La depreciación anual es constante, calcula el valor de la registradora al final de cada año.

**Solución**

Ésta es una progresión aritmética, cuyos precios inicial y final son: $12 000 y $5 520 respectivamente, entonces, se deben interpolar 5 periodos (años).

En consecuencia:

$$a_1 = 12\,000,\ \ a_n = 5\,520\ \text{ y }\ n = 7$$

Se encuentra la depreciación anual (razón):

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{5\,520 - 12\,000}{7-1} = \frac{-6\,480}{6} = -1\,080$$

El signo negativo indica que el costo de la máquina va a disminuir $1 080 por año.

Por tanto, el valor de la máquina al final de cada año es:

| | |
|---|---|
| 1^er^ año: $ 10 920 | 4° año: $ 7 680 |
| 2° año: $ 9 840 | 5° año: $ 6 600 |
| 3^er^ año: $ 8 760 | 6° año: $ 5 520 |

# EJERCICIO 152

1. En un salón de clases de 15 alumnos la edad promedio es 7.8; 9 de ellos tienen 8 años; la edad de otros 3 es 7. ¿Cuál es la edad de los restantes si tienen los mismos años?
2. ¿Cuál es la calificación que debe obtener un alumno en el cuarto bimestre para exentar con 8.5 la materia de biología, si en los 3 primeros bimestres obtuvo las siguientes evaluaciones: 8.7, 7.9 y 7.6?
3. Determina el promedio de una progresión aritmética que se conforma de ocho términos, su primer término es 2 y el último 16.
4. Obtén la media aritmética de la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
5. El lado norte del tejado de una casa lo forman 476 tejas, ordenadas de tal forma que la primera hilera tiene 80 y la última 56. Determina el número de hileras y el de tejas que contiene cada hilera.
6. Si el lado norte de un tejado consta de $x$ menos 50 hileras, y $x$ es el número de tejas que tiene la primera hilera. Si las hileras subsecuentes exceden en 4 tejas a la anterior, y el total de tejas utilizadas es de 576, determina el número de hileras y mediante una interpolación precisa el número de tejas de cada hilera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Progresión geométrica o sucesión geométrica

A la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, se le llama sucesión o progresión geométrica, si para todo $a_m$ que pertenezca a la sucesión existe una constante $r$ diferente de cero, tal que:

$$a_{m+1} = a_m\, r$$

Donde la razón común es $r = \dfrac{a_{m+1}}{a_m}$ y se denota con el símbolo ÷÷

**Ejemplos**

Determina cuál de las siguientes sucesiones es geométrica.

*a*) $3, 6, 3\cdot 2^{n-1}$

*b*) $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81},\ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$

*c*) $1, 4, 7,\ldots, 3n-2$

**Solución**

*a*) Se obtiene la razón común:

$$r=\frac{a_{m+1}}{a_m}=\frac{3\cdot 2^{(m+1)-1}}{3\cdot 2^{m-1}}=\frac{3\cdot 2^{m}}{3\cdot 2^{m-1}}=2$$

Se observa que los elementos de la progresión: $3, 6, 12,\ldots, 3\cdot 2^{n-1}$ se obtienen al multiplicar por 2 el término que le precede, por tanto la progresión es geométrica.

*b*) Se determina la razón común para la comprobación:

$$r=\frac{a_{m+1}}{a_m}=\frac{\frac{1}{3^{(m+1)+1}}}{\frac{1}{3^{m+1}}}=\frac{\frac{1}{3^{m+2}}}{\frac{1}{3^{m+1}}}=\frac{3^{m+1}}{3^{m+2}}=\frac{1}{3}$$

Significa que los términos subsecuentes de la progresión: $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81},\ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$ se obtienen al multiplicar por $\frac{1}{3}$ entonces se deduce que es progresión geométrica.

*c*) Al obtener la razón de la progresión:

$$r=\frac{a_{m+1}}{a_m}=\frac{3(m+1)-2}{3(m)-2}=\frac{3m+3-2}{3m-2}=\frac{3m+1}{3m-2}$$

La progresión no es geométrica, ya que los términos siguientes no se pueden obtener al multiplicar por la razón resultante.

## Fórmula para obtener el *n*-ésimo término en una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica $\div\div\ a_1\, a_2, a_3,\ldots, a_n$ y razón común $r$, entonces el $n$-ésimo término se define como:

$$a_n = a_1\cdot r^{n-1}$$

Donde:

$a_n$ = $n$-ésimo término

$a_1$ = primer término

$r$ = razón de la progresión

$n$ = número de términos de la progresión

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Determina el 9º término de la progresión $\div\div 10, 20, 40,\ldots$

**Solución**

Se obtiene la razón al dividir uno de los elementos entre su antecesor:

$$r=\frac{40}{20}=\frac{20}{10}=2$$

Entonces, los elementos dados son:

$$a_1 = 10,\ r = 2 \text{ y } n = 9$$

Al sustituir, se obtiene el 9º término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_9 = 10(2)^{9-1} = 10(2)^8$$
$$a_9 = 10(256)$$
$$a_9 = 2\,560$$

Finalmente, el 9º término es 2 560

2 Determina el 7º término de ∺200, 100, 50,...

**Solución**

De la progresión se tienen como datos:

$$a_1 = 200,\ r = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \text{ y } n = 7$$

Luego, para encontrar el 7º término se sustituye en la fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{200}{64} = \frac{25}{8}$$

Entonces, el 7º término es $\frac{25}{8}$

3 Si en una progresión geométrica el 3er y 7º términos son 18 y 1 458, ¿cuál es el 5º término?

**Solución**

De acuerdo con el problema

$$a_3 = a_1 r^{3-1} \qquad\qquad a_7 = a_1 r^{7-1}$$
$$18 = a_1 r^2 \qquad\qquad 1458 = a_1 r^6$$

Se obtienen las ecuaciones:

$$a_1 r^2 = 18 \quad \text{y} \quad a_1 r^6 = 1458$$

Pero $a_1 r^6 = a_1 r^2 \cdot r^4 = 18r^4$, entonces

$$18r^4 = 1\,458 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[4]{\frac{1458}{18}} \quad \rightarrow \quad r = 3$$

Al sustituir este valor, se obtiene $a_1$:

$$a_1(3)^2 = 18 \rightarrow a_1 = \frac{18}{9} = 2$$

En consecuencia, el 5º término es:

$$a_5 = a_1 r^4 = (2)(3)^4 = (2)(81) = 162$$

## Fórmulas para obtener el 1er término, número de términos y la razón

Todas las fórmulas subsecuentes se obtienen de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

- Para encontrar el 1er término:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

- Para encontrar la razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

- Para determinar el número de términos que contiene la progresión geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

Estas fórmulas se aplican, según las necesidades de los ejercicios que se deben resolver, como se ejemplifica a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En una progresión geométrica la razón es $\frac{1}{2}$ y el 8º término es $\frac{1}{8}$. Calcula el 1er término.

**Solución**

Los datos en este problema son:

$$a_8 = \frac{1}{8} \qquad n = 8 \qquad r = \frac{1}{2}$$

Entonces, al sustituir los valores en nuestra fórmula, se obtiene:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{128}} = \frac{128}{8} = 16$$

Por tanto, el 1er término de la progresión es 16

2 ¿Cuál es la razón de la progresión geométrica, cuyo 1er y 7º término es $\frac{1}{5}$ y 3 125 respectivamente?

**Solución**

Los elementos que se tienen como datos son:

$$a_1 = \frac{1}{5} \qquad a_7 = 3\,125 \qquad n = 7$$

Luego, al sustituir en nuestra fórmula se obtiene el valor de la razón, entonces:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[7-1]{\frac{3125}{\frac{1}{5}}} = \sqrt[6]{15\,625} = 5$$

Finalmente, la razón de la progresión es 5

3 ¿De cuántos términos está formada la siguiente progresión geométrica?

$$\div\div\ 1, 2, \ldots, 512$$

**Solución**

De la progresión se tiene:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 512 \qquad r = \frac{2}{1} = 2$$

Se sustituyen los valores para obtener el número de términos.

$$n = \frac{\log(512) - \log(1) + \log(2)}{\log(2)} = \frac{2.7092 - 0 + .3010}{.3010} = 10$$

El número de términos de la progresión geométrica es 10

## EJERCICIO 153

De las siguientes sucesiones determina cuál es geométrica:

1. $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$
2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3^{n-2}}{2^{n-1}}$
3. $1, 2, 6, \ldots, n!$
4. $-4, -2, 0, \ldots, 2n-6$
5. $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3$
6. $3, 6, 12, \ldots, 3\cdot 2^{n-1}$

Determina el término que se indica en cada una de las siguientes progresiones geométricas:

7. El 6º término de $\div\div \frac{1}{3}, -1, 3, \ldots$
8. El 9º término de $\div\div \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots$
9. El 5º término de $\div\div -5, 10, -20, \ldots$
10. El 7º término de $\div\div 2.5, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$
11. El 10º término de $\div\div -9, -3, -1, \ldots$
12. El 8º término de $\div\div 8, 4, 2, \ldots$
13. El 12º término de $\div\div \frac{729}{64}, \frac{243}{32}, \frac{81}{16}, \ldots$
14. El 9º término de $\div\div 1, -m^3, m^6, \ldots$
15. El 10º término de $\div\div n^{-4}, n^{-2}, 1, \ldots$
16. El 7º término de $\div\div \frac{(n+1)^5}{n^3}, \frac{(n+1)^4}{n^2}, \ldots$
17. El 13º término de $\div\div 2^{3x-4}, 2^{5x-5}, 2^{7x-6}, \ldots$
18. El 9º término de $\div\div a_1, a_1r^2, a_1r^4, \ldots$

Dados algunos elementos de una progresión geométrica, halla el elemento que se pide:

19. El 1er término, si la razón es $\frac{1}{2}$ y el 6º término es $\frac{1}{16}$
20. El 2º término, si su razón es $-2$ y el 7º es $-128$
21. La razón, si el 1er término es $\frac{3}{5}$ y el 5º es $\frac{1}{135}$
22. La razón, si el 1er término es $-8$ y el 7º es $-\frac{729}{512}$
23. El número de términos de $\div\div -2, -6, \ldots, -162$
24. El número de términos si la razón es $\frac{2}{5}$, el 1er término es $\frac{1}{2}$ y el último $\frac{64}{78\,125}$
25. El número de términos de $\div\div 5^x, 5^{2x+1}, \ldots, 5^{9x+8}$

26. El 1$^{er}$ término si el 4$^{o}$ es $\frac{2}{27}$ y el 7$^{o}$ $\frac{16}{729}$

27. El 4$^{o}$ término si el 2$^{o}$ es 1 y el 9$^{o}$ es $\frac{1}{m^{14}}$

28. El 11$^{o}$ término si el 3$^{o}$ es $2^{\frac{7}{6}x-1}$ y el 9$^{o}$ es $2^{\frac{19}{6}x-7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un cultivo de 20 000 bacterias aumenta su población 25% por hora. ¿Cuántas bacterias se generan en la sexta hora?

**Solución**

El cultivo es el 100% inicial de bacterias, a la primera hora aumenta 25%, esto indica que el porcentaje actual es 125% o $\frac{5}{4}$ de la cantidad inicial; luego, el número de elementos que conforman la sucesión es el término inicial más los 6 términos siguientes.

De acuerdo con los datos:

$$a_1 = 20\,000,\ r = \frac{5}{4}\ \text{y}\ n = 7$$

Al sustituir en la fórmula para obtener el $n$-ésimo término:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad a_7 = 20\,000\left(\frac{5}{4}\right)^{7-1} = 76\,293.9 \approx 76\,294$$

Por tanto, al cabo de 6 horas habrá aproximadamente 76 294 bacterias.

## EJERCICIO 154

1. Determina la sucesión de 4 términos, cuyo primer y cuarto término sea 9 y – 1, de tal manera que los tres primeros números formen una progresión geométrica y los últimos 3, una progresión aritmética.

2. Una generación celular es la división de una célula en 2. Si se tienen 8 células iniciales, ¿cuántas células se han generado tras 10 generaciones celulares?

3. Tres números forman una progresión aritmética con una razón de 2. Si el segundo número se incrementa en 1 y el tercero en 5, los números resultantes forman una progresión geométrica. Determina los números de la progresión aritmética

4. Determina el número de células iniciales si se obtuvieron 98 304 después de 14 generaciones celulares.

5. Un cultivo de 25 000 bacterias aumenta 5% en 20 minutos. ¿Cuál será la población de bacterias al transcurrir una hora 20 minutos?

6. Del problema anterior establece la fórmula general que determina el número de bacterias en $t$ horas.

7. Se invierten $230 000 a una cuenta que da por concepto de intereses 5% anual. ¿Cuánto se tendrá al final de 8 años?

8. En cierta ciudad nacieron 32 500 bebés en el año 2005, si el número de nacimientos se incrementa 20% anual, ¿cuántos bebés se estima que nazcan en el año 2009?

9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 cm$^2$ y se inscribe otro cuadrado de tal manera que los extremos coincidan con los puntos medios del primero; después se inscribe otro cuadrado en el segundo con la misma disposición. Si se conoce que el área de un cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado en el que se inscribe, ¿cuál es el área del noveno cuadrado inscrito?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Deducción de la fórmula.

Sea la progresión geométrica $\div\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, llamemos $S$ a la suma de los primeros $n$ términos, entonces:

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \quad \rightarrow \quad (1)$$

Al multiplicar por la razón la igualdad:

$$S \cdot r = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n \cdot r \quad \rightarrow \quad (2)$$

Al restar a la ecuación 2 la ecuación 1, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} S \cdot r &=& \quad\;\; a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \cdot r \\ -S &=& -a_1 - a_1 \cdot r - a_2 \cdot r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - a_{n-1} \cdot r \\ \hline S \cdot r - S &=& a_n \cdot r - a_1 \end{array}$$

Entonces:

$$S(r-1) = a_n \cdot r - a_1 \quad \text{pero} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S(r-1) = a_1 r^{n-1} \cdot r - a_1$$

$$S(r-1) = a_1 r^n - a_1$$

Finalmente:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \quad \text{o} \quad S = a_1\frac{\left(r^n - 1\right)}{r-1} = a_1\frac{\left(1 - r^n\right)}{1-r}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 8 términos de la progresión geométrica:

$$\div\div\, \frac{4}{3}, 2, 3, \ldots$$

**Solución**

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{4}{3} \qquad r = \frac{3}{2} \qquad n = 8$$

Luego, al sustituir en la fórmula se obtiene la suma de los 8 términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6\,561}{256} - 1\right)}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{6\,305}{256}\right) = \frac{6\,305}{96}$$

Se concluye que la suma de los primeros 8 términos de la progresión es $\frac{6\,305}{96}$

**2** Encuentra el 1^er^ término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 10 términos es 341 y la razón es – 2.

**Solución**

De acuerdo al problema los datos son:

$$n = 10,\ r = -2 \ \text{ y } \ S = 341$$

Al sustituir en la fórmula y despejar $a_1$ se obtiene:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \qquad 341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-2-1}$$

Se simplifica la expresión y se despeja $a_1$:

$$341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-3} \qquad 341 = \frac{a_1\left[1024 - 1\right]}{-3} \qquad a_1 = \frac{(-3)(341)}{1023} = \frac{-1023}{1023} = -1$$

Por tanto, el 1^er^ término de la progresión es – 1

**3** Determina el número de elementos de una progresión geométrica, cuya suma es 1 093, su 1^er^ término es 1 y la razón es 3.

**Solución**

De acuerdo con el problema:

$$a_1 = 1,\ r = 3 \ \text{ y } S = 1\,093$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \qquad 1\,093 = \frac{1\left(3^n - 1\right)}{3-1}$$

Al simplificar y despejar $n$ se obtiene:

$$1\,093 = \frac{3^n - 1}{2} \qquad 2\,186 = 3^n - 1 \qquad 2\,187 = 3^n \qquad (3)^7 = 3^n$$

$$7 = n$$

Por consiguiente, se realizó la suma de los primeros 7 términos de la progresión.

# EJERCICIO 155

Encuentra la suma de los primeros términos que se indican en las siguientes progresiones geométricas:

1. Seis términos de $\div\div\ -9\ ,\ -3\ ,\ -1\ , ...$
2. Siete términos de $\div\div \frac{3}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{2}{3}\ , ...$
3. Nueve términos de $\div\div\ -5\ ,\ 10\ ,\ -20\ , ...$
4. Diez términos de $\div\div$ 9, 12, 16,…
5. Quince términos de $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, ...$
6. Dieciocho términos de $\div\div$ 2, 4, 8,…

7. Doce términos de ÷÷ $\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{27}$,...

8. Diez términos de ÷÷ 1, $-\sqrt{2}$, 2,…

9. Veinte términos de ÷÷ $n, n^2, n^3$,…

10. Nueve términos de ÷÷ $2^{x-2}, 2^{x-1}, 2^x$,…

11. $n$ términos de ÷÷ $a_1, a_1r^2, a_1r^4$,…

12. $n$ términos de ÷÷ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$,...

Resuelve los siguientes problemas:

13. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica; si la suma es 255, el 1er término es – 3 y la razón – 2.

14. Determina la razón común de una progresión geométrica si el 1er término es –8 y el 6º término $-\frac{1}{4}$.

15. ¿Cuál es el 1er término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 8 términos es $\frac{6\,305}{81}$ y la razón es $\frac{2}{3}$?

16. ¿Cuál es el último término de una progresión geométrica cuya suma es $\frac{31}{64}$, su 1er término es $\frac{1}{4}$ y la razón $\frac{1}{2}$?

17. Determina el 1er término de una progresión geométrica si la suma de los primeros 6 términos es 364 y la razón es –3.

18. ¿Cuál es la razón de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{211}{24}$, el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el último término es $\frac{27}{8}$?

19. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{1-x^7}{x^4-x^5}$, el 1er término es $x^2$ y la razón es $\frac{1}{x}$.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una compañía de autos tiene estimado vender 5 000 autos en 2 010 y durante los 10 años siguientes incrementar en 5% anual las ventas con respecto al año anterior. Determina cuántos automóviles pretende vender la compañía en ese periodo.

**Solución**

De acuerdo con el problema los datos son:

$$a_1 = 5\,000,\ r = 100\% + 5\% = 105\% = 1.05$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_{10} = 5\,000\left(\frac{1-1.05^{10}}{1-1.05}\right)$$

$$= 5\,000\,(12.5778)$$

$$= 62\,889.46 \approx 62\,890 \text{ autos}$$

Por consiguiente la compañía pretende vender aproximadamente 62 890 autos en los siguientes 10 años.

**2** Una epidemia ataca a 2 500 habitantes de una población en 2006, y por cada año que transcurre la clínica de salud de la entidad observa que las personas que padecen la enfermedad se incrementa en un 5% ¿Cuántos habitantes habrán padecido la enfermedad para el año 2010?

**Solución**

De acuerdo al problema, los datos son los siguientes:

$$a_1 = 2\,500,\ r = 105\% = 1.05 \text{ y } n = 5$$

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{2\,500\left(1-1.05^5\right)}{1-1.05}$$

$$= \frac{2\,500(1-1.2762)}{-0.05} = \frac{2\,500(-0.2762)}{-0.05} = 13\,814 \text{ habitantes}$$

Por tanto, para el año 2010 habrán padecido la epidemia 13 814 habitantes aproximadamente.

## EJERCICIO 156

1. Un triángulo equilátero se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de igual área, éstos a su vez se dividen en otros 4 triángulos cada uno; este procedimiento se repite para cada triángulo resultante. ¿Cuántos triángulos se tendrán en total después de realizar 6 veces esta operación?
2. Carolina tiene papá y mamá, a su vez éstos tienen cada uno a su padre y madre, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas en el árbol genealógico de Carolina existen hasta 7 generaciones atrás, incluyéndola a ella?
3. En cierta población la producción de maíz en el año 2001 fue de 20 000 toneladas; por diversas cuestiones esa cantidad ha tenido una disminución de 25% anual. ¿Qué cantidad de maíz se produjo desde 2001 hasta 2006?
4. Durante el año 2005 cierto hospital atendió 5 110 partos; sin embargo, este número se incrementó 10% anual. ¿Cuántos partos estima el hospital atender desde 2006 hasta el año 2010?
5. La población en México en el año 2000 está cuantificada en 100 millones de personas. Si para el año 2002 las autoridades registraron 104 millones de mexicanos, ¿a qué ritmo está creciendo la población en nuestro país? Si se mantiene este crecimiento, para el año 2010 ¿cuántos habitantes tendrá el territorio mexicano?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### Progresión geométrica infinita

Sea una progresión geométrica, cuyo 1[er] valor es $a_1 = 100$ y la razón $r = \frac{1}{2}$, ¿qué le sucede a la suma de los primeros $n$ términos?

El comportamiento de la progresión:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

Para $a_1 = 100$ y $r = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$S_n = 2a_1 - 2a_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_3 = 200 - 200\left(\frac{1}{8}\right) \qquad \text{si } n = 3$$

$$S_8 = 200 - 200\left(\frac{1}{256}\right) \qquad \text{si } n = 8$$

$$\approx$$

$$S_{20} = 200 - 200\left(\frac{1}{1\,048\,576}\right) \qquad \text{si } n = 20$$

De manera que, conforme $n$ crece, el término $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se hace más pequeño y tiende a cero.

Es por eso que para cualquier progresión geométrica infinita, donde la razón es menor que la unidad, se debe considerar la suma de los primeros $n$ términos igual a:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad \forall \ |r| < 1$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de la progresión geométrica infinita: 9, 3, 1,...

**Solución**

Los datos proporcionados por la progresión son $a_1 = 9$, $r = \frac{1}{3}$

Como la razón $|r| < 1$ entonces se utiliza:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \qquad \rightarrow \qquad S_n = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$$

En consecuencia, la suma de términos de la progresión geométrica infinita es: $\frac{27}{2}$

2 Obtén la razón de una progresión geométrica infinita si el 1$^{er}$ término es 4 y la suma es 8.

**Solución**

De acuerdo al problema, los datos son:

$$a_1 = 4, S_n = 8$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de una progresión infinita:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \qquad 8 = \frac{4}{1-r}$$

Al despejar $r$ de la ecuación se obtiene:

$$8(1-r) = 4 \qquad 8 - 8r = 4 \qquad -8r = -4 \qquad r = \frac{1}{2}$$

## EJERCICIO 157

Realiza lo siguiente:

1. Encuentra la suma infinita de términos de la progresión $\div\div -6, 3, \frac{-3}{2}, ...$
2. Determina la suma de términos de la progresión infinita $\div\div \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$

3. ¿Cuál es el valor de la suma infinita de términos de la progresión ÷÷ 6, 2, $\frac{2}{3}$,...?

4. ¿Cuál es el valor de la suma de términos de la progresión infinita ÷÷ $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$, 1,...?

5. La suma de términos de una progresión infinita es 3 y la razón es $\frac{1}{24}$. Determina el 1^er^ término de la progresión.

6. El 1^er^ término de una progresión infinita es $2\sqrt{3}$ y la suma de los términos es $5\sqrt{3}$. Encuentra la razón.

7. El 1^er^ término de una progresión infinita es $\frac{a}{b}$ con $b > a$ y $a, b \in N$ y la suma es $\frac{3a}{2b}$. ¿Cuál es la razón de la progresión?

8. Un triángulo equilátero de área 1 $cm^2$ se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de área $\frac{1}{4}$ $cm^2$, a su vez, uno de los 4 triángulos se divide nuevamente en otros 4 triángulos de $\frac{1}{16}$ $cm^2$, y se repite el procedimiento sucesivamente con 1 de los 4 triángulos resultantes. ¿Cuál es el resultado de la suma de las áreas de los triángulos?

9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 $cm^2$ y se inscribe otro cuadrado, de tal manera que los vértices extremos coincidan con los puntos medios del primero, y así sucesivamente. Si ya se conoce que el área de un cuadrado es el doble del que se inscribe, determina la suma de las áreas de todos los cuadrados que se pueden inscribir de esa manera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Interpolación de medios geométricos

La interpolación de medios geométricos consiste en encontrar un cierto número de términos, entre el 1º y último, para formar una progresión geométrica.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Interpola 4 medios geométricos en la progresión ÷÷ − 3,..., 96.

**Solución**

Al interpolar 4 medios geométricos, la progresión estará formada por 6 términos, entonces:

$$a_1 = -3,\ n = 6 \text{ y } a_6 = 96$$

Se procede a calcular la razón, a partir de:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[6-1]{\frac{96}{-3}} = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Por tanto, la progresión queda como a continuación se muestra:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| − 3, | − 2(− 3), | − 2(6), | − 2(− 12), | − 2(24), | − 2(− 48) |
| − 3, | 6, | − 12, | 24, | − 48, | 96 |

Los medios geométricos son:

$$6,\ -12,\ 24,\ -48$$

2 Interpola 5 medios geométricos en la siguiente progresión: ÷÷ 16,..., $\frac{1}{256}$.

**Solución**

Los datos de la progresión son: $a_1 = 16$, $a_7 = \frac{1}{256}$ y $n = 7$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[7-1]{\frac{\frac{1}{256}}{16}} = \sqrt[6]{\frac{1}{4\,096}} = \frac{1}{4}$$

La progresión que resulta es:

$$16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$$

Por consiguiente, los 5 medios geométricos son:

$$4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$$

### *Media geométrica*

- Sean los números $x_1$ y $x_2$, entonces su media geométrica se define por:

$$\sqrt{x_1 x_2} \text{ si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son positivos}$$

$$-\sqrt{x_1 x_2} \text{ si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son negativos}$$

- Sean los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, entonces, su media geométrica se define como:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la media geométrica de 12 y 48.

**Solución**

Se busca un término que forme una progresión geométrica con los elementos dados, entonces al aplicar la fórmula:

$$\text{Media geométrica} = \sqrt{(12)(48)} = \sqrt{576} = 24$$

Esto indica que la progresión geométrica formada es:

$$12, 24, 48$$

Y se comprueba con la razón:

$$r = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

Por tanto, la media geométrica es 24

2 Encuentra la media geométrica de los números 3, 9, 27 y 81.

**Solución**

Se aplica la fórmula:

$$\text{Media geométrica} = \sqrt[4]{(3)(9)(27)(81)}$$

Al simplificar la raíz se obtiene:

$$\sqrt[4]{3^{10}} = \sqrt[4]{3^8 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{3^8} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Finalmente, la media geométrica es: $9\sqrt{3}$

# EJERCICIO 158

Realiza la interpolación de los medios geométricos que se indican:

1. Cinco medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y 32.
2. Tres medias geométricas entre 12 y $\frac{4}{27}$.
3. Cuatro medias geométricas entre $-3$ y $-96$.
4. Cinco medias geométricas entre $1\frac{1}{2}$ y 6 144.
5. Tres medias geométricas entre $2\sqrt{3}$ y $18\sqrt{3}$.
6. Cuatro medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y $2\frac{26}{243}$.
7. Seis medias geométricas entre $-128$ y $-1$
8. Tres medias geométricas entre $(x-1)^2$ y $\frac{(x-1)^6}{81}$.
9. Tres medias geométricas entre $\frac{a^2}{2}$ y $\frac{8}{a^2}$.
10. Cuatro medias geométricas entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y 4.

Determina la media geométrica de los siguientes números:

11. 6 y 9
12. $-4$ y $-8$
13. 5 y 25
14. 9 y 16
15. 2, 3 y 6
16. 4, 8 y 32
17. 1, 3, 9 y 27
18. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Interés compuesto

Una de las aplicaciones más importantes de las progresiones geométricas es el interés compuesto, por su constante uso en la economía y la administración.

Considera un capital inicial de $100, que se invierte en una tasa fija de 10% de interés anual compuesto. Calcula el interés compuesto por periodo en los primeros 5 años.

$M_1 = 100(1 + 0.1) = 110$ primer año

$M_2 = 110(1 + 0.1) = 121$ segundo año

$M_3 = 121(1 + 0.1) = 133.1$ tercer año

$M_4 = 133.1(1 + 0.1) = 146.41$ cuarto año

$M_5 = 146.41(1 + 0.1) = 161.051$ quinto año

Ahora bien, si se desea calcular el monto que genera un capital en determinado tiempo, con una tasa de interés fija, se utiliza:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Donde:

$M$ = monto generado

$C$ = capital inicial

$i$ = tasa de interés porcentual anual

$n$ = número de capitalizaciones al año

$t$ = tiempo que se invierte el capital

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Un ama de casa ahorra en un banco $5 000, la institución bancaria le da un interés anual de 6%. Calcula el monto que obtendrá en 12 años.

**Solución**

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$5\,000$ $i = 6\%$ anual $n = 1$ periodo $t = 12$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \rightarrow M = 5\,000\left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^{(1)(12)}$$

$$M = 5\,000\,(1.06)^{12}$$

$$M = 10\,060.98$$

Por tanto, esa ama de casa recibirá después de 12 años la cantidad de $10 060.98

2 Fernando invierte $3 000 en un negocio que le dará 10% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente. ¿Cuál será el monto que recibirá al cabo de 5 años?

**Solución**

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$3\,000$ $i = 10\%$ anual $n = 2$ periodos $t = 5$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \rightarrow M = 3\,000\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{(2)(5)}$$

$$M = 3\,000\,(1.05)^{10}$$

$$M = 4\,886.68$$

Finalmente, Fernando recibirá después de 5 años la cantidad de $4 886.68

3 Calcula el tiempo para duplicar una inversión de 10% de interés anual capitalizable trimestralmente.

**Solución**

Si se quiere duplicar el capital, esto indica que $M = 2C$, luego la inversión es capitalizable trimestralmente ($n = 4$), por tanto:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} \quad \rightarrow \quad 2C = C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{4t}$$

$$2 = (1.025)^{4t}$$

Se aplican logaritmos de la siguiente manera para despejar $t$:

$$\log 2 = \log\,(1.025)^{4t} \quad \rightarrow \quad \log 2 = 4t\,(\log 1.025)$$

$$t = \frac{\log 2}{4\log 1.025}$$

$$t = 7 \text{ años}$$

Entonces, se concluye que el tiempo necesario para duplicar la inversión es de 7 años.

# EJERCICIO 159

Determina el monto que se genera en cada uno de los siguientes problemas:

1. \$10 000 que se invierten a una tasa de 10% de interés compuesto anual, durante 10 años.
2. \$32 000 se invierten a 12% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente durante 6 años.
3. \$32 158 que vencen en 7.5 años, a 6% de interés compuesto anual.
4. \$24 000 que vencen en $6\frac{2}{3}$ años, a 9% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente.
5. \$9 500 que vencen en $8\frac{1}{2}$ años, a 4% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
6. \$15 400 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
7. \$950 que vencen en $2\frac{1}{2}$ años, a $12\frac{1}{2}$% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
8. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$% de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente.
9. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$% de interés compuesto anual capitalizable cuatrimestralmente.
10. \$154 000 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$% de interés compuesto anual, capitalizable semanalmente.

Resuelve los siguientes problemas:

11. Una compañía de seguros presenta a un padre de familia un fideicomiso para que su hijo de 8 años reciba una cantidad de \$40 000 cuando tenga 22 años. Determina la cantidad inicial que debe destinar si se le ofrece un contrato con una tasa de 6% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente.
12. Una deuda de \$9 000 dentro de 5 años, deberá liquidarse con un pago de \$14 747.55, ¿a qué tasa de interés trimestral está comprometido el préstamo?
13. ¿Qué tasa de interés compuesto anual duplica una inversión en 5 años?

14. ¿Qué tasa de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente, duplica el valor de la inversión en 10 años?
15. ¿Qué tiempo se necesita para triplicar una inversión con rendimiento de 10% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente?
16. El índice de crecimiento que se plantea para una población de 6 700 habitantes es de 2% anual. ¿Cuánto habrá crecido la población en 20 años?
17. ¿Qué tiempo habrá transcurrido para que un capital de $5 300 se convirtiera en $5 627.45, con una tasa de interés compuesto anual de 2%, capitalizable mensualmente?
18. Una empresa pide un préstamo bancario de $400 000 para la compra de maquinaria. Si dicho crédito está sujeto a 5% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente, y el tiempo para pagarlo es de 10 años, ¿cuál será el monto que se pagará?
19. Emilia invierte $85 000 durante 3 años y recibe un monto de $92 881. ¿Cuál fue la tasa de interés compuesto anual a la que fue sometida dicha inversión?
20. ¿Cuál fue el interés que generaron $20 000 si se invirtieron con una tasa de 12% de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente durante 4 años?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Depreciación

Se define como la pérdida de valor de un activo físico (automóviles y casas, entre otros), como consecuencia del uso o del transcurso del tiempo. Muchos de ellos tienen una vida útil durante un periodo finito.

En este capítulo sólo se abordará el método de porcentaje fijo, que se define como:

$$S = C(1-d)^t$$

Donde:

*S:* valor de salvamento o valor de desecho

*C:* costo original del activo

*d:* tasa de depreciación anual

*t:* vida útil calculada en años

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 La tasa de depreciación de un automóvil del año está calculada en 8% anual. Si un cliente paga en una agencia $120 000 por una unidad, ¿cuál será el valor de desecho del automóvil al final de su vida útil, si se calcula que es de 5 años?

**Solución**

De acuerdo con los datos:

$$C = 120\,000,\ d = 8\% = 0.08 \text{ y } t = 5$$

Al sustituir los valores en la fórmula y desarrollar las operaciones se obtiene:

$$S = 120\,000\ (1-0.08)^5 = 120\,000(0.92)^5 = 120\,000(0.6590) = 79\,080$$

Por tanto, el valor del automóvil a los cinco años es de $79 080

2 Una pizzería compra una motocicleta en $42 000 para el reparto de su mercancía. Se calcula que su vida útil será de 4 años y al final de ella su valor de desecho será de $15 000, determina la tasa de depreciación anual de la motocicleta.

**Solución**

De acuerdo con los datos:

$$C = 42\ 000,\ S = 15\ 000 \text{ y } t = 4$$

Al sustituir los valores en la fórmula y despejando $d$, se obtiene:

$$15\ 000 = 42\ 000(1-d)^4 \qquad 1 - d = \sqrt[4]{\frac{15\ 000}{42\ 000}} \qquad 1 - d = 0.7730$$

$$d = 0.227$$
$$d = 22.7\%$$

Por consiguiente, la tasa de depreciación es de 22.7%

3 Se adquirió una máquina de bordado, cuyo precio fue de \$78 600. Si su valor de desecho es de \$20 604.50 y la tasa de depreciación es de 20% anual, calcula la vida útil de la bordadora.

**Solución**

De acuerdo con los datos:

$$C = 78\ 600, \quad S = 20\ 604.50 \quad \text{y} \quad d = 20\% = 0\ .20$$

Al sustituir en la fórmula:

$$S = C(1-d)^t \qquad 20\ 604.5 = 78\ 600(1 - 0.20)^t$$

Se aplican logaritmos para despejar $t$:

$$t = \frac{\log(20\ 604.5) - \log(78\ 600)}{\log(0.80)} = 6$$

Por tanto, la vida útil de la máquina de bordado es de 6 años.

## EJERCICIO 160

Realiza los siguientes problemas:

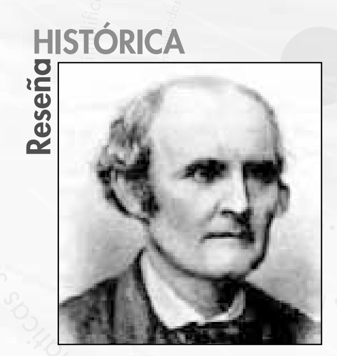
1. La tasa de depreciación de una máquina está calculada en 12% anual. Si su costo es de \$200 000, ¿cuál será su valor de desecho, si tiene una vida útil de 10 años?
2. El costo de una impresora es de \$8 000 y se calcula que su vida útil es de 3 años. Si la tasa de depreciación es de 23%, determina su valor de desecho.
3. Un agricultor compró un tractor con valor de \$300 000 y calcula que tiene una vida útil de 7 años, al cabo de los cuales su valor de desecho es de \$40 045. ¿Cuál es la tasa de depreciación del tractor?
4. Un edificio tiene un costo de \$1 200 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$226 432, y una probable vida útil de 20 años. Determina su tasa de depreciación anual.
5. Una escuela adquirió una camioneta en \$230 000 para el transporte de material, si la tasa de depreciación anual es de 12%, ¿cuál será su valor al cabo de 3 años?
6. Un automóvil tiene un costo de \$96 000, una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de \$31 457. Determina la tasa de depreciación anual.
7. Se adquirió una planta de luz cuyo costo fue de \$220 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$30 238; si la tasa de depreciación es de 18% anual, ¿cuál es su vida útil?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# Capítulo 16

## Matrices

**Reseña HISTÓRICA**



Arthur Cayley, matemático británico. En 1838 ingresó en el Trinity College de Cambridge, donde estudió matemáticas y fue nombrado profesor de esta disciplina; permaneció en Cambridge durante el resto de sus días. Uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, publicó a lo largo de su vida más de novecientos artículos científicos. Es considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades. Con posterioridad empleó estos resultados para estudiar la geometría analítica de dimensión *n*.

Arthur Cayley (1821-1895)

## Definición

Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$,...,$a_{ij}$ reciben el nombre de elementos de la matriz. Para simplificar la notación, la matriz se expresa: $A = (a_{ij})$. El primer subíndice de cada elemento indica el renglón, y el segundo la columna de la matriz donde se encuentra el elemento.

$$\begin{matrix} & & C_1 & C_2 & C_3 & & C_n & \\ & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & R_1 \\ & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & R_2 \\ a_{31} \rightarrow & \text{Columna} \rightarrow & \textcircled{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & R_3 \\ \downarrow & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \text{Renglón} & & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & R_m \end{matrix}$$

Donde: $R_1$, $R_2$, …, $R_n$ son renglones y $C_1$, $C_2$, …, $C_n$ son columnas.

### Ejemplos

Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina: $a_{21}$, $a_{22,}$ $a_{33}$ y $a_{43}$

### Solución

$a_{21}$: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 1, es decir, $a_{21} = -3$
$a_{22}$: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 2, es decir, $a_{22} = 4$
$a_{33}$: es el valor que se encuentra en el renglón 3, columna 3, es decir, $a_{33} = -7$
$a_{43}$: es el valor que se encuentra en el renglón 4, columna 3, es decir, $a_{43} = 1$

## Orden de una matriz

El tamaño de una matriz de $m$ renglones y $n$ columnas se conoce como orden y se denota por $m \times n$.

### Ejemplos

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ Orden = $1 \times 3$

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ Orden = $3 \times 1$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ Orden = $2 \times 2$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ Orden = $2 \times 3$

## Número de elementos de una matriz

En una matriz de $m$ renglones y $n$ columnas, el número de elementos es $m \times n$, $m$ veces $n$ elementos.

**Ejemplos**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$m \times n = 1 \times 3 = 3$ — 3 elementos

$m \times n = 3 \times 1 = 3$ — 3 elementos

$m \times n = 2 \times 2 = 4$ — 4 elementos

$m \times n = 2 \times 3 = 6$ — 6 elementos

## Tipos de matrices

**Matriz cuadrada.** Es aquella cuyo número de renglones es igual al número de columnas; es decir, una matriz de $n$ renglones con $n$ columnas, recibe el nombre de matriz cuadrada de orden $n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2 — Matriz cuadrada de orden 3 — Matriz cuadrada de orden $n$

**Ejemplos**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2 — Matriz cuadrada de orden 3

**Matriz renglón.** Es aquella de orden $1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

**Ejemplos**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & \frac{1}{3} & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Orden $= 1 \times 4$ — Orden $= 1 \times 5$

**Matriz columna.** Es aquella de orden $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

**Ejemplos**

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Orden $= 2 \times 1$ — Orden $= 4 \times 1$

**Matriz cero (matriz nula).** Es aquella en la cual todos los elementos son cero.

### Ejemplos

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula de orden $1 \times 3$ — Matriz nula de orden $4 \times 1$ — Matriz nula de orden 3 — Matriz nula de orden $3 \times 2$

**Matriz diagonal.** Es aquella matriz de orden $n$ que tiene elementos distintos de cero en la diagonal principal, es decir, una matriz cuadrada $M = \left( m_{ij} \right)$, donde $m_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

### Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matriz identidad (matriz unidad).** Es aquella matriz diagonal de orden $n$, cuyos elementos distintos de cero son 1, se denota por $I_n$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

### Ejemplos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad de orden 2 — Matriz identidad de orden 3

**Matriz triangular superior.** Es aquella matriz cuadrada de orden $n$, donde los elementos $a_{ij} = 0$, para $i > j$, es decir, todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz superior de orden 2

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz superior de orden 3

**Matriz triangular inferior.** Es aquella matriz cuadrada de orden $n$, donde $a_{ij} = 0$, para $i < j$, es decir, todos los elementos por arriba de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Ejemplos

$$I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz inferior de orden 2

$$I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inferior de orden 4

**Matriz simétrica.** Es aquella matriz cuadrada de orden $n$, tal que los elementos $a_{ij} = a_{ji}$

## Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

La matriz $A$ de orden 2, es simétrica si:

$$\{a_{12} = a_{21}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz $B$ de orden 3, es simétrica si:

$$\begin{cases} b_{12} = b_{21} \\ b_{13} = b_{31} \\ b_{23} = b_{32} \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz $C$ de orden 3, es simétrica porque:

$$\begin{cases} c_{12} = c_{21} = 6 \\ c_{13} = c_{31} = -3 \\ c_{23} = c_{32} = 4 \end{cases}$$

**Matrices iguales.** Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son respectivamente iguales.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si las matrices $\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$ son iguales.

### Solución

Las matrices son iguales porque son del mismo orden y sus elementos son iguales:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$$

2 Determina el valor de $x$, $y$, $w$ y $z$, para que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 6z \\ 2w & 2x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

**Solución**

Las matrices tienen la misma dimensión, al realizar la igualdad de términos se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 6z=2 \\ 2w=6 \\ 2x-3y=-7 \end{cases}$$

Al resolver el sistema resulta que $x = -2$, $y = 1$, $w = 3$ y $z = \frac{1}{3}$

# EJERCICIO 161

Determina los valores de las incógnitas, para que las matrices sean iguales.

1. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y+1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & z \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} t+4 & 6-r & 2q+1 \end{bmatrix} = [6-t \quad 5 \quad 7-q]$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 3-x \\ y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & z+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ 2-y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Multiplicación por un escalar

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y $\lambda$ un número real, entonces $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ es decir, si:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ entonces } \lambda \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \ldots & \lambda a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz también recibe el nombre de *matriz escalar*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ determina $3A$.

**Solución**

El escalar 3 se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz.

$$3A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(-1) \\ 3(4) & 3(6) \\ 3(0) & 3(-2) \\ 3(1) & 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

2 Si $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ encuentra $\frac{1}{2}B$.

**Solución**

El escalar $\frac{1}{2}$ multiplica a cada uno de los términos de la matriz.

$$\frac{1}{2}B = \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(6) & \frac{1}{2}(-3) & \frac{1}{2}(4) \\ \frac{1}{2}(5) & \frac{1}{2}(-2) & \frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

## Suma

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$, la suma de $A$ y $B$ está determinada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

Donde $A + B$ es la matriz de orden $m \times n$ que resulta de sumar los elementos correspondientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina $A + B$ para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina $A + B$

**Solución**

Las matrices tienen el mismo orden, en este caso, $3 \times 2$, entonces la suma se puede realizar; la definición indica que cada término de la primera matriz se suma con los términos correspondientes de la segunda matriz, es decir, se suman $a_{11} + b_{11}$, $a_{12} + b_{12}$, $a_{21} + b_{21}$, …, $a_{31} + b_{31}$,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -7\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2 & 6+(-1)\\ 2+6 & 4+(-7)\\ -1+4 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 8 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 8 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

2 Sean las matrices:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & -3\\ -2 & 8 & -7 & 8\end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 8 & -5\\ 6 & 2 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

Determina $3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}$

**Solución**

Se determina cada matriz escalar:

$$3\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3(5) & 3(-2) & 3(6) & 3(-3)\\ 3(-2) & 3(8) & 3(-7) & 3(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -6 & 18 & -9\\ -6 & 24 & -21 & 24\end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2(-1) & 2(-4) & 2(8) & 2(-5)\\ 2(6) & 2(2) & 2(1) & 2(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -8 & 16 & -10\\ 12 & 4 & 2 & -14\end{bmatrix}$$

Las matrices tienen el mismo orden, $2 \times 4$, al sumar se obtiene:

$$3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}15 & -6 & 18 & -9\\ -6 & 24 & -21 & 24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -8 & 16 & -10\\ 12 & 4 & 2 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -14 & 34 & -19\\ 6 & 28 & -19 & 10\end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}13 & -14 & 34 & -19\\ 6 & 28 & -19 & 10\end{bmatrix}$

*Inverso aditivo*

El inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $m \times n$ es $-\boldsymbol{A}$.

Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, entonces $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$, es decir, el inverso aditivo de una matriz se obtiene al multiplicar cada elemento por el escalar $-1$, en otras palabras, el inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ es otra matriz $-\boldsymbol{A}$, tal que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{0}$ es la matriz cero o nula.

**Ejemplo**

Si $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}$, determina $-\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{B}$ y verifica que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

**Solución**

Se obtiene la matriz inverso aditivo de la matriz $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{A}=(-1)\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1(-3) & -1(-5)\\ -1(7) & -1(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{B}=(-1)\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

Se realiza la operación $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+3 & -5+5\\ 7-7 & -2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, $-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$, $-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

## Resta

La diferencia o resta de dos matrices $m\times n$, se define:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

Donde $-\boldsymbol{B}$ es el inverso aditivo de $\boldsymbol{B}$.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Encuentra $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ si

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

**Solución**

Para determinar la resta, la segunda matriz se multiplica por el escalar $-1$, entonces la nueva matriz se suma con la primera y queda como resultado:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

2 Sean las matrices $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, determinar $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$.

**Solución**

La operación $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$ se puede expresar como en $3\boldsymbol{M}+(-2\boldsymbol{N})$, se obtienen las matrices escalares y finalmente se suman.

$$3\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 12 & 15\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -2\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Entonces,

$$3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}=3\boldsymbol{M}+(-2\boldsymbol{N})=\begin{bmatrix}-9&3\\12&15\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&8\\2&0\\0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9-4&3+8\\12+2&15+0\\0+0&3-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13&11\\14&15\\0&-3\end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$ *es* $\begin{bmatrix}-13&11\\14&15\\0&-3\end{bmatrix}$

3 Dada la siguiente igualdad:

$3\begin{bmatrix}m+2&n\\1&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m-2&-n\\y&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&8\\3&7\end{bmatrix}$, determina el valor de las incógnitas.

**Solución**

Se realizan las operaciones indicadas.

$$3\begin{bmatrix}m+2&n\\1&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m-2&-n\\y&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(m+2)-(m-2)&3n-(-n)\\3(1)-y&3(4)-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m+8&4n\\3-y&7\end{bmatrix}$$

Luego, $\begin{bmatrix}2m+8&4n\\3-y&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&8\\3&7\end{bmatrix}$

Los términos resultantes se igualan con los términos correspondientes de la matriz del segundo miembro, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2m+8=10\\4n=8\\3-y=3\end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtienen los siguientes valores: $y=0$, $m=1$ y $n=2$

# EJERCICIO 162

Para las siguientes matrices, efectúa $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}$, $4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$ y $2\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{B}$

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&1\\0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3&1\\0&2\end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-6&7&3\end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-7\\1&0\\2&-3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-4&5\\2&-6\\1&7\end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-3&-1\\4&-6&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-6&4\\-3&2&7\end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&5&\frac{1}{8}\\0&3&2\\7&\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&-5&8\\\frac{2}{3}&\frac{4}{5}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

En las siguientes igualdades, determina el valor de las incógnitas.

6. $\begin{bmatrix}a-7&5&w\\v-4&1-c&d\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3&b-1&-4\\-v&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7&-w\\-1&-7&5\end{bmatrix}$

7. $2\begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1-w \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & n \\ y-1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8-n \\ -5 & 6 \\ 0 & -w \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -w & 3 \\ 11 & 9 & 12 \\ y & -7 & 2v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & -4 & 2 \\ -1 & z-1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 10 & 10 & 13 \\ 6 & -4 & v \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Multiplicación

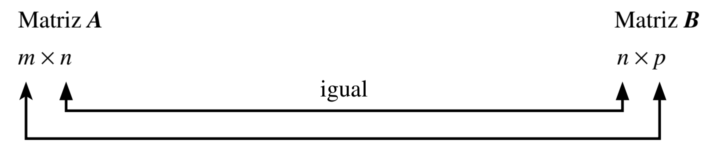
Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$, y $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ una matriz de orden $n \times p$, la multiplicación $\boldsymbol{AB}$ da como resultado la matriz $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ de orden $m \times p$, tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ..... + a_{in}b_{nj}$$

Para:

$i = 1, 2, 3, 4,..., m;$ $\qquad$ $j = 1, 2, 3, 4,..., n$

El número de columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$, es igual al número de renglones de la matriz $\boldsymbol{B}$.




Tamaño de $\boldsymbol{AB}$ es $m \times p$

### Ejemplos

| Matriz *A* | Matriz *B* | Matriz *AB* |
|---|---|---|
| 2 × 3 | 3 × 4 | 2 × 4 |
| 1 × 2 | 2 × 3 | 1 × 3 |
| 5 × 4 | 4 × 2 | 5 × 2 |
| 3 × 1 | 3 × 1 | No definida |

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la multiplicación de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Solución**

$\boldsymbol{A}$ es una matriz de $2 \times 2$ y $\boldsymbol{B}$ de $2 \times 3$, por tanto, la multiplicación se puede realizar. Al aplicar la definición se procede de la siguiente manera: se multiplica el primer renglón por cada una de las columnas de la segunda matriz.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(0)+3(1) & 2(3)+3(5) \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se realiza la misma operación con el segundo renglón.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 5(2)+4(-1) & 5(0)+4(1) & 5(3)+4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

*(continúa)*

(*continuación*)

Finalmente, se unen los resultados para obtener la matriz $\boldsymbol{AB}$,

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

Su orden es de $2 \times 3$

2 Determina $\boldsymbol{R}^2$ si $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

**Solución**

Se transforma $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{RR}$; esto es posible si $\boldsymbol{R}$ es una matriz cuadrada y se procede a realizar las operaciones indicadas en el ejemplo anterior.

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(3)+1(0)-1(-2) & 3(1)+1(4)-1(1) & 3(-1)+1(2)-1(0) \\ 0(3)+4(0)+2(-2) & 0(1)+4(4)+2(1) & 0(-1)+4(2)+2(0) \\ -2(3)+1(0)+0(-2) & -2(1)+1(4)+0(1) & -2(-1)+1(2)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -4 & 18 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ entonces } \boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -4 & 18 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

## Propiedades de las matrices

Sean las matrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ de orden $m \times n$, $\boldsymbol{O}$ la matriz nula de $m \times n$, $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad y $r$, $s$ escalares, entonces:

| Propiedades | |
|---|---|
| Conmutativa de la suma | $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}$ |
| Asociativa de la suma | $\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{R}$ |
| Identidad de la suma | $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$ |
| Distributiva izquierda | $r(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) = r\boldsymbol{P} + r\boldsymbol{Q}$ |
| Distributiva derecha | $(r + s)\boldsymbol{P} = r\boldsymbol{P} + s\boldsymbol{P}$ |
| Inverso aditivo | $\boldsymbol{P} + (-\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{O}$ |
| Asociativa de la multiplicación de escalares | $(r \cdot s)\boldsymbol{P} = r(s\boldsymbol{P})$ |
| Asociativa de la multiplicación | $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QR}) = (\boldsymbol{PQ})\boldsymbol{R}$ |
| Identidad de la multiplicación | $\boldsymbol{IP} = \boldsymbol{PI} = \boldsymbol{P}$ |
| Distributiva por la izquierda | $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{PR}$ |
| Distributiva por la derecha | $(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{QP} + \boldsymbol{RP}$ |

# EJERCICIO 163

Para las siguientes matrices determina **AB**, **BA**, **A**(**B** – 2**C**) y **A**(**BC**), en caso de ser posible.

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

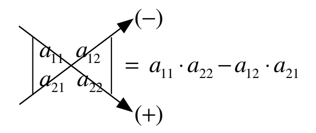
## Determinantes

El determinante de una matriz $A$ de orden $n$, es un número escalar que se relaciona con la matriz, mediante una regla de operación. Denotada por $\det A = |A|$

### Sea la matriz de orden 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de $A$ está dado por:




Por tanto,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

### Ejemplo

Evalúa el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

### Solución

Cada elemento de la matriz se sustituye en la fórmula y se realizan las operaciones.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (4)(5) - (-2)(1) \;\; 20 + 2 = 22$$

Finalmente, el $\det A = 22$

## Sea la matriz de orden 3

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se escribe el determinante de 3 × 3, para resolverlo se repiten los dos primeros renglones y se multiplican las entradas en diagonal como se indica:

$$det(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

Por tanto, el determinante es:

$$\det\boldsymbol{A}=(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23})-(a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}+a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}+a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13})$$
$$\det\boldsymbol{A}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}$$

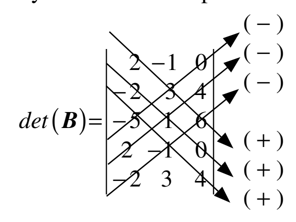
### Ejemplo

El determinante de la matriz $\boldsymbol{B}$, es:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

### Solución

Se forma el siguiente arreglo: se aumentan los dos primeros renglones del determinante, como se indica, después se procede a sustituir los términos en la fórmula y se realizan las operaciones indicadas en la fórmula.




Por consiguiente, el determinante es:

$$\det\boldsymbol{B}=(2)(3)(6)+(-2)(1)(0)+(-5)(-1)(4)-(-2)(-1)(6)-(2)(1)(4)-(-5)(3)(0)$$
$$=36+0+20-12-8-0=36$$

En consecuencia, el $\det\boldsymbol{B}=36$

## Propiedades

1. Si se intercambian dos renglones de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $n$, el determinante de la matriz resultante es:

$$\det\boldsymbol{A}=-\det\boldsymbol{A}$$

2. Si son cero todos los elementos de un renglón o columna de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $n$, entonces

$$\det\boldsymbol{A}=0$$

3. Si 2 renglones son iguales de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $n$, entonces

$$\det\boldsymbol{A}=0$$

4. Si se tiene una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $n$, ya sea matriz triangular superior o inferior, entonces

$$\det\boldsymbol{A}=\text{producto de los elementos de la diagonal principal}$$

5. Si un renglón de una matriz se multiplica por un escalar $\lambda$, entonces

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda \det \boldsymbol{A}$$

6. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices de orden $n$, entonces

$$\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica la propiedad 2 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**Solución**

Se observa que en uno de los renglones de la matriz todos son ceros, luego se procede a encontrar el determinante de la matriz $A$

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0)-(0)(-3) = 0-0=0$$

Finalmente, el $\det \boldsymbol{A} = 0$, y se verifica la propiedad 2

2 Verifica la propiedad 4 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

**Solución**

Se observa que la matriz es triangular superior, entonces el producto de la diagonal principal es:

$$(5)(4)=20$$

Luego, se procede a hallar el determinante de la matriz $A$

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (5)(4)-(0)(1) = 20-0=20$$

Por tanto, $\det \boldsymbol{A} = (5)(4) = 20$

Finalmente, se verifica la propiedad 4

3 Verifica que el $\det \boldsymbol{A} = 0$ si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

**Solución**

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = (1)(3)(2)+(2)(3)(2)+(1)(3)(4)-(2)(3)(2)-(1)(3)(4)-(1)(3)(2)$$
$$= 6+12+12-12-12-6=0$$

Por consiguiente,

$$\det \boldsymbol{A} = 0$$

# EJERCICIO 164

Encuentra el determinante de las siguientes matrices:

1. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & 5\end{bmatrix}$ 2. $B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\1 & -7\end{bmatrix}$ 3. $C=\begin{bmatrix}0 & 5\\10 & -4\end{bmatrix}$ 4. $E=\begin{bmatrix}3 & -1 & 8\\5 & 6 & 4\\0 & 4 & -3\end{bmatrix}$ 5. $D=\begin{bmatrix}-2 & -5 & -1\\-4 & -1 & -3\\1 & 0 & -6\end{bmatrix}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{P}$ de orden $n$, si existe una matriz $\boldsymbol{Q}$ tal que:

$$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{QP}=\boldsymbol{I}_n$$

Entonces, se dice que la matriz $\boldsymbol{Q}$ es la matriz inversa de $\boldsymbol{P}$ y se denota $\boldsymbol{P}^{-1}$, de tal forma que:

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n$$

Donde:

$\boldsymbol{I}_n$: Matriz identidad de orden $n$

Para que exista la inversa de la matriz $P$ es necesario que la matriz sea cuadrada y el $\det P\neq 0$

### Método de Gauss-Jordan

Se utiliza la matriz aumentada, la cual se obtiene al unir la matriz cuadrada de orden $n$ con la matriz identidad $\boldsymbol{I}_n$; una vez aumentada la matriz, por medio de operaciones elementales, se obtiene otra matriz.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0\\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn}\end{array}\right]$$

Si en el proceso algún elemento de la diagonal principal es cero, entonces la matriz no tiene inversa.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Obtén $R^{-1}$, si $R=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}$.

**Solución**

Se aumenta la matriz y se efectúan las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]_{R_2\leftrightarrow R_1}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 0 & 1\\2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]_{2R_1-R_2\to R_2}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 0 & 1\\0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{7R_1-3R_2\to R_1}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}7 & 0 & 3 & 1\\0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{\frac{R_1}{7}\to R_1}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{-\frac{R_2}{7}\to R_2}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\end{array}\right]$$

Por tanto, $R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

2 Determina $B^{-1}$ si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

**Solución**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{2R_1-R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4R_1-R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right]_{10R_2-3R_3\to R_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_2+2R_3\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 18 & -21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{\frac{1}{3}R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1+R_3\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 9 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1-2R_2\to R_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]$$

Finalmente, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 6 & -7 & 2 \\ 8 & -10 & 3 \end{bmatrix}$

## EJERCICIO 165

Determina la matriz inversa de las siguientes matrices:

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

7. $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

8. $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Inversa de una matriz para resolver sistemas de ecuaciones

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Si el sistema se expresa en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$$

Si existe $\boldsymbol{A}^{-1}$, se multiplican por $\boldsymbol{A}^{-1}$ $a$ ambos miembros de la igualdad.

Se obtiene: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$, pero $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ entonces, $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$. $\rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

Esta última expresión resuelve el sistema de ecuaciones.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$.

**Solución**

Se definen las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{C}$, entonces: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

Luego, se obtiene la matriz inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]_{R_2 \leftrightarrow R_1} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]_{2R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{R_1 - \frac{4}{11}R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{\frac{1}{11}R_2 \rightarrow R_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$

Por consiguiente, $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{bmatrix}$

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión: $X=A^{-1}C$
Entonces:

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11}(7)+\frac{3}{11}(-2)\\ -\frac{1}{11}(7)+\frac{2}{11}(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\rightarrow X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son:

$$x=2,\ y=-1$$

2 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases}x+y-2z=-4\\ 2x-y-z=1\\ 3x-2y+z=7\end{cases}$.

**Solución**

Se definen las matrices $A$, $X$ y $C$, entonces: $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}-4\\1\\7\end{bmatrix}$

Se obtiene la matriz $A^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]_{\substack{-2R_1+R_2\to R_2\\ -3R_1+R_3\to R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]_{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]_{\substack{-R_2+R_1\to R_1\\ 5R_2+R_3\to R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1\end{array}\right]_{\frac{1}{2}R_3\to R_3}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{array}\right]_{\substack{R_3+R_1\to R_1\\ R_3+R_2\to R_2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{array}\right]$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(*continúa*)

(*continuación*)

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4)+\left(-\frac{1}{2}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{5}{6}(-4)+\left(-\frac{7}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{1}{6}(-4)+\left(-\frac{5}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$

# EJERCICIO 166

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de la inversa de una matriz.

1. $\begin{cases} 4x - y = 22 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7m + 9n = -10 \\ 2n - 3m = 16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6a + 7b = -4 \\ a - 2b = 31 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a - 2b + c = 12 \\ 2a + b - c = 3 \\ a - b + 3c = 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 4y + z = 12 \\ 3x - 5y - 2z = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = -2 \\ x - y + 4z = -6 \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 17

## Raíces de un polinomio

**Reseña HISTÓRICA**

*Niccolo Fontana-Tartaglia (1500-1557)*

Nació en Brescia y murió en Venecia. Su verdadero nombre era Fontana, pero fue apodado Tartaglia por su tartamudez, causada por una cuchillada asestada por un soldado francés, que le derivó secuelas en el habla. Fue el primero en idear un procedimiento general de resolución de ecuaciones de tercer grado, manteniendo en secreto sus métodos. Cardano le engañó bajo la promesa de mantener en secreto estos métodos pero, faltando a su honor, los publicó. En 1537 publicó su primer libro sobre teoría balística.

Niccolo Fontana-Tartaglia
(1500-1557)

## Teorema del factor y del residuo

Sea el polinomio $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ y $bx + c$ un binomio, entonces:

*a*) $bx + c$ es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = 0$

*b*) $bx + c$ no es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = k$, con $k \neq 0$, donde $k$ es el residuo del cociente de $f(x)$ con $bx + c$, asimismo, $-\frac{c}{b}$ resulta de resolver la ecuación $bx + c = 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $3x - 1$ es factor del polinomio $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$.

**Solución**

El binomio $3x - 1$, se iguala con cero y se despeja $x$

$$3x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Este resultado de la ecuación se evalúa en $f(x)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(\frac{1}{3}\right) + 6$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{27}\right) + 2\left(\frac{1}{9}\right) - 19\left(\frac{1}{3}\right) + 6 = 0$$

Como el resultado de $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, entonces se concluye que $3x - 1$, si es factor del polinomio.

2 Obtén el residuo de dividir $4x^3 - 11x^2 - x + 14$ entre $x - 3$.

**Solución**

Al aplicar el teorema del residuo, se iguala con cero $x - 3$ y el resultado del despeje se sustituye en el polinomio $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - x + 14$

$$f(3) = 4(3)^3 - 11(3)^2 - (3) + 14 = 20$$

Por tanto el residuo de la división es 20

3 Identifica cuál de las siguientes expresiones $5x + 1$, $x - 4$ y $x + 4$, son factores del polinomio $f(x) = 10x^3 + 57x^2 + 71x + 12$.

**Solución**

Las expresiones $5x + 1$, $x - 4$ y $x + 4$, se igualan con cero y se despeja a $x$, para luego evaluar los valores obtenidos en $f(x)$:

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = 10\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + 57\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 71\left(-\frac{1}{5}\right) + 12 = 0$$ por tanto $5x + 1$, si es factor

$$f(4) = 10(4)^3 + 57(4)^2 + 71(4) + 12 = 1848$$, por tanto $x - 4$, no es factor

$$f(-4) = 10(-4)^3 + 57(-4)^2 + 71(-4) + 12 = 0$$, por tanto $x + 4$, si es factor

4 Determina el valor de $k$, tal que $f(x) = 3kx^3 + (4k + 5)x^2 - 19x - 12$, sea divisible por: $x + 3$.

**Solución**

Para que $f(x)$ sea divisible por $x + 3$, se debe de cumplir que $f(-3) = 0$, entonces:

$$f(-3) = 3k(-3)^3 + (4k + 5)(-3)^2 - 19(-3) - 12 = 0$$

Se resuelve la ecuación para $k$:

$$-45k + 90 = 0 \qquad \rightarrow \qquad k = 2$$

Por tanto, el valor de $k = 2$ y el polinomio queda expresado como:

$$f(x) = 6x^3 + 13x^2 - 19x - 12$$

5 Determina los valores de $k$, tales que $f(x) = kx^3 - (k^2 - 2)x^2 - (k + 3)^2x - 20$, sea divisible por: $3x + 2$.

**Solución**

Para que el polinomio sea divisible por $3x + 2$, se debe cumplir que $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$, entonces:

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = k\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(k^2 - 2\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(k + 3\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right) - 20 = 0$$

Al desarrollar la expresión se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$3k^2 + 50k - 177 = 0$$

Cuyas soluciones para $k$, son los valores, 3 y $-\frac{59}{3}$, entonces los polinomios son:

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 36x - 20 \text{ y } f(x) = -\frac{1}{9}\left[177x^3 + 3463x^2 + 2500x + 180\right]$$

## Raíces

Dado el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, el número de raíces o ceros corresponde al grado $n$ del polinomio y son aquellos valores que cumplen la condición $f(x_n) = 0$, éstos pueden ser reales, complejos o ambos, de acuerdo a las características propias del polinomio.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $-2$, 1 y 3 son raíces del polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

**Solución**

Se sustituyen los valores $-2$, 1 y 3 en el polinomio:

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$$

$$f(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$$

Todos los residuos son iguales a 0, por consiguiente, se demuestra que estos valores son raíces o ceros del polinomio.

2 Prueba que $-i$, $i$ y $\frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$.

**Solución**

Los valores $-i$, $i$ y $\frac{1}{3}$ son sustituidos en el polinomio

$$\begin{aligned} f(-i) = 3(-i)^3 - (-i)^2 + 3(-i) - 1 = 3(-i^3) - (i^2) - 3i - 1 &= -3i^3 - i^2 - 3i - 1 \\ &= -3(-i) - (-1) - 3i - 1 \\ &= 3i + 1 - 3i - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(i) = 3(i)^3 - (i)^2 + 3(i) - 1 = 3(i^3) - (i^2) + 3i - 1 &= 3i^3 - i^2 + 3i - 1 \\ &= 3(-i) - (-1) + 3i - 1 \\ &= -3i + 1 + 3i - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 3\left(\frac{1}{27}\right) - \frac{1}{9} + 1 - 1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 1 - 1 = 0$$

Por tanto, se prueba que $-i$, $i$ y $\frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio.

3 Determina cuáles de los siguientes números 4, 1, $1 + i$ y $-1 - 2i$ son ceros del polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$.

**Solución**

Se sustituye uno a uno los números en el polinomio, esto con el fin de saber cuáles son raíces del mismo.

$$f(4) = (4)^4 + 5(4)^3 + 7(4)^2 + 7(4) - 20 = 696$$

$$f(1) = (1)^4 + 5(1)^3 + 7(1)^2 + 7(1) - 20 = 0$$

$$f(1 + \text{i}) = (1 + \text{i})^4 + 5(1 + \text{i})^3 + 7(1 + \text{i})^2 + 7(1 + \text{i}) - 20 = -27 + 31\text{i}$$

$$f(-1 - 2\text{i}) = (-1 - 2\text{i})^4 + 5(-1 - 2\text{i})^3 + 7(-1 - 2\text{i})^2 + 7(-1 - 2\text{i}) - 20 = 0$$

Por consiguiente, los valores 1 y $-1 - 2i$ son los únicos que son raíces del polinomio.

Si las raíces de un polinomio son $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ entonces el polinomio se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el polinomio cuyas raíces son los números $-3$, 0 y 4.

**Solución**

Dado que existen tres raíces, el polinomio a obtener es:

$$f(x) = (x - (-3))(x - 0)(x - (4))$$

$$f(x) = (x + 3)(x)(x - 4),$$

Se desarrolla el producto de los binomios y finalmente el polinomio es:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 12x$$

2 Determina el polinomio de tercer grado con ceros en – 1, $\frac{1}{2}$ y $f(-2)=-\frac{35}{8}$.

**Solución**

Dado que el polinomio es de tercer grado, se representa como:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$f(x)=\left(x-(-1)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x_3\right)=\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x_3\right)$$

Y se sabe que $f(-2)=-\frac{35}{8}$ entonces:

$$f(-2)=\left(-2+1\right)\left(-2-\frac{1}{2}\right)\left(-2-x_3\right)\quad\rightarrow\quad -\frac{35}{8}=\left(-1\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-2-x_3\right)$$

Al resolver para $x_3$, se obtiene que:

$$x_3=-\frac{1}{4}$$

Por tanto, el polinomio que cumple las condiciones establecidas es:

$$f(x)=\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}$$

3 Obtén el polinomio de tercer grado si se sabe que sus raíces son: $-1-i$, $-1+i$ y 5.

**Solución**

El polinomio se representa de la forma:

$$f(x)=\left(x-(-1-i)\right)\left(x-(-1+i)\right)\left(x-5\right)=\left(x+1+i\right)\left(x+1-i\right)\left(x-5\right)$$

Al desarrollar el producto se obtiene:

$$f(x)=x^3-3x^2-8x-10$$

4 Encuentra el polinomio de cuarto grado si se sabe que sus raíces son: $2i$, $-3$, y además $f(-1)=-50$ y $f(0)=-48$.

**Solución**

Al tratarse de un polinomio de cuarto grado se representa como:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$f(x)=\left(x-2i\right)\left(x+3\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$

Pero se sabe que $f(-1)=-50$, entonces:

$$f(-1)=\left(-1-2i\right)\left(-1+3\right)\left(-1-x_3\right)\left(-1-x_4\right)\quad\rightarrow\quad -50=\left(-1-2i\right)\left(2\right)\left(-1-x_3\right)\left(-1-x_4\right)$$

También se cumple que $f(0)=-48$, por tanto:

$$f(0)=\left(0-2i\right)\left(0+3\right)\left(0-x_3\right)\left(0-x_4\right)\quad\rightarrow\quad -48=\left(-2i\right)\left(3\right)\left(-x_3\right)\left(-x_4\right)$$

Donde se genera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_3x_4 = \dfrac{8}{i} \\ x_3 + x_4 + x_3x_4 = \dfrac{24-2i}{1+2i} \end{cases}$$

El cual tiene como soluciones $x_3 = 4$ y $x_4 = -2i$, por lo que el polinomio queda definido como:

$$f(x) = (x-2i)(x+3)(x-4)(x+2i) \qquad \rightarrow \qquad f(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 - 4x - 48$$

## Cálculo de las raíces por división sintética

Para encontrar las raíces de un polinomio se emplea la división sintética, así como los diversos métodos de factorización y resolución de ecuaciones, además de hacer uso de la regla de los signos de Descartes.

## Regla de los signos de Descartes

Esta regla nos permite determinar el tipo de raíz posible para un polinomio (positiva, negativa o compleja)

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, entonces sucede que:

- El número de raíces positivas es igual o menor en dos al número de cambios de signo del polinomio.
- El número de raíces negativas es igual o menor en dos al número de cambios de signo de la evaluación $f(-x)$.
- El número de raíces complejas depende del número de raíces positivas o negativas que tenga el polinomio. Si el polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja entonces también tiene como raíz su conjugado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dado el polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, determina sus raíces.

**Solución**

Si se aplica la regla de Descartes se observa que:

1. Existen dos cambios de signos en $f(x)$, en consecuencia el polinomio tiene dos posibles o ninguna raíz positiva

$$f(x) = +x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

2. Se evalúa $f(-x)$, para determinar las posibles raíces negativas

$$f(-x) = -x^3 - 2x^2 + 11x + 12$$

Se observa que sólo hay un cambio de signo, por tanto existe una posible raíz negativa.
De acuerdo con la regla de los signos de Descartes las posibles combinaciones de raíces son:

| | | |
|---|---|---|
| Raíces positivas | 2 | 0 |
| Raíces negativas | 1 | 1 |
| Raíces complejas | 0 | 2 |

Se factoriza el polinomio mediante el uso de la división sintética, como a continuación se ilustra.
Ya que el coeficiente de $x^3$ es 1, se toman únicamente los divisores de 12

$$\text{Divisores de } 12 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Éstos son los posibles valores para los cuales el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.
Se ordenan los coeficientes del polinomio y, con los valores anteriores, se efectúan las operaciones siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | −11 | 12 | 1 |
| | 1 | −1 | −12 | |
| 1 | −1 | −12 | 0 | 4 |
| | 4 | 12 | | |
| 1 | 3 | 0 | | −3 |
| | −3 | | | |
| 1 | 0 | | | |

Finalmente, las raíces del polinomio son: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ y $x_3 = -3$

2 Dado el polinomio $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 12x$, determina sus raíces.

**Solución**

Este polinomio carece de término independiente, entonces una de las raíces es cero y mediante una factorización el polinomio se expresa como:

$$f(x) = x\,\text{p}(x) = x\,(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12)$$

Se aplica la regla de Descartes al polinomio $p(x)$ para determinar el número de posibles raíces:

1. Existe un cambio de signo en $p(x)$, en consecuencia el polinomio tiene una o ninguna posible raíz positiva

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$$

2. Se evalúa el polinomio $p(-x)$, para determinar las posibles raíces negativas

$$p(-x) = +\ x^4\ - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12$$

Se observa que hay tres cambios de signo, por tanto existen tres, una o ninguna posibles raíces negativas.
De acuerdo con la regla de Descartes las combinaciones posibles de raíces son:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Raíz cero | 1 | 1 | 1 |
| Raíces positivas | 1 | 1 | 0 |
| Raíces negativas | 3 | 1 | 0 |
| Raíces complejas | 0 | 2 | 4 |

Con el método de división sintética se factoriza el polinomio $p(x)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | −2 | −10 | −12 | 2 |
| | 2 | 10 | 16 | 12 | |
| 1 | 5 | 8 | 6 | 0 | −3 |
| | −3 | −6 | −6 | | |
| 1 | 2 | 2 | 0 | | |

Se observa que no existe ningún divisor de 2 que dé como residuo cero en la división sintética, por tanto las dos raíces restantes son complejas y conjugadas. Hasta este momento la factorización del polinomio $f(x)$ es:

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^2 + 2x + 2)$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Se iguala a cero el polinomio $x^2 + 2x + 2$ y se obtienen las raíces restantes:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Por tanto, las raíces del polinomio $f(x)$ son:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ x_4 = -1 + i,\ x_5 = -1 - i$$

3 Determina las raíces del polinomio $f(x) = 36x^4 + 24x^3 + 13x^2 + 6x + 1$.

**Solución**

El polinomio se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = 36x^4 + 24x^3 + 4x^2 + 9x^2 + 6x + 1$$

Se agrupan los términos

$$f(x) = (36x^4 + 24x^3 + 4x^2) + (9x^2 + 6x + 1)$$

El factor común da:

$$f(x) = 4x^2 (9x^2 + 6x + 1) + 1(9x^2 + 6x + 1) = (4x^2 + 1)(9x^2 + 6x + 1)$$

Para hallar las raíces de $f(x)$, se iguala a cero el polinomio, entonces

$$(4x^2 + 1)(9x^2 + 6x + 1) = 0$$
$$4x^2 + 1 = 0 \ ;\ 9x^2 + 6x + 1 = 0$$
$$x^2 = -\frac{1}{4} \ ;\quad (3x+1)^2 = 0$$
$$x = \pm\frac{i}{2};\qquad x = -\frac{1}{3}$$

se dice que existe multiplicidad cuando una raíz se repite dos o más veces, como en este caso, por tanto las raíces del polinomio son:

$$x_1 = \frac{i}{2},\ x_2 = -\frac{i}{2},\ x_3 = x_4 = -\frac{1}{3}$$

# EJERCICIO **167**

Indica cuáles de los siguientes binomios son factores del polinomio propuesto:

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10;\ x - 2,\ x - 1,\ x - 5$
2. $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6;\ 2x + 3,\ x + 2,\ x + 1$
3. $p(x) = 3x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x - 16;\ 3x - 2,\ x + 2,\ x - 2$
4. $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18;\ x + 1,\ x + 3i,\ x - 2i,\ x + 2i$
5. $h(x) = x^4 + 20x^2 + 64;\ x + i,\ x - i,\ x + 2i,\ x - 2i$
6. $m(x) = x^5 + 6x^4 + 23x^3 + 34x^2 + 26x;\ x + 6,\ x,\ x + 1 - i,\ x - 1 + i,\ x + 2 + 3i$

Determina el residuo que se obtiene al dividir el polinomio por los binomios dados:

7. $(x^3 + 13x^2 + 14x - 88) \div (x + 2)$

8. $(2x^3 + 5x^2 - x - 6) \div (2x + 1)$

9. $(6x^3 + 37x^2 + 32x - 15) \div (2x - 3)$

10. $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12) \div (x + 1)$

11. $(5x^4 - 26x^3 + 15x^2 + 38x - 8) \div (x + 2)$

12. $(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12) \div (x + 3)$

Determina los valores de *k* para que el polinomio:

13. $f(x) = x^3 - kx^2 - (5k + 1)x + 12$, sea divisible por $x - 4$

14. $f(x) = 2x^3 + (2k + 1)x^2 - (k^2 + 1)x - 24$, sea divisible por $2x + 3$

15. $f(x) = kx^3 - (k^2 - 1)x^2 + (7k + 5)x - 12$, sea divisible por $3x - 1$

16. $f(x) = (2k^2 - 2)x^3 - (5k - 1)x^2 - (3k^2 - 4k + 3)x - 6$, sea divisible por $5x + 1$

17. $f(x) = kx^4 - 2kx^3 - (4k^2 - 3)x^2 + (k - 2)x + 15$, sea divisible por $x + 3$

Indica si los valores propuestos son raíces de los polinomios:

18. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$; $x = 3, x = 4, x = 5$

19. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 18x + 27$; $x = 3i, x = -3i, x = -\frac{3}{2}$

20. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 27x + 18$; $x = 1, x = -2, x = -9$

Determina cuáles de los valores propuestos son raíces de los polinomios:

21. $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 7x + 22$; $x = \frac{11}{2}\ x = -2, x = -1$

22. $f(x) = 5x^3 - 17x^2 + 13x + 15$; $x = 2 + i, x = -2 - i, x = -\frac{3}{5}$

23. $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 19x - 10$; $x = -1, x = \frac{5}{3}\ x = -\frac{1}{2}$

24. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12$; $x = -3, x = -1, x = 2i, x = -2i$

25. $f(x) = 25x^4 - 100x^3 - 19x^2 + 82x - 24$; $x = 4, x = 1, x\ \frac{3}{5}\ x = -\frac{2}{5}$

Encuentra el polinomio cuyas raíces son:

26. $x = -5, x = 0, x = 1$

27. $x = 3, x = -3, x = -4$

28. $x = \frac{1}{3}\ x = 4i, x = -4i$

29. $x = -\frac{3}{4}\ x = -2, x = \frac{5}{2}$

30. $x = 4, x = -5, x = 3 - 2i, x = 3 + 2i$

31. $x = i, x = -i, x = \frac{1}{2}\ x = \frac{1}{3}$

Encuentra el polinomio que cumpla con las siguientes características:

32. Polinomio de tercer grado, con raíz en $\frac{1}{3}$, $f(1) = 10$, $f(-1) = -4$

33. Polinomio de tercer grado con raíz en 1, $f(1) = 0$, $f(0) = 1$

34. Polinomio que sea de cuarto grado, con raíces, $-1$, $i$ y $-i$, además $f(3) = 40$

35. Polinomio de cuarto grado con raíces en $-3$, multiplicidad 2 en raíz 1 y $f(0) = -3$

36. Polinomio que sea de cuarto grado, multiplicidad 3 en la raíz 2 y $f(-1) = -27$

37. Polinomio de quinto grado con raíces 1, $-1$ y $f(-2) = 0$, $f(0) = -2$, $f(2) = 60$

Determina las raíces de los siguientes polinomios:

38. $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

39. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$

40. $f(x) = 15x^3 - 53x^2 - 30x + 8$

41. $f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 30x + 25$

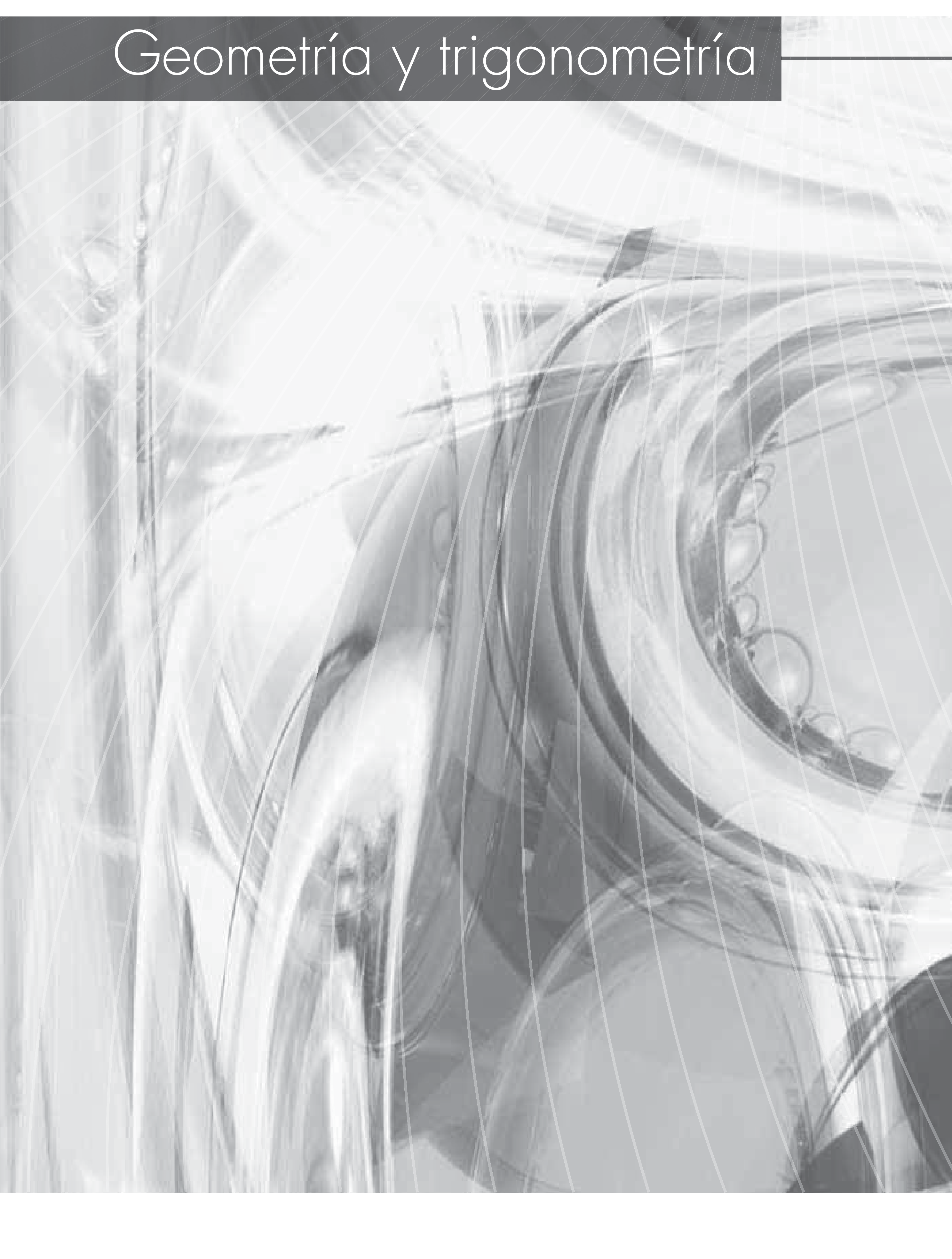
42. $f(x) = x^4 - 6x^3 - 13x^2 + 42x$

43. $f(x) = x^4 - x^3 + 10x^2 - 16x - 96$

44. $f(x) = 6x^4 + x^3 - 20x^2 - 42x - 20$

45. $f(x) = 2x^5 + 13x^4 + 19x^3 + x^2 + 17x - 12$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**


Geometría y trigonometría

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

## Geometría (del griego *geo*, "tierra"; *METREIN*, "MEDIR")

LOS SEIS LIBROS PRIMEROS DE LA GEOMETRIA DE EVCLIDES.

*Los seis libros primeros de la geometría* de Euclides

Rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se ocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con 4 o más dimensiones, geometría fractal y geometría no euclídea.

### Geometría plana

Rama de la geometría elemental que estudia las propiedades de superficies y figuras planas, como el triángulo o el círculo. Esta parte de la geometría también se conoce como geometría euclídea, en honor al matemático griego Euclides, el primero en estudiarla en el siglo IV a.C. Su extenso tratado *Los seis libros primeros de la geometría* se mantuvo como texto autorizado de geometría hasta la aparición de las llamadas geometrías no Euclídeas en el siglo XIX.

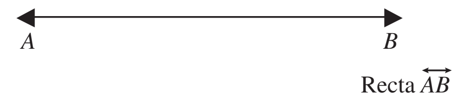
## Conceptos básicos

Antes de iniciar el estudio de la geometría y trigonometría, analizaremos algunos conceptos básicos:

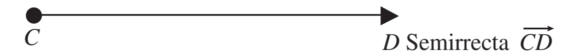
**Geometría.** Rama de las matemáticas que estudia las propiedades, las formas y las dimensiones de figuras y cuerpos geométricos.

**Punto.** Según Euclides: "Punto es lo que no tiene partes", para evitar confusiones al dar una definición más compleja sólo diremos que la idea de punto, nos la da la marca que deja un lápiz sobre el papel, tan pequeña que carece de dimensión.

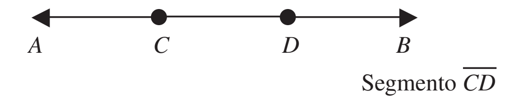
**Línea recta.** Sucesión infinita de puntos que tienen la siguiente forma:



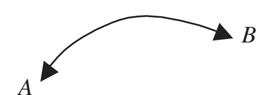

**Semirrecta.** Si se fija un punto *C* en una recta, al conjunto de puntos que le siguen o preceden se le llama semirrecta.




**Segmento.** Porción de recta limitada por 2 puntos no coincidentes.




**Curva.** Es aquella línea que no tiene partes rectas.




**Arco.** Porción de curva limitada por 2 puntos no coincidentes.

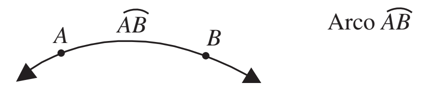
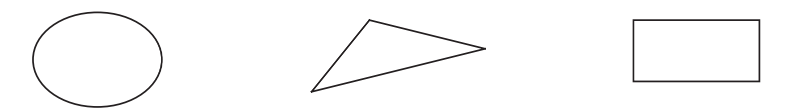



**Figura geométrica.** Extensión limitada por puntos, líneas y superficies.



**Cuerpo sólido.** Es todo aquello que ocupa un lugar en el espacio y posee longitud, anchura y altura.

**Proposición.** Enunciado que nos propone algo y que por tanto se puede calificar como falso o verdadero.

**Axioma.** Proposición evidente que no requiere demostración.

## Ejemplos

Dos puntos diferentes determinan una recta y sólo una.

Sobre cualquier recta hay al menos 2 puntos diferentes.

**Postulado.** Proposición cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma se admite sin demostración.

## Ejemplos

Dos rectas determinan un punto y sólo uno.

Siempre es posible describir una circunferencia de centro y radio dado.

**Teorema.** Proposición cuya verdad necesita demostración.

## Ejemplos

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo son 180°.

**Corolario.** Proposición que es consecuencia inmediata de otra.

## Ejemplo

Del postulado de Euclides: "Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta". Se obtiene el siguiente corolario: "Dos rectas paralelas a una tercera, son paralelas entre sí".

**Lema.** Proposición que sirve para facilitar la demostración de un teorema.

## Ejemplos

Toda línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que tenga los mismos extremos.

Un ángulo no nulo y no llano divide al plano en 2 regiones, de tal suerte que en una y sólo una de las regiones, 2 puntos cualesquiera siempre pueden unirse por un segmento que no interseca ninguna de las 2 semirrectas que forman el ángulo.

# CAPÍTULO 2

## ÁNGULOS

**Sistema SEXAGESIMAL**

Definiciones de ángulos del libro *Los elementos* de Euclides

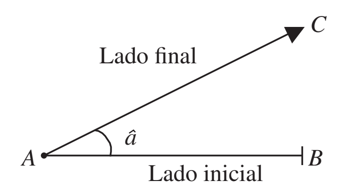
Es un sistema de numeración posicional que emplea la base sesenta. Tuvo su origen en la antigua Babilonia.

A diferencia de la mayoría de los demás sistemas de numeración, el sexagesimal no se usa mucho en la computación general ni en la lógica, pero sí en la medición de ángulos y coordenadas geométricas. La unidad estándar en sexagesimal es el grado. Una circunferencia se divide en 360 grados. Las divisiones sucesivas del grado dan lugar a los minutos de arco (1/60 de grado) y segundos de arco (1/60 de minuto).

Quedan vestigios del sistema sexagesimal en la medición del tiempo. Hay 24 horas en un día, 60 minutos en una hora y 60 segundos en un minuto. Las unidades menores que un segundo se miden con el sistema decimal.

## Definición

Un ángulo es la abertura comprendida entre 2 semirrectas que tienen un punto en común, llamado vértice.




El ángulo se representa como $\angle A$, $\angle BAC$, $\hat{a}$, o con letras del alfabeto griego. Si un ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj, entonces es positivo, si se mide en el mismo sentido entonces será negativo.

## Medidas

Los ángulos se miden en grados o radianes de acuerdo al sistema.

### Sistema sexagesimal

Este sistema de medir ángulos es el que se emplea normalmente: la circunferencia se divide en 360 partes llamadas grados, el grado en 60 partes llamadas minutos y el minuto en 60 partes que reciben el nombre de segundos.

$$1° = 60'; \quad 1' = 60''$$

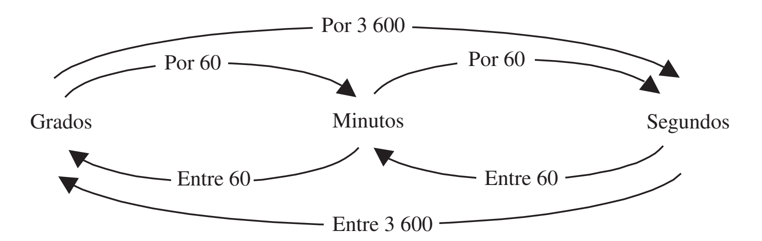
**Ejemplos**

A continuación se dan 3 números en sistema sexagesimal:

*a*) 45°
*b*) 21° 36'
*c*) 135° 28' 32"

*Relación de conversión*

Es la relación que existe entre los grados, minutos y segundos de un ángulo expresado en sistema sexagesimal.




De acuerdo con la gráfica, se establecen las siguientes condiciones de conversión:

- Para convertir de una unidad mayor a una menor se multiplica por 60 o 3 600, según sea el caso.
- Para convertir de una unidad menor a una mayor se divide entre 60 o 3 600, según sea el caso.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 19° 47’ 23” a grados.

**Solución**

Los minutos se dividen entre 60 y los segundos entre 3 600:

$$19° \ 47' \ 23'' = 19° + \left(\frac{47}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{23}{3600}\right)^{\circ} = 19° + 0.7833° + 0.0063° = 19.7896°$$

Por tanto, 19° 47’ 23” equivalen a 19.7897°.

2 Convierte 32° 12’ 15” a minutos.

**Solución**

Los grados se multiplican por 60 y los segundos se dividen entre 60:

$$32° \ 12' \ 15'' = (32)(60)' + 12' + \left(\frac{15}{60}\right)' = 1\,920' + 12' + 0.25' = 1\,932.25'$$

Por consiguiente 32° 12’ 15” equivalen a 1 932.25’.

3 Convierte 45.5638° a grados, minutos y segundos.

**Solución**

La parte decimal de 45.5638° se multiplica por 60 para convertir a minutos:

$$45.5638° = 45° + (.5638)(60') = 45° \ 33.828'$$

La parte decimal de los minutos se multiplica por 60 para obtener los segundos:

$$45° \ 33.828' = 45° \ 33' + (.828)(60'') = 45° \ 33' 49.68''$$

## EJERCICIO 1

Convierte los siguientes ángulos a grados:

1. 40° 10’15”
2. 61° 42’21”
3. 1° 2’ 3”
4. 73° 40’40”
5. 9° 9’ 9”
6. 98° 22’45”

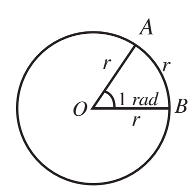
Convierte los siguientes ángulos a su equivalente en grados, minutos y segundos:

7. 40.32°
8. 61.24°
9. 18.255°
10. 29.411°
11. 19.99°
12. 44.01°

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Sistema cíclico o circular

Este sistema utiliza como unidad fundamental al radián. El radián es el ángulo central subtendido por un arco igual a la longitud del radio del círculo. Se llama valor natural o valor circular de un ángulo.




Un radián (1 *rad*) equivale a 57.29° y $\pi$ *rad* equivalen a 180°.

## Conversión de grados a radianes y de radianes a grados

Sea $S$ un ángulo en sistema sexagesimal (grados) y $R$ en el sistema cíclico (radianes), entonces para convertir:

| Grados a radianes | Radianes a grados |
|---|---|
| Se multiplica el número de grados por el factor $\frac{\pi}{180°}$ y se simplifica, esto es: $S\left(\frac{\pi}{180°}\right)$ | Se multiplica el número de radianes por el factor $\frac{180°}{\pi}$ y se simplifica, esto es: $R\left(\frac{180°}{\pi}\right)$ |

EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Convierte 150° a radianes.

**Solución**

Se multiplica 150° por el factor $\frac{\pi}{180°}$

$$150° = 150°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{150°\pi}{180°} = \frac{5}{6}\pi$$

Por consiguiente, 150° es equivalente a $\frac{5}{6}\pi$ *rad*.

**2** Convierte a grados $\frac{7}{4}\pi$ *rad*.

**Solución**

Se multiplica por el factor $\frac{180°}{\pi}$ y se simplifica al máximo, obteniendo:

$$\frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{7(180°)\pi}{4\pi} = \frac{7(180°)}{4} = 315°$$

Finalmente, $\frac{7}{4}\pi$ *rad* equivalen a 315°.

3 Convierte 12° 15' 36" a radianes.

**Solución**

Se convierte a grados el ángulo:

$$12°\ 15'\ 36'' = 12° + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{36}{3600}\right)^{\circ} = 12° + 0.25° + 0.01° = 12.26°$$

La conversión a grados se multiplica por el factor $\frac{\pi}{180°}$ y se simplifica a su mínima expresión:

$$12.26°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{12.26°\pi}{180°} = \frac{1\,226\pi}{18\,000} = \frac{613\pi}{9\,000}\ rad$$

Por tanto, 12° 15' 36" es equivalente a $\frac{613\pi}{9\,000}$ *rad.*

4 Expresa un ángulo $\theta$ que mide 3 radianes en grados, minutos y segundos.

**Solución**

Para convertir de radianes a grados se multiplica por el factor $\left(\frac{180°}{\pi}\right)$

$$3\ rad = 3\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 171.8873°$$

La parte decimal se convierte en minutos,

$$171.8873° = 171° + (0.8873)(60') = 171°\ 53.238'$$

El nuevo decimal se convierte en segundos, entonces:

$$171.8873° = 171°\ 53' + (0.238)(60'') = 171°\ 53'\ 14.28''$$

# EJERCICIO 2

Transforma a radianes los siguientes ángulos:

1. 210°
2. 300°
3. 225°
4. 450°
5. 72°
6. 100°
7. 30°
8. 330°
9. 120°
10. 135°
11. 45.23°
12. 128.30°
13. 150° 36' 40"
14. 420° 0' 45"

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# EJERCICIO 3

Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

1. $\frac{2}{3}\pi$
2. $\frac{11}{6}\pi$
3. $\frac{3}{4}\pi$
4. $\frac{4}{3}\pi$
5. $7\pi$
6. $\frac{1}{9}\pi$
7. $\frac{13}{5}\pi$
8. $\frac{1}{12}\pi$
9. 1.5708 *rad*
10. 4.7124 *rad*
11. 0.1683 *rad*
12. 1.1201 *rad*
13. 6.2832 *rad*
14. 0.5 *rad*

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Operaciones

A continuación se presentan las operaciones básicas con ángulos: suma, resta, multiplicación y división.

**EJEMPLOS**

1 Efectúa la suma de los siguientes ángulos: 29° 38’ 22”; 18° 47’ 52”; 36° 42’ 37”

**Solución**

Se acomodan en forma vertical de acuerdo a su orden:

$$\begin{array}{rrrr} & 29° & 38' & 22'' \\ + & 18° & 47' & 52'' \\ & 36° & 42' & 37'' \\ \hline & 83° & 127' & 111'' \end{array}$$

Pero 111” = 1’ 51”

$$83° \; 127' \; 111'' = 83° \; 127' + 1' \; 51'' = 83° \; 128' \; 51''$$

y 128’ = 2° 08’

$$83° \; 128' \; 51'' = 83° + 2° \; 08' \; 51'' = 85° \; 08' \; 51''$$

Por tanto, el resultado es: 85° 08’ 51”.

2 Realiza lo que se indica: Resta 24° 42’ 18” de 138° 29’ 17”

**Solución**

Se acomodan en forma vertical:

$$\begin{array}{rrrr} & 138° & 29' & 17'' \\ - & 24° & 42' & 18'' \\ \hline \end{array}$$

Dado que 42’ > 29’ y 18” > 17”, entonces 138° 29’ 17” se transforman en

$$138° \; 29' \; 17'' = 137° \; 89' \; 17'' = 137° \; 88' \; 77''$$

Y se realiza la resta,

$$\begin{array}{rrrr} & 137° & 88' & 77'' \\ - & 24° & 42' & 18'' \\ \hline & 113° & 46' & 59'' \end{array}$$

Finalmente, se concluye que el resultado es 113° 46’ 59”.

3 Multiplica 73° 16’ 32” por 29.

**Solución**

$$\begin{array}{r} 73^\circ \quad 16' \quad 32'' \\ \times \qquad\quad 29 \\ \hline 2\,117^\circ \;\; 464' \;\; 928'' \end{array}$$

El resultado que se obtiene se simplifica, al transformar los segundos a minutos:

$$2\,117^\circ\ 464'\ 928'' = 2\,117^\circ\ 464' + 15'\ 28'' = 2\,117^\circ\ 479'\ 28''$$

Y después minutos a grados:

$$2\,117^\circ\ 479'\ 28'' = 2\,117^\circ + 7^\circ\ 59'\ 28'' = 2\,124^\circ\ 59'\ 28''$$

Por tanto, el resultado es: 2 124° 59’ 28”.

4 Encuentra la novena parte de 165° 48’ 29”.

**Solución**

Se dividen los grados entre 9:

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \\ \hline 9 & 165^\circ \;\; 48' \;\; 29'' \\ & \;\;\; 3^\circ \end{array}$$

El residuo se transforma a minutos y se suma con 48’,

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \\ \hline 9 & 165^\circ \qquad 48' \;\; 29'' \\ & \;\;\; 3^\circ = \underline{180'} \\ & \qquad\quad\; 228' \end{array}$$

Ahora 228’ se divide entre 9 y el residuo se transforma a segundos,

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \qquad 25' \\ \hline 9 & 165^\circ \qquad 48' \qquad 29'' \\ & \;\;\; 3^\circ = \underline{180'} \\ & \qquad\quad\; 228' \qquad 29'' \\ & \qquad\qquad\quad 3' = \underline{180''} \\ & \qquad\qquad\qquad\;\; 209'' \end{array}$$

Finalmente, 209” se divide entre 9:

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \qquad 25' \qquad 23'' \\ \hline 9 & 165^\circ \qquad 48' \qquad 29'' \\ & \;\;\; 3^\circ = \underline{180'} \\ & \qquad\quad\; 228' \qquad 29'' \\ & \qquad\qquad\quad 3' = \underline{180''} \\ & \qquad\qquad\qquad\;\; 209'' \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 2'' \end{array}$$

# EJERCICIO 4

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 40° 30' 18" + 15° 16' 32"
2. 25° 30" + 15° 12' 45"
3. 36° 42' 28" + 10° 23' 40" + 2° 13' 25"
4. 180° − 120° 40' 15"
5. 213° 25' 13" − 105° 17' 25"
6. 90° − 14° 15' 38"
7. 14° 30' 15" × 17
8. 35° 28" × 25
9. 25° 35' 25.4" × 15
10. 25° 13' 42" × 9
11. 118° 23' ÷ 26
12. 125° 30' 25" ÷ 8
13. 40° 20' 16" ÷ 12
14. 185° 34' 12" ÷ 14

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

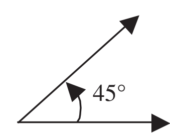
## Clasificación de acuerdo con su medida

La magnitud de un ángulo depende de su abertura comprendida entre los lados y no de la longitud de éstos. De acuerdo con su magnitud, se clasifican en:

### Convexos

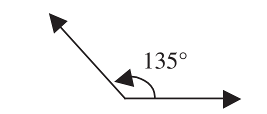
Son los que miden más de 0° y menos de 180°, a su vez se clasifican en:

**Agudo.** Es aquel que mide más de 0° y menos de 90°.



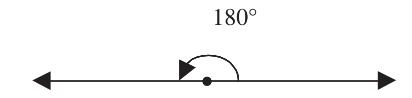

**Recto.** Es aquel cuya magnitud es de 90°.

**Obtuso.** Es aquel que mide más de 90° y menos de 180°.



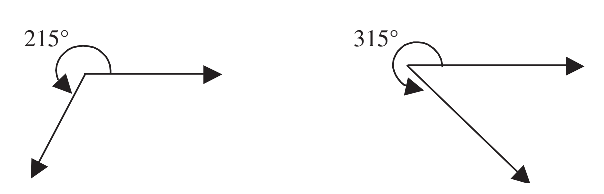

## Llano o de lados colineales

Es el que mide 180°.




## Cóncavo o entrante

Es aquel que mide más de 180° y menos de 360°.

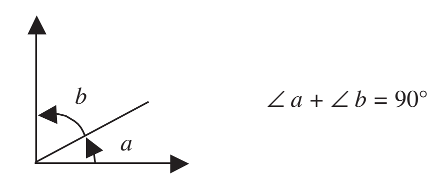



## Perigonal o de vuelta entera

Es el que mide 360°.

## Complementarios

Son aquellos cuya suma es igual a un ángulo recto (90°).

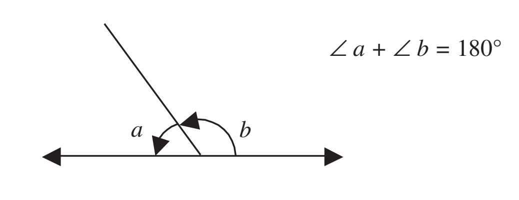



$\angle a + \angle b = 90°$

## Suplementarios

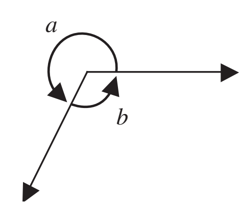
Son aquellos cuya suma es igual a dos ángulos rectos (180°).

$\angle a + \angle b = 180°$



## Conjugados

Son los ángulos cuya suma es igual a cuatro ángulos rectos (360°).




$\angle a + \angle b = 360°$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina el complemento del ángulo de 38° 40'.

**Solución**

Por definición, 2 ángulos son complementarios si suman 90°, entonces:

$$38° 40' + x = 90° \qquad \text{pero} \qquad 90° = 89° 60'$$
$$x = 89° 60' - 38° 40'$$
$$x = 51° 20'$$

Por consiguiente, el complemento de 38° 40' es 51° 20'.

2 Determina el ángulo que es el triple de su complemento.

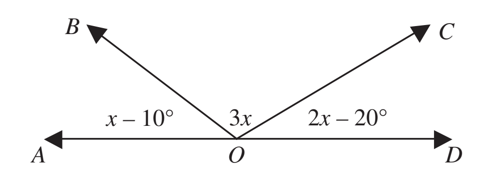
**Solución**

Sea $x$ el complemento, entonces $3x$ es el ángulo, al aplicar la definición de ángulos complementarios:

$$\text{Ángulo} + \text{Complemento} = 90° \quad ; \quad 3x + x = 90°$$
$$4x = 90°$$
$$x = \frac{90°}{4}$$
$$x = 22.5°$$

Por tanto, el ángulo es de 67.5° = 67° 30'.

3 Encuentra el valor de los ángulos que se muestran en la siguiente figura:




**Solución**

Los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$ son suplementarios, entonces:

$\angle AOB = x - 10°$

$\angle BOC = 3x$

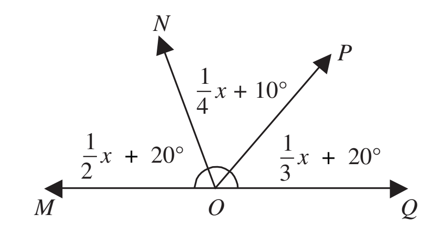
$\angle COD = 2x - 20°$

$$(x - 10°) + 3x + (2x - 20°) = 180°$$
$$6x - 30° = 180°$$
$$6x = 210°$$
$$x = 35°$$

Entonces:

$$\angle AOB = x - 10° = 35° - 10° = 25°$$
$$\angle BOC = 3x = 3(35°) = 105°$$
$$\angle COD = 2x - 20° = 2(35°) - 20° = 70° - 20° = 50°$$

4 Determina el valor de los ángulos de la siguiente figura:




**Solución**

En la figura,

$$\angle MON = \frac{1}{2}x + 20°, \angle NOP = \frac{1}{4}x + 10° \text{ y } \angle POQ = \frac{1}{3}x + 20°$$

Los ángulos $\angle MON$, $\angle NOP$ y $\angle POQ$ forman un ángulo llano, entonces:

$$\frac{1}{2}x + 20° + \frac{1}{4}x + 10° + \frac{1}{3}x + 20° = 180°$$

Donde $x = 120°$, por consiguiente,

$$\angle MON = 80°, \angle NOP = 40° \text{ y } \angle POQ = 60°$$

## EJERCICIO 5

Indica si los pares de ángulos siguientes son complementarios, suplementarios o conjugados:

1. 37° y 143°
2. 42° y 48°
3. 135° y 225°
4. 21° y 339°
5. 132° y 228°
6. 34° 48' y 55° 12'
7. 22° y 158°
8. 10° y 80°
9. 270° y 90°
10. 179° y 1°

Efectúa lo siguiente:

11. Determina el complemento de 80°.
12. Encuentra el suplemento de 123°.
13. Encuentra el conjugado de 280°.
14. Si el complemento de un ángulo $m$ es $2m$, ¿cuál es el valor del ángulo?
15. ¿Cuál es el ángulo cuyo complemento es 4 veces mayor que él?
16. Si el suplemento de un ángulo es 8 veces el ángulo, ¿cuánto vale éste?
17. Un ángulo y su complemento están en la razón 2:3. ¿Cuál es la medida del ángulo?

18. ¿Qué ángulo es igual al doble de su suplemento?

19. Determina el valor de los ángulos que se muestran en las siguientes figuras:

*a)*

C B O A
$x - 10°$
$2x - 20°$

*b)*

O D C B A
$x$
$2x$
$3x$

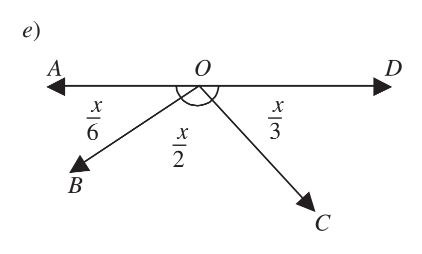
*c)*

B A O D
$4x - 10°$
$x + 15°$

*d)*

B C A O D
$2x - 5°$
$3x - 10°$
$x + 45°$

*e)*



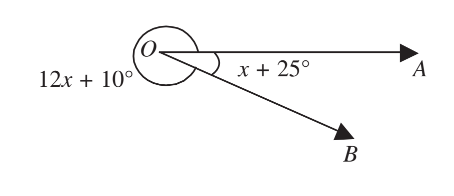

*f)*

B C D A O E
$2x + 15°$
$\frac{5}{4}x + 20°$
$\frac{7}{4}x + 10°$
$\frac{3}{2}x + 5°$

*g)*

O A B
$7x + 16°$
$4x + 14°$

*h)*



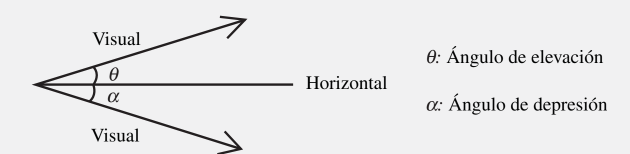

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los ángulos se encuentran en todo aquello que tenga intersecciones de líneas, bordes, planos, etcétera. La esquina de una cuadra, el cruce de los cables de luz, al abrir un libro, la esquina de un cuarto, la abertura formada por las manecillas de un reloj, la unión de una viga y una columna, son algunos ejemplos de ángulos, éstos tienen aplicación en la aviación, la navegación, la topografía y la trigonometría, entre otros.

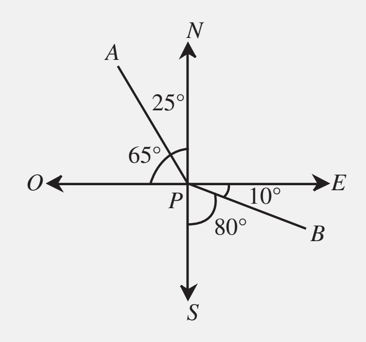
### Ángulo vertical

Sirve para definir el grado de inclinación del alineamiento sobre un terreno. Si se toma como referencia la línea horizontal, al ángulo vertical se le conoce como pendiente de una línea, el cual es positivo (de elevación) o negativo (de depresión).




### Ángulo horizontal

Lo forman 2 líneas rectas situadas en un plano horizontal. El valor del ángulo horizontal se utiliza para definir la dirección de un alineamiento a partir de una línea que se toma como referencia, y por lo regular son los puntos cardinales: norte (*N*), sur (*S*), este (*E*) y oeste (*O*).




En la figura se muestran las direcciones de los puntos *A* y *B* respecto al punto *P*.

Dirección de *A* respecto a *P*
*N*25°O o *O*65°*N*

Dirección de *B* respecto a *P*
*E*10°*S* o *S*80°*E*

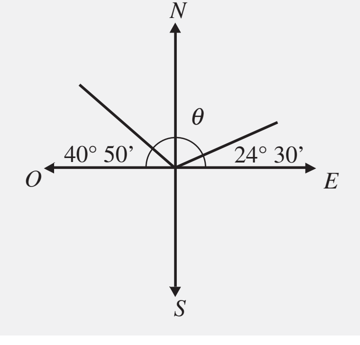
1 Un barco sale de un puerto con dirección *O*40°50'*N*, mientras que una segunda embarcación sale del mismo muelle con dirección *E*24°30'*N*. ¿Qué ángulo forman las direcciones de ambos buques?

**Solución**

Al establecer las direcciones de los dos barcos, se observa que el ángulo $\theta$ que forman es:

$$\theta = 180° - (40°\ 50' + 24°\ 30')$$
$$\theta = 180° - 65°\ 20'$$
$$\theta = 114°\ 40'$$

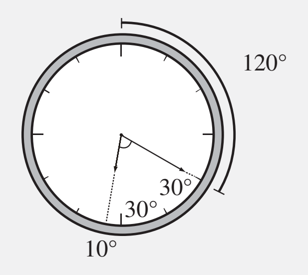
Por tanto el ángulo que forman mide 114° 40'.



2 ¿Cuál es el ángulo agudo formado por el horario y el minutero si el reloj marca las 18:20 hr?

**Solución**

En un reloj de manecillas cuando el minutero recorre una vuelta (360°), el horario sólo avanza 30°, esto significa que el horario avanza la doceava parte de lo que recorre el minutero por vuelta, a partir de las 12:00 hr, luego, a las 18:20 hr, el minutero avanzó 120° y está ubicado en el número 4 mientras que el horario avanzó $\frac{1}{12}$ (120°) = 10° y está entre las 6 y las 7 horas, por tanto, el ángulo agudo es de 70°.




## EJERCICIO 6

Resuelve los siguientes problemas:

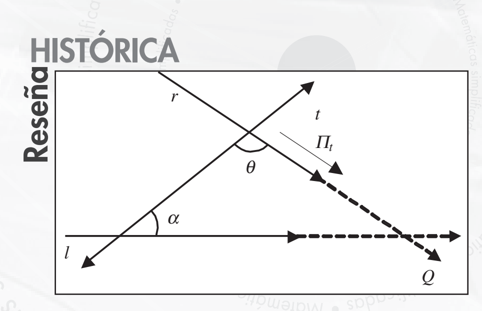
1. Un barco sale de un puerto con dirección norte y una segunda embarcación sale del mismo muelle con dirección sureste. Determina el ángulo que forman las direcciones de los dos buques.
2. Dos aviones parten de una ciudad con direcciones $S32°E$ y $E\,57°N$, ¿cuál es el ángulo que forman sus direcciones?
3. El ángulo que forman las direcciones de 2 personas es 125°. Determina los ángulos $\theta$ y $\alpha$ si la primera persona tiene dirección $O\theta N$, la segunda $E\alpha N$ y $\theta$ equivale a los cinco sextos de $\alpha$.
4. Desde un punto $P$ se observan dos edificios, el primero de ellos tiene una dirección $N8°\ 39'O$. Si el ángulo que forman las direcciones de estos edificios es de 144° 39', determina la dirección del segundo edificio si se encuentra en el plano oeste-sur.
5. ¿Cuál es el ángulo agudo formado por las manecillas del reloj cuando marcan las 14:15 hr?
6. Determina el número de grados en el ángulo formado por las manecillas del reloj a las 10:10 hr.
7. Encuentra el número de grados en el ángulo mayor formado por las manecillas del reloj a las $5\frac{1}{4}$.
8. ¿A qué hora entre las 12:00 y las 13:00, las manecillas del reloj formarán un ángulo de 165°?
9. ¿Cuántos radianes girará el minutero de un reloj en un día completo?
10. ¿A qué hora entre las 3 y las 4, las manecillas del reloj forman un ángulo de 130°?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 3

## RECTAS PERPENDICULARES Y PARALELAS

### Reseña HISTÓRICA




AXIOMA DE PARALELISMO
V POSTULADO DE EUCLIDES (V.P.E.)

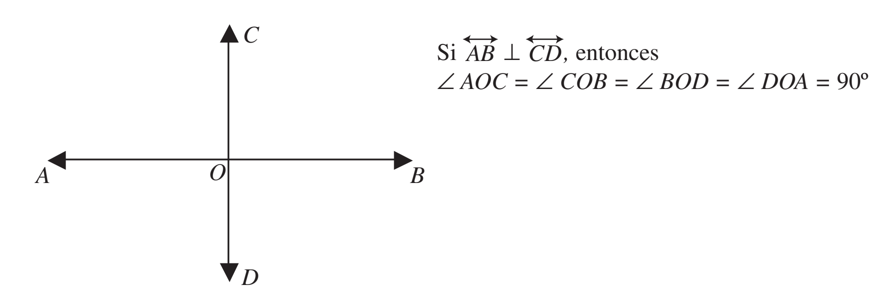
Si 2 rectas distintas $l$ y $r$, coplanares cortadas por una secante $t$ en puntos distintos, forman con ella en el semiplano $\Pi_t$ 2 ángulos interiores, de tal manera que la suma de sus medidas sea menor que 180º, entonces las 2 rectas se cortan en algún punto del semiplano $\Pi_t$.

El quinto postulado de Euclides (V.P.E.) tiene un enunciado equivalente, llamado el postulado de la paralela única de Playfair, el cual dice: "por un punto exterior a una recta pasa una paralela a la recta y sólo una".

El quinto postulado (axioma de paralelismo de Euclides) causó un trastorno considerable desde la época de los griegos. Muchos geómetras pensaron que tal vez podría deducirse como teorema a partir de los restantes axiomas o postulados. Euclides mismo trató de evitarlo mientras pudo, pues no lo utilizó en sus demostraciones sino hasta que llegó a la proposición 120. Durante más de 2 000 años fueron ofrecidas diferentes "demostraciones" del postulado, pero cada una se basaba en una suposición equivalente al mismo. La independencia del postulado de las paralelas quedó establecida cuando fue demostrada la compatibilidad de los otros geómetras donde el V Postulado se negaba o cambiaba por otro. Cualquier geometría cuyos axiomas contradicen alguno de los de Euclides, es llamada no euclidiana. La primera de ellas que se inventó fue la geometría Lobachevsquiana. Gauss (1777-1855) en Alemania, Bolyai (1802-1860) en Hungría y Lobachevsky (1793-1856) en Rusia, plantearon independientemente la forma de Playfair (1748-1819) del postulado, considerando 3 posibilidades: por un punto exterior a una recta pueden trazarse más de una, únicamente una o ninguna paralela a la recta.

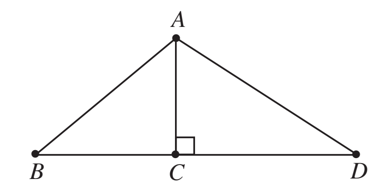
## Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si, al cortarse, forman 4 ángulos rectos. Para denotar que una recta es perpendicular a otra se utiliza el símbolo $\perp$.




Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, entonces
$\angle AOC = \angle COB = \angle BOD = \angle DOA = 90°$

➲ **Teorema 1.** Si por un punto exterior a una recta se traza una perpendicular y varias oblicuas, se verifica:




*a*) El segmento perpendicular comprendido entre el punto y la recta es menor que cualquier segmento de las oblicuas.

$$\text{Si } \overline{AC} \perp \overline{BD}, \text{ entonces } \overline{AC} < \overline{AB} \text{ y } \overline{AC} < \overline{AD}$$

*b*) De 2 segmentos de oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel que dista más.

$$\text{Si } \overline{BC} < \overline{CD}, \text{ entonces } \overline{AB} < \overline{AD}$$

*c*) Los segmentos de oblicuas cuyos pies equidistan al pie de la perpendicular, son iguales.

$$\text{Si } \overline{BC} = \overline{CD}, \text{ entonces } \overline{AB} = \overline{AD}$$

➲ **Teorema 2.** Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera.

## Paralelismo

Dos rectas son paralelas si no tienen un punto en común y guardan siempre una misma distancia.

A ——— B
C ——— D

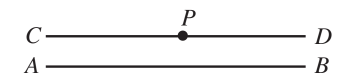
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

➲ **Teorema 1.** Dos rectas en el plano, paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

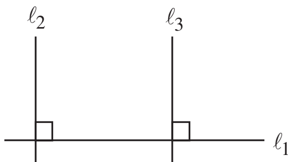
A ——— B
C ——— D
E ——— F

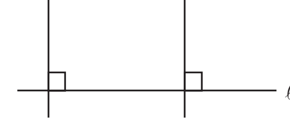
Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$

➲ **Teorema 2.** Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a ella.




➲ **Teorema 3.** Si una recta $\ell_1$ es perpendicular a $\ell_2$, también es perpendicular a toda paralela a la recta $\ell_2$.

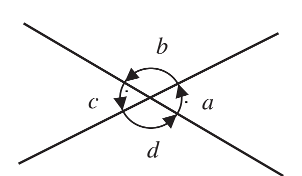




Si $\ell_1 \perp \ell_2$ y $\ell_2 \parallel \ell_3$

Entonces:
$\ell_1 \perp \ell_3$

## Ángulos opuestos por el vértice

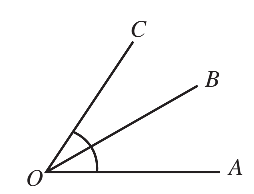



Son aquellos que tienen el vértice común, y los lados de uno de los ángulos son la prolongación de los del otro.

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales:

$$\angle a = \angle c \quad \text{y} \quad \angle b = \angle d$$

## Ángulos contiguos

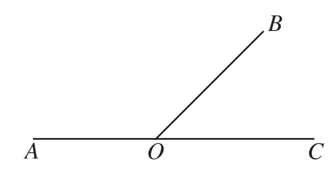



Son aquellos que tienen un lado y un vértice en común.

$\angle AOB$ es contiguo a $\angle BOC$, entonces:

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$$

## Ángulos adyacentes



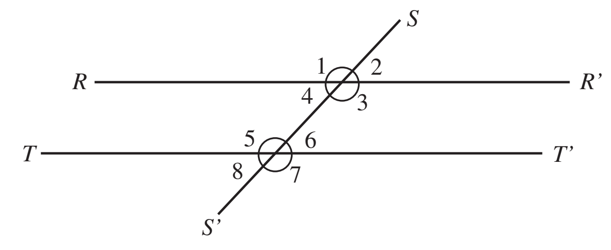

Son ángulos contiguos cuyos ángulos no comunes están alineados, esto es, suman 180º.

$\angle AOB$ es adyacente a $\angle BOC$, entonces:

$$\angle AOB + \angle BOC = 180º$$

## Rectas paralelas cortadas por una recta secante

Dadas las rectas, $\overline{RR'} \parallel \overline{TT'}$ y $\overline{SS'}$ una recta secante, se forman los siguientes ángulos:




Estos ángulos reciben los siguientes nombres:

**Ángulos alternos internos.** Ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la secante; son iguales.

$$\angle 3 = \angle 5; \quad \angle 4 = \angle 6$$

**Ángulos alternos externos.** Ángulos externos no adyacentes situados en distinto lado de la secante; son iguales.

$$\angle 1 = \angle 7; \quad \angle 2 = \angle 8$$

**Ángulos correspondientes.** Dos ángulos no adyacentes situados en un mismo lado de la secante; son iguales.

$$\angle 1 = \angle 5; \quad \angle 4 = \angle 8; \quad \angle 2 = \angle 6; \quad \angle 3 = \angle 7$$

**Ángulos colaterales internos (suplementarios).** Dos ángulos internos no adyacentes y situados del mismo lado de la secante; suman 180°.

$$\angle 4 + \angle 5 = 180°; \quad \angle 3 + \angle 6 = 180°$$

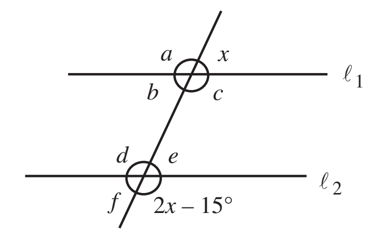
**Ángulos colaterales externos (suplementarios).** Ángulos externos no adyacentes situados del mismo lado de la secante; suman 180°.

$$\angle 1 + \angle 8 = 180°; \quad \angle 2 + \angle 7 = 180°$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, calcula el valor de los ángulos $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $x$, y $2x - 15°$, de la siguiente figura:




**Solución**

Los ángulos $x$ y $2x - 15°$ son colaterales externos, entonces:

$$x + (2x - 15°) = 180° \quad \rightarrow \quad 3x - 15° = 180°$$
$$3x = 180° + 15°$$
$$3x = 195°$$
$$x = \frac{195°}{3}$$
$$x = 65°$$

Los ángulos $a$ y $x$ son ángulos suplementarios:

$$a + x = 180° \quad \rightarrow \quad a = 180° - x$$
$$a = 180° - 65°$$
$$a = 115°$$

Para obtener los valores de los ángulos restantes, únicamente se toma la posición de cada par de ángulos:

$\angle d = \angle a$ por ser correspondientes, entonces $\angle d = 115°$

$\angle c = \angle a$ por ser opuestos por el vértice, en consecuencia $\angle c = 115°$

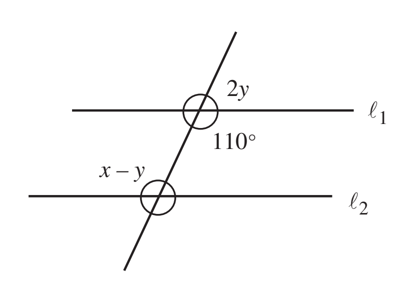
$\angle e = \angle x$ por ser correspondientes, se determina que $\angle e = 65°$

$\angle f = \angle e$ por ser opuestos por el vértice, por tanto $\angle f = 65°$

Luego, los valores de los ángulos son:

| | |
|---|---|
| $\angle a = 115°$ | $\angle x = 65°$ |
| $\angle d = 115°$ | $\angle b = 65°$ |
| $\angle c = 115°$ | $\angle e = 65°$ |
| $\angle 2x - 15° = 115°$ | $\angle f = 65°$ |

**2** Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, obtén los valores de $x$ y de $y$ en la siguiente figura:




**Solución**

Los ángulos 110° y $2y$ son suplementarios:

$$2y + 110° = 180° \qquad \text{donde} \qquad y = \frac{180° - 110°}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

Los ángulos $x - y$ y 110° son alternos internos, entonces,

$$x - y = 110° \qquad \text{donde} \qquad x - 35° = 110°$$
$$x = 110° + 35°$$
$$x = 145°$$

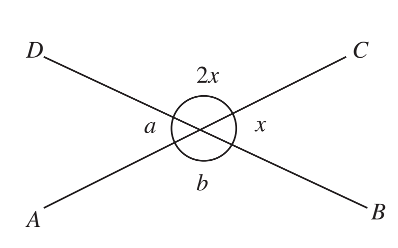
Finalmente, las soluciones son:

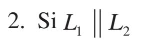
$$x = 145°; \quad y = 35°$$

## EJERCICIO 7

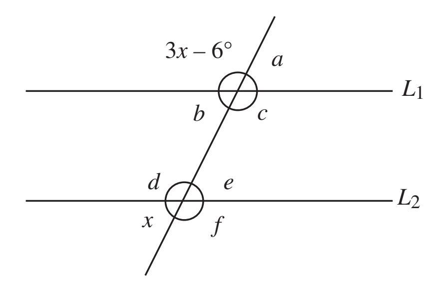
Calcula el valor de cada uno de los ángulos que se indican en las figuras siguientes:

1.

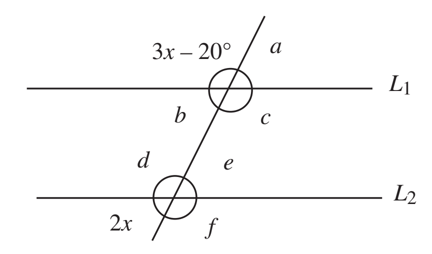


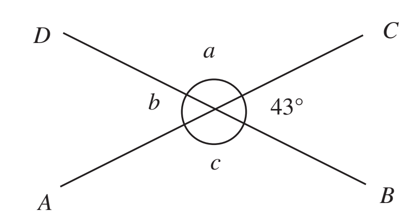
2. Si $L_1 \parallel L_2$



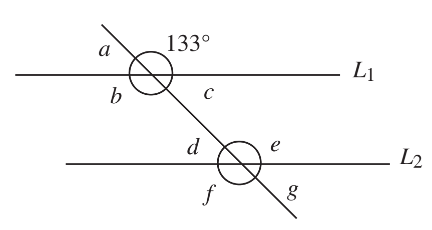

3. Si $L_1 \parallel L_2$



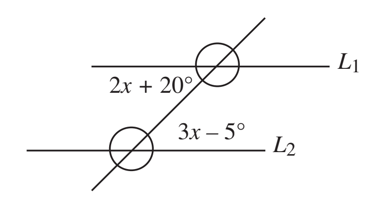
4.



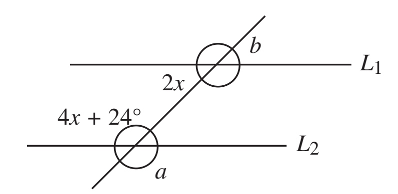
5. Si $L_1 \parallel L_2$, encuentra el valor de los ángulos



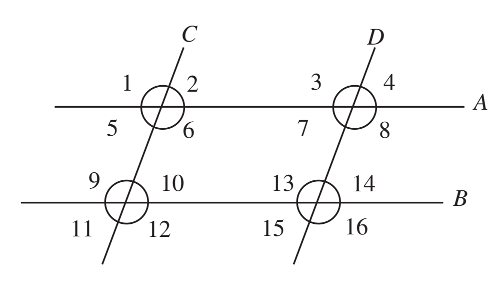

6. Si $L_1 \parallel L_2$, halla el valor de $x$




7. Si $L_1 \parallel L_2$, determina el valor de $x$, $a$ y $b$

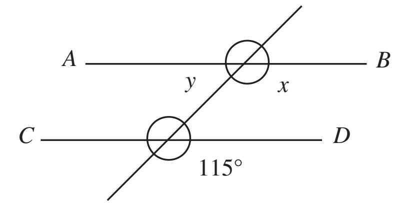



8. En la siguiente figura: $A \parallel B$, $C \parallel D$ y el $\angle 3 = 110°$. Determina la medida de los ángulos $\angle 4$, $\angle 7$, $\angle 1$, $\angle 10$, $\angle 13$ y $\angle 16$

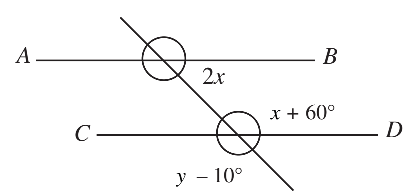



En los ejercicios del 9 al 11 determina el valor de $x$ y $y$

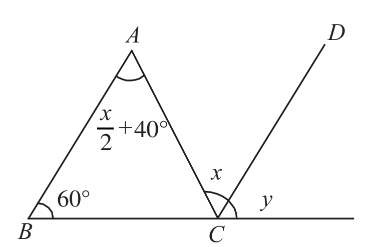
9. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



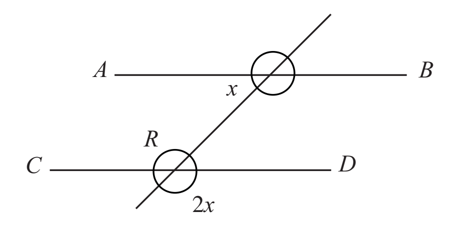

10. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$




11. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

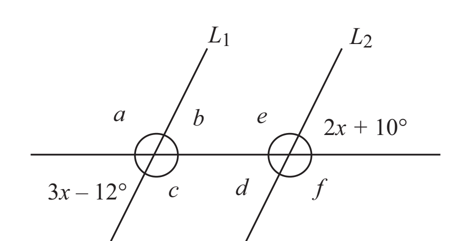



12. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, encuentra la medida del ángulo $R$

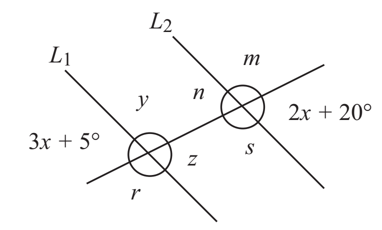


En las siguientes figuras encuentra la medida de los ángulos que se forman:

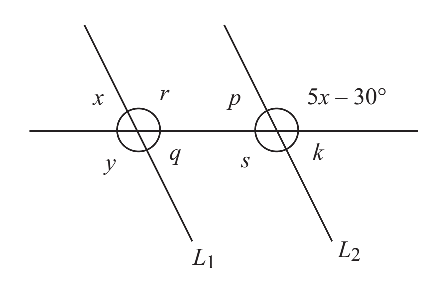
13. Si $L_1 \parallel L_2$



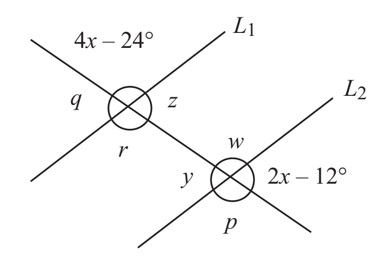

14. Si $L_1 \parallel L_2$




15. Si $L_1 \parallel L_2$

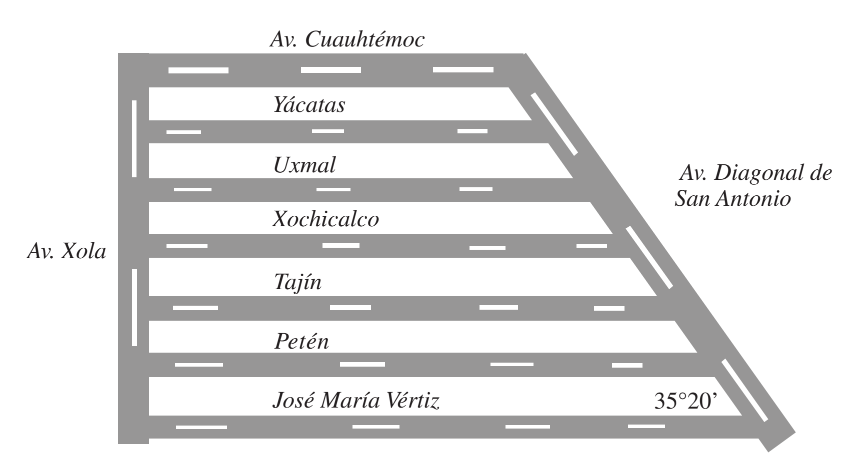



16. Si $L_1 \parallel L_2$




Resuelve los siguientes ejercicios:

17. Con base en el croquis que se muestra, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?




*a*) La calle de Uxmal es paralela a la de Tajín

*b*) La avenida Xola es perpendicular a la calle de Xochicalco

*c* ) La avenida Diagonal de San Antonio es paralela a la avenida Xola

*d*) El ángulo que forman la calle Petén y la avenida Diagonal de San Antonio es de 35° 20’

*e*) Las avenidas Xola y José María Vértiz son paralelas

*f*) Las avenidas Cuauhtémoc y José María Vértiz son paralelas

*g*) Las avenidas Diagonal de San Antonio y José María Vértiz son perpendiculares

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Reseña HISTÓRICA

Imagen de Pitágoras obtenida del *Diccionario de Autores*, perteneciente a la obra *Illustrium Imagines* de Fulvio Orsini, publicada en 1570.

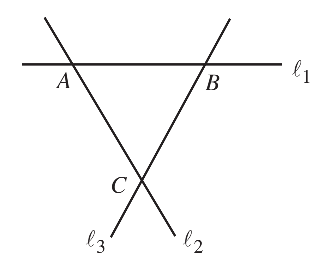
Pitágoras (c. 582-c. 500 a.C.), filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón. Nacido en la isla de Samos, Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios: Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. Se dice que Pitágoras fue condenado a exiliarse de Samos por su aversión a la tiranía de Polícrates. Hacia el 530 a.C. se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde fundó un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo.

**Teoría de los números**

Entre las amplias investigaciones matemáticas realizadas por los pitagóricos se encuentran sus estudios de los números pares e impares, y de los números primos y de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde el punto de vista aritmético cultivaron el concepto de número, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo. A partir de estos estudios establecieron una base científica para las matemáticas. En geometría el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros 2 lados.

## Definición

Porción del plano limitada por 3 rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices.



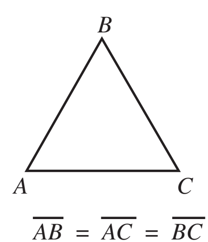

$A$, $B$ y $C$: vértices
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ : lados

## Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican por la longitud de sus lados o la magnitud de sus ángulos.

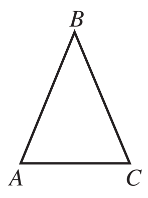
### Por sus lados

**Triángulo equilátero**
Sus lados son iguales



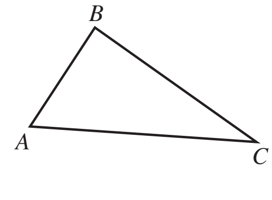

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

**Triángulo isósceles**
Tiene 2 lados iguales




$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$

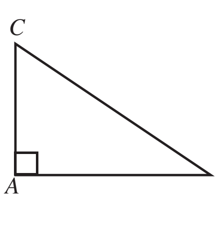
**Triángulo escaleno**
Sus lados son diferentes




$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

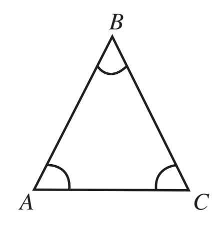
### Por sus ángulos

**Triángulo rectángulo**
Tiene un ángulo recto



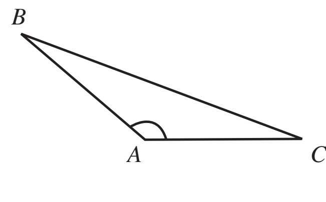

$\angle A = 90°$

**Triángulo acutángulo**
Sus 3 ángulos son agudos




$\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$ y $\angle C < 90°$

**Triángulo obtusángulo**
Es el que tiene un ángulo obtuso



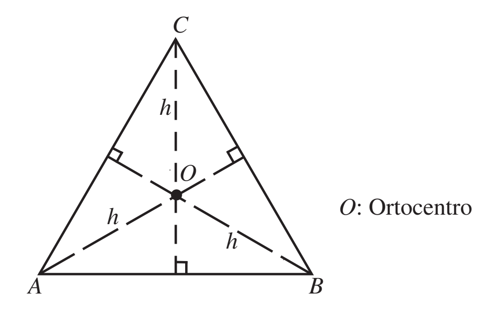

$\angle A > 90°$

## Rectas y puntos notables

Son rectas y puntos con características especiales dentro de un triángulo y son:

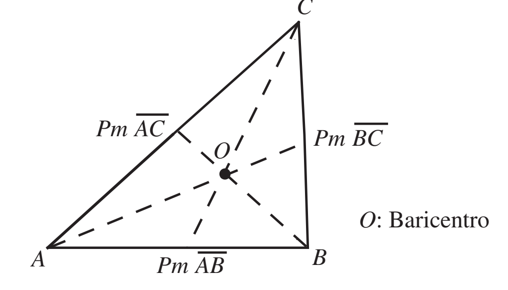
**Altura.** Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto.

**Ortocentro.** Se define así al punto donde se intersecan las alturas.



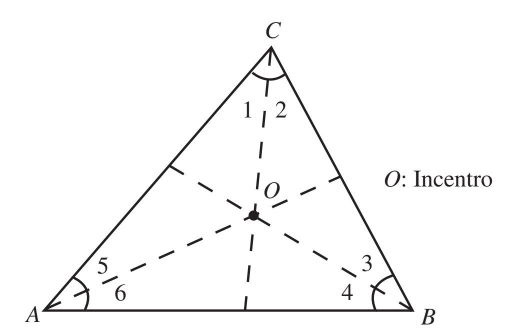

**Mediana.** Así se denomina al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

**Baricentro.** Es el punto donde se intersecan las medianas.



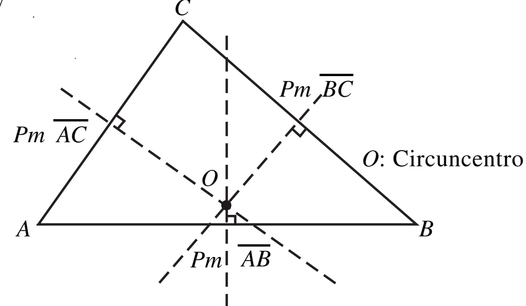

**Bisectriz.** Recta que divide en 2 ángulos iguales a un ángulo interior de un triángulo.

**Incentro.** Es el punto donde se intersecan las bisectrices.




**Mediatriz.** Recta perpendicular al lado de un triángulo y que pasa por el punto medio de este mismo lado.

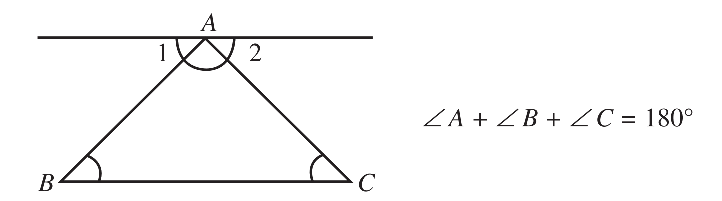
**Circuncentro.** Es el punto donde se intersecan las mediatrices.



## Teoremas

A continuación se mencionan y demuestran algunos teoremas importantes sobre triángulos.

➭ **Teorema 1.** La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.




$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

**Demostración:** Por ángulos suplementarios,

$$\angle 1 + \angle A + \angle 2 = 180°$$

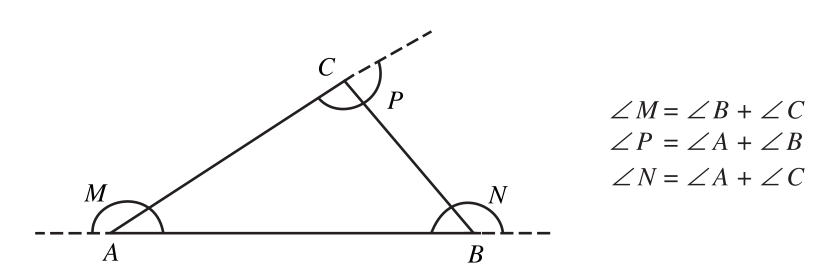
La recta que pasa por el vértice $A$ es paralela a $BC$ y por ángulos alternos internos entre paralelas:

$$\angle 1 = \angle B;\ \angle 2 = \angle C$$

Al sustituir en $\angle 1 + \angle A + \angle 2 = 180°$, se obtiene:

$$\angle B + \angle A + \angle C = 180°$$

➭ **Teorema 2.** Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los 2 interiores no adyacentes a él.




$\angle M = \angle B + \angle C$
$\angle P = \angle A + \angle B$
$\angle N = \angle A + \angle C$

**Demostración:** En un triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°.

$$\angle B + \angle A + \angle C = 180°$$

Los ángulos $A$ y $M$ son suplementarios:

$$\angle A + \angle M = 180º$$

Al igualar:

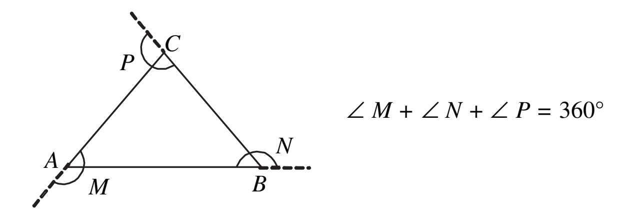
$$\angle B + \angle A + \angle C = \angle A + \angle M$$

$$\angle B + \angle C = \angle A - \angle A + \angle M$$

$$\angle B + \angle C = \angle M$$

Para $\angle N$ y $\angle P$ se realiza el mismo procedimiento.

➲ **Teorema 3.** La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360º.



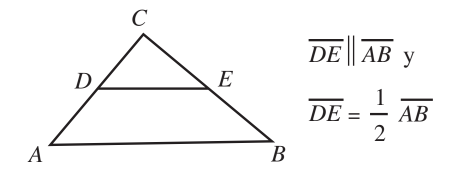

$\angle M + \angle N + \angle P = 360°$

**Demostración:** Los ángulos $M$, $P$ y $N$ son ángulos exteriores, entonces al aplicar el teorema 2.

$$\angle M = \angle B + \angle C$$
$$+ \quad \angle P = \angle A + \angle B$$
$$\angle N = \angle A + \angle C$$
$$\angle M + \angle N + \angle P = 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C$$
$$\angle M + \angle N + \angle P = 2(\angle A + \angle B + \angle C)$$
$$\angle M + \angle N + \angle P = 2(180°) = 360°$$

Por tanto, $\angle M + \angle N + \angle P = 360°$

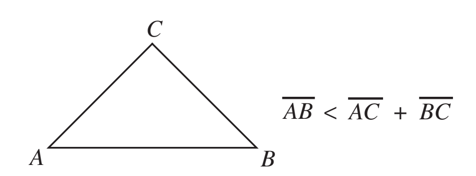
➲ **Teorema 4.** En todo triángulo la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados es paralela e igual a un medio de la longitud del lado restante.




$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y

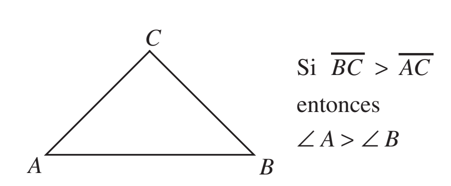
$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

➲ **Teorema 5.** La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el lado restante, mientras que su diferencia es menor.



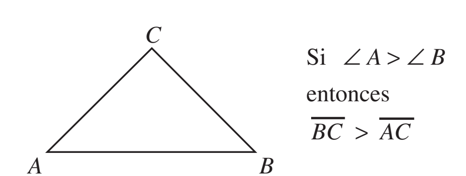

$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$

➲ **Teorema 6.** Si 2 lados de un triángulo son distintos, al mayor lado se opone mayor ángulo.




Si $\overline{BC} > \overline{AC}$ entonces $\angle A > \angle B$

➲ **Teorema 7.** Para 2 ángulos distintos de un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.

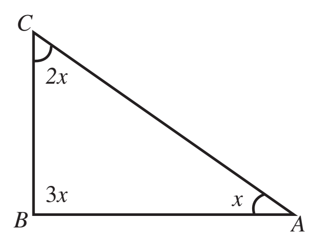



Si $\angle A > \angle B$ entonces $\overline{BC} > \overline{AC}$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor de los ángulos del siguiente triángulo:




**Solución**

Por definición, los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

$$x + 2x + 3x = 180° \quad \text{donde} \quad 6x = 180°$$

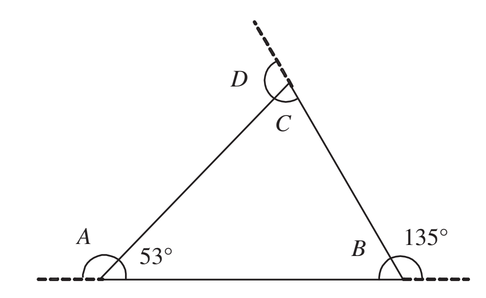
$$x = \frac{180°}{6} = 30°$$

Si $x = 30°$, entonces:

$$\angle A = x = 30°, \angle C = 2x = 2(30°) = 60° \text{ y } \angle B = 3x = 3(30°) = 90°$$

Por consiguiente: $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$ y $\angle B = 90°$

2 Calcula el valor de los ángulos del siguiente triángulo:




**Solución**

Por ángulos exteriores:

$$\angle C + 53° = 135° \quad \text{donde} \quad \angle C = 135° - 53° = 82°$$

Por ángulos suplementarios,

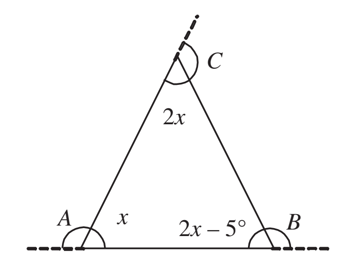
$$\angle B + 135° = 180° \rightarrow \angle B = 180° - 135° = 45°$$

$$\angle A + 53° = 180° \rightarrow \angle A = 180° - 53° = 127°$$

$$\angle C + \angle D = 180° \rightarrow \angle D = 180° - \angle C = 180° - 82° = 98°$$

Por tanto, $\angle A = 127°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 82°$ y $\angle D = 98°$

3 Determina el valor de los ángulos del siguiente triángulo:




**Solución**

La suma de los ángulos interiores es 180°

$$2x + x + (2x - 5°) = 180° \qquad 5x - 5° = 180°$$

$$x = \frac{185°}{5} = 37°$$

Por ser ángulos suplementarios:

$$\angle A + x = 180° \rightarrow \angle A = 180° - x = 180° - 37° = 143°$$

$$\angle B + 2x - 5° = 180° \rightarrow \angle B = 180° - 2x + 5° = 180° - 74° + 5° = 111°$$

$$\angle C + 2x = 180° \rightarrow \angle C = 180° - 2x = 180° - 74° = 106°$$

Por consiguiente:

$$\angle A = 143° \qquad \angle B = 111° \qquad \angle C = 106°$$

$$\angle x = 37° \qquad \angle 2x - 5° = 69° \qquad \angle 2x = 74°$$

4 La medida de los ángulos interiores de un triángulo es equivalente a 3 números pares consecutivos, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

**Solución**

Sean los ángulos $2x$, $2x + 2°$, $2x + 4°$, si aplicas el teorema 1 de los triángulos:

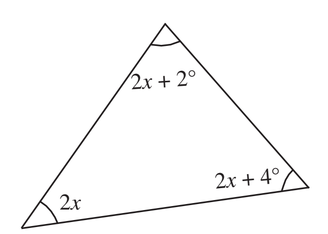
$$2x + 2x + 2° + 2x + 4° = 180°$$

$$6x + 6° = 180°$$

$$6x = 174°$$

$$x = 29°$$

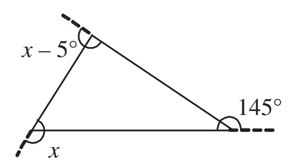
Por tanto, el valor de cada uno de los ángulos es:
58°, 60° y 62°



# EJERCICIO 8

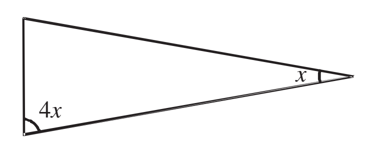
Resuelve los siguientes problemas:

1. Calcula el valor de los ángulos exteriores del siguiente triángulo:

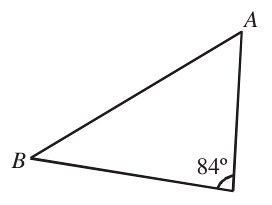



2. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 8 veces el otro. ¿Cuánto vale cada ángulo?

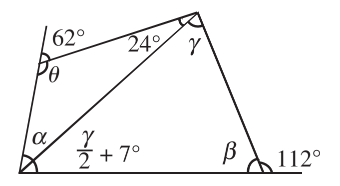
3. En un triángulo isósceles, un ángulo de la base es el cuádruplo del ángulo diferente. ¿Cuánto mide cada ángulo?



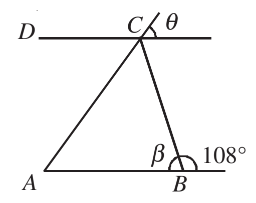

4. Uno de los ángulos interiores de un triángulo mide 84° y la diferencia de los otros 2 es de 14°. ¿Cuánto miden los ángulos restantes?



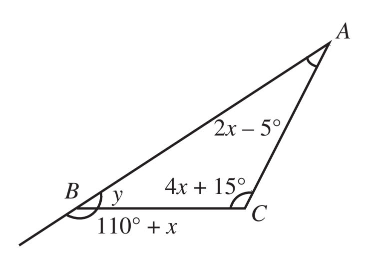

5. Encuentra los ángulos interiores de los siguientes triángulos:



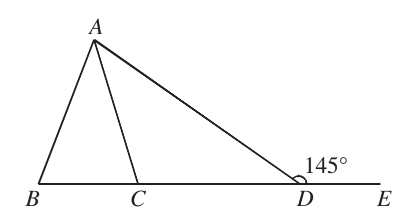

6. Determina los valores de $\beta$ y $\theta$. Si $\overline{AC}$ biseca al ángulo $DCB$ y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$




7. Determina el valor de los ángulos interiores del triángulo $ABC$.




8. En la siguiente figura el lado $\overline{AC}$ es bisectriz del ángulo $\angle BAD$. Determina los ángulos interiores de los $\Delta ABC$ y $ACD$ sabiendo que $\angle BAC = y + 8°$, $\angle CAD = x + 13°$, $\angle ABC = 3x - 6°$ y $\angle ACD = \frac{10}{3}y + 7°$



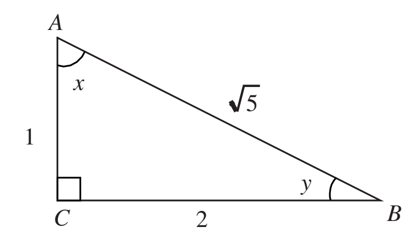

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

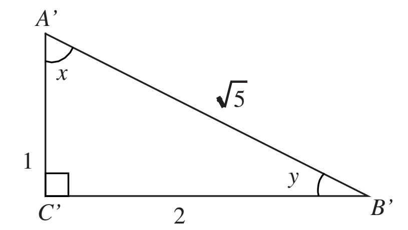
## Triángulos congruentes

Son aquellos que tienen la misma forma y tamaño.

Si 2 triángulos son congruentes entonces:

*a)* Sus lados homólogos son iguales.
*b)* Sus ángulos homólogos son iguales.



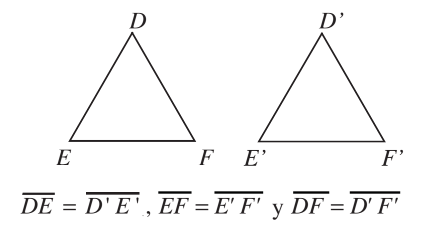




Los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son congruentes, porque tienen iguales tanto sus lados como sus ángulos, es decir, existe igualdad entre los 3 pares de lados y los 3 pares de ángulos.

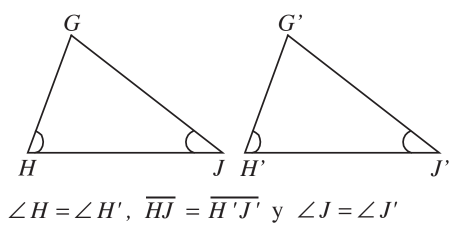
Esto se representa $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$ y se lee: "El triángulo $ABC$ es congruente con el triángulo $A'B'C'$ ".

### Teoremas de congruencia

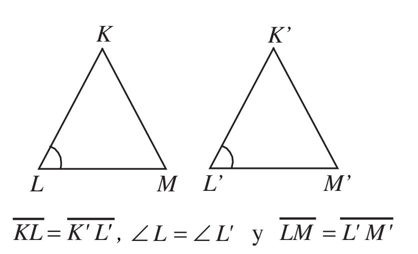
- **Teorema I (lado, lado, lado).** Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados iguales.




- **Teorema II (ángulo, lado, ángulo).** Dos triángulos son congruentes si tienen 2 ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente iguales.



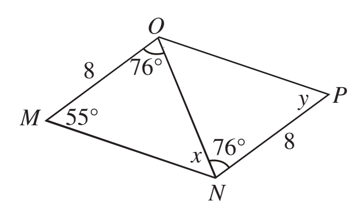

- **Teorema III (lado, ángulo, lado).** Dos triángulos son congruentes si 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales a sus homólogos del otro.



## EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la siguiente figura $\overline{MO} \parallel \overline{PN}$. Determina si los siguientes triángulos son congruentes y encuentra los valores de $x$ y $y$.




**Solución**

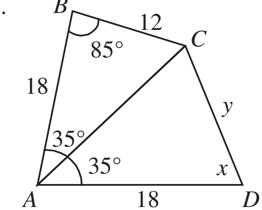
Se construye una tabla en la que se dan las afirmaciones y las razones que nos lleven a la demostración que se pide.

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\overline{MO} = \overline{PN}$ | 1. Datos |
| 2. $\angle MON = \angle PNO$ | 2. Datos |
| 3. $\overline{ON} = \overline{NO}$ | 3. Por ser lado común a los triángulos *MON* y *PNO* |
| 4. $\Delta MON \cong \Delta PNO$ | 4. Por el teorema: lado, ángulo, lado |
| 5. $y = 55°$ | 5. Los ángulos homólogos de triángulos congruentes son iguales |
| 6. $x = 49°$ | 6. En el triángulo *OMN*: $\angle MON + \angle ONM + \angle NMO = 180°$<br>$76° + x + 55° = 180°$<br>$x = 180° - 76° - 55° = 49°$ |

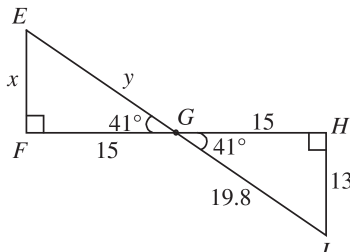
## EJERCICIO 9

En cada uno de los siguientes casos indica por qué son congruentes los triángulos y determina los valores de $x$ y $y$.

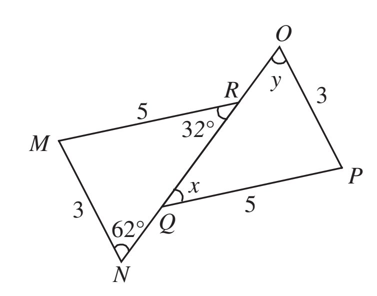
1.




2.




3. Si $\overline{NR} = \overline{QO}$




Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Aplicación de los teoremas de congruencia*

Dados dos triángulos, establece los criterios por los que son congruentes.

**EJEMPLOS**

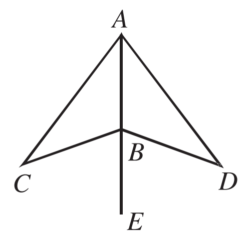
1 Si $\overline{AB}\parallel\overline{DF}$, $\overline{AC}\parallel\overline{EF}$ y $\overline{CB}\cong\overline{DE}$, demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta FDE$

**Solución**

***Demostración:***

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\angle C \cong \angle E$ | 1. Los lados *AC* y *EF* son paralelos y *CE* es la recta secante, por tanto, los ángulos *C* y *E* son alternos internos |
| 2. $\overline{CB} \cong \overline{DE}$ | 2. Datos |
| 3. $\angle B \cong \angle D$ | 3. Los lados *AB* y *DF* son paralelos y *CE* es la recta secante, en consecuencia, los ángulos *B* y *D* son alternos internos |
| 4. $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ | 4. Por el teorema: ángulo, lado, ángulo |

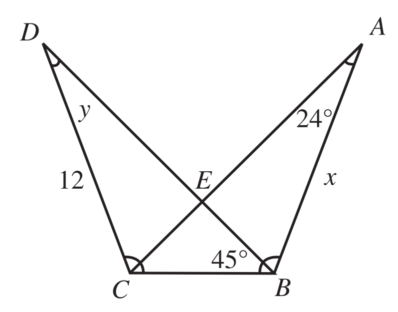
2 Si $\overline{AB}$ es bisectriz de $\angle CAD$ y $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Demuestra que $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz de $\angle CBD$.




**Solución**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ | 1. Datos |
| 2. $\angle CAB \cong \angle DAB$ | 2. Definición de bisectriz |
| 3. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ | 3. Por ser lado común a los triángulos *CAB* y *DAB* |
| 4. $\Delta CAB \cong \Delta DAB$ | 4. Por el teorema: lado, ángulo, lado |
| 5. $\angle CBA \cong \angle DBA$ | 5. Los ángulos homólogos en triángulos congruentes son iguales |
| 6. $\angle CBE \cong \angle DBE$ | 6. $\angle EBA = \angle ABE \rightarrow \angle CBA + \angle CBE = \angle DBA + \angle DBE$, pero $\angle CBA = \angle DBA$, entonces $\angle CBE = \angle DBE$ |
| 7. $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz del ángulo $\angle CBD$ | 7. Definición de bisectriz: $\angle CBE = \angle DBE$ |

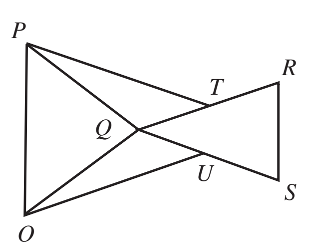
3 Si $\angle DCB = 111°$ y $\overline{DB} \perp \overline{AC}$, demuestra que los triángulos $DBC$ y $ACB$ son congruentes y determina los valores de $x$ y $y$.




**Solución**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\angle CEB = 90°$ | 1. Datos |
| 2. $\angle DBC = 45°$ | 2. Datos |
| 3. $\angle DCB = 111°$ | 3. Datos |
| 4. $\angle ECB = 45°$ | 4. En el triángulo $EBC$: $\angle CEB + \angle EBC + \angle ECB = 180°$, $90° + 45° + \angle ECB = 180°$, $\angle ECB = 180° - 135°$, $\angle ECB = 45°$ |
| 5. $\angle AEC = 180°$ | 5. Por ser ángulo llano |
| 6. $\angle AEB = 90°$ | 6. $\angle AEC = \angle CEB + \angle AEB$, $180° = 90° + \angle AEB$, $90° = \angle AEB$ |
| 7. $\angle ABE = 66°$ | 7. En el triángulo $ABE$: $\angle AEB + \angle EAB + \angle ABE = 180°$, $90° + 24° + \angle ABE = 180°$, $\angle ABE = 180° - 114°$, $\angle ABE = 66°$ |
| 8. $\angle CBA = 111°$ | 8. $\angle CBA = \angle CBE + \angle ABE$, $\angle CBA = 45° + 66°$, $\angle CBA = 111°$ |
| 9. $\angle DBC \cong \angle ACB$ | 9. Por las afirmaciones 2 y 4, si $\angle ACB = \angle ECB$ |
| 10. $\overline{CB} \cong \overline{BC}$ | 10. Por ser lado común a los triángulos $DBC$ y $ACB$ |
| 11. $\angle DCB \cong \angle ABC$ | 11. Por las afirmaciones 3 y 8, si $\angle ABC = \angle CBA$ |
| 12. $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ | 12. Por el teorema: lado, ángulo, lado |
| 13. $x = 12$, $y = 24°$ | 13. Los lados y ángulos homólogos de triángulos congruentes son iguales |

4 En la figura, $\overline{OQ} \cong \overline{PQ}$, $\overline{QS} \cong \overline{QR}$, $U$ es el punto medio de $\overline{QS}$, $T$ es el punto medio de $\overline{QR}$, $\angle OQR \cong \angle PQS$. Demuestra que $\overline{OU} \cong \overline{PT}$.



**Solución**

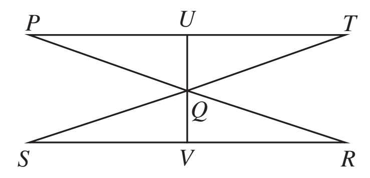
Para comprobar que $\overline{OU} \cong \overline{PT}$, es necesario demostrar que los triángulos *TQP* y *UQO* son congruentes, entonces:

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\overline{QS} \cong \overline{QR}$ | 1. Datos |
| 2. $\overline{QT} \cong \overline{QU}$ | 2. Los puntos *U* y *T* dividen en 2 segmentos iguales a los lados $\overline{QS}$ y $\overline{QR}$ |
| 3. $\angle OQR \cong \angle PQS$ | 3. Datos |
| 4. $\angle OQR \cong \angle OQS + \angle SQR$ | 4. Ángulos contiguos |
| 5. $\angle PQS \cong \angle PQR + \angle RQS$ | 5. Ángulos contiguos |
| 6. $\angle OQS \cong \angle PQR$ | 6. De 3 se tiene que: $\angle OQR \cong \angle PQS$, entonces: $\angle OQS + \angle SQR \cong \angle PQR + \angle RQS$, pero $\angle SQR \cong \angle RQS$, por tanto: $\angle OQS \cong \angle PQR$ |
| 7. $\overline{OQ} \cong \overline{PQ}$ | 7. Datos |
| 8. $\Delta\ TQP \cong \Delta\ UQO$ | 8. Por el teorema: lado, ángulo, lado |
| 9. $\overline{OU} \cong \overline{PT}$ | 9. Los lados homólogos en triángulos congruentes son iguales |

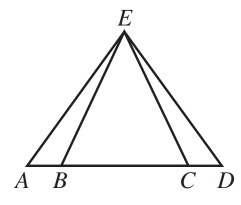
## EJERCICIO 10

Demuestra cada uno de los siguientes ejercicios:

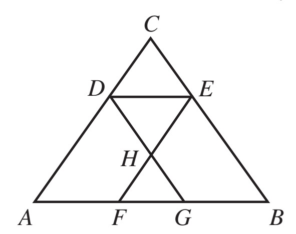
1. En la figura, los puntos *P, Q* y *R* son colineales, *S, Q* y *T* son colineales y *U, Q* y *V* son colineales. Si $\overline{SQ} \cong \overline{QT}$ y $\overline{UQ} \cong \overline{QV}$, demuestra que $\Delta\ PUQ \cong \Delta\ RVQ$



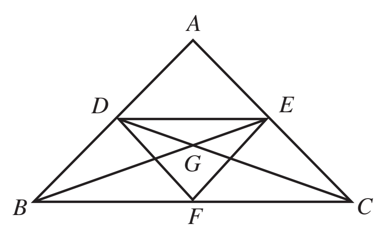

2. En la figura $\Delta AED$, con $\overline{AE} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Demuestra que $\angle\ CBE \cong \angle\ BCE$



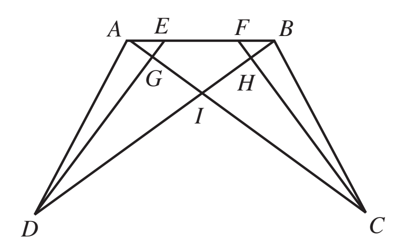

3. En la figura, $\angle\ CDH \cong \angle\ CEH$, $\overline{FH} \cong \overline{GH}$, $\overline{DH} \cong \overline{EH}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DC} \cong \overline{EC}$. Demuestra que $\Delta\ ADG \cong \Delta\ BEF$



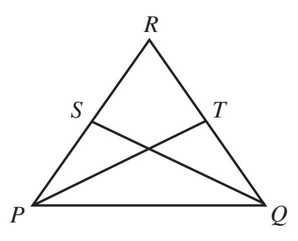
4. En la figura, $\angle ABC \cong \angle ACB$; $\overline{BF} \cong \overline{CF}$ y $\angle BFD \cong \angle CFE$. Demuestra que $\overline{BE} \cong \overline{CD}$



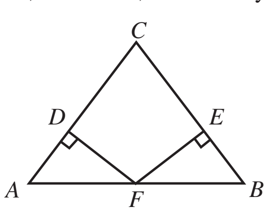

5. En la figura, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ y $\overline{AG} \cong \overline{BH}$. Demuestra que $\overline{EG} \cong \overline{FH}$



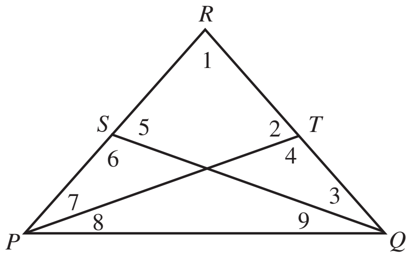

6. En la figura, $\overline{PS} \cong \overline{QT}$, $\overline{RS} \cong \overline{RT}$. Demuestra que $\overline{PT} \cong \overline{QS}$




7. En la figura se tiene el $\Delta\, ABC$ con $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{EF} \perp \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ y $\overline{DF} \cong \overline{EF}$. Demuestra que $\Delta\, ABC$ es isósceles.




8. De esta figura realiza lo que se indica.



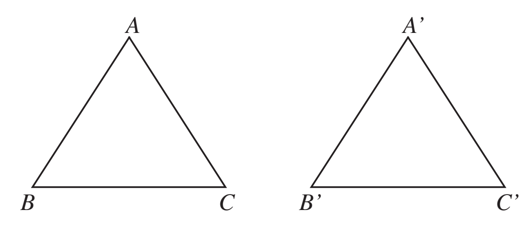

*a)* En el $\Delta\, PQR$, $\overline{PR} \cong \overline{QR}$ y $\angle 7 \cong \angle 3$, demuestra que $\overline{RS} \cong \overline{RT}$

*b)* En el $\Delta\, PQR$, $\angle RPQ \cong \angle RQP$ y $\angle 6 \cong \angle 4$, comprueba que $\overline{PS} \cong \overline{QT}$

**Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro, por ser demostraciones.**

*Relación entre ángulos y lados homólogos de dos triángulos congruentes*

Sean los triángulos congruentes *ABC* y *A'B'C'*:



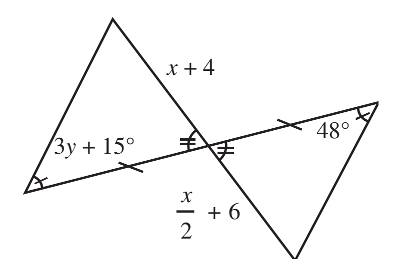

Entonces se verifica que sus lados y ángulos homólogos son iguales:

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ y } \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los valores de las incógnitas en los siguientes triángulos congruentes:




**Solución**

Dado que los triángulos son congruentes, sólo basta con igualar los ángulos y lados homólogos para determinar los valores tanto de $x$ como de $y$, entonces:

$$3y + 15° \text{ es homólogo a } 48° \text{ y } \text{“}x + 4\text{” es homólogo a “}\frac{x}{2} + 6\text{”}$$

Para $y$

$$3y + 15° = 48° \quad \rightarrow \quad 3y = 48° - 15° \quad \rightarrow \quad 3y = 33°$$
$$y = 11°$$

Para $x$

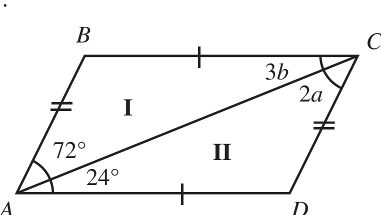
$$\frac{x}{2} + 6 = x + 4 \quad \rightarrow \quad 6 - 4 = x - \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{x}{2}$$
$$x = 4$$

En consecuencia, los valores de $x$ y $y$ son: 4 y 11°

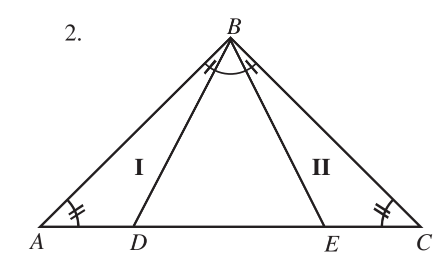
# EJERCICIO 11

En las siguientes figuras los triángulos I y II son congruentes. Determina el valor de las incógnitas.

1.

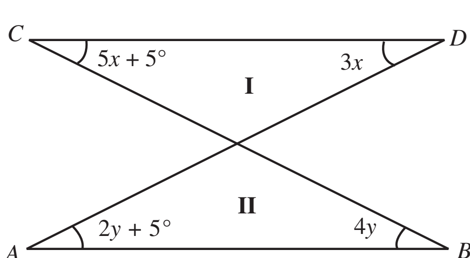



2.

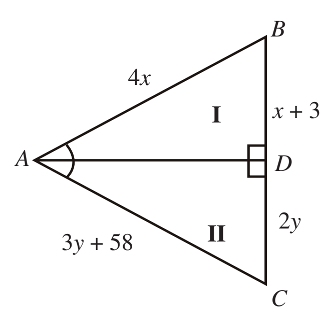



Si $\overline{AB} = 2y - 5$, $\overline{BC} = 5x + 10$
$\overline{AD} = x + 30$, $\overline{EC} = 3x$

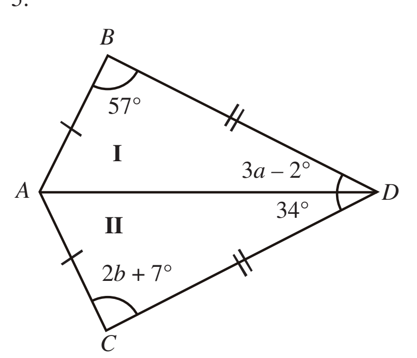
3.




4.




5.




Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Proporciones

La razón es la comparación de dos cantidades.

$$r = \frac{a}{b}$$

Una proporción es una igualdad de 2 razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a : b = c : d$$

Y se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*.

## Teoremas de proporciones

- **Teorema 1.** En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Si $a:b = c:d$, entonces $ad = bc$

- **Teorema 2.** En una proporción pueden intercambiarse el segundo y tercer términos, y se obtiene una proporción cierta.

Si $a:b = c:d$, entonces $a:c = b:d$

- **Teorema 3.** En una proporción pueden invertirse las razones.

Si $a:b = c:d$, entonces $b:a = d:c$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de $x$ en la proporción $\frac{x}{20} = \frac{3}{5}$

**Solución**

Se despeja la incógnita $x$,

$$\frac{x}{20} = \frac{3}{5} \quad \text{donde} \quad x = \frac{3\,(20)}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Por consiguiente, $x = 12$

2 Determina el valor de $x$ en la proporción $\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$

**Solución**

Se despeja la incógnita:

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{5} \quad \text{donde} \quad x = \frac{3(5)}{2} = \frac{15}{2}$$

Finalmente: $x = \frac{15}{2}$

3 Determina el valor de $x$ en la proporción $x : 2x - 3 = 3 : 5$

**Solución**

Se establece en forma de cociente la proporción:

$$\frac{x}{2x-3} = \frac{3}{5}$$

Ahora de la igualdad se realiza un producto cruzado y se resuelve para $x$:

$$5x = 3(2x - 3) \quad \rightarrow \quad 5x = 6x - 9$$

$$5x - 6x = -9$$

$$-x = -9$$

$$x = 9$$

De acuerdo con lo anterior, $x = 9$

4 Determina el valor de $x$ en la siguiente proporción $\frac{32}{x} = \frac{x}{2}$

**Solución**

Se realiza un producto cruzado y se resuelve para $x$,

$$\frac{32}{x} = \frac{x}{2} \quad \text{donde} \quad x(x) = (2)\,(32)$$

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64}$$

$$x = \pm 8$$

# EJERCICIO 12

Precisa el valor de $x$ en las siguientes proporciones:

1. $x : 4 = 6 : 8$
2. $3 : 5 = x : 12$
3. $3 : x = x : 27$
4. $x : 5 = 2x : (x + 3)$
5. $(x - 2) : 4 = 7 : (x + 2)$
6. $(2x + 8) : (x + 2) = (2x + 5) : (x + 1)$
7. $x : 2y = 18y : x$
8. $(x + 4) : 3 = 3 : (x - 4)$
9. $(x - 1) : 3 = 5 : (x + 1)$
10. $2x : (x + 7) = 3 : 5$

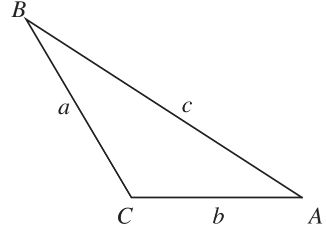
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

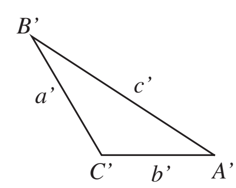
## Semejanza

Los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son semejantes si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

**Lados homólogos.** Son aquellos cuyos ángulos adyacentes son iguales.

$a$ con $a'$, $b$ con $b'$, $c$ con $c'$




Para indicar que 2 triángulos son semejantes se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, donde el símbolo ( $\sim$ ) se lee: es semejante.

### Propiedades fundamentales

1. Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales.

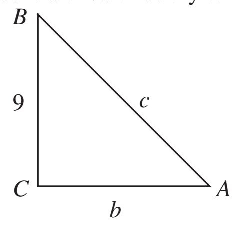
$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ y } \angle C = \angle C'$$

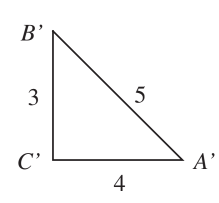
2. Dos triángulos son semejantes si la razón de cada par de lados homólogos es constante, es decir, si sus lados son respectivamente proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

**EJEMPLOS**

1 Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, encuentra el valor de $b$ y $c$.




**Solución**

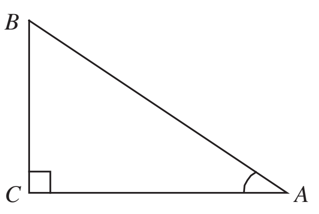
La proporcionalidad entre los lados se establece como $\frac{9}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, de la cual se obtiene:

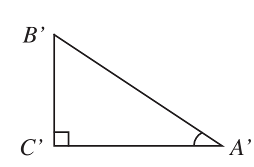
$$\frac{c}{5} = \frac{9}{3} \quad \rightarrow \quad c = \frac{9(5)}{3} = 15$$

$$\frac{b}{4} = \frac{9}{3} \quad \rightarrow \quad b = \frac{4(9)}{3} = 12$$

## Teoremas de semejanza

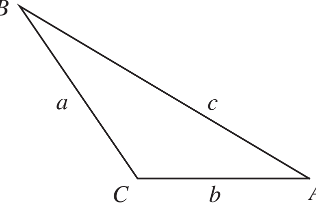
➲ **Teorema 1.** Dos triángulos son semejantes si tienen 2 ángulos homólogos.

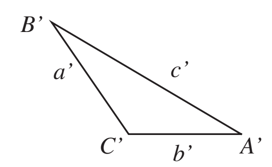



Si $\angle C = \angle C'$ y $\angle A = \angle A'$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

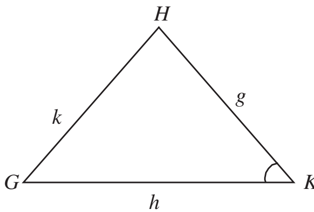
➲ **Teorema 2.** Dos triángulos son semejantes si sus 3 lados son proporcionales.

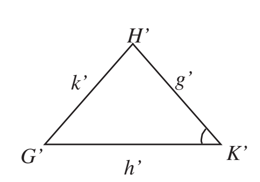



Si $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

➲ **Teorema 3.** Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.



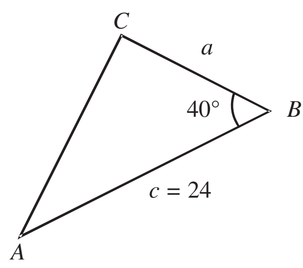



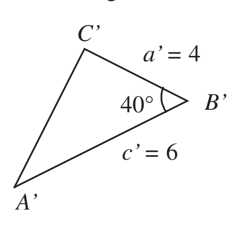

Si $\angle K = \angle K'$ y $\frac{g}{g'}=\frac{h}{h'}$, entonces $\Delta GHK \sim \Delta G'H'K'$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Los siguientes triángulos son semejantes, determina la longitud del lado $a$ en el triángulo $\Delta ABC$




**Solución**

Se establece la proporción entre los lados homólogos:

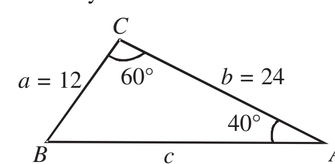
$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

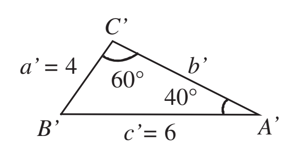
Se sustituyen los valores respectivos y se despeja para $a$,

$$\frac{a}{4}=\frac{24}{6} \qquad \text{donde} \qquad a = \frac{4(24)}{6} = 16$$

Por tanto, el valor de $a = 16$

**2** Encuentra la longitud de los lados $b'$ y $c$:




**Solución**

En los triángulos $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ por lo que se establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.

$$\frac{12}{4}=\frac{24}{b'}=\frac{c}{6}$$

De esta relación se obtiene:

$$\frac{12}{4}=\frac{24}{b'} \quad \rightarrow \quad b'=\frac{(4)(24)}{12}=8$$

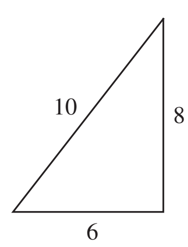
$$\frac{12}{4}=\frac{c}{6} \quad \rightarrow \quad c=\frac{(12)(6)}{4}=18$$

Entonces se deduce que, $b' = 8$ y $c = 18$

# EJERCICIO 13

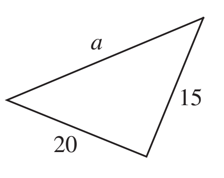
En cada uno de los siguientes ejercicios se dan triángulos semejantes y las medidas de alguno de sus lados. Encuentra las medidas de los lados restantes y los valores de las incógnitas.

1.



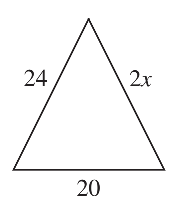

$c'$, 4, $a'$

2.



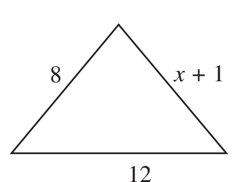

24, 12, $b'$

3.



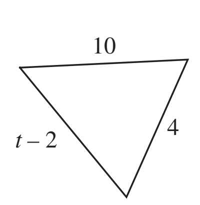

$\frac{y}{3}$, 11, 10

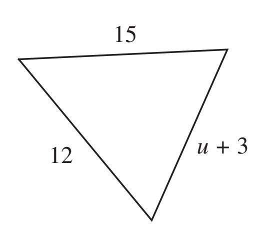
4.



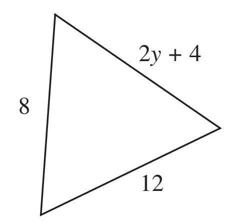

$y - 1$, 4, 6

5.




6.

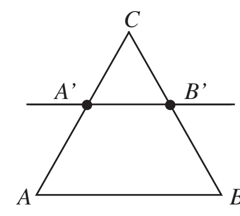



7.5, 6, $2x - 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Teorema de Tales

Cuando en un triángulo se traza una recta paralela a uno de los lados, el triángulo que se forma es semejante al primero.




Si $\overline{A'B'} \| \overline{AB}$, entonces

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el siguiente triángulo determina el valor de $x$, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

**Solución**

Por semejanza de triángulos, la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{12}{x+12}=\frac{14}{42}$$

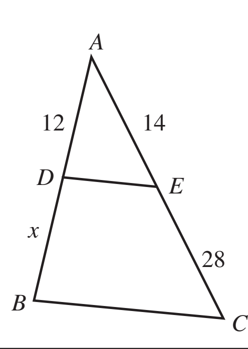
Se realiza un producto cruzado y se resuelve la ecuación para $x$:

$$(12)(42)=(14)(x+12)$$

$$504 = 14x + 168$$

$$504 - 168 = 14x$$

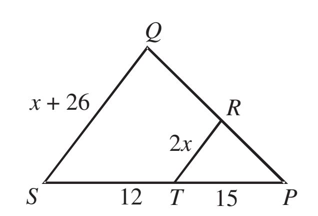
Por tanto $x = 24$



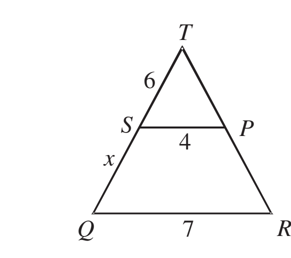
# EJERCICIO 14

Calcula el valor de $x$ en las siguientes figuras:

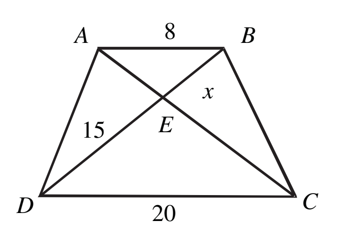
1. Si $\overline{RT} \parallel \overline{QS}$



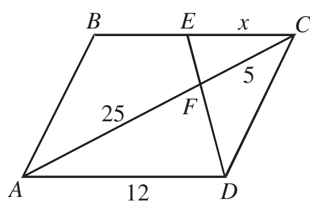

2. Si $\overline{QR} \parallel \overline{SP}$



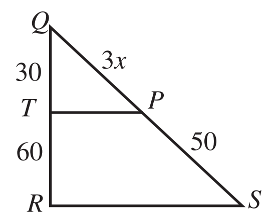

3.



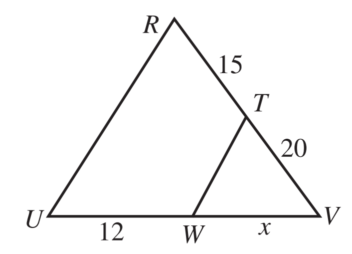

4.



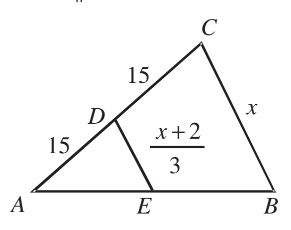

5. Si $\overline{TP} \parallel \overline{RS}$



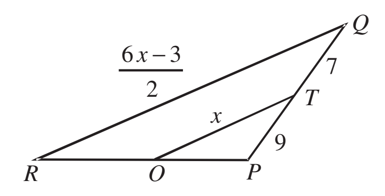

6. Si $\overline{TW} \parallel \overline{UR}$



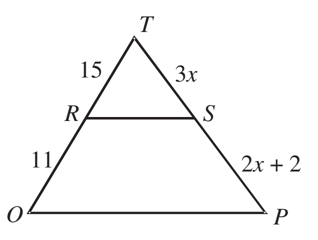

7. Si $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$



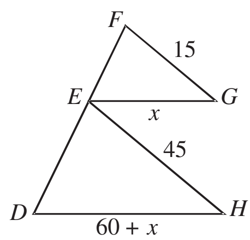

8. Si $\overline{OT} \parallel \overline{RQ}$




9. Si $\overline{RS} \parallel \overline{OP}$




10. Si $\overline{EG} \parallel \overline{DH}$




Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

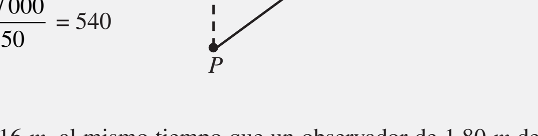
## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para encontrar la longitud de la base de un cerro, se construyó una pareja de triángulos rectángulos semejantes como se muestra en la figura, en la cual $\overline{PA} = 180\ m$, $\overline{CD} = 150\ m$ y $\overline{PC} = 50\ m$. ¿Cuánto mide la longitud del cerro?

**Solución**

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$$




Se sustituyen los valores dados,

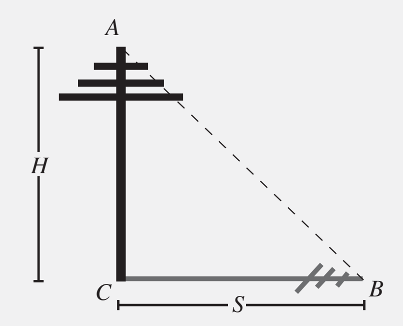
$$\frac{\overline{AB}}{150} = \frac{180}{50}$$

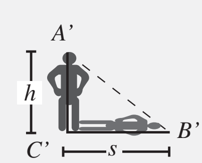
Donde,

$$\overline{AB} = \frac{150(180)}{50} = \frac{27\,000}{50} = 540$$

Por tanto, $\overline{AB} = 540\ m$

2 ¿Qué altura tiene un poste que proyecta una sombra de 16 $m$, al mismo tiempo que un observador de 1.80 $m$ de estatura proyecta una sombra de 1.20 $m$?




**Solución**

De acuerdo con el problema, la relación entre los ángulos es la siguiente:

$$\angle CAB = \angle C'A'B' \text{ y } \angle ABC = \angle A'B'C'$$

Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ y la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{H}{h} = \frac{S}{s}$$

Donde

$$h = 1.80\ m,\ S = 16\ m \text{ y } s = 1.20\ m$$

Los cuales, al sustituirlos en la proporción, determinan que:

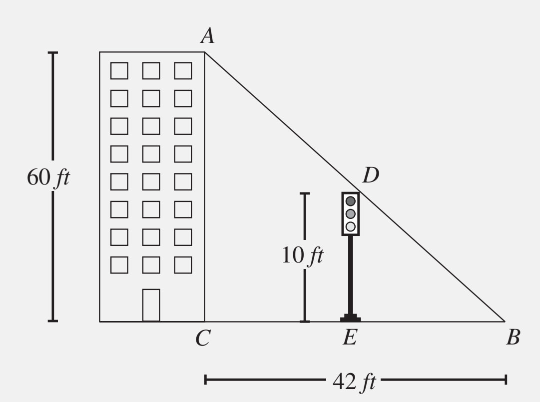
$$\frac{H}{1.80} = \frac{16}{1.20}$$

Entonces, se resuelve para $H$:

$$H = \frac{(16)(1.80)}{1.20} = \frac{28.8}{1.20} = 24\ m$$

Finalmente, resulta que la altura del poste es de 24 $m$.

3 A cierta hora del día un edificio de 60 *ft* de altura proyecta una sombra de 42 *ft*. ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un semáforo de 10 *ft* de altura a la misma hora?




**Solución**

De la figura,

$$\angle\, CAB = \angle\, EDB, \text{ por ser ángulos correspondientes.}$$

$$\angle\, ABC = \angle\, DBE, \text{ por ser ángulo común.}$$

Por tanto, los triángulos son semejantes:

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBE$$

Y la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{EB}}$$

Donde,

$$\overline{AC} = 60\, ft,\ \overline{DE} = 10\, ft \text{ y } \overline{CB} = 42\, ft$$

Los cuales, al sustituirlos en la proporción, determinan que:

$$\frac{60}{10} = \frac{42}{\overline{EB}}$$

Y al despejar $\overline{EB}$,

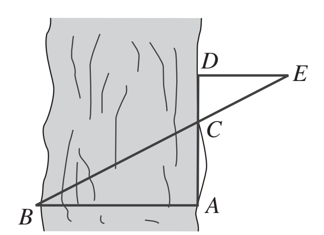
$$\overline{EB} = \frac{42(10)}{60} = 7\, ft$$

Por consiguiente, la sombra que proyecta el semáforo es de 7 *ft*.

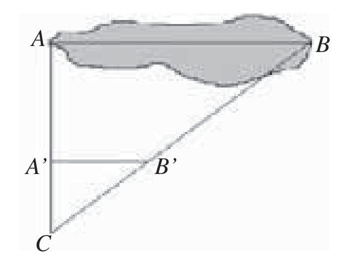
# EJERCICIO 15

Resuelve los siguientes problemas:

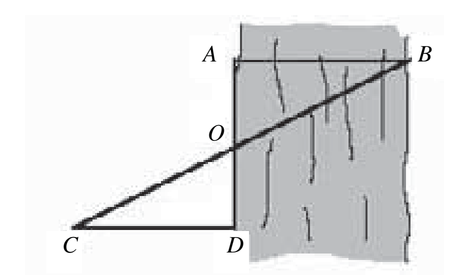
1. Para encontrar la anchura $\overline{AB}$ de un río se construyeron 2 triángulos semejantes, como se muestra en la figura. Y al medir se encontró que: $\overline{AC} = 17\ m$, $\overline{CD} = 5\ m$, $\overline{DE} = 20\ m$. ¿Cuál es la anchura del río?



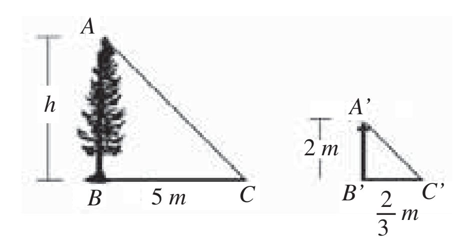

2. Para medir lo largo de un lago se construyeron los siguientes triángulos semejantes, en los cuales se tiene que: $\overline{AC} = 215\ m$, $\overline{A'C} = 50\ m$, $\overline{A'B'} = 112\ m$. ¿Cuál es la longitud del lago?



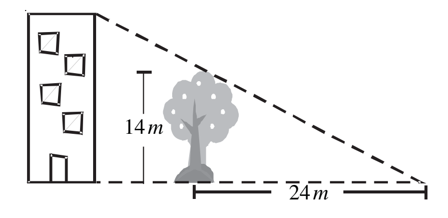

3. Para medir la anchura de un río se forman los siguientes triángulos, en los que: $\overline{AO} = 32\ m$, $\overline{CD} = 30\ m$, $\overline{OD} = 6\ m$. Encuentra $\overline{AB}$.




4. Un árbol proyecta una sombra de 5 $m$ a la misma hora en que un poste de 2 $m$ de altura, muy próximo al árbol, proyecta una sombra de $\frac{2}{3}$ $m$. Determina la altura $h$ del árbol, si tanto éste como el poste son perpendiculares al terreno.



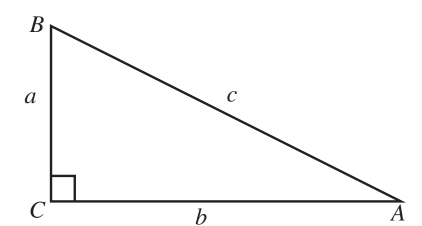

5. Un árbol de 14 $m$ de altura próximo a una torre, proyecta una sombra de 24 $m$ a la misma hora. Determina:
   a) La altura de la torre, si su sombra es de 48 $m$.
   b) La sombra que refleja la torre, si su altura es de 70 $m$.




Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

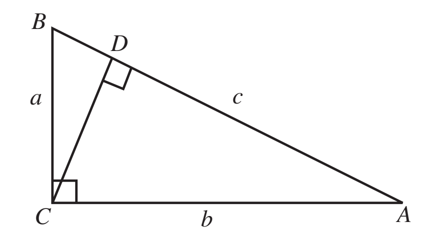



$c$: hipotenusa

$a$, $b$: catetos

$c^2 = a^2 + b^2$

***Demostración:*** Se traza la altura sobre la hipotenusa:




Los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ por ser $\angle ABC = \angle CBD$ y $\angle CAB = \angle DCB$ entonces,

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{\overline{BD}} \qquad \text{donde} \qquad c \cdot \overline{BD} = a^2$$

Los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ por ser $\angle CAB = \angle DAC$ y $\angle ABC = \angle ACD$ entonces,

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{\overline{AD}} \qquad \text{donde} \qquad c \cdot \overline{AD} = b^2$$

Al sumar $c \cdot \overline{BD} = a^2$ y $c \cdot \overline{AD} = b^2$, se obtiene,

$$c \cdot \overline{BD} + c \cdot \overline{AD} = a^2 + b^2$$

$$c\left(\overline{BD} + \overline{AD}\right) = a^2 + b^2$$

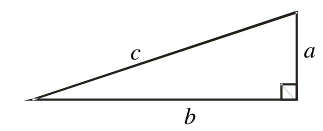
Pero $\overline{BD} + \overline{AD} = c$, por tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

## Ejemplo

Determina el valor de la hipotenusa del triángulo que se muestra, según los datos proporcionados en cada uno de los siguientes incisos:

*a*) $b = 12,\ a = 9$ *b*) $a = 3,\ b = 6$ *c*) $a = 3,\ b = 7$




## Soluciones

*a*) $a = 12,\ b = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (9)^2 + (12)^2$

$c^2 = 81 + 144$

$c^2 = 225$

$c = \sqrt{225} = 15$

*b*) $a = 3,\ b = 6$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (3)^2 + (6)^2$

$c^2 = 9 + 36$

$c^2 = 45$

$c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

*c*) $a = 3,\ b = 7$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (3)^2 + (7)^2$

$c^2 = 9 + 49$

$c^2 = 58$

$c = \sqrt{58}$

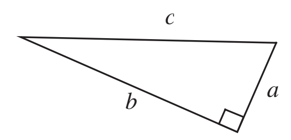
**Obtención de los catetos.** En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual a la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto.

$$a^2 = c^2 - b^2;\ \ b^2 = c^2 - a^2$$

## Ejemplo

Utiliza la figura para determinar el cateto que se pide en cada inciso:

*a*) $a = 24,\ c = 25$ *b*) $b = 6,\ c = 8$ *c*) $a = 4\sqrt{3},\ c = 8$




## Soluciones

*a*) $a = 24,\ c = 25$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = (25)^2 - (24)^2$

$b^2 = 625 - 576$

$b^2 = 49$

$b = \sqrt{49} = 7$

*b*) $b = 6,\ c = 8$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = (8)^2 - (6)^2$

$a^2 = 64 - 36$

$a^2 = 28$

$a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

*c*) $a = 4\sqrt{3},\ c = 8$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = (8)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2$

$b^2 = 64 - 48$

$b^2 = 16$

$b = \sqrt{16} = 4$

## Naturaleza del triángulo a partir del teorema de Pitágoras

Sea el triángulo *ABC*, cuyo lado mayor es el lado *c*, éste será un triángulo: rectángulo, acutángulo u obtusángulo, si al aplicar el teorema de Pitágoras se cumple que:

1. Si $c^2 = a^2 + b^2$, el triángulo es rectángulo

2. Si $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces $\begin{cases} c^2 < a^2 + b^2, \text{ el triángulo es acutángulo} \\ c^2 > a^2 + b^2, \text{ el triángulo es obtusángulo} \end{cases}$

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sea un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades. Comprueba si es un triángulo rectángulo.

**Solución**

Se toma el valor mayor como la hipotenusa:

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

Por tanto, el triángulo es rectángulo.

2 Sea el triángulo cuyos lados miden 7, 9 y 12 unidades. Determina qué tipo de triángulo es:

**Solución**

Se toma el mayor de los lados como *c*, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad (12)^2 = (9)^2 + (7)^2 \quad \rightarrow \quad 144 = 81 + 49$$
$$144 \neq 130$$

Dado que $144 > 130$, el triángulo es obtusángulo.

3 Determina la naturaleza de un triángulo cuyos lados miden 6, 4 y 5 unidades.

**Solución**

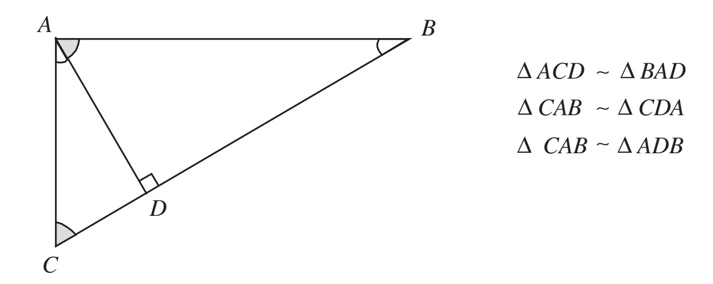
Al aplicar el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$(6)^2 = (4)^2 + (5)^2 \quad \rightarrow \quad 36 = 16 + 25 \quad \rightarrow \quad 36 \neq 41$$

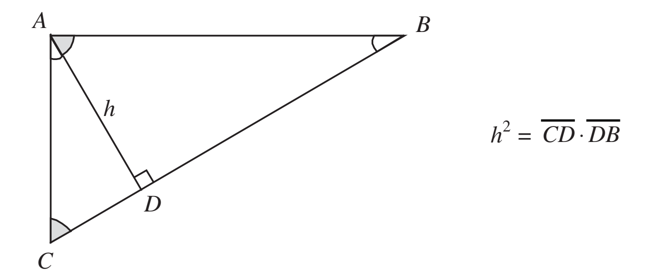
Puesto que $36 < 41$, el triángulo es acutángulo.

## Teoremas de semejanza en triángulos rectángulos

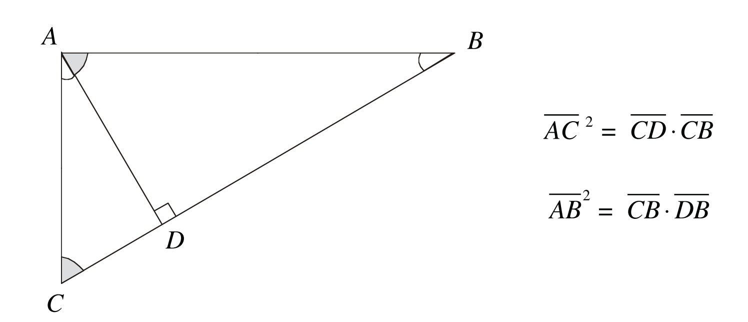
- **Teorema 1.** La altura trazada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, forma dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo dado, y a su vez semejantes entre ellos.




- **Teorema 2.** La altura trazada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre la medida de los segmentos de la hipotenusa.




- **Teorema 3.** Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo es la media proporcional de la hipotenusa y la medida del segmento de la hipotenusa interceptado por la altura, y el lado que es adyacente a ese cateto.



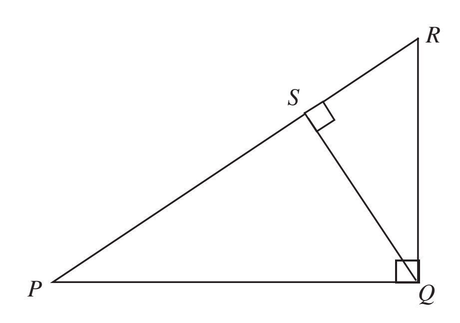
# EJERCICIO 16

Si $a$ y $b$ son los catetos de un triángulo y $c$ su hipotenusa, determina el lado que falta:

1. $a = 15, b = 20$
2. $a = 5, b = 4$
3. $a = 8, b = 4$
4. $a = 7, b = 7$
5. $a = 12, c = 20$
6. $b = 6, c = 8$
7. $b = 15, c = 17$
8. $a = 5\sqrt{2}, c = 10$
9. $a = 6\ m$ y $b = 3$
10. $a = 12\ m$ y $c = 13\ m$
11. $a = 14\ cm$ y $b = 15\ cm$
12. $b = 15\ dm$ y $c = 20\ dm$

Determina la naturaleza de los siguientes triángulos, cuyos lados miden:

13. 4, 5 y 7 $cm$
14. 5, 12 y 13 $cm$
15. 7, 9 y 11 $cm$
16. 7, 24 y 25 $cm$
17. 6, 8 y 10 $mm$
18. 1, $\sqrt{2}$ y 2 $cm$
19. $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ y 1 $cm$
20. 0.5, 0.7 y 0.8 $m$
21. $x, x-1$ y $\sqrt{2x^2-2x+1}$
22. En el triángulo rectángulo $PQR$, con $Q$ el ángulo recto y $\overline{QS}$ como altura trazada hacia la hipotenusa:




*a)* Determina $\overline{QS}$ si $\overline{PS} = 12$ y $\overline{SR} = 5$

*b)* Encuentra $\overline{QR}$ si $\overline{PR} = 25$ y $\overline{RS} = 13$

*c)* Halla $\overline{QR}$ si $\overline{PS} = 6$, $\overline{PQ} = 2\sqrt{15}$ y $\overline{RS} = 4$

*d)* Encuentra $\overline{PQ}$ si $\overline{PS} = 21$ y $\overline{RS} = 15$

*e)* Determina $\overline{PQ}$ si $\overline{RS} = 6$, $\overline{RQ} = 10$ y $\overline{QS} = 8$

*f)* Determina $\overline{QS}$ si $\overline{PQ} = 13$ y $\overline{QR} = 7$

*g)* Encuentra $\overline{RS}$ si $\overline{PQ} = 17$ y $\overline{QS} = 13$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Determina la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado $x$ *cm*.

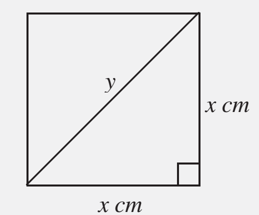
**Solución**

Al trazar la diagonal en un cuadrado, se forman 2 triángulos rectángulos, entonces:

$(hip)^2 = (cat)^2 + (cat)^2 \qquad y^2 = x^2 + x^2$

$y^2 = 2x^2$

$y = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$




Por tanto, la diagonal es $x\sqrt{2}$

2 Al abrir una escalera de pintor, se forma un triángulo isósceles, la distancia entre las bases es de 1 *m* y los lados iguales miden 1.40 *m*. Determina la altura de la escalera.

**Solución**

La altura de un triángulo isósceles divide a la base en 2 partes iguales, formándose 2 triángulos rectángulos:

$h^2 = (1.4)^2 - (0.5)^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 1.96 - 0.25$

$h^2 = 1.71$

$h = \sqrt{1.71}$

$h = 1.3\ m$

Por consiguiente, la altura de la escalera es de 1.3 *m*.

3 Un automóvil viaja a una velocidad constante de 2.5 *m/s* y pasa por debajo de un puente peatonal. Determina a los 12 *s*, la distancia entre el automóvil y el punto ubicado exactamente arriba del paso del mismo, si la altura del puente es de 6 *m*.

**Solución**

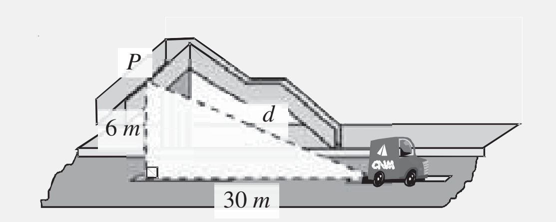
La altura del puente es de 6 *m* y a los 12 *s* el automóvil recorre 12(2.5) = 30 *m*, entonces:

$d^2 = (6)^2 + (30)^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 36 + 900$

$d^2 = 936$

$d = \sqrt{936}$

$d = 30.5\ m$

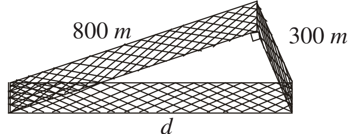



En consecuencia, la distancia es de 30.5 *m*.

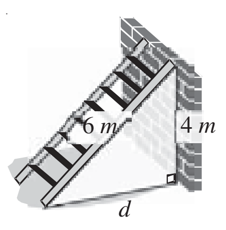
# EJERCICIO 17

Resuelve los siguientes problemas:

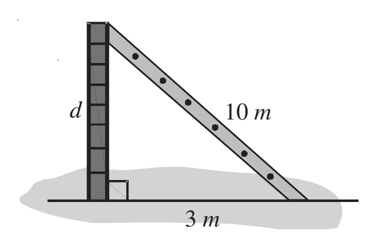
1. Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 300 y 800 *m*. ¿Qué cantidad de maya se necesita para cercarlo?



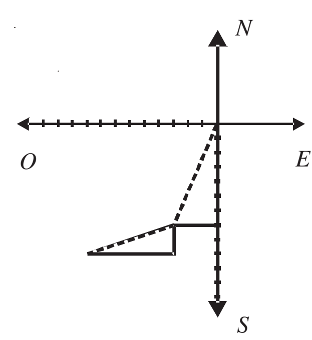

2. Con una escalera de 6 *m* se desea subir al extremo de una barda de 4 *m* de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con la punta de la torre?




3. Calcula la altura de un triángulo isósceles si su base mide 60 *cm* y cada uno de sus lados mide 50 *cm*.
4. Calcula la altura de un triángulo equilátero que de lado mide 10 *cm.*
5. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, cuya diagonal mide 8 *m*?
6. ¿A qué altura llega una escalera de 10 *m* de largo en un muro vertical, si su pie está a 3 *m* del muro?



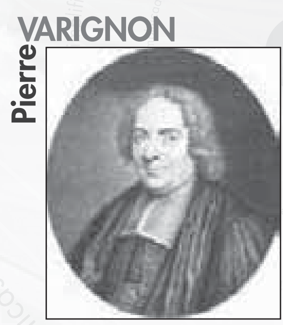

7. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su diagonal mide $5\sqrt{2}\ cm$?
8. Si el lado de un hexágono regular mide 16 *cm*, ¿cuánto mide su apotema?
9. Una persona camina 7 kilómetros hacia el sur, 3 hacia el oeste, 2 hacia el sur y 6 más hacia el oeste. ¿Cuál es la distancia entre el punto de partida y su destino?




10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 10 *cm*. Encuentra la longitud de los catetos.
11. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es igual a *m* y la mediana de uno de los ángulos agudos es igual a $\frac{m\sqrt{3}}{3}$. Determina la magnitud de los catetos.
12. En un triángulo rectángulo, *m* y *n* representan la longitud de las medianas trazadas a los catetos. Obtén la longitud de éstos y la hipotenusa en función de *m* y *n*.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Pierre VARIGNON

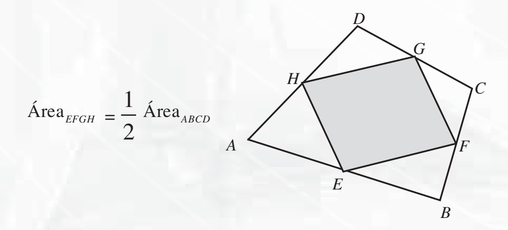


Pierre Varignon
(1654-1722)

Estaba destinado al oficio religioso, pero la impresión que le produjo la lectura de los *Elementos de Euclides* le llevó hacia las matemáticas. Se interesó por la mecánica, por el incipiente cálculo infinitesimal y por la geometría.

## Teorema de Varignon

Dado un cuadrilátero cualquiera *ABCD*, el polígono que determinan los puntos medios (*E*, *F*, *G*, *H*) de sus lados es un paralelogramo, y el área de éste es la mitad de la del cuadrilátero inicial.



## Definición

El cuadrilátero es todo polígono de 4 lados.

## Clasificación

Los cuadriláteros se dividen en:

**Paralelogramo.** Es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

**Cuadrado.** Es el paralelogramo que tiene todos sus lados iguales y sus ángulos son rectos.

**Rectángulo.** Es el paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales y los 4 ángulos rectos.

**Rombo.** Es el paralelogramo que tiene los lados iguales y ángulos contiguos desiguales.

**Romboide.** Es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales y ángulos oblicuos.

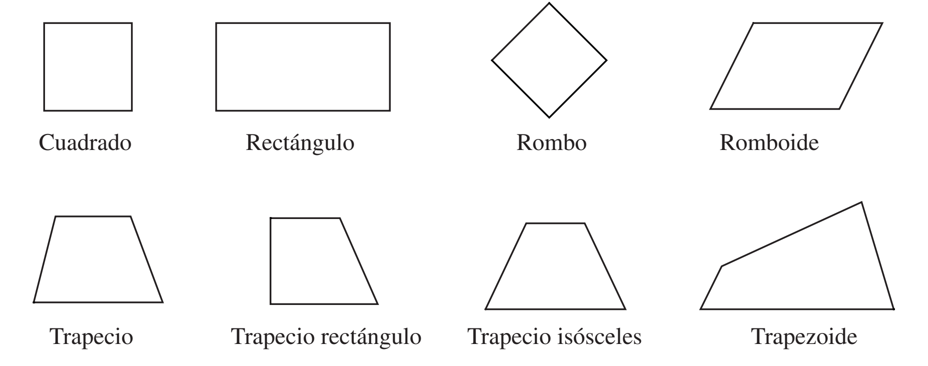
**Trapecio.** Es el cuadrilátero que sólo tiene 2 de sus lados paralelos.

**Trapecio rectángulo.** Es el que tiene 2 de sus ángulos rectos.

**Trapecio isósceles.** Es el que tiene 2 lados no paralelos iguales.

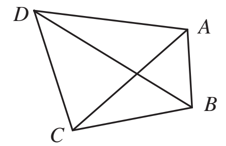
**Trapecio escaleno.** Es aquel que tiene sus lados no paralelos diferentes.

**Trapezoide.** Es el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a su opuesto.




**Diagonal.** Es el segmento de recta que une 2 vértices de un cuadrilátero no adyacentes.

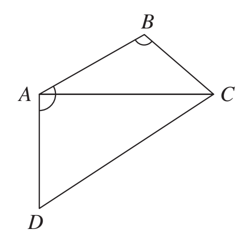
$\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *son diagonales*



### Teorema

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°.

**Demostración:** Dado el cuadrilátero *ABCD*, se traza una de sus diagonales:




Se observa que se forman dos triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta ACD$.

La suma de los ángulos interiores de los triángulos es igual a 180°.

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$$

$$\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180°$$

Al sumar ambas expresiones, se obtiene:

$$\angle BAC + \angle DAC + \angle ABC + \angle ADC + \angle ACB + \angle ACD = 360°$$

$$\text{pero } \angle BAC + \angle DAC = \angle BAD \text{ y } \angle ACB + \angle ACD = \angle BCD$$

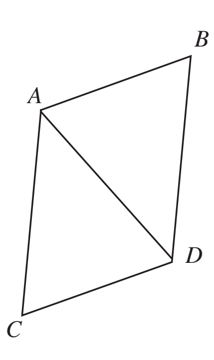
Al sustituir estas igualdades en la expresión anterior:

$$(\angle BAC + \angle DAC) + \angle ABC + \angle ADC + (\angle ACB + \angle ACD) = 360°$$

$$\angle BAD + \angle ABC + \angle ADC + \angle BCD = 360°$$

Por consiguiente, queda demostrado el teorema.

## Propiedades de los paralelogramos




1. Los lados opuestos son iguales.

   $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{BD}$

2. Los ángulos opuestos son iguales.

   $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle C$

3. Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

   $\angle A + \angle B = 180º$, $\angle C + \angle D = 180°$

   $\angle A + \angle C = 180º$, $\angle B + \angle D = 180°$

4. Las diagonales se bisecan mutuamente.

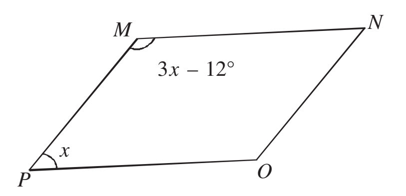
5. La diagonal lo divide en 2 triángulos congruentes.

   $\Delta ABD \cong \Delta CDA$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina los ángulos interiores del siguiente paralelogramo:




**Solución**

En todo paralelogramo, los ángulos adyacentes son suplementarios, entonces:

$\angle P + \angle M = 180° \quad \rightarrow \quad x + 3x - 12° = 180° \quad \rightarrow \quad 4x = 180° + 12°$

$4x = 192°$

$x = \dfrac{192°}{4} = 48°$

Luego, los ángulos opuestos son iguales, por tanto:

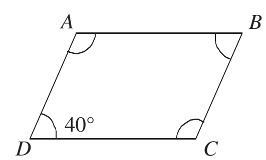
$\angle N = \angle P = 48°$

$\angle O = \angle M = 3(48°) - 12° = 144° - 12° = 132°$

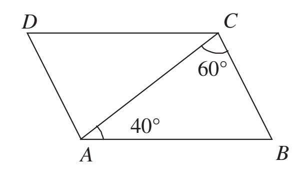
EJERCICIO **18**

Encuentra los datos que se piden en cada uno de los siguientes paralelogramos:

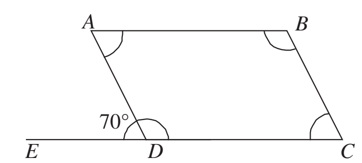
1. Determina $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$



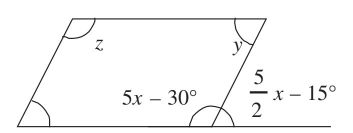

2. Encuentra $\angle DCA$, $\angle CAD$, $\angle DAB$, $\angle DCB$, $\angle D$ y $\angle B$



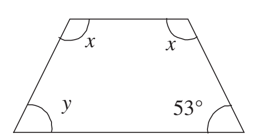

3. Encuentra $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle ADC$



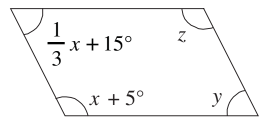

4. Determina el valor $x$, $\angle y$ y $\angle z$



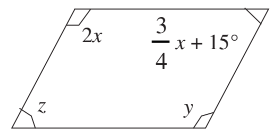

5. Halla el valor de $x$ y $y$



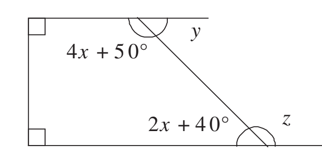

6. Calcula la medida de los ángulos $y$ y $z$




7. Precisa el valor de $x$ y la medida de los ángulos $y$ y $z$




8. Halla el valor de $x$ y la medida de los ángulos $y$ y $z$




Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Demostraciones

Para que un cuadrilátero sea un paralelogramo se debe probar que 2 de sus lados son iguales y paralelos.

**EJEMPLOS**

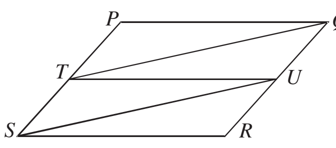
Ejemplos

**1** Sea el triángulo $ABC$ cuyos puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son $D$, $E$ y $F$ respectivamente, demostrar que $DFCE$ es un paralelogramo.

**Solución**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\overline{DE}=\overline{FC},\ \ \overline{DE}\parallel\overline{FC}$ | 1. En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo e igual a la mitad del tercer lado. $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\left(\overline{AF}+\overline{FC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overline{FC}\right)=\overline{FC}$ |
| 2. $\overline{DF}=\overline{EC},\ \ \overline{DF}\parallel\overline{EC}$ | 2. En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo e igual a la mitad del tercer lado. $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\left(\overline{BE}+\overline{EC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overline{EC}\right)=\overline{EC}$ |
| 3. $DFCE$ es paralelogramo | 3. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, es un paralelogramo. |

**2** Sea $PQRS$ los vértices de un paralelogramo, $T$ el punto medio de $\overline{PS}$ y $U$ el punto medio de $\overline{RQ}$, demuestra que $TQUS$ es un paralelogramo.




**Solución**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\overline{PT}=\overline{TS}$ | 1. $T$ es el punto medio del segmento $\overline{PS}$ |
| 2. $\overline{QU}=\overline{UR}$ | 2. $U$ es el punto medio del segmento $\overline{QR}$ |
| 3. $\overline{PS}=\overline{QR}$ y $\overline{PS}\parallel\overline{QR}$ | 3. En un paralelogramo los lados opuestos son iguales y paralelos. |
| 4. $\overline{TS}=\overline{QU}$ | 4. De la afirmación 3, se tiene que $\overline{PS}=\overline{QR}$, entonces: $\overline{PT}+\overline{TS}=\overline{QU}+\overline{UR}\rightarrow 2\overline{TS}=2\overline{QU}\rightarrow\overline{TS}=\overline{QU}$ |
| 5. $\overline{TS}\parallel\overline{QU}$ | 5. Son segmentos de $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$, los que a su vez son paralelos. |
| 6. $TQUS$ es paralelogramo | 6. Dos lados opuestos $\overline{TS}$ y $\overline{QU}$ son paralelos e iguales. |

# EJERCICIO 19

Realiza las siguientes demostraciones:

1. Sea $ABCD$ los vértices de un paralelogramo, $P$ y $Q$ dos puntos sobre la diagonal $\overline{AC}$, de modo que $\overline{PA}$ es congruente con $\overline{QC}$, demuestra que $PBQD$ es paralelogramo.
2. Sea $ABCD$ los vértices de un paralelogramo, $E$ y $F$ son puntos sobre la diagonal $\overline{AC}$, de tal manera que $\overline{DF}$ biseca al $\angle ADC$ y $\overline{BE}$ biseca al $\angle ABC$, demuestra que $DEBF$ es paralelogramo.
3. Sea $RSTU$ un paralelogramo, $V$ y $W$ puntos sobre la diagonal $\overline{TR}$ de modo que $\overline{UW}$ y $\overline{SV}$ son perpendiculares a $\overline{TR}$, demuestra que $UWSV$ es un paralelogramo.
4. Sea $ABCD$ los vértices de un paralelogramo, $Q$, $R$, $S$, $T$, puntos sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ respectivamente, de tal manera que $\overline{AQ} \cong \overline{CS}$ y $\overline{BR} \cong \overline{TD}$, demuestra que $QRST$ es paralelogramo.
5. Sea $PQRS$ los vértices de un trapecio, $\overline{SR}$ es paralelo a $\overline{PQ}$ y $\overline{PS} \cong \overline{SR}$, demuestra que $\overline{RP}$ biseca $\angle P$.
6. Demuestra que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo, es igual al doble producto de la suma del cuadrado de sus lados adyacentes.

**Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones.**

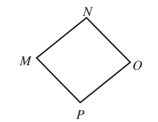
## Paralelogramos especiales

Se les denomina así al rectángulo, al rombo y al cuadrado, los cuales pertenecen al conjunto de los paralelogramos y se definen de la siguiente manera:

**Rectángulo.** Es el paralelogramo que tiene sus ángulos iguales, también se le conoce como paralelogramo equiángulo.

**Rombo.** Paralelogramo que tiene sus lados iguales, también recibe el nombre de paralelogramo equilátero.

$$\overline{MN} = \overline{NO} = \overline{OP} = \overline{PM}$$




**Cuadrado.** Se define como el paralelogramo equiángulo y equilátero, esto es, un cuadrado es un rectángulo y a la vez un rombo.

$$\angle R = \angle S = \angle T = \angle U = 90°;\ \overline{RS} = \overline{ST} = \overline{TU} = \overline{UR}$$

### *Propiedades*

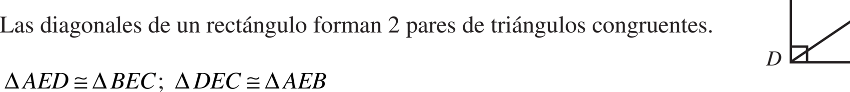
1. Los rectángulos tienen sus ángulos rectos.

   $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

2. Las diagonales de un rectángulo son iguales.

   $\overline{AC} = \overline{BD}$

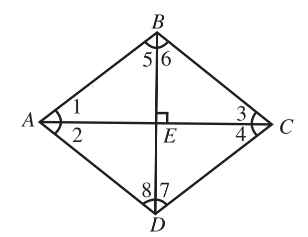
3. Las diagonales de un rectángulo forman 2 pares de triángulos congruentes.



   $\Delta AED \cong \Delta BEC;\ \Delta DEC \cong \Delta AEB$

4. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y se bisecan mutuamente, esto es, una diagonal es mediatriz de la otra.

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AE} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{ED}$




5. Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos formados por los vértices que unen.

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$ y $\angle 7 = \angle 8$

6. Las diagonales de un rombo forman 4 triángulos congruentes.

$\Delta AED \cong \Delta BEC \cong \Delta AEB \cong \Delta CED$

Los cuadrados por ser rectángulos y rombos a la vez, cumplen con las propiedades anteriores.

## EJEMPLOS

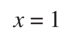
**1** Determina la longitud de los lados del siguiente rombo:

$3x + 4$   $2x + 5$

**Solución**

En un rombo, los lados son iguales, entonces:

$3x + 4 = 2x + 5 \quad \rightarrow \quad 3x - 2x = 5 - 4 \quad \rightarrow \quad x = 1$



Luego, sustituyendo $x = 1$ en cualquiera de los lados, se obtiene:

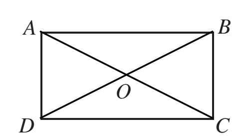
$$3x + 4 = 3(1) + 4 = 7$$

Por tanto, los lados del rombo miden $7u$.

**2** Encuentra la longitud del lado $\overline{AD}$ en el siguiente rectángulo, si $\overline{AC} = 13$, $\overline{DB} = 3x + 4$ y $\overline{AD} = x + 2$

**Solución**

En todo rectángulo, las diagonales son iguales, esto es:



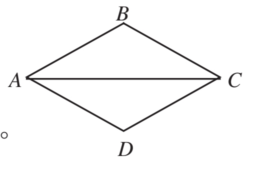

$\overline{AC} = \overline{DB} \quad \rightarrow \quad 13 = 3x + 4 \quad \rightarrow \quad 9 = 3x \quad \rightarrow \quad x = 3$

Luego, $\overline{AD} = x + 2$, por tanto, $\overline{AD} = 3 + 2 = 5u$.

**3** En el rombo $ABCD$, determina el valor de $\angle ABC$ si $\angle BAC = 6x$ y $\angle DAC = 4x + 10°$

**Solución**

En el rombo, la diagonal $\overline{AC}$ biseca al ángulo $BAD$, esto es:




$\angle BAC = \angle DAC \quad \rightarrow \quad 6x = 4x + 10° \quad \rightarrow \quad 2x = 10° \quad \rightarrow \quad x = 5°$

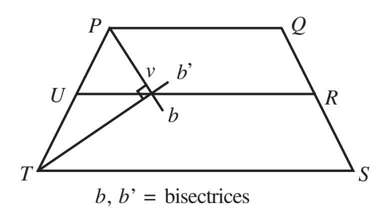
Por otro lado, en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales y como $\overline{AC}$ es diagonal, se deduce que $\angle BAC = \angle BCA = 30°$, luego, en el triángulo $BAC$:

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180° \quad \rightarrow \quad \angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA)$$
$$\angle ABC = 180° - 60°$$
$$\angle ABC = 120°$$

Por tanto, el ángulo $ABC$ mide 120°.

## Propiedades de los trapecios

1. En un trapecio la longitud de la línea media (paralela media) es igual a la semisuma de las bases del trapecio.




$$\overline{UR} = \frac{\overline{PQ} + \overline{TS}}{2}$$

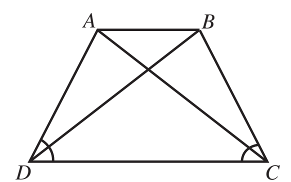
2. Las bisectrices de los ángulos adyacentes al lado lateral del trapecio son perpendiculares y el punto de intersección se encuentra en su línea media.

$$\overline{PV} \perp \overline{TV}$$

### Propiedades de los trapecios isósceles

1. Los ángulos de la base son iguales.

$$\angle D = \angle C$$



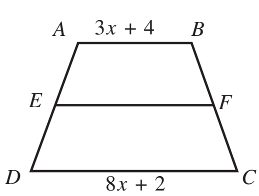

2. Sus diagonales son iguales.

$$\overline{DB} = \overline{AC}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la longitud de las bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ del siguiente trapecio si $E$ y $F$ son puntos medios y $\overline{EF}$ mide 14 *cm*.




**Solución**

En todo trapecio la longitud de la paralela media es igual a la semisuma de las bases:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$$

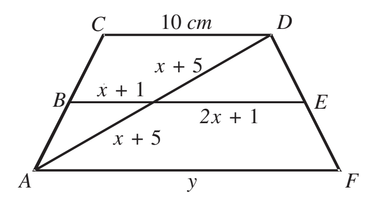
Al sustituir, se tiene:

$$14 = \frac{(3x+4)+(8x+2)}{2} \quad \rightarrow \quad 28 = 11x + 6 \quad \rightarrow \quad 22 = 11x \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Por consiguiente, las longitudes de las bases son:

$$\overline{AB} = 3x + 4 = 3(2) + 4 = 10 \quad ; \quad \overline{DC} = 8x + 2 = 8(2) + 2 = 18$$

2 Determina la longitud de la diagonal $\overline{AD}$ en el siguiente trapecio, si $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$, $B$ y $E$ son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ respectivamente.




**Solución**

De la figura se tiene que $\overline{BE} = \dfrac{\overline{CD}+\overline{AF}}{2}$, entonces:

$$x + 1 + 2x + 1 = \frac{10+y}{2} \quad \rightarrow \quad 2(3x + 2) = 10 + y \quad \rightarrow \quad y = 6x - 6$$

En el triángulo $ADF$, por proporcionalidad, se establece que:

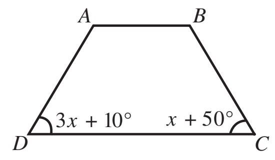
$$\frac{2x+1}{y} = \frac{x+5}{2x+10} \quad \rightarrow \quad \frac{2x+1}{y} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 4x + 2 = y$$

Se sustituye $y = 6x - 6$:

$$4x + 2 = 6x - 6 \quad \rightarrow \quad 2x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Por tanto, $\overline{AD} = 2x + 10 = 2(4) + 10 = 8 + 10 = 18\ cm$

3 Determina el valor de los ángulos de la base del siguiente trapecio isósceles:




**Solución**

Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales:

$$3x + 10° = x + 50° \quad \rightarrow \quad 3x - x = 50° - 10° \quad \rightarrow \quad 2x = 40°$$

$$x = 20°$$

En consecuencia, los ángulos de la base miden:

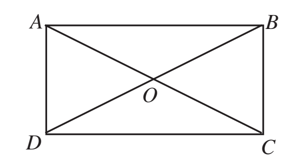
$$3(20°) + 10° = 60° + 10° = 70°$$

# EJERCICIO **20**

Resuelve los siguientes problemas:

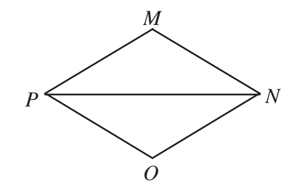
1. Encuentra el valor de $x$ en el rectángulo $ABCD$, si $\overline{AC} = 24\ cm$ y $\overline{BD} = 5x + 4$

2. Determina la longitud de los lados del rectángulo $ABCD$, si $\overline{AO} = 2\sqrt{5}$ y $\overline{AB} = 2\overline{BC}$

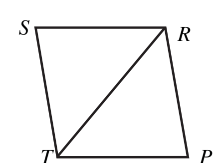



3. En el rombo $MNOP$, determina el valor de los lados si $\overline{MN} = 6x + 5$ y $\overline{MP} = 7x - 1$

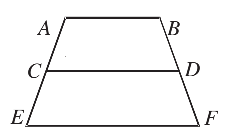
4. Determina el ángulo $NPO$, si $\angle PON = 132º$ y $\overline{NP}$ es bisectriz del ángulo $P$ y $N$



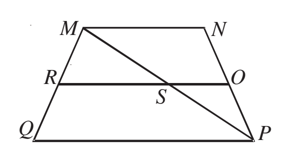

5. Halla el valor de $x$ y $y$ en el rombo $PRST$, si $\angle TRP = 2x + 10°$, $\angle RTS = x + 30°$ y $\angle TSR = y + 12°$



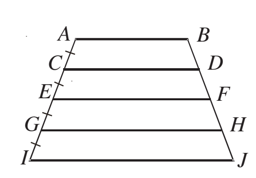

6. En la figura, $C$ y $D$ son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. Encuentra el valor de $\overline{AB}$, si $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{CD} = x + 2$ y $\overline{EF} = 13\ cm$



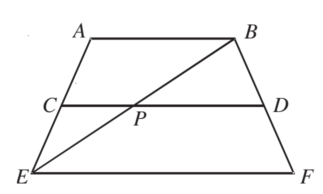

7. En la figura, $R$ y $O$ son puntos medios de $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$. Determina la longitud de $\overline{MN}$, si $\overline{OS} = 3x + 1$, $\overline{RS} = 14$ y $\overline{QP} = 9x + 1$



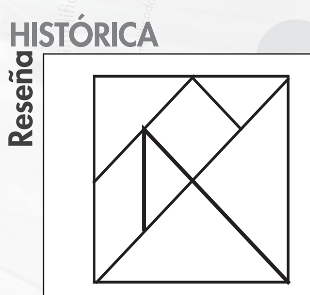

8. En la figura, los lados $\overline{AI}$ y $\overline{BJ}$ están divididos en 4 partes iguales. Encuentra la longitud de $\overline{AB}$ e $\overline{IJ}$, si $\overline{CD} = \frac{3a+b}{4}$ y $\overline{EF} = \frac{a+b}{2}$




9. En la figura, $C$ y $D$ son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. Determina la longitud de $\overline{AE}$, si $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{CP} = y$, $\overline{PD} = 2y + 2$, $\overline{EF} = 11$, $\overline{AC} = \overline{CE} = x$



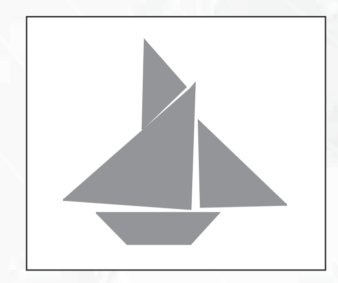

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**



Una de las aplicaciones de los polígonos es el antiguo juego llamado Tangram chino "tabla de la sabiduría", que se conforma de 7 piezas llamadas Tans y son:

- Cinco triángulos de diversos tamaños
- Un cuadrado
- Un paralelogramo romboide

Con ellas se pueden formar figuras cerradas como:



La palabra polígono procede del griego *poly*, muchos, y *gwnos*, ángulos.

Cada polígono recibe un nombre de acuerdo al número de lados que lo conforman; para saber cómo se llama un polígono de menos de cien lados se realiza la lectura del número de lados de acuerdo con la siguiente tabla.

| Decenas | | y | Unidades | | Terminación |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | *Icosa-* | *-kai-* | 1 | *-Hena-* | *-gono* |
| 30 | *Triaconta-* | | 2 | *-Di-* | |
| 40 | *Tetraconta-* | | 3 | *-Tri-* | |
| 50 | *Pentaconta-* | | 4 | *-Tetra-* | |
| 60 | *Hexaconta-* | | 5 | *-Penta-* | |
| 70 | *Heptaconta-* | | 6 | *-Hexa-* | |
| 80 | *Octaconta-* | | 7 | *-Hepta-* | |
| 90 | *Eneaconta-* | | 8 | *-Octa-* | |
| 100 | *Hecta-* | | 9 | *-Enea-* | |

Se cuenta el número de lados que tiene el polígono y se pone el prefijo conveniente, como en el siguiente ejemplo, y se agrega la terminación "gono".

El polígono de 78 lados recibe el nombre de:

"Heptacontakaioctágono"

## Definición

Se llama polígono a aquella figura plana cerrada, delimitada por segmentos de recta. Se clasifican de acuerdo con la medida de sus lados o sus ángulos.

## Clasificación

Los polígonos se clasifican de acuerdo con sus lados o la magnitud de sus ángulos interiores.

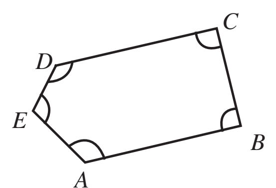
### Por sus lados

**Regulares.** Tienen todos sus lados iguales.

**Irregulares.** Tienen la medida de sus lados diferentes.

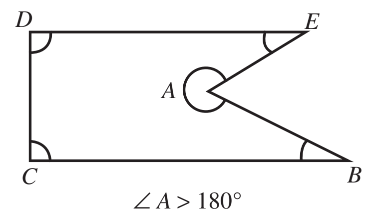
### Por sus ángulos

**Convexo.** Los ángulos interiores son todos menores que 180°.




Todos los ángulos son menores que 180°

**Cóncavo.** Uno de sus ángulos interiores es mayor que 180°.




$\angle A > 180°$

- **Por su número de lados.** Los polígonos reciben un nombre según su número de lados, como se muestra a continuación:

| Número de lados | Nombre | Número de lados | Nombre |
|---|---|---|---|
| 3 | Triángulo | 12 | Dodecágono |
| 4 | Cuadrilátero | 13 | Tridecágono |
| 5 | Pentágono | 14 | Tetradecágono |
| 6 | Hexágono | 15 | Pentadecágono |
| 7 | Heptágono | 16 | Hexadecágono |
| 8 | Octágono | 17 | Heptadecágono |
| 9 | Nonágono | 18 | Octadecágono |
| 10 | Decágono | 19 | Nonadecágono |
| 11 | Undecágono | 20 | Icoságono |

## Elementos

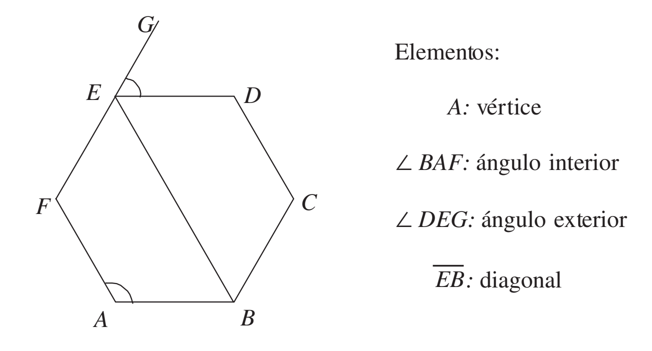
Todo polígono está formado por los siguientes elementos:

**Vértice.** Es el punto donde concurren 2 lados.

**Ángulo interior.** Es el que se forma con 2 lados adyacentes de un polígono.

**Ángulo exterior.** Aquel que se forma entre la prolongación de uno de los lados y su lado adyacente.

**Diagonal.** Es el segmento de recta que une 2 vértices no adyacentes.




Un polígono tiene el mismo número de lados que de ángulos interiores, así como exteriores.

## Número de diagonales

El número de diagonales en un polígono se obtendrá en función del número de lados.

### Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice

En un polígono de $n$ lados se pueden trazar $(n - 3)$ diagonales desde un solo vértice, entonces la fórmula es:

$$d = n - 3$$

Donde:

$d$ = diagonales trazadas desde un solo vértice.

$n$ = número de lados.

### Número de diagonales totales

El número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices está dado por la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde:

$D$ = diagonales totales del polígono.

$n$ = número de lados.

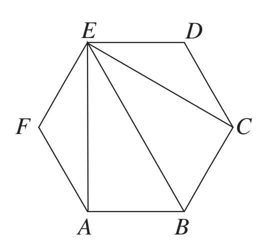
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice en un hexágono.

**Solución**

En un hexágono $n = 6$, al sustituir en la fórmula se obtiene:




Fórmula

$$d = n - 3$$

Sustitución

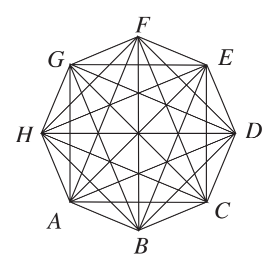
$$d = 6 - 3 = 3$$

Por consiguiente, se pueden trazar 3 diagonales desde un solo vértice.

2 Calcula el número de diagonales totales que se pueden trazar en un octágono.

**Solución**

En un octágono $n = 8$, por lo que al sustituir en la fórmula se obtiene:




$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

donde

$$D = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8(5)}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Por tanto, en un octágono se pueden trazar 20 diagonales en total.

3 ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar en total 65 diagonales?

**Solución**

De acuerdo con el problema, $D = 65$; entonces, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, se determina que:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 65 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 130 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 130 = 0$$

$$(n-13)(n+10) = 0$$

$$n - 13 = 0; \qquad n + 10 = 0$$

$$n = 13; \qquad n = -10$$

En consecuencia, el polígono es de 13 lados, esto es, un tridecágono.

# EJERCICIO 21

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un solo vértice en un undecágono?
2. Determina el polígono en el que se pueden trazar 17 diagonales desde un solo vértice.
3. Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un decágono.
4. Determina cuál es el polígono en el que se pueden trazar 9 diagonales desde un vértice.
5. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 6 diagonales desde un vértice?
6. Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en cada uno de los siguientes polígonos:

   *a*) Icoságono
   *b*) Dodecágono
   *c*) Nonágono
   *d*) Hexágono
   *e*) Pentadecágono
   *f*) Heptágono
   *g*) Hexadecágono
   *h*) Octadecágono
   *i*) Undecágono

7. ¿En qué polígono se pueden trazar 14 diagonales en total?
8. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar en total 104 diagonales?
9. Determina el polígono en el cual se pueden trazar 119 diagonales en total.
10. Precisa en qué polígono se pueden trazar en total 152 diagonales.
11. ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales en total es el doble que su número de lados?
12. ¿En qué polígono el número de lados es la cuarta parte de su número de diagonales en total?
13. Determina el polígono en el cual el número de lados equivale al número de diagonales en total.
14. Precisa el polígono cuyo número de lados es $\frac{1}{5}$ del número de diagonales en total.
15. Determina el polígono en que el número de diagonales en total son los $\frac{9}{2}$ del número de lados.
16. Encuentra el polígono cuyo número de diagonales en total, equivale al número de lados del polígono en el que se pueden trazar 170 diagonales.
17. ¿En cuál polígono el número de diagonales trazadas desde un vértice es $\frac{1}{10}$ del número de diagonales en total?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ángulos de un polígono

La magnitud de los diferentes ángulos de un polígono se obtiene con las fórmulas siguientes:

**Suma de ángulos interiores de cualquier polígono**

$$S_i = 180° (n - 2)$$

**Ángulo interior de un polígono regular**

$$i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

**Suma de ángulos exteriores de cualquier polígono**

$$S_e = 360°$$

**Ángulo exterior de un polígono regular**

$$e = \frac{360°}{n}$$

Donde $n$ = número de lados.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cuatro ángulos interiores de un polígono de 5 lados miden respectivamente: 120°, 90°, 75° y 135°. ¿Cuánto mide el quinto ángulo?

**Solución**

En un pentágono $n = 5$, entonces la suma de sus ángulos interiores es:

$$S_i = 180°\,(n - 2) \quad \rightarrow \quad S_i = 180°\,(5 - 2) = 180°\,(3) = 540°$$

Luego, el quinto ángulo se obtiene así:

$$540° - (120° + 90° + 75° + 135°) = 540° - 420° = 120°$$

Por tanto, el quinto ángulo mide 120°.

2 ¿Cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1 440°?

**Solución**

De acuerdo con el problema $S_i = 1\,440°$, entonces:

$S_i = 180°(n - 2)$ donde

$$180°(n - 2) = 1\,440°$$

$$n - 2 = \frac{1440°}{180°}$$

$$n = 8 + 2 = 10$$

Por consiguiente, el polígono es un decágono.

3 ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior es de 120°?

**Solución**

En este caso $i = 120°$, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, se obtiene:

$$i = \frac{180°(n-2)}{n} \quad \rightarrow \quad 120° = \frac{180°(n-2)}{n} \quad \rightarrow \quad 120°\,n = 180°\,n - 360$$

$$360° = 180°\,n - 120°\,n$$

$$360° = 60°\,n$$

$$6 = n$$

Finalmente, resulta que el polígono es un hexágono.

4 ¿En cuál polígono regular el ángulo exterior mide 20°?

**Solución**

En este caso $e = 20°$, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, resulta que:

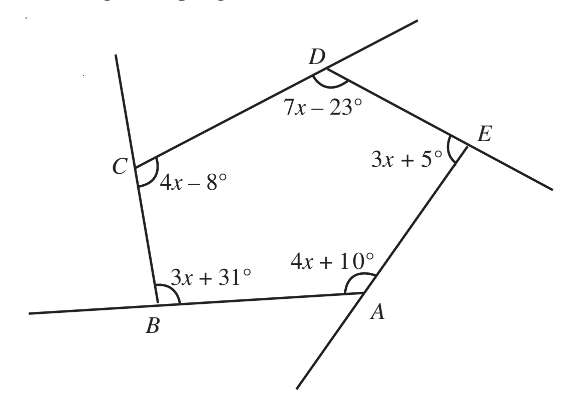
$$e = \frac{360°}{n} \quad \rightarrow \quad 20° = \frac{360°}{n} \quad \rightarrow \quad 20°\, n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{20°}$$

$$n = 18$$

Entonces, el polígono del que se trata es un octadecágono.

5 Determina los ángulos interiores del siguiente polígono:




**Solución**

En un pentágono la suma de los ángulos interiores es igual a 540°, entonces se calcula el valor de $x$ para encontrar los ángulos:

$$(3x + 31°) + (4x - 8°) + (7x - 23°) + (3x + 5°) + (4x + 10°) = 540°$$

$$21x + 15° = 540°$$

$$21x = 525°$$

$$x = \frac{525°}{21} = 25°$$

En consecuencia, los valores de los ángulos son:

$$\angle A = 4x + 10° = 4(25) + 10 = 110°$$

$$\angle B = 3x + 31° = 3(25) + 31 = 106°$$

$$\angle C = 4x - 8° = 4(25) - 8 = 92°$$

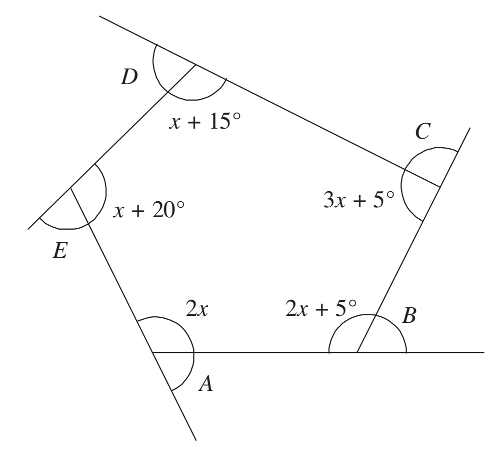
$$\angle D = 7x - 23° = 7(25) - 23 = 152°$$

$$\angle E = 3x + 5° = 3(25) + 5 = 80°$$

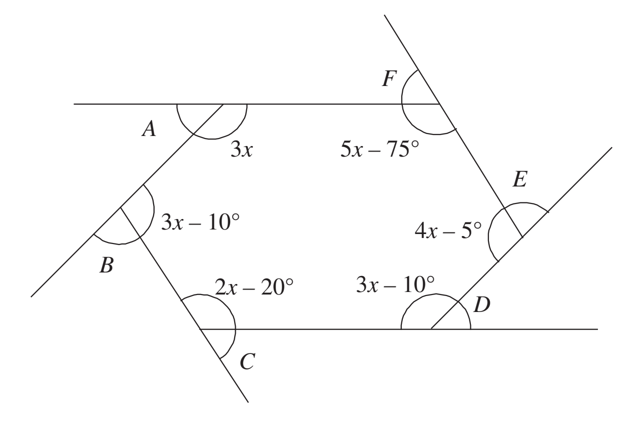
# EJERCICIO 22

1. Calcula la medida de un ángulo interior de los siguientes polígonos:
   *a)* Hexágono
   *b)* Octágono
   *c)* Dodecágono
   *d)* Polígono de 20 lados
   *e)* Polígono de 18 lados
   *f)* Polígono de 42 lados
2. Calcula la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos:
   *a)* Un pentágono
   *b)* Un decágono
   *c)* Un pentadecágono
   *d)* Un octágono
   *e)* Un tridecágono
   *f)* Un polígono de 37 lados
3. ¿Cuál es el polígono cuya suma de sus ángulos interiores es 1 260°?
4. Precisa en cuál polígono el total de sus ángulos interiores suma 900°.
5. Determina en cuál polígono la suma de sus ángulos interiores es 2 520°.
6. ¿En cuál polígono el total de sus ángulos interiores suma 1 620°?
7. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 720°?
8. Determina el polígono regular cuyo ángulo interior mide 157.5°.
9. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior es de 140°?
10. Determina en cuál polígono regular el ángulo exterior mide $\frac{\pi}{6}$ *rad*.
11. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular con un ángulo interior de 135°?
12. Determina en cuál polígono regular el ángulo interior mide 60°.
13. Precisa en cuál polígono regular el ángulo exterior es de 60°.
14. Determina el polígono cuyo ángulo interior equivale a $\frac{13}{2}$ de su ángulo exterior.
15. ¿En cuál polígono el ángulo exterior es $\frac{2}{7}$ de su ángulo interior?
16. Determina el polígono en el cual la suma de ángulos interiores equivale a $\frac{15}{2}$ de su ángulo exterior.
17. Calcula el valor de los ángulos interiores de un pentágono si su magnitud es respectivamente: $x$, $\frac{12}{5}x$, $2.4x$, $2x$ y $2.2x$.
18. Calcula el valor de cada uno de los ángulos de un pentágono si valen, respectivamente: $x$, $x - 10°$, $x + 5°$, $x + 25°$ y $x - 30°$.
19. Calcula el valor de los ángulos interiores de un heptágono cuyos valores son: $x$, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $7x$ y $8x$.

20. Encuentra los ángulos exteriores del siguiente polígono:




21. Determina los ángulos exteriores del siguiente polígono:




➡ **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Diferentes usos DE LA ESCALA

Imagen del libro matemáticas simplificadas en la escala 1:5

Un ejemplo del uso de la escala son las fotografías, en las que podemos reconocer personas, objetos y lugares, ya que guardan semejanza con los reales. Hay fotografías que agrandan miles o millones de veces seres u objetos del mundo real gracias al uso de la tecnología, mientras que en otras, se ven reducidas en varias decenas de veces, la realidad representada.

Los planos de casas, muebles, aparatos u objetos en general también se elaboran a escala, y de su lectura podemos especificar las dimensiones reales que éstos poseen y captar sus formas.

Otro uso importante de las escalas se encuentra en la elaboración de mapas, el cual es la representación convencional de la configuración superficial de la tierra, con una relación de similitud proporcionada, a la que se llama escala.

La tecnología nos auxilia con algunos instrumentos para poder llevar a cabo estas representaciones y que en nuestra vida cotidiana los hemos utilizado seguramente más de una docena de veces; ejemplo de ello son: la cámara digital, la fotocopiadora, la televisión, entre otros.

## Escala

Es la razón que existe entre dos cantidades o magnitudes. Las escalas pueden ser numéricas, analíticas y gráficas.

Las escalas numéricas se definen como la razón entre la magnitud dibujada y la longitud real.

$$\frac{LD}{LR} \text{ o } LD:LR$$

Las escalas numéricas pueden ser de ampliación o de reducción.

### Ejemplos

Escalas de reducción 1:10, l:100, 1:1000 ...

Escalas de ampliación 10:1, 100:1, 1000:1 ...

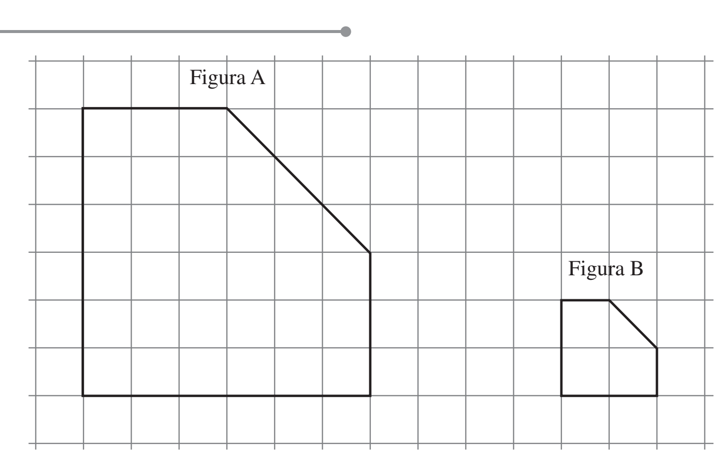
Una escala de 1:10 significa que cada unidad dibujada es $\frac{1}{10}$ parte de la unidad real, y una escala de 100:1 representa que una unidad dibujada es 100 veces mayor que la unidad real.

### Figuras a escala

Un cuerpo está a escala de otro si tiene la misma forma y sus dimensiones están en la misma razón.

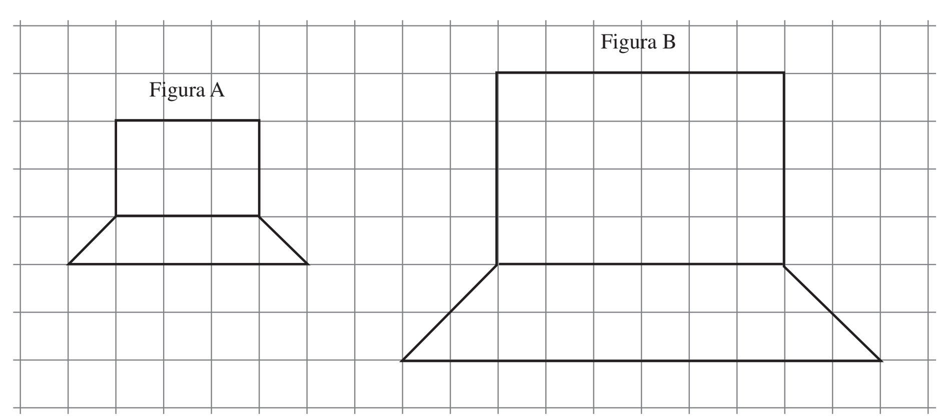
EJEMPLOS

1




La figura B se encuentra a escala 1:3 de la figura A, esto significa que la longitud de los lados de la figura B son una tercera parte de la longitud de los lados de la figura A.

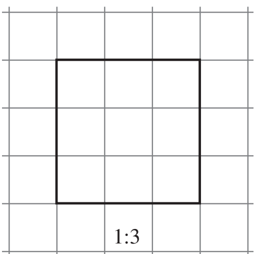
2

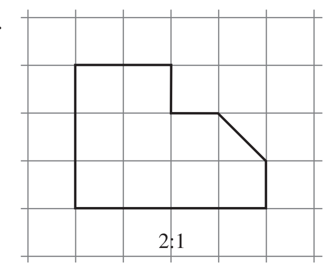


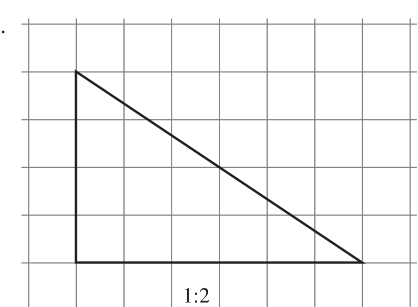

La figura B se encuentra a escala 2:1 con respecto a la figura A, es decir, cada longitud de la figura B es el doble de la figura A.

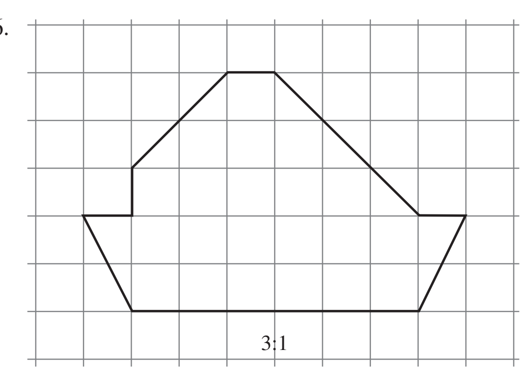
# EJERCICIO 23

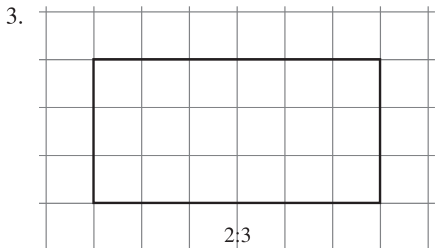
Reproduce cada una de las figuras en la escala indicada.

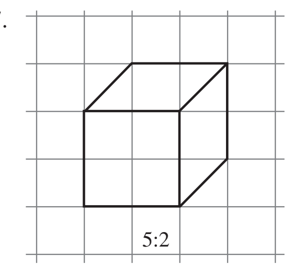
1. 

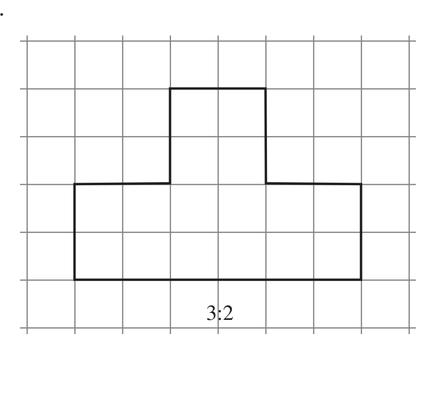

5. 

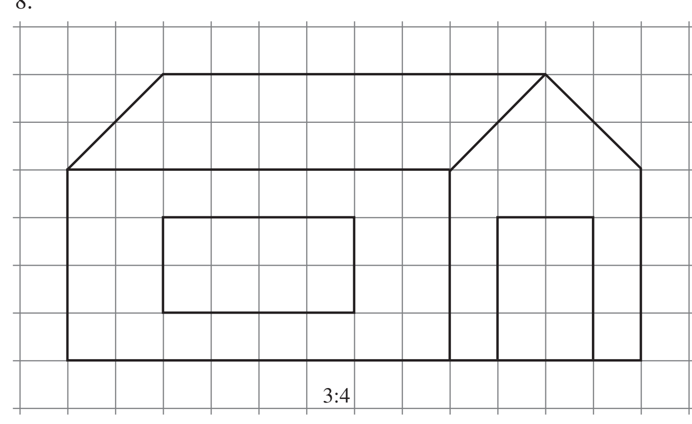

2. 


6. 


3. 


7. 


4. 


8. 


**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Transformaciones de figuras en el plano

Cuando a una figura dada se le aplica una transformación, se obtiene otra a la que se llama imagen bajo la transformación.

### Traslación

Esta transformación consiste en desplazar cada uno de los puntos de una figura en una misma dirección y la misma distancia.

Para poder realizar la traslación se necesita especificar la dirección y distancia en base a una directriz.

**Traslación de un punto.** Para trasladar un punto en la dirección de la directriz, se traza un segmento paralelo a la directriz y de la misma longitud, así se obtiene la imagen del punto.

#### Ejemplos

Traslada los puntos indicados de acuerdo con la directriz:

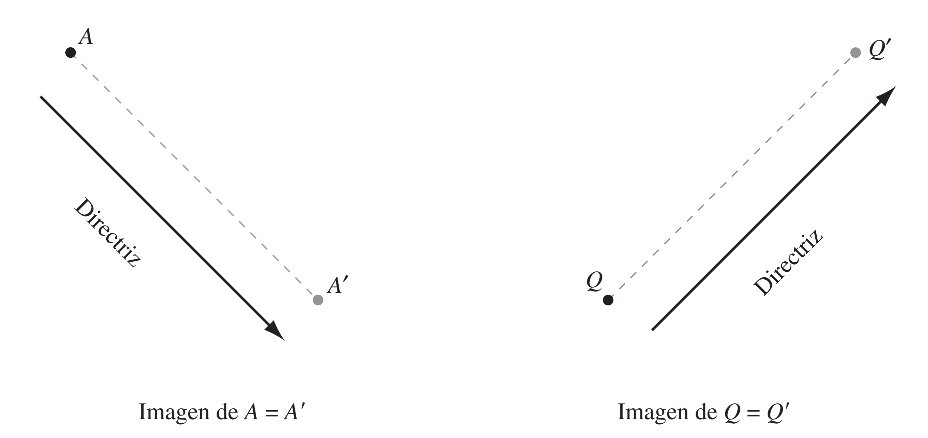



Imagen de $A = A'$ Imagen de $Q = Q'$

**Traslación de un segmento.** Se determina la imagen de los extremos del segmento en la dirección de la directriz.

#### Ejemplos

Determina la imagen de los siguientes segmentos:

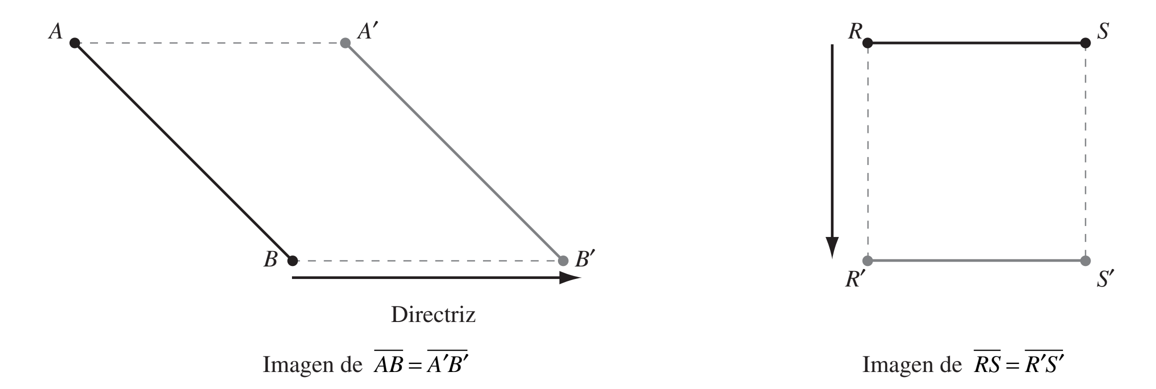



Imagen de $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ Imagen de $\overline{RS} = \overline{R'S'}$

Para realizar los trazos es necesario auxiliarse de las escuadras.

**Traslación de una figura.** Se traslada cada uno de los lados de la figura para obtener la imagen.

## Ejemplos

Encuentra la imagen de las figuras.

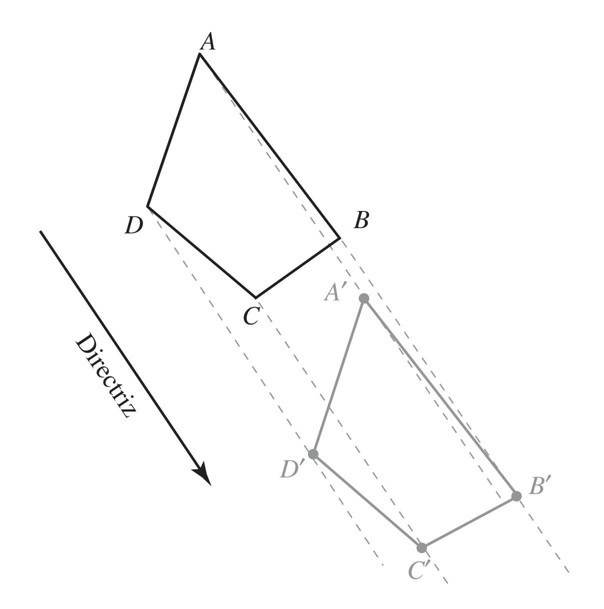



Imagen de $ABCD = A'B'C'D'$

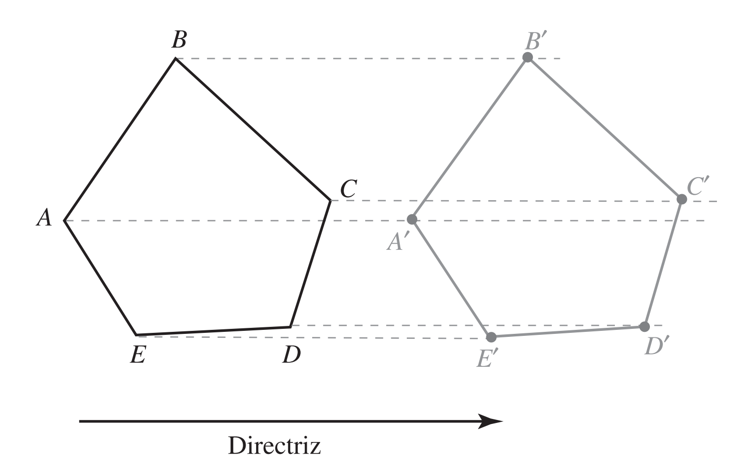
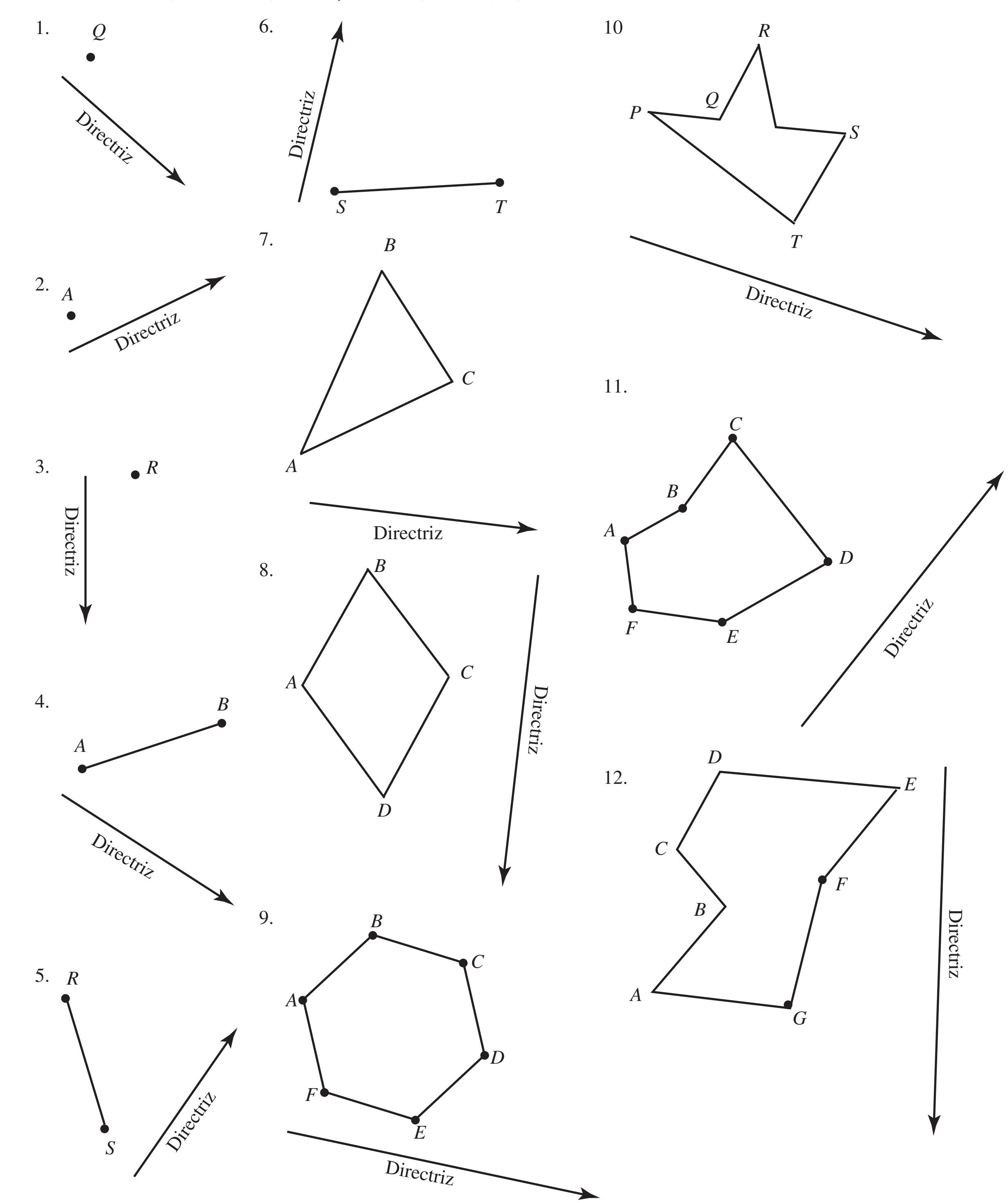



Imagen de $ABCDE = A'B'C'D'E'$

# EJERCICIO 24

Determina la imagen de los siguientes puntos, segmentos y figuras.




Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Rotación

Esta transformación se realiza alrededor de un punto fijo y con respecto a un ángulo dado. Para realizar una transformación se debe proporcionar el centro de la rotación, el ángulo que se va a rotar la figura y el sentido del giro.

Si el ángulo es positivo, el sentido del giro es opuesto al de las manecillas del reloj, si el ángulo es negativo, el giro es en el sentido del giro de las manecillas del reloj.

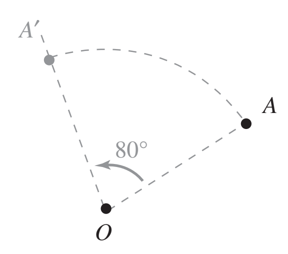
**Rotación de un punto.** Para obtener la imagen de un punto al rotarlo con respecto a otro punto, se traza un segmento que una ambos puntos, después, con ayuda del compás se hace girar al segmento de acuerdo con la medida del ángulo de rotación.

EJEMPLOS

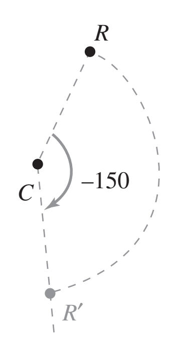
Ejemplos

Rota los siguientes puntos de acuerdo a las indicaciones.

1 Punto $A$, ángulo de rotación de 80° con respecto al punto $O$.




2 Punto $R$, ángulo de –150° con respecto a $C$.



**Rotación de un segmento.** Se obtiene rotando los puntos extremos del segmento según lo indique el ángulo de rotación.

EJEMPLOS

Ejemplos

Rota los siguientes segmentos.

1 Segmento $\overline{AB}$, ángulo de 120° con respecto al punto $O$.

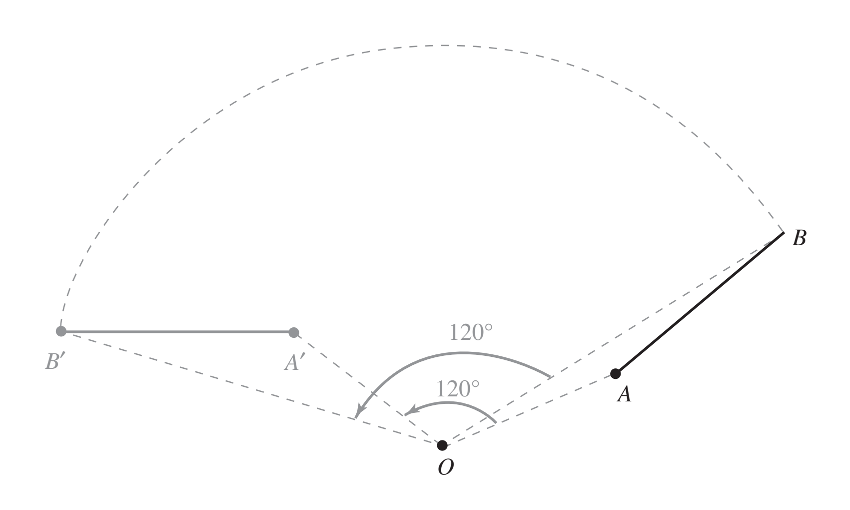



Imagen de $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

2 Segmentos $\overline{RS}$, ángulo de –100° con respecto a $C$.

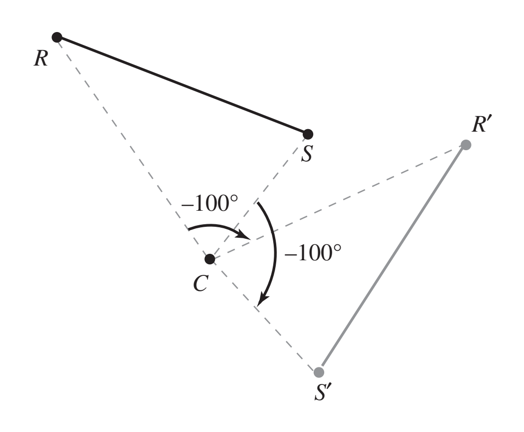



Imagen de $\overline{RS} = \overline{R'S'}$

**Rotación de una figura.** Se debe realizar la rotación de cada segmento que forma a la figura, para obtener su imagen.

EJEMPLOS

Ejemplos

Obtén la imagen de cada figura.

1 El triángulo *ABC*, ángulo de 60° con respecto al punto *O*.

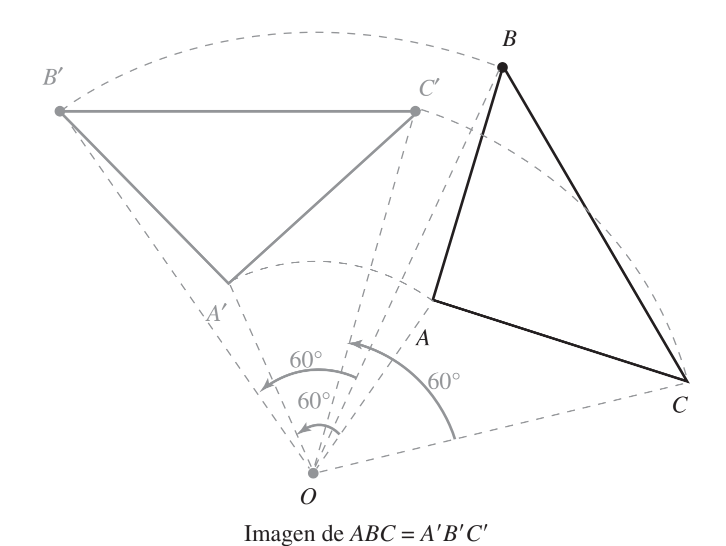



Imagen de $ABC = A'B'C'$

2 El pentágono *ABCDE*, ángulo de –90° con respecto al punto *O*.

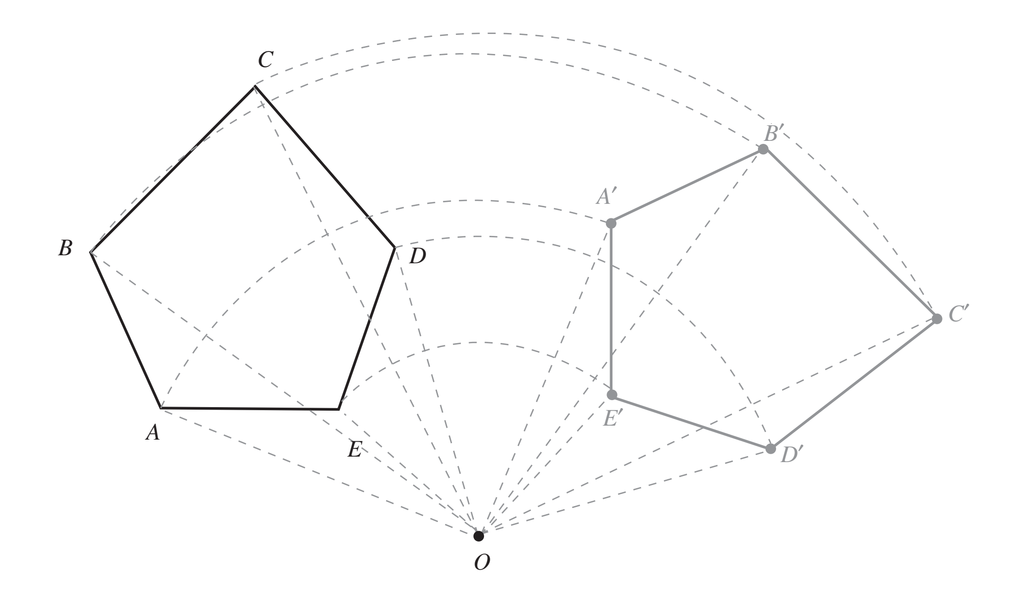



Imagen de $ABCDE = A'B'C'D'E'$

# EJERCICIO 25

Determina las imagenes de los puntos, segmentos y figuras al hacerlos rotar.

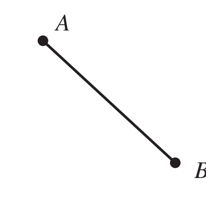
1. Punto $P$, ángulo de 45° con respecto a $O$.

2. Punto $R$, ángulo de 210° con respecto a $O$.

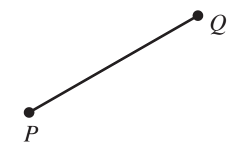
3. Punto $W$, ángulo de –90° con respecto a $O$.

4. Punto $A$, ángulo de –300° con respecto a $O$.

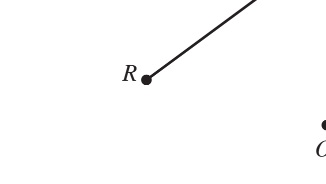
5. Segmento $\overline{AB}$, ángulo de 80° con respecto a $O$.



6. Segmento $\overline{PQ}$, ángulo de 225° con respecto a $O$.

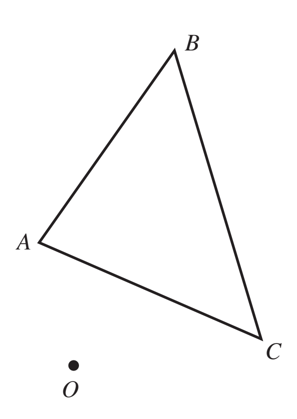


7. Segmento $\overline{RS}$, ángulo de –110° con respecto a $O$.

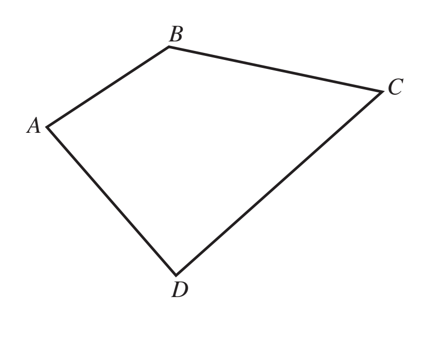


8. Segmento $\overline{TW}$, ángulo de –150° con respecto a $O$.

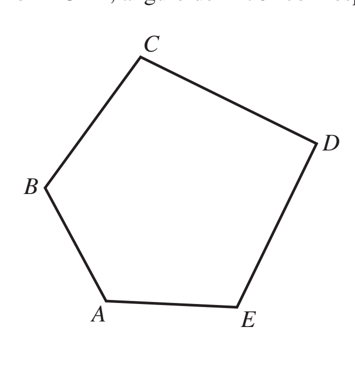
9. Triángulo $ABC$, ángulo de 45° con respecto a $O$.



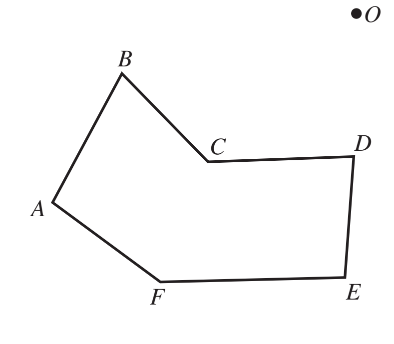
10. Cuadrilátero $ABCD$, ángulo de 120° con respecto a $O$.



11. Polígono *ABCDE*, ángulo de –270° con respecto a *O*.




12. Polígono *ABCDEF*, ángulo de 240° con respecto a *O*.




**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Simetría axial

En esta transformación se refleja a las figuras del plano sobre una recta conocida como eje de simetría, razón por la cual a la imagen se le conoce como su simétrico.

**Simétrico de un punto.** Conocido un punto y el eje de simetría, la imagen del punto se determina trazando un segmento perpendicular desde el punto hacia el eje de simetría.

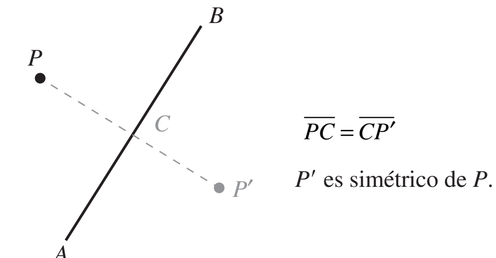
La imagen se encuentra del lado opuesto al eje y a la misma distancia que el punto.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

Determina los simétricos de los siguientes puntos.

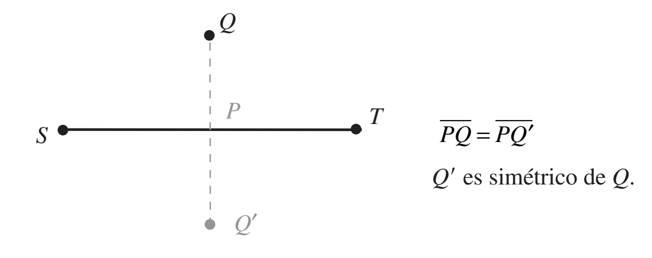
1 Punto *P*, eje de simetría $\overline{AB}$.




$\overline{PC} = \overline{CP'}$

$P'$ es simétrico de $P$.

2 Punto *Q*, eje de simetría *ST*.




$\overline{PQ} = \overline{PQ'}$

$Q'$ es simétrico de $Q$.

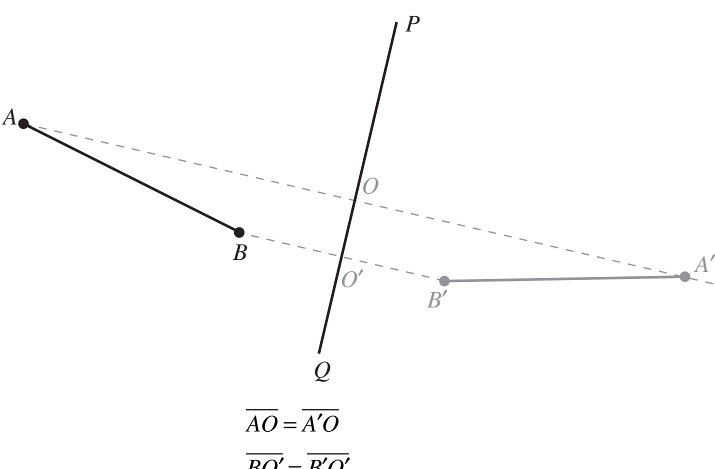
**Simétrico de un segmento.** Para obtener la imagen o simétrico del segmento, se determinan los simétricos de los puntos extremos.

EJEMPLOS

Ejemplos

Determina los simétricos de cada uno de los segmentos con respecto al eje de simetría indicado.

1 Segmento $\overline{AB}$, eje de simetría $\overline{PQ}$.

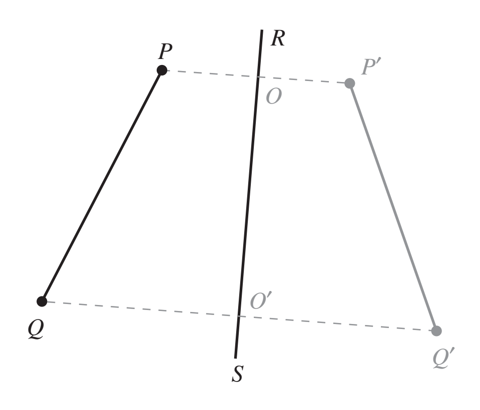



$\overline{AO} = \overline{A'O}$

$\overline{BO'} = \overline{B'O'}$

$\overline{A'B'}$ es simétrico de $\overline{AB}$

2 Segmento $\overline{PQ}$, eje de simetría $\overline{RS}$.




$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$\overline{O'Q} = \overline{O'Q'}$

$P'Q'$ es simétrico de $\overline{PQ}$

**Simétrico de una figura.** Para determinar la imagen, se determinan los simétricos de cada lado.

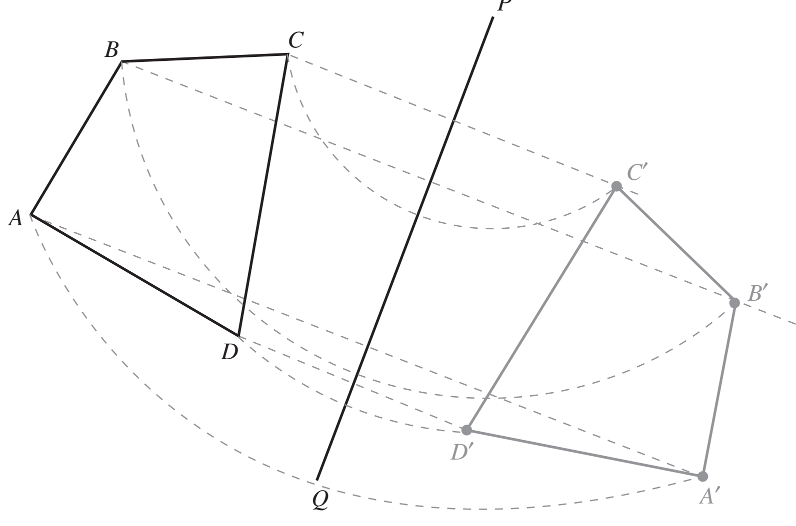
Para determinar el simétrico de los lados de un polígono, se puede emplear el compás como lo ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

Encuentra los simétricos de los siguientes polígonos.

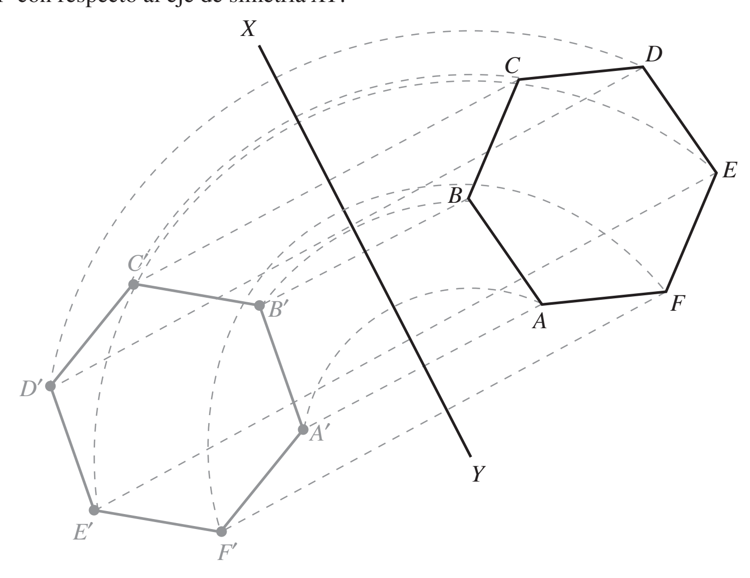
1 El cuadrilátero *ABCD* con respecto al eje de simetría $\overline{PQ}$.




$A'B'C'D'$ es simétrico de *ABCD*

Se trazan los segmentos perpendiculares al eje $\overline{PQ}$, luego se apoya el compás en el punto *P* y se abre a cada uno de los vértices del polígono, se trazan los arcos y en los puntos donde se intersecan con sus respectivos segmentos se ubican las imágenes de los puntos, que posteriormente se unen.

2 El polígono *ABCDEF* con respecto al eje de simetría *XY*.

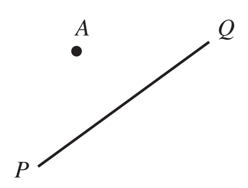



$A'B'C'D'E'F'$ es simétrico de *ABCDEF*

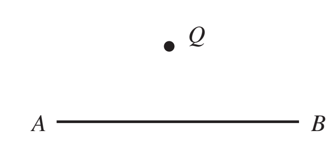
# EJERCICIO 26

Obtén el simétrico de los siguientes puntos, segmentos y figuras con respecto al eje de simetría indicado.

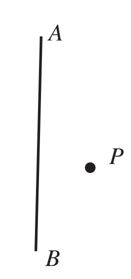
1. Punto $A$, eje de simetría $PQ$.



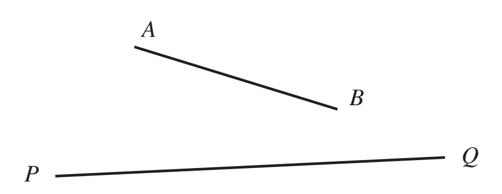

2. Punto $Q$, eje de simetría $AB$.



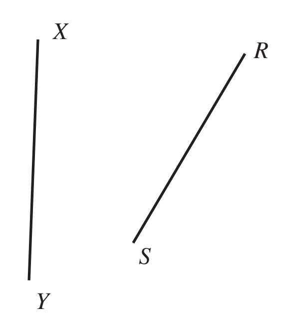

3. Punto $P$, eje de simetría $\overline{AB}$.



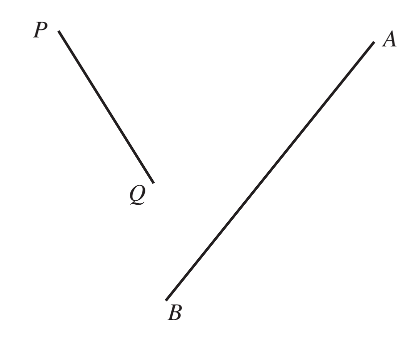

4. Segmento $\overline{AB}$, eje de simetría $\overline{PQ}$.



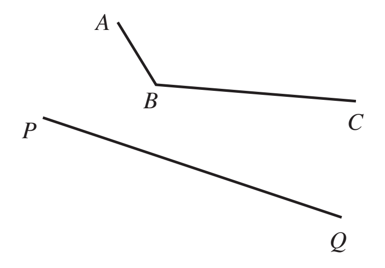

5. Segmento $\overline{RS}$, eje de simetría $\overline{XY}$.



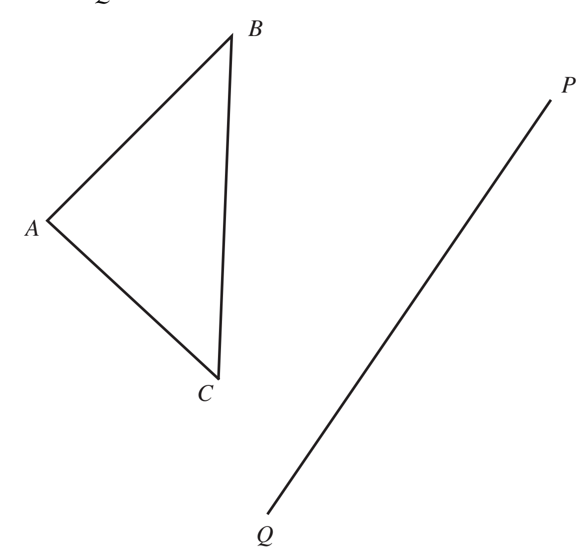

6. Segmento $\overline{PQ}$, eje de simetría $\overline{AB}$.



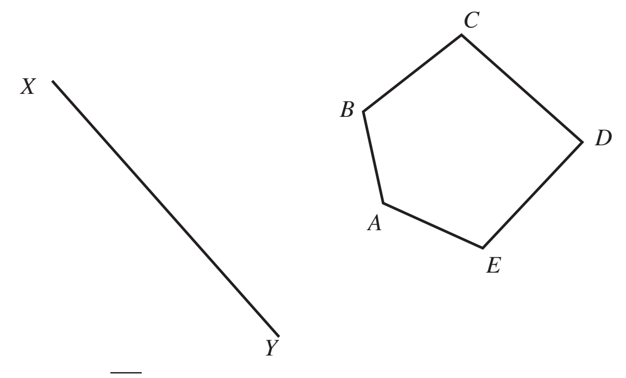

7. Figura $ABC$, eje de simetría $\overline{PQ}$.



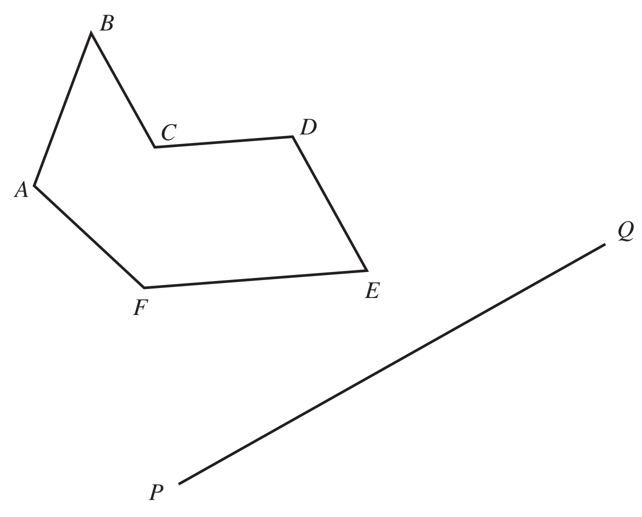
8. Triángulo *ABC*, eje de simetría $\overline{PQ}$.




9. Pentágono *ABCDE*, eje de simetría $\overline{XY}$.




10. Figura *ABCDEF*, eje de simetría $\overline{PQ}$.



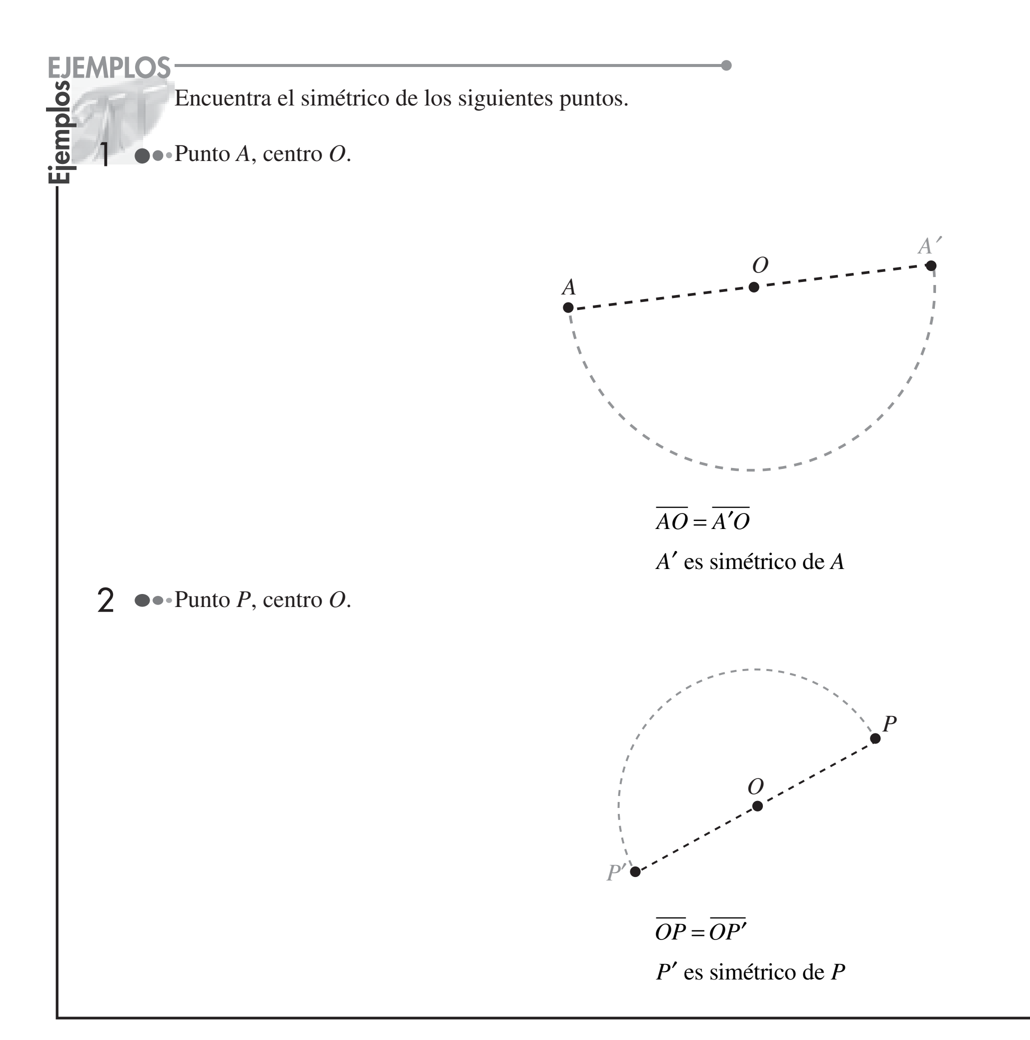

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Simetría central

Este tipo de simetría es con respecto a un punto conocido también como centro. A la imagen de una figura bajo esta transformación se le conoce también como simétrico.

**Simétrico con respecto de un punto.** Para obtener la imagen de un punto se traza un segmento que pase por el punto y centro. La imagen se ubica al otro lado del punto sobre el segmento y a la misma distancia. Para realizar este procedimiento, se puede utilizar el compás para marcar de manera precisa la distancia; el compás se coloca en el centro y con una abertura igual a la distancia del centro al punto, se traza el arco que corta a la recta en el lado opuesto del punto, éste será la imagen.

EJEMPLOS




Encuentra el simétrico de los siguientes puntos.

1 Punto $A$, centro $O$.

$\overline{AO} = \overline{A'O}$

$A'$ es simétrico de $A$

2 Punto $P$, centro $O$.

$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$P'$ es simétrico de $P$

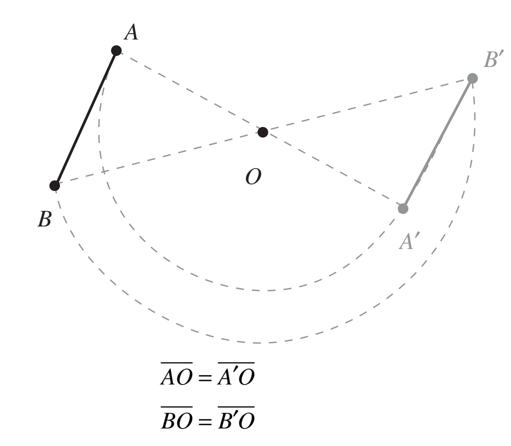
**Simétrico de un segmento.** Para obtener la imagen o simétrico de un segmento, se trazan los simétricos de sus puntos extremos y se unen.

EJEMPLOS

Ejemplos

Determina el simétrico de los siguientes segmentos:

1 Segmento $\overline{AB}$ con respecto al centro $O$.

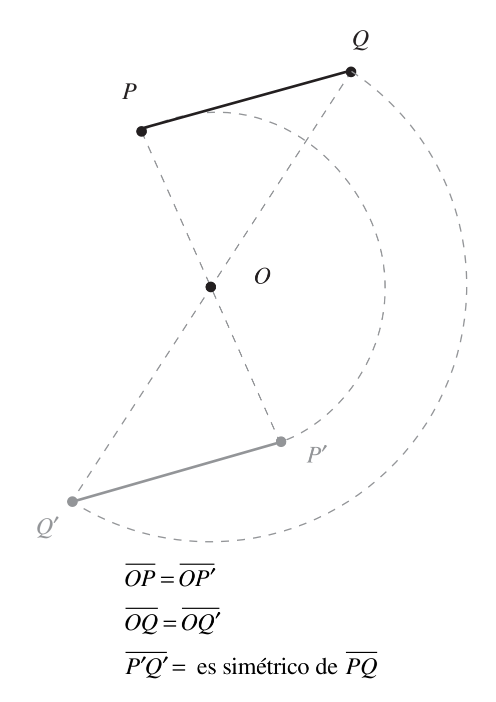



$\overline{AO} = \overline{A'O}$

$\overline{BO} = \overline{B'O}$

$\overline{A'B'}$ es simétrico de $\overline{AB}$

2 Segmento $\overline{PQ}$ con respecto al centro $O$.




$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$\overline{OQ} = \overline{OQ'}$

$\overline{P'Q'} =$ es simétrico de $\overline{PQ}$

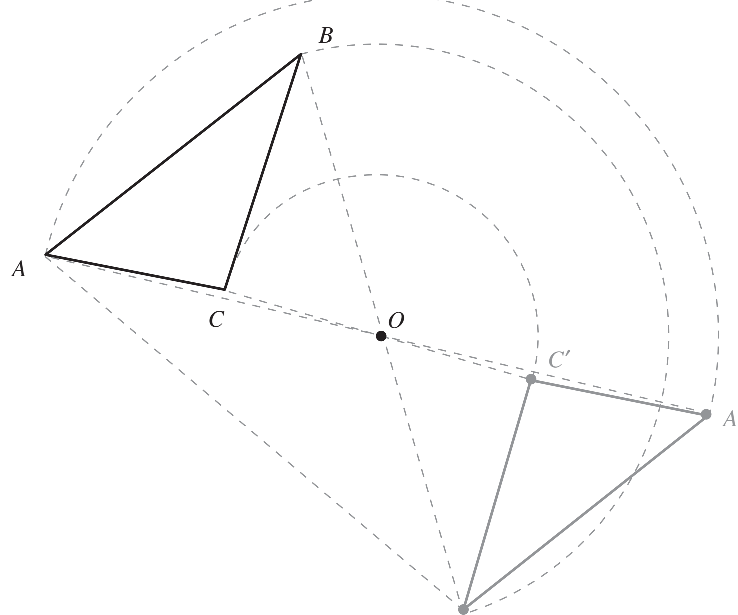
**Simétrico de una figura.** Se determinan los simétricos de sus vértices.

EJEMPLOS

Ejemplos

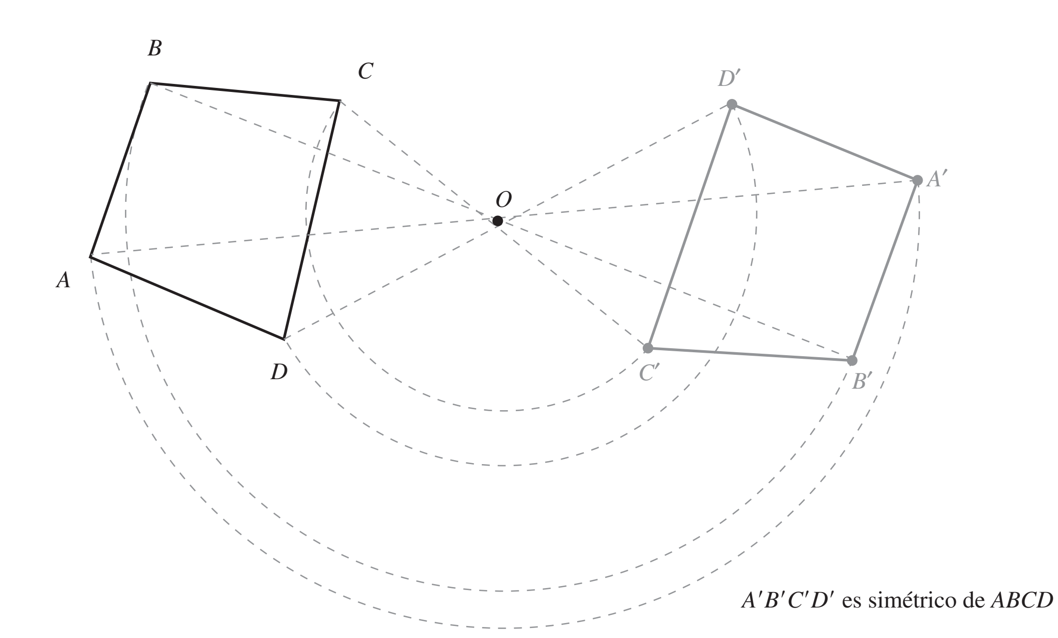
Determina los simétricos de las siguientes figuras.

1 Triángulo *ABC* con respecto al centro *O*.




$A'B'C'$ es simétrico de $ABC$

2 Cuadrilátero *ABCD* con respecto al centro *O*.




$A'B'C'D'$ es simétrico de $ABCD$

# EJERCICIO 27

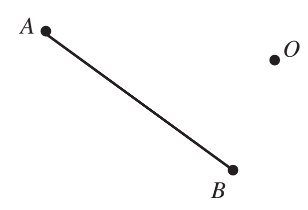
Obtén el simétrico de los siguientes puntos, segmentos y figuras con respecto al centro dado.

1. Punto $W$ con respecto al centro $O$.

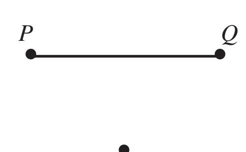
2. Punto $P$ con respecto al centro $O$.

3. Punto $A$ con respecto al centro $O$.

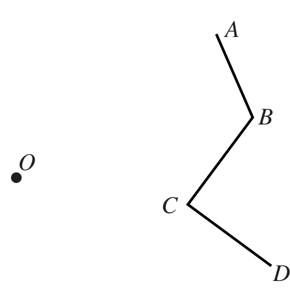
4. Segmento $\overline{AB}$ con respecto al centro $O$.



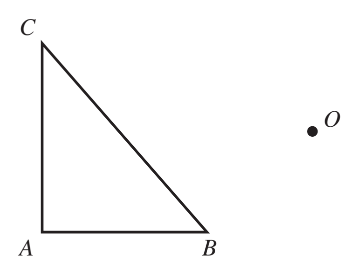

5. Segmento $\overline{PQ}$ con respecto al centro $O$.



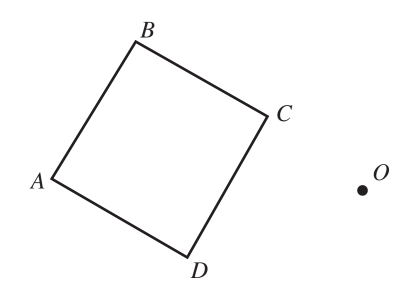

6. Figura $ABCD$ con respecto al centro $O$.



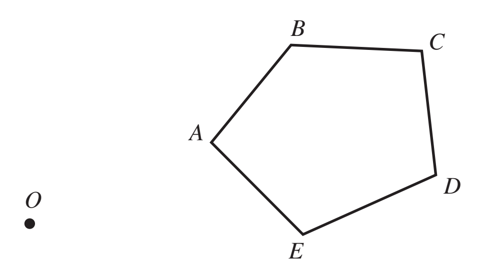

7. Triángulo $ABC$ con respecto al centro $O$.



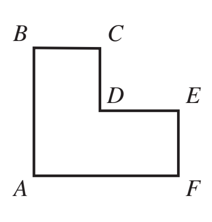

8. Cuadrilátero $ABCD$ con respecto al centro $O$.




9. Polígono $ABCDE$ con respecto al centro $O$.




10. Polígono $ABCDEF$ con respecto al centro $O$.



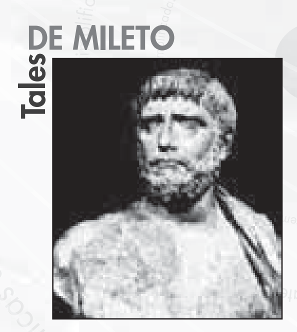

O

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 8

## CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

### Tales DE MILETO



Tales de Mileto
(640 - 560 *a. C.*)

Geómetra griego y uno de los siete sabios de Grecia. Fue el primer matemático griego que inició el desarrollo racional de la geometría. Se le atribuyen 5 teoremas de la geometría elemental:

1. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
2. Un círculo es bisecado por algún diámetro.
3. Los ángulos entre 2 líneas rectas que se cortan son iguales.
4. Dos triángulos son congruentes si ellos tienen 2 ángulos y un lado igual.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

## Circunferencia

**Circunferencia.** Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y su longitud representa el perímetro del círculo.

**Círculo.** Se define como la superficie limitada por una circunferencia.

**Arco.** Nombre que recibe una parte de la circunferencia y se representa con el símbolo $\frown$

**Semicircunferencia.** Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

## Rectas notables

**Radio.** Así se nombra al segmento de recta unido por el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.

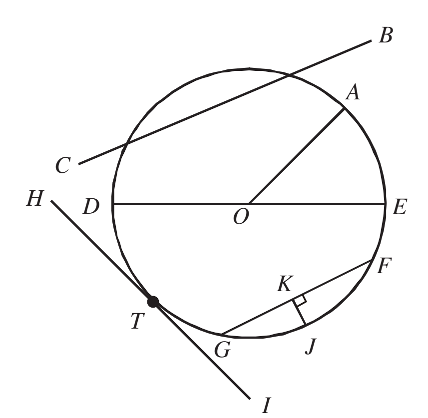
**Cuerda.** Se denomina así al segmento de recta que une 2 puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.

**Diámetro.** Se nombra así a la cuerda más grande que une 2 puntos opuestos de la circunferencia y pasa por el centro.

**Secante.** Aquella recta que pasa por 2 puntos de la circunferencia.

**Tangente.** Así se llama a la línea recta que tiene sólo un punto en común con la circunferencia.

**Flecha o sagita.** Es la perpendicular trazada de un punto de la circunferencia al punto medio de una cuerda.

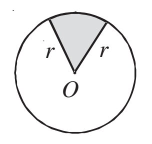



$O$: Centro
$\overset{\frown}{AE}$: Arco
$\overset{\frown}{ED}$: Semicircunferencia
$\overline{OA}$: Radio
$\overline{DE}$: Diámetro
$\overleftrightarrow{BC}$: Secante
$\overleftrightarrow{HI}$: Tangente
$\overline{FG}$: Cuerda
$\overline{KJ}$: Sagita o flecha
$T$: Punto de tangencia

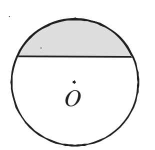
## Porciones de un círculo

Son las superficies limitadas por un arco y ciertas rectas notables, las cuales generan:

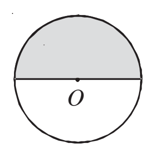
**Sector circular.** Porción de círculo comprendida entre 2 radios.



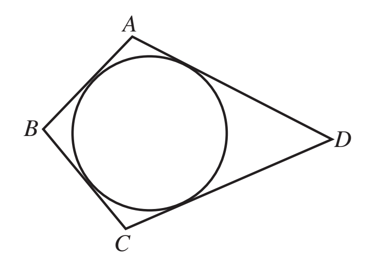

**Segmento circular.** Porción de círculo comprendida entre el arco y su cuerda.




**Semicírculo.** Porción de círculo entre la semicircunferencia y su diámetro, es decir, es la mitad de un círculo.



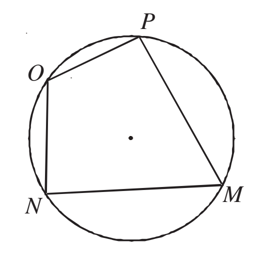
## Circunferencia y polígonos




Cuando los lados de un polígono son tangentes a la circunferencia o cuerdas, se genera la circunferencia inscrita o circunscrita.

**Circunferencia inscrita.** Aquella circunferencia que es tangente a los lados de un polígono.

**Polígono circunscrito.** Cuando los lados del polígono son tangentes a la circunferencia.




**Circunferencia circunscrita.** Es la circunferencia que pasa por los vértices de un polígono.

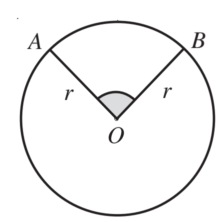
**Polígono inscrito.** Cuando los lados del polígono son cuerdas de la circunferencia.

## Ángulos notables

Son aquellos que forman las rectas notables y se clasifican de la siguiente manera:

**Ángulo central.** Es aquel ángulo que forman 2 radios, o bien por un diámetro y un radio, y tiene su vértice en el centro.

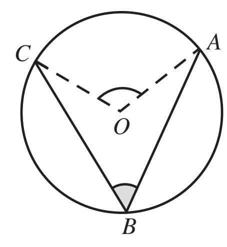
La medida de un ángulo central es igual al arco comprendido entre sus lados.




$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

**Ángulo inscrito.** Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y lo forma un par de cuerdas.

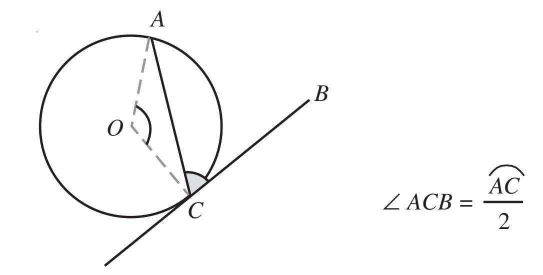
La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.




$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

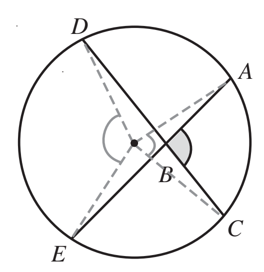
**Ángulo semiinscrito.** Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y lo forman una cuerda y una tangente.

La medida de un ángulo semiinscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.




**Ángulo interior.** Su vértice se encuentra en un punto interior de la circunferencia y lo forman 2 cuerdas que se cortan.

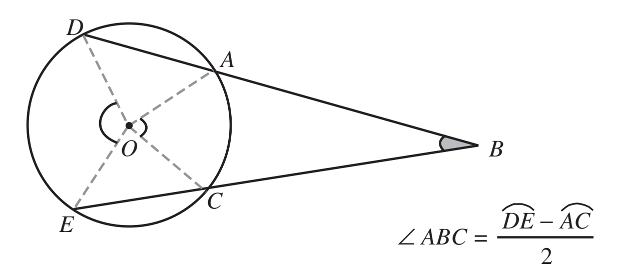
La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.




$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

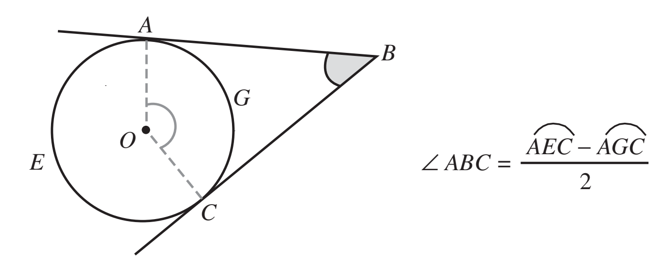
**Ángulo exterior.** Tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia y lo forman 2 secantes.

La medida de un ángulo exterior es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.




**Ángulo circunscrito.** Se denomina así al ángulo que forman 2 tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia.

La medida de un ángulo circunscrito es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

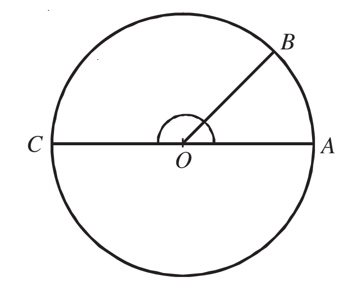


EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\overset{\frown}{AB} = 35°$, determina los valores de $\angle AOB$ y $\angle BOC$.

**Solución**




El ángulo $\angle AOB$ es central, entonces:

$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB} = 35°$$

De la figura,

$$\angle AOB + \angle BOC = 180°$$

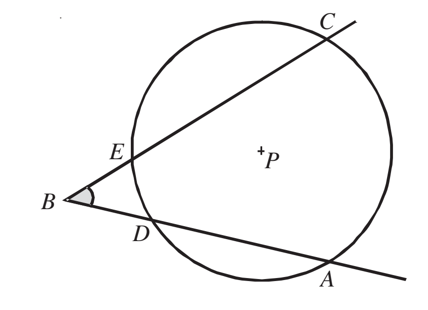
Al despejar $\angle BOC$, se obtiene:

$$\angle BOC = 180° - \angle AOB = 180° - 35° = 145°$$

Por tanto, $\angle AOB = 35°$ y $\angle BOC = 145°$

2 Encuentra el valor del ángulo $\angle ABC$ formado por las secantes, si $\overset{\frown}{AC} = 63°$ y $\overset{\frown}{DE} = 27°$.

**Solución**




El ángulo $\angle ABC$ es exterior, entonces:

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE}}{2}$$

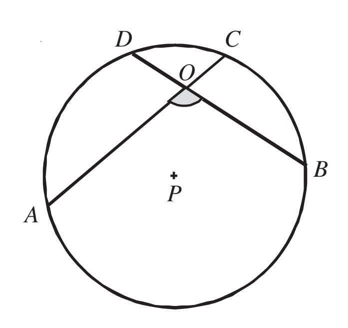
Al sustituir los valores de $\overset{\frown}{AC} = 63°$ y $\overset{\frown}{DE} = 27°$, se obtiene:

$$\angle ABC = \frac{63° - 27°}{2} = \frac{36°}{2} = 18°$$

Por lo que se deduce que, $\angle ABC = 18°$

3 Determina la medida del ángulo $\angle AOB$ si $\overset{\frown}{AB} = 160°$ y $\overset{\frown}{CD} = 50°$.

**Solución**




El ángulo $\angle ABC$ es interior, entonces:

$$\angle AOB = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

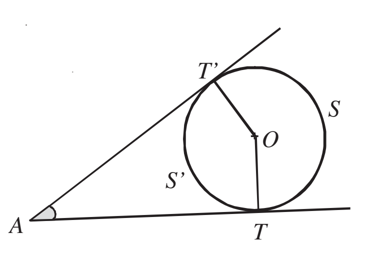
Y al sustituir los valores de $\overset{\frown}{AB} = 160°$ y $\overset{\frown}{CD} = 50°$, se obtiene:

$$\angle AOB = \frac{160° + 50°}{2} = \frac{210°}{2} = 105°$$

Por consiguiente, $\angle AOB = 105°$.

4 Si $\overset{\frown}{TST'} = 240°$, determina el valor del ángulo que forman las rectas tangentes $\overleftrightarrow{AT'}$ y $\overleftrightarrow{AT}$.

**Solución**




El ángulo $\angle TAT'$ es externo, entonces:

$$\angle TAT' = \frac{\overset{\frown}{TST'} - \overset{\frown}{TS'T'}}{2}$$

De la figura $\overset{\frown}{TST'} + \overset{\frown}{TS'T'} = 360°$, donde $\overset{\frown}{TS'T'} = 120°$

Al sustituir $\overset{\frown}{TST'} = 240°$ y $\overset{\frown}{TS'T'} = 120°$, se obtiene:

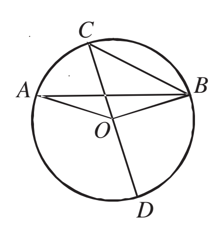
$$\angle TAT' = \frac{240° - 120°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Por consiguiente, $\angle TAT' = 60°$

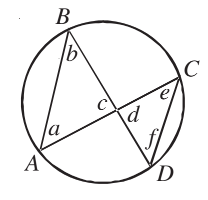
# EJERCICIO 28

Resuelve los siguientes ejercicios:

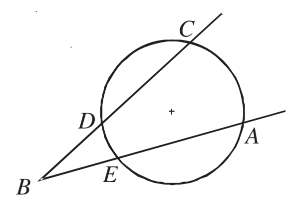
1. En la siguiente figura, $\widehat{AC} = 60°$, $\widehat{BC} = 104°$ y $\widehat{BD} = 80°$. Encuentra los valores de $\angle ABC$, $\angle AOC$, $\angle BOC$ y $\widehat{AD}$.



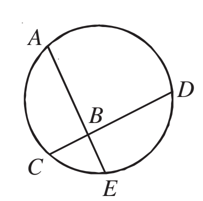

2. En esta figura $\widehat{AD} = 100°$ y $\widehat{BC} = 150°$. Determina los valores de $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$ y $\angle f$.



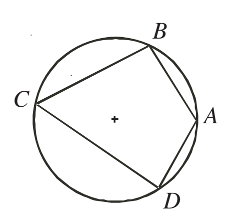

3. En la siguiente figura, $\widehat{AC} = 70°$ y $\widehat{DE} = 15°$. Precisa el valor de $\angle ABC$.




4. De esta figura, $\widehat{DE} = 50°$ y $\widehat{AC} = 120°$. Encuentra los valores de $\angle ABC$ y $\angle DBA$.



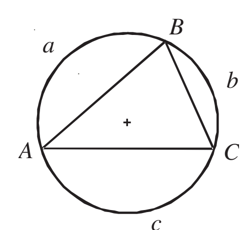

5. Encuentra el valor de los 4 ángulos internos del siguiente cuadrilátero si $\widehat{AB} = 60°$, $\widehat{BC} = 110°$, $\widehat{CD} = 100°$ y $\widehat{AD} = 90°$.



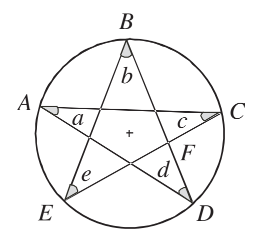

6. Si $\Delta ABC$ es un triángulo inscrito, como se ilustra, halla:

   *a*) $\angle A$ si $a = 150°$ y $c = 150°$

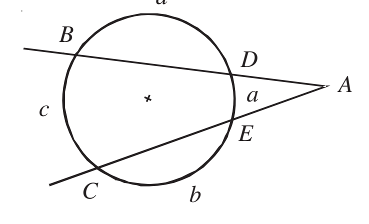
   *b*) $\angle A$ si $AB \perp BC$ y $a = 100°$



7. Si $\angle e = 50°$, $\angle BFC = 65°$, $\overset{\frown}{CD} = 120°$, $\overset{\frown}{AE} = x$ y $\overset{\frown}{AB} = x + 10°$, encuentra el valor de los ángulos restantes.

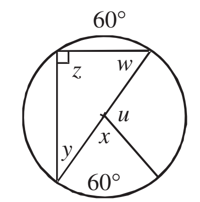



8. En la figura, $AB$ y $AC$ son secantes que se cortan en $A$, determina:

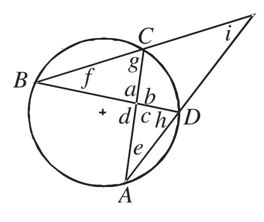



*a*) $\angle A$ si $c = 90°$, $a = 60°$
*b*) $\angle A$ si $c - a = 80°$
*c*) $\angle A$ si $c = a + 60°$
*d*) $a$ si $c = 135°$, $\angle A = 50°$
*e*) $c$ si $a = 60°$ y $\angle A = 30°$
*f*) $c - a$ si $\angle A = 70°$
*g*) $a$ si $c = 2a$ y $\angle A = 35°$
*h*) $a$ si $c = 5a$ y $\angle A = 80°$

9. En la siguiente figura halla el valor de $\angle u$, $\angle w$, $\angle x$, $\angle y$ y $\angle z$.




10. Si $\overset{\frown}{AB} = 130°$ y $\overset{\frown}{CD} = 50°$, encuentra $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$, $\angle g$, $\angle h$ y $\angle i$.

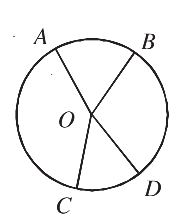



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Teoremas

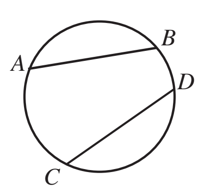
- **Teorema 1.** Si 2 ángulos centrales del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes, entonces sus arcos intersecados son congruentes.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

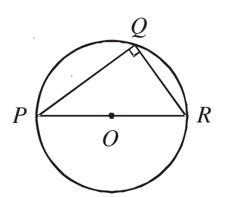



- **Teorema 2.** En una circunferencia de cuerdas iguales se subtienden arcos iguales y viceversa.

$$\text{Si } \overline{AB} = \overline{CD} \text{ si y sólo si } \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

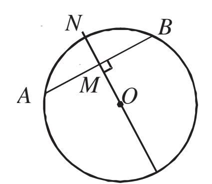


➲ **Teorema 3.** Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.



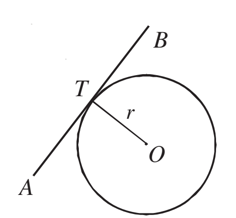

➲ **Teorema 4.** Una recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y a su arco.

$$\text{Si } \overleftrightarrow{NO} \perp \overline{AB} \text{ entonces, } \overline{AM} = \overline{MB} \text{ y } \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB}$$



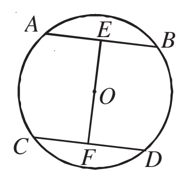

➲ **Teorema 5.** Una recta tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado hacia el punto de tangencia.

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OT}, \overline{OT} = r$$



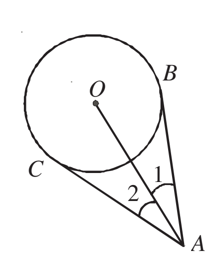

➲ **Teorema 6.** Dos cuerdas trazadas en un círculo y que equidistan del centro, son congruentes.

$$\text{Si } \overline{OE} = \overline{OF} \text{ entonces } \overline{AB} \cong \overline{CD}$$



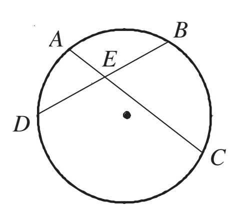

➲ **Teorema 7.** Las tangentes trazadas desde un punto fuera del círculo son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que pasa por el centro y dicho punto.

$$\overline{AC} \cong \overline{AB} \text{ y } \angle 1 = \angle 2$$



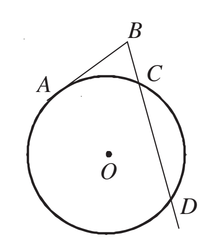

➲ **Teorema 8.** Si 2 cuerdas se intersecan dentro de un círculo, el producto de las medidas de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las medidas de los segmentos de la otra.

$$\overline{AE} \cdot \overline{EC} = \overline{BE} \cdot \overline{ED}$$



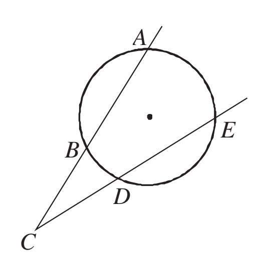

➲ **Teorema 9.** Si desde un punto exterior a un círculo se traza una tangente y una secante, la medida de la tangente es media proporcional entre la medida de la secante y su segmento externo.

$$(\overline{AB})^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$$



**Teorema 10.** Si desde un punto exterior a un círculo se trazan 2 secantes, el producto de la medida de una secante por la medida de su segmento exterior es igual al producto de la medida de la otra secante por su segmento exterior.

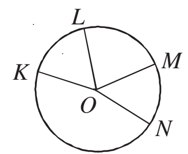
$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{EC} \cdot \overline{DC}$$




## EJEMPLOS

Ejemplos

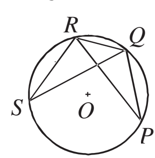
1 Si $\angle KOL \cong \angle MON$, demuestra que arco $KM \cong$ arco $LN$.




**Solución**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\angle KOL \cong \angle MON$ | 1. Dato |
| 2. Arco $KL \cong$ arco $MN$ | 2. De la figura: $\angle KOL = \overset{\frown}{KL}$ y $\angle MON = \overset{\frown}{MN}$, pero $\angle KOL \cong \angle MON$, por tanto, arco $KL \cong$ arco $MN$ |
| 3. Arco $KM \cong$ arco $LN$ | 3. $\overset{\frown}{KM} = \overset{\frown}{KL} + \overset{\frown}{LM}$, $\overset{\frown}{LN} = \overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MN}$, pero $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{KL}$, entonces $\overset{\frown}{KM} \cong \overset{\frown}{LN}$ |

2 En la siguiente figura $\overline{SR} \cong \overline{QP}$, demuestra que: $\overline{SQ} \cong \overline{RP}$.




**Solución**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| 1. $\overline{SR} \cong \overline{QP}$ | 1. Dato |
| 2. $\angle SRP \cong \angle PQS$ | 2. $\angle SRP = \dfrac{\overset{\frown}{SP}}{2}$, $\angle PQS = \dfrac{\overset{\frown}{SP}}{2}$ |
| 3. Arco $SR \cong$ arco $QP$ | 3. Cuerdas iguales $(\overline{SR} \cong \overline{QP})$ subtienden arcos iguales $(\overset{\frown}{SR} \cong \overset{\frown}{QP})$ |
| 4. $\angle RQS \cong \angle QRP$ | 4. $\angle RQS = \dfrac{\overset{\frown}{SR}}{2}$, $\angle QRP = \dfrac{\overset{\frown}{QP}}{2}$, pero $\overset{\frown}{SR} = \overset{\frown}{QP}$, por tanto $\angle RQS \cong \angle QRP$ |
| 5. $\angle SRQ \cong \angle RQP$ | 5. $\angle SRQ = \angle SRP + \angle QRP$ y $\angle RQP = \angle RQS + \angle PQS$, pero $\angle SRP = \angle PQS$ y $\angle RQS = \angle QRP$, por tanto $\angle SRQ \cong \angle RQP$ |
| 6. $\overline{RQ} \cong \overline{RQ}$ | 6. Por ser lado común a los triángulos $SRQ$ y $PQR$ |
| 7. $\Delta SRQ \cong \Delta PQR$ | 7. Por el teorema lado, ángulo, lado |
| 8. $\overline{RP} \cong \overline{SQ}$ | 8. Por ser lados homólogos en triángulos congruentes |

# EJERCICIO 29

Resuelve los siguientes ejercicios:

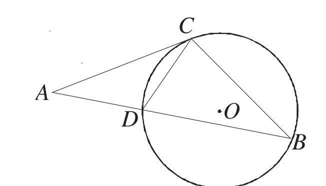
1. De la siguiente figura:

   *a)* Encuentra $\overline{PT}$ si $\overline{TQ}=5$, $\overline{RT}=9$ y $\overline{TS}=6$

   *b)* Halla $\overline{TS}$ si $\overline{PT}=11$, $\overline{RT}=7$ y $\overline{TQ}=5$

   *c)* Determina $\overline{TR}$ si $\overline{PQ}=22$, $\overline{TQ}=5$ y $\overline{TS}=9$

2. De esta figura:



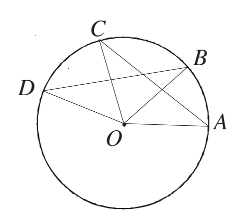

   *a)* Determina $\overline{AC}$ si $\overline{AD}=6$ y $\overline{BD}=11$

   *b)* Encuentra $\overline{AB}$ si $\overline{AD}=5$ y $\overline{AC}=9$

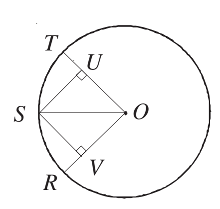
   *c)* Halla $\overline{AC}$ si $\overline{DB}=10$ y $\overline{AB}=23$

Realiza las siguientes demostraciones.

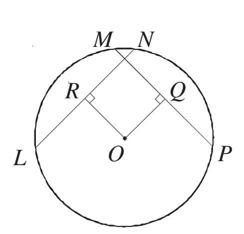
3. Si el $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$, demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



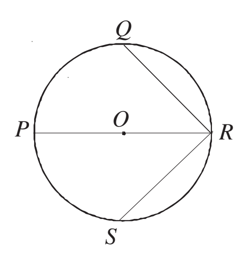

4. Si $\overline{SU} \perp \overline{OT}$, $\overline{SV} \perp \overline{OR}$ y $\overline{SU} \cong \overline{SV}$, comprueba que $\widehat{TS} \cong \widehat{SR}$.




5. Si $\overline{RO} \perp \overline{LN}$, $\overline{OQ} \perp \overline{MP}$ y $\overline{LN} \cong \overline{MP}$, demuestra que: $\angle ORQ \cong \angle OQR$.

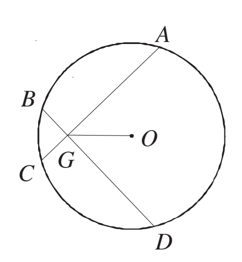



6. Si $\overline{PR}$ es un diámetro y $\angle PRS \cong \angle PRQ$, comprueba que: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.



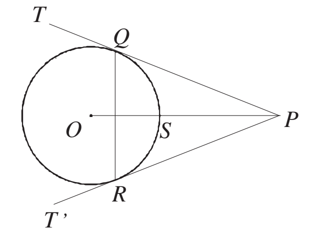
7. Si $\angle OGA \cong \angle OGD$, demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

8. *Si* $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, comprueba que $\angle OGA \cong \angle OGD$.

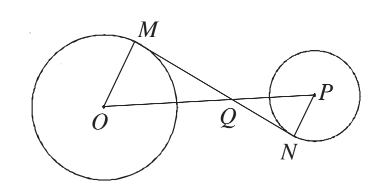



9. *PT* y *PT´* son tangentes al círculo en los puntos *Q* y *R*, respectivamente. Demuestra que $\overline{OP}$ biseca a la cuerda *QR*.

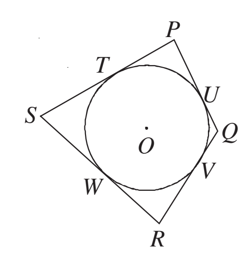
10. *PT* y *PT´* son tangentes al círculo en los puntos *Q* y *R*, respectivamente, y si se unen *Q* y *R*, comprueba que: $\angle PRS \cong \angle PQS$.



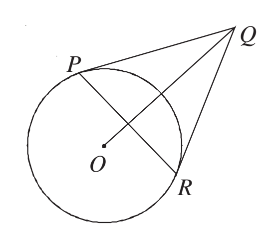

11. Sea $\overline{MN}$ tangente común a las circunferencias con centro en *O* y *P*. Si se unen los centros $\overline{OP}$, interseca a la tangente en *Q*. Demuestra que: $\angle MOQ \cong \angle NPQ$.




12. Comprueba que la suma de las medidas de un par de lados opuestos de un cuadrilátero circunscrito, es igual a la suma de las medidas del otro par.

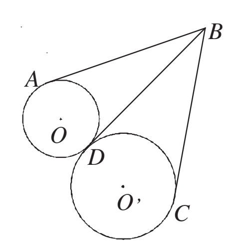



13. $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ son segmentos tangentes a la circunferencia. Demuestra que $\angle QPR \cong \angle QRP$.



14. En la figura $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ son tangentes.

Comprueba que: $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{BC}$.

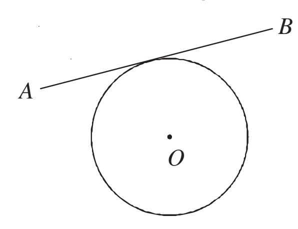



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Tangente a una circunferencia

Se le denomina tangente a toda recta que tiene un punto en común con la circunferencia.

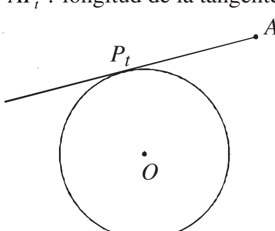
$\overleftrightarrow{AB}$: recta tangente




### Longitud de una tangente

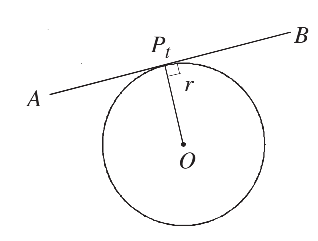
Es el segmento trazado desde un punto exterior al punto de tangencia.

$\overline{AP_t}$ : longitud de la tangente

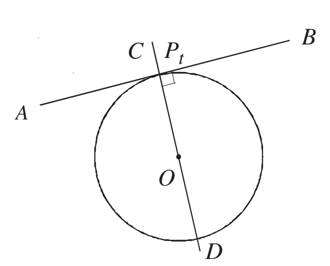



### Propiedades de las tangentes

1. Toda tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

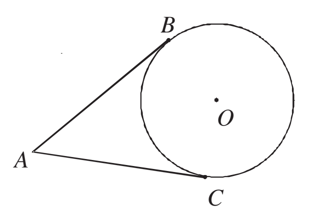


2. Si una recta es perpendicular a una recta tangente en el punto de tangencia, ésta pasa por el centro de la circunferencia.



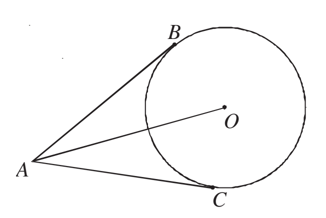

3. Las tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son iguales.

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$



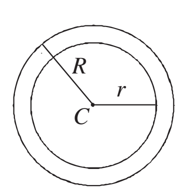

4. La recta que une un punto exterior y el centro de una circunferencia, es bisectriz del ángulo formado por las tangentes trazadas del punto a la circunferencia.

$\overline{AO}$ es bisectriz del ángulo $BAC$



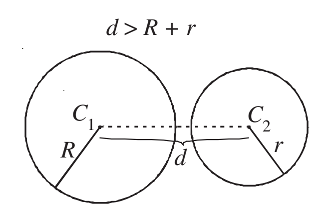

## Posiciones relativas

**Circunferencias concéntricas.** Son aquellas que tienen el mismo centro y distinto radio.



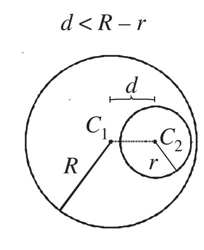

**Circunferencias exteriores.** Son aquellas que no tienen puntos en común y cada una está en una región exterior a la otra. La distancia entre los centros de estas circunferencias es mayor que la suma de sus radios.

$$d > R + r$$



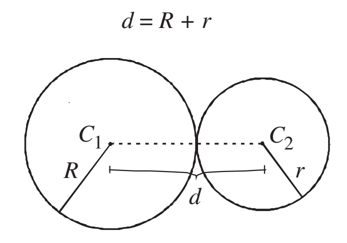

**Circunferencia interior.** Es aquella en la cual todos sus puntos son interiores a otra circunferencia.

$$d < R - r$$



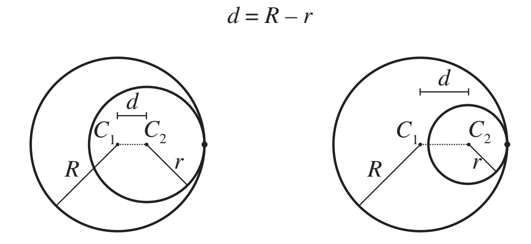
**Circunferencias tangentes exteriores.** Se les llama así a las que tienen un solo punto en común. La distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios.

$$d = R + r$$



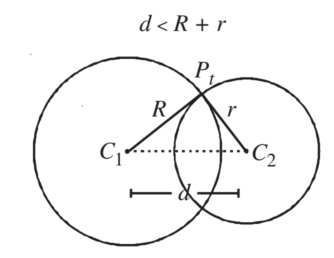

**Circunferencias tangentes interiores.** Son circunferencias que tienen un solo punto en común. La distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios.

$$d = R - r$$



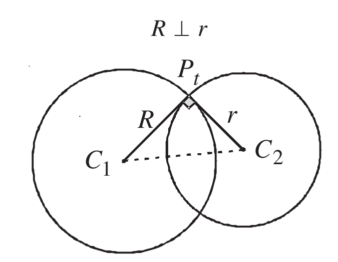

**Circunferencias secantes.** Son aquellas que se intersecan en 2 puntos. La distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios.

$$d < R + r$$




**Circunferencias ortogonales.** Cuando se intersecan 2 circunferencias los radios forman un ángulo de 90º, esto significa que son perpendiculares en los puntos de intersección.

$$R \perp r$$



**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Desde un punto exterior se trazó una recta tangente, cuya longitud es de 10 *cm* y el segmento que une dicho punto con el centro de la circunferencia es de 12 *cm*, determina el radio de la circunferencia.

**Solución**

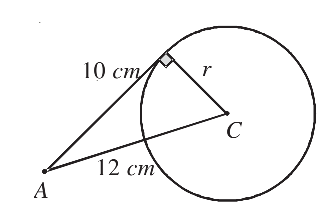
El radio es perpendicular a una recta tangente en el punto de tangencia, esto significa que se forma un triángulo rectángulo, del cual se tiene:

$$(12)^2 = (10)^2 + r^2$$

al despejar $r$:

$$r = \sqrt{144 - 100}$$

$$r = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$




Luego, el radio de la circunferencia es de $2\sqrt{11}$ *cm.*

2 Los radios de 2 circunferencias son $R$ y $r$, si las circunferencias son tangentes exteriores, expresa la distancia entre los centros en términos de $r$, si $r = \frac{2}{3}R$ .

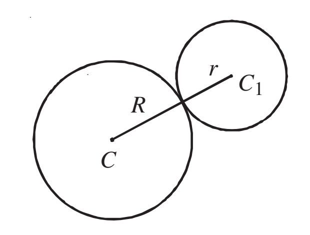
**Solución**

Por ser circunferencias tangentes exteriores, la distancia entre los centros se define como:

$$d_{CC_1} = R + r$$

al despejar $R$ de $r = \frac{2}{3}R$ y sustituir, se obtiene:

$$d = \frac{3}{2}r + r = \frac{5}{2}r$$




En conclusión, la distancia entre los centros es de $\frac{5}{2}r$ .

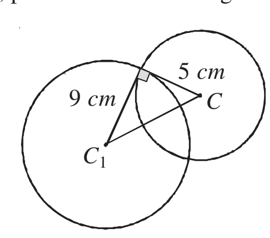
3 Dos circunferencias ortogonales de radio 5 *cm* y 9 *cm*, determina la distancia entre sus centros.

**Solución**

Si 2 circunferencias son ortogonales, sus radios son perpendiculares, entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{CC_1}\right)^2 = (5)^2 + (9)^2 \quad \rightarrow \quad \overline{CC_1} = \sqrt{25 + 81}$$

$$\overline{CC_1} = \sqrt{106}$$



Por consiguiente, la distancia entre los centros es $\sqrt{106}$ *cm.*

# EJERCICIO 30

Determina las posiciones de 2 circunferencias, cuyos centros distan 24 *u* y sus radios miden:

1. $R = 15\ u,\ r = 8\ u$
2. $R = 13\ u,\ r = 11\ u$
3. $R = 42\ u,\ r = 13\ u$
4. $R = 28\ u,\ r = 20\ u$
5. $R = 35\ u,\ r = 11\ u$
6. $R = 20\ u,\ r = 4\ u$

Resuelve los siguientes problemas:

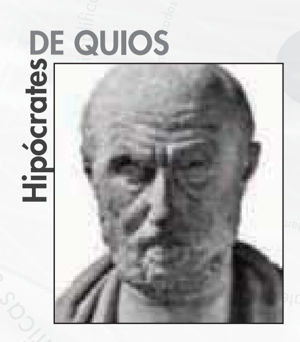
7. Se tienen 3 circunferencias tangentes entre sí de radio $r$, determina el perímetro del triángulo formado por los puntos de tangencia de las circunferencias.
8. Desde un punto exterior $A$ se traza una recta tangente a la circunferencia de diámetro $4\sqrt{3}\,u$, si la longitud del segmento que une el centro de la circunferencia con el punto $A$ mide 4 $u$, ¿cuál es la longitud de la tangente?
9. La distancia entre los centros de 2 circunferencias secantes es $2\sqrt{5}\ u$, determina el radio de $C_1$ si el radio de $C_2$ es $2\sqrt{2}\ u$.
10. De un punto $A$ se traza una recta tangente a la circunferencia con centro en $C_1$, la longitud de la tangente es $\sqrt{3}\ cm$ y el segmento $\overline{AC_1} = 2\sqrt{7}\ cm$, determina el radio de la circunferencia.
11. La circunferencia $C_2$ es tangente interior a $C_1$ en $P$, la circunferencia $C_3$ es tangente interior a $C_2$ en $P$, determina las distancias de los centros de $C_1$ a $C_2$ y de $C_1$ a $C_3$ y si los diámetros de $C_1$, $C_2$ y $C_3$ son: $R$, $\frac{2}{3}R$ y $\frac{2}{9}R$, respectivamente.
12. Se tienen 3 circunferencias con centros en $C_1$, $C_2$ y $C_3$ de manera que $\overline{C_1C_2} \perp \overline{C_2C_3}$, determina el radio de la circunferencia en $C_2$ si el radio de la circunferencia en $C_1$ y en $C_3$ son: $\frac{1}{4}r$ y $\frac{1}{2}r$, respectivamente y $\overline{C_1C_3} = \frac{\sqrt{61}}{4}r$.
13. Se tienen 3 circunferencias que son tangentes entre sí. El radio de la circunferencia $C_1$ y $C_2$ es $R$, mientras que el de la circunferencia $C_3$ es $\frac{1}{2}R$, determina la distancia entre el centro de $C_3$ y el punto de tangencia entre $C_1$ y $C_2$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 9

## PERÍMETROS Y SUPERFICIES

### Hipócrates DE QUIOS



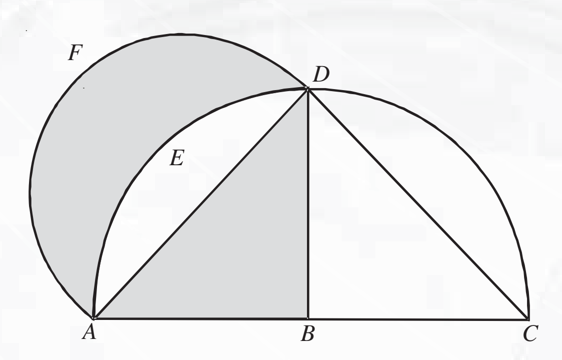
Matemático griego, precursor de Euclides. Entre los mayores logros de Hipócrates está el haber demostrado que las áreas de 2 círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros. Esto es equivalente a haber descubierto que el área de un círculo es $\pi r^2$, sin determinar el valor de $\pi$. Es posible que llegara a esta conclusión al considerar al círculo como el límite de un polígono regular.

Uno de los problemas más importantes para los griegos era el de la cuadratura del círculo o de cualquier figura en general, la cual se define así:

La cuadratura de una figura plana es la construcción con regla y compás de un cuadrado con la misma superficie que la figura plana original.

En esa época sólo se habían realizado las cuadraturas de diversas figuras planas de lados rectos, sin embargo Hipócrates fue el primero en cuadrar una figura con lados curvados conocidos como lúnulas.

Logró trazar una lúnula de área igual al triángulo que es mitad de un cuadrado dado.




Área de la lúnula *AEDF* = Área del triángulo *ADB*

## Definiciones

**Perímetro.** Es la suma de los lados de un polígono.

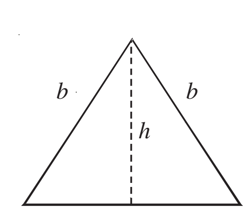
**Superficie o área.** Es la región del plano limitada por una figura en dos dimensiones.

## Perímetro y área de una figura plana

Las siguientes fórmulas se emplean para determinar el perímetro y el área de una figura.

### Triángulos

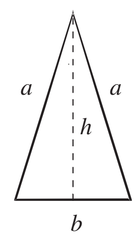
**Equilátero**




Perímetro: $P = 3b$

Área: $A = \frac{bh}{2}$

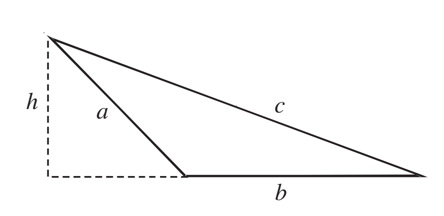
**Isósceles**




Perímetro: $P = 2a + b$

Área: $A = \frac{bh}{2}$

**Escaleno**




Perímetro: $P = a + b + c$

Área: $A = \frac{bh}{2}$

Área de un triángulo en función de sus lados (fórmula de Herón de Alejandría).

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Con $s = \frac{a+b+c}{2}$, donde:

$s$ = semiperímetro, $a$, $b$, $c$ = lados del triángulo y $h$ = altura

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área del triángulo cuya base y altura son 6 y 4 $cm$, respectivamente.

**Solución**

Se sustituyen los valores en la fórmula y se obtiene:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(6\ cm)(4\ cm)}{2} = \frac{24\ cm^2}{2} = 12\ cm^2$$

Por tanto, el área del triángulo es de 12 $cm^2$

2 Determina el perímetro y el área de un triángulo isósceles, si los lados miden 3, 3 y 5 $cm$.

**Solución**

El perímetro se define como la suma de los lados, entonces:

$$P = 3 + 3 + 5 = 11\ cm$$

Para hallar el área se aplica la fórmula de Herón de Alejandría:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

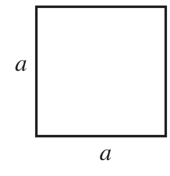
Si $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+3+5}{2} = \frac{11}{2}$, al sustituir en la fórmula:

$$A = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-5\right)} = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{11\cdot 25}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{11}\ cm^2$$

Por tanto, el área del triángulo es $\frac{5}{4}\sqrt{11}\ cm^2$

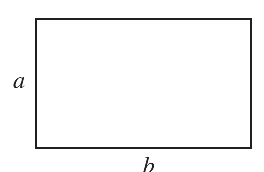
## Cuadriláteros

**Cuadrado**



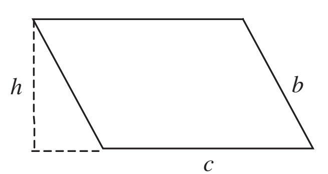

Perímetro: $P = 4a$
Área: $A = a^2$

**Rectángulo**



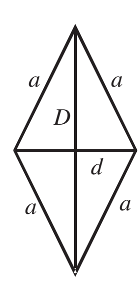

Perímetro: $P = 2\ (a + b)$
Área: $A = ab$

**Paralelogramo**




Perímetro: $P = 2\ (b + c)$
Área: $A = hc$

**Rombo**




Perímetro: $P = 4a$

Área: $A = \frac{Dd}{2}$

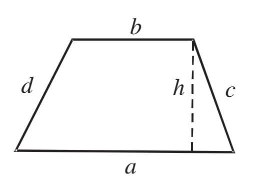
Donde:

$d$ = Diagonal menor

$D$ = Diagonal mayor

$a$ = Lado del rombo

**Trapecio**




Perímetro:

$$P = a + b + c + d$$

Área:

$$A = \frac{(a+b)\ h}{2}$$

Donde:

$a, b, c, d$ = Lados del trapecio

$a$ = Base mayor

$b$ = Base menor

$h$ = Altura

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el perímetro y el área de un rectángulo de lados 4 y 2 *cm*, respectivamente.

**Solución**

Al sustituir los valores respectivos en las fórmulas del rectángulo, se obtiene:

Perímetro

$$P = 2a + 2b = 2(2\ cm) + 2(4\ cm) = 4\ cm + 8\ cm = 12\ cm$$

Área

$$A = ab = (2\ cm)\ (4\ cm) = 8\ cm^2$$

2 Encuentra el área de un paralelogramo que mide 6 *cm* de base y 2.5 *cm* de altura.

**Solución**

Se sustituyen los valores de $c = 6\ cm$ y $h = 2.5\ cm$, entonces:

Área

$$A = ch = (6\ cm)(2.5\ cm) = 15\ cm^2$$

3 Encuentra el área de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 8 *cm*.

**Solución**

Al sustituir en el área de un rombo en término de sus diagonales se determina que:

$$A = \frac{Dd}{2} = \frac{(12)(8)}{2} = \frac{96}{2} = 48\ cm^2$$

En consecuencia, el área del rombo mide: 48 $cm^2$

4 El perímetro de un trapecio isósceles es de 32 *cm*, si los lados iguales miden 5 *cm* y la altura 3 *cm*, determina su área.

**Solución**

Sea $a$ la base mayor y $b$ la menor, $P$ el perímetro y $c$ la longitud de los lados iguales del trapecio, entonces:

$$P = a + b + 2c$$

Al despejar $a + b$, se tiene:

$$a + b = P - 2c \qquad a + b = 32 - 2(5) = 32 - 10 = 22$$

Luego, el área de un trapecio se define como:

$$\text{A} = \frac{(a+b)h}{2}$$

Al sustituir $a + b = 22$ y $h = 3$, resulta que:

$$\text{A} = \frac{(22)(3)}{2} = \frac{66}{2} = 33\ cm^2$$

Por consiguiente, el área del trapecio es: 33 $cm^2$

## Polígonos regulares

**Perímetro.** El perímetro se define como el producto del número de lados por la medida de cada lado del polígono.

**Área.** Es el semiproducto del perímetro por la apotema.

**Apotema.** Es la longitud del segmento que une el centro del polígono y el punto medio de uno de los lados.

Perímetro: $P = nb$

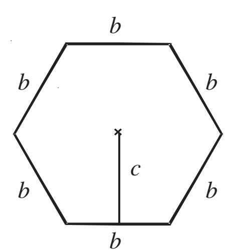
Área: $A = \dfrac{Pc}{2}$

Donde:

$n$ = Número de lados del polígono

$b$ = Lado del polígono

$c$ = Apotema




EJEMPLOS

1 Determina el perímetro y el área de un pentágono regular de lado 4 $cm$ y apotema 2.7 $cm$.

**Solución**

En un pentágono el número de lados es 5, entonces el perímetro es:

$$P = 5(4) = 20\ cm$$

Para hallar el área se aplica la fórmula:

$$A = \frac{Pc}{2} = \frac{(20)(2.7)}{2} = \frac{54}{2} = 27\ cm^2$$

Por tanto, el perímetro y el área son: 20 $cm$ y 27 $cm^2$, respectivamente.

2 Determina el área de un octágono regular, si uno de sus lados mide 3 $cm$ y el segmento que une un vértice con el centro del octágono mide 4 $cm$.

**Solución**

La apotema $c$ es el segmento perpendicular a uno de los lados en su punto medio, esto genera un triángulo rectángulo, en consecuencia:

$(4)^2 = (1.5)^2 + c^2$ $\quad 16 = 2.25 + c^2$ $\quad c = \sqrt{13.75}$

$c = 3.7$

3

4

c

Luego, el área del octágono regular es:

$$A = \frac{8(3)(3.7)}{2} = \frac{88.8}{2} = 44.4\ cm^2$$

Por consiguiente, el área mide 44.4 $cm^2$

## Circunferencia y círculo

**Longitud de la circunferencia.** Es el perímetro de un círculo y se define como el doble producto de su radio por π o el producto del diámetro por π.

**Cálculo del círculo.** Es el área o superficie limitada por la circunferencia y se denomina como el producto de π por el radio al cuadrado.

**Perímetro**

$P = 2\pi\, r = D\pi$

**Área**

$A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$

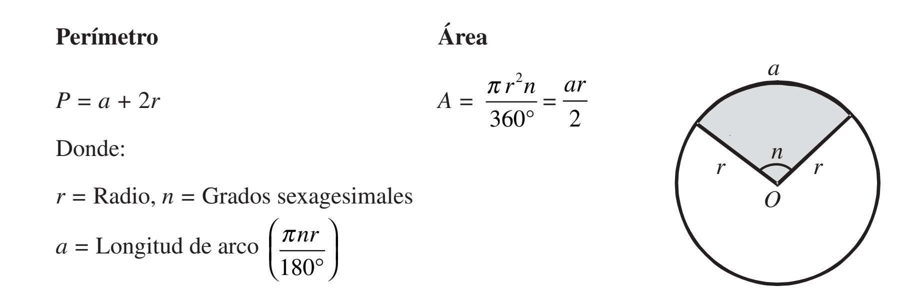
Donde:

$r$ = Radio, $D$ = Diámetro y $\pi = 3.14159\ldots$

## Sector y segmento circular

**Perímetro de un sector circular.** Se nombra así a la suma de los radios y el arco que subtienden.

**Área de un sector circular.** Se define como el producto del área del círculo por la fracción $\frac{n}{360°}$, donde $n$ es el ángulo que forman los radios del sector circular.




**Perímetro**

$P = a + 2r$

Donde:

$r$ = Radio, $n$ = Grados sexagesimales

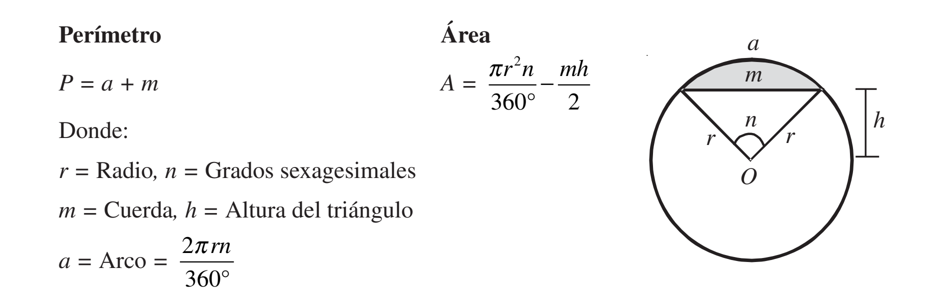
$a$ = Longitud de arco $\left(\frac{\pi n r}{180°}\right)$

**Área**

$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} = \frac{ar}{2}$

**Perímetro de un segmento circular.** Se denomina así a la suma de la cuerda y el arco que subtienden los radios.

**Área de un segmento circular.** Es igual a la diferencia del sector circular correspondiente, menos el área del triángulo que forman los radios y la cuerda que subtienden.




**Perímetro**

$P = a + m$

Donde:

$r$ = Radio, $n$ = Grados sexagesimales

$m$ = Cuerda, $h$ = Altura del triángulo

$a = \text{Arco} = \frac{2\pi r n}{360°}$

**Área**

$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} - \frac{mh}{2}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud de la circunferencia, cuyo diámetro mide 4 *cm*.

**Solución**

La longitud se define como: $P = 2\pi\, r = \pi\, D$, sustituyendo $D = 4$ *cm*, se obtiene:

$$P = \pi\,(4\ cm) = 4\,\pi\ cm.$$

2 Encuentra el área del círculo de radio $r = 12$ *cm*.

**Solución**

El área de un círculo está dada por: $A = \pi\, r^2$, se sustituye $r = 12$ y se obtiene:

$$A = \pi\, r^2 = (\pi)\,(12\ cm)^2 = 144\pi\ cm^2$$

Este resultado está en términos de $\pi$; sin embargo, se puede sustituir su valor y el resultado será equivalente:

$$A = 144(3.1415)\ cm^2 = 452.37\ cm^2$$

3 Determina el área del sector circular que forman 2 radios si el ángulo que forman es de 60° y miden 4 *cm*.

**Solución**

En este caso $n = 60°$ y $r = 4$ *cm*, al sustituir en la fórmula del sector circular resulta que:

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} = \frac{\pi(4)^2(60°)}{360°} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3} cm^2$$

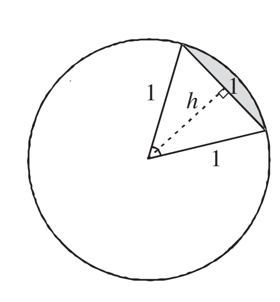
En consecuencia, el área del sector circular es $\frac{8\pi}{3}\ cm^2$

4 Encuentra el área del segmento circular formado por el arco y la cuerda subtendidos por 2 radios con longitud de 1 *cm*, si la cuerda también mide 1 *cm*.

**Solución**

De acuerdo con la figura, se forma un triángulo equilátero, esto significa que el ángulo formado por los radios mide 60°, luego, la altura del triángulo es:

$$h = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



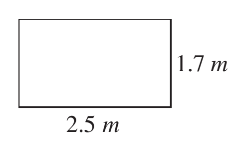

Ahora el área del segmento circular resulta así:

$$A = \frac{\pi(1)^2\, 60°}{360°} - \frac{1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) cm^2$$

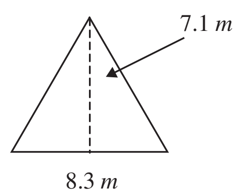
# EJERCICIO 31

Calcula el perímetro y la superficie de las siguientes figuras:

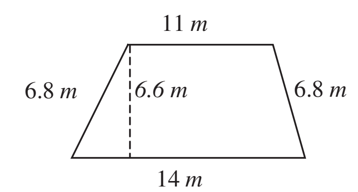
1. Rectángulo



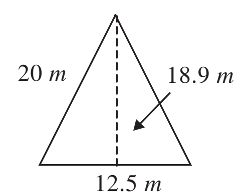

2. Triángulo equilátero



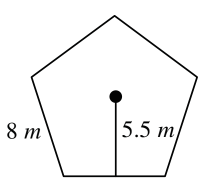

3. Trapecio isósceles



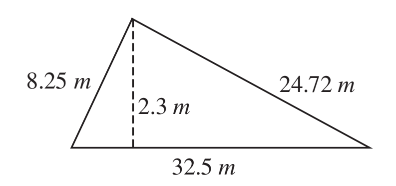

4. Triángulo isósceles



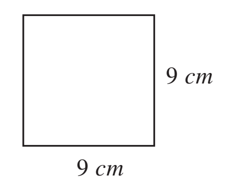

5. Pentágono regular



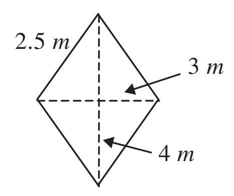

6. Triángulo escaleno




7. Cuadrado




8. Rombo




Determina las superficies de:

9. Rectángulo de 10 y 15 *m*.
10. Paralelogramo de base $(x - 1)$ *m* y altura $(x - 2)$ *m*.
11. Triángulo de base 14 *dm* y altura 9 *dm*.
12. Trapecio de bases 6 y 4 *dm* y altura de 3.5 *dm*.
13. Círculo de radio 30 *cm*.
14. Círculo de diámetro 18 *cm*.

Resuelve los siguientes problemas:

15. Encuentra el área de un cuadrado si el radio del círculo inscrito es de 10 *cm*.

16. Por impermeabilizar el techo de una casa rectangular de 12.5 por 15 *m* se pagaron $500. ¿Cuál es el precio por metro cuadrado?

17. Se quiere pintar una habitación que mide 10 metros de frente por 7 de fondo y 2.5 de alto, dicha habitación tiene 4 ventanas de 1 *m* de alto por 1.8 *m* de largo. ¿Cuál será el importe si se pagan $5 por $m^2$? Considera la pintura para el techo y una puerta de 1.5 $m \times 1.8$ *m*.

18. Precisa la base y la altura del triángulo que tiene 486 $m^2$ de área, si la base es los $\frac{3}{4}$ de la altura.

19. Un trapecio tiene 400 $m^2$ de área, los lados paralelos tienen 35 y 45 *m*. ¿Cuál es el valor de la altura?

20. ¿Cuántos círculos enteros de 4 *cm* de radio se pueden cortar de una hoja de lata de 80 *cm* de largo por 65 *cm* de ancho y cuál es el área total de ellos?

21. Encuentra el área del triángulo que tiene como longitud de sus lados:

    *a)* $a = 13$ , $b = 9$ , $c = 10$ *b)* $a = 7$ , $b = 16$ , $c = 11$ *c)* $a = 8$ , $b = 5$ , $c = 12$

22. El área de un paralelogramo está dada por la expresión $(x^2 + 17)$ $m^2$, la base es igual a $(x + 5)$ *m*, y su altura es igual a $(x - 2)$ *m*. Determina el valor de *x* y el área de este cuadrilátero.

23. Encuentra el área del sector circular si:

    *a)* el radio mide 4 *cm* y el ángulo central es de 45°
    *b)* el radio mide 1 *cm* y el ángulo central es de 60°
    *c)* el diámetro mide 6 *cm* y el ángulo central es de 90°
    *d)* el diámetro mide 8 *cm* y el ángulo central es de 240°

24. Determina el área del segmento circular si:

    *a)* el radio del círculo es 2 *cm* y el ángulo central es de 90°
    *b)* el radio del círculo y la cuerda correspondiente al segmento circular miden 3 *cm*
    *c)* el radio del círculo mide 8 *cm* y la cuerda correspondiente al segmento mide $8\sqrt{2}$ *cm*

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Área de figuras combinadas

Se obtienen las áreas por separado de cada una de las figuras, y se realizan las operaciones necesarias para hallar el área que se pide.

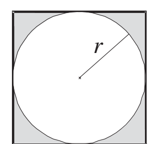
**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Se inscribe una circunferencia de radio *r* en un cuadrado, determina el área que existe entre las 2 figuras.

**Solución**

El área sombreada se obtiene al restar al área del cuadrado el área del círculo, entonces:




$$A_s = (2r)^2 - (\pi r^2) = 4r^2 - \pi r^2 = r^2\,(4 - \pi)$$

Por tanto, el área sombreada es $A_s = r^2\,(4 - \pi)$

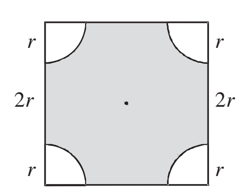
2 En cada una de las esquinas de un cuadrado de lado 4 $r$, se tienen cuartos de circunferencia de radio $r$ con centro en cada uno de los vértices del cuadrado, determina el área entre el cuadrado y los cuartos de circunferencia.

**Solución**

El área sombreada ($As$) se obtiene mediante la resta del área del cuadrado ($A_1$), menos el área de los cuatro cuartos del círculo ($A_2$), por tanto:

$$A_s = A_1 - A_2$$

Donde,

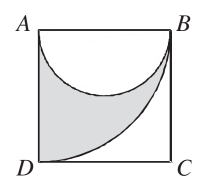



$$A_1 = (4r)^2 = 16r^2 \quad \text{y} \quad A_2 = 4\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) = \pi r^2$$

Por consiguiente, el área sombreada es:

$$A_s = 16r^2 - \pi r^2 = r^2(16 - \pi)$$

3 Determina el perímetro de la figura sombreada si el área del cuadrado $ABCD$ es 1 $cm^2$




**Solución**

El perímetro de la figura sombreada se define como:

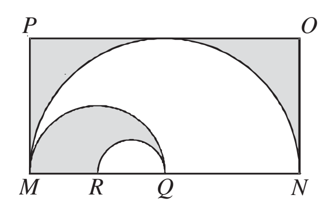
$$P = \overline{AD} + \widehat{AB} + \widehat{BD}$$

Pero $\widehat{AB} = \frac{1}{2}(2\pi)\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right) = \pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$ y $\widehat{BD} = \frac{1}{4}(2\pi)\left(\overline{AB}\right) = \frac{1}{2}\pi(1) = \frac{1}{2}\pi$

En consecuencia, el perímetro es:

$$P = 1 + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = (1 + \pi)\ cm$$

4 Calcula el área y perímetro de la región sombreada si $\overline{ON} = 6\ cm$, $\overline{MN} = 12\ cm$, $Q$ es el punto medio de $\overline{MN}$ y $R$ es el punto medio de $\overline{MQ}$.




**Solución**

El área sombreada ($A_s$) se obtiene de la siguiente manera:

$$A_s = \text{Rectángulo } MNOP - \text{Semicirc. en } MN + \text{Semicirc. en } MQ - \text{Semicirc. en } RQ$$

Siendo:

Semicircunferencia con diámetro en $MN = \frac{1}{2}\pi(6)^2$

Semicircunferencia con diámetro en $MQ = \frac{1}{2}\pi(3)^2$

Semicircunferencia con diámetro en $RQ = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Si se sustituye en $A_s$, se tiene que:

$$A_s = (12)(6) - \frac{1}{2}\pi(6)^2 + \frac{1}{2}\pi(3)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 72 - 18\pi + \frac{9}{2}\pi - \frac{9}{8}\pi = \left(72 - \frac{117}{8}\pi\right)cm^2$$

Luego, el perímetro de la figura sombreada es:

$$P = \overline{MP} + \overline{PO} + \overline{ON} + \widehat{NM} + \widehat{MQ} + \widehat{QR} + \overline{RM}$$

Si sustituyes los valores de los segmentos y de las semicircunferencias resulta que:

$$P = 6 + 12 + 6 + \pi(6) + \pi(3) + \pi\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \left(27 + \frac{21}{2}\pi\right)cm.$$

Por tanto, el área y perímetro de la figura sombreada son: $\left(72 - \frac{117}{8}\pi\right)cm^2$ y $\left(27 + \frac{21}{2}\pi\right)cm$, respectivamente.

## EJERCICIO 32

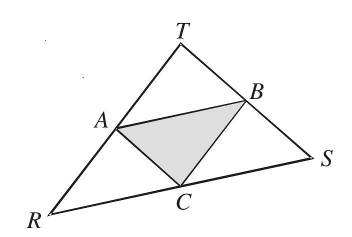
Resuelve los siguientes ejercicios:

1. De la figura, $A$, $B$, $C$ son los puntos medios de los lados del $\Delta\, RST$.

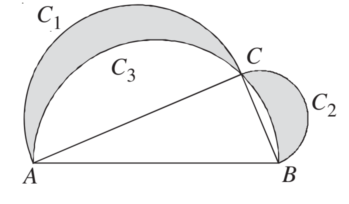
   Determina:

   *a)* $\overline{TS}$ si $\overline{AC} = 12\ cm$ , *b)* $\overline{BC}$ si $\overline{RT} = 26\ cm$

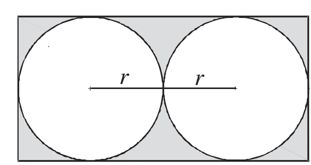
   *c)* Área y perímetro del $\Delta\, ABC$ si $\overline{RT} = 42\ cm$, $\overline{RS} = 30\ cm$ y $\overline{ST} = 16\ cm$



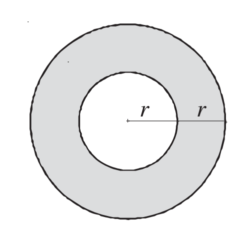

2. Encuentra el área sombreada de la siguiente figura: los centros de $C_1$ y $C_2$ son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, $\overline{AB}$ es diámetro de $C_3$ y tiene una longitud de 25 $cm$, el lado $\overline{AC} = 24\ cm$.



3. Se inscriben 2 circunferencias de radio $r$ en un rectángulo, determina el área sombreada.

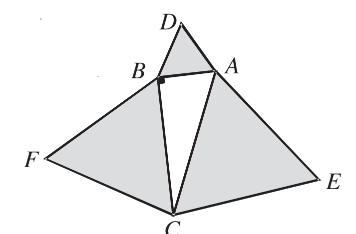



4. Se tienen 2 círculos concéntricos, determina el área del anillo circular si el radio de uno de ellos es el doble del otro.

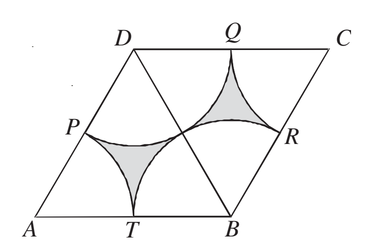


5. Si el $\Delta$ *ABC* es rectángulo y los $\Delta$ *AEC*, $\Delta$ *BDA*, $\Delta$ *CFB* son equiláteros, demuestra que:

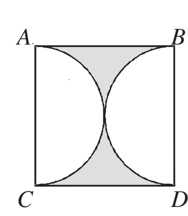
$$A_{\Delta BDA} + A_{\Delta CFB} = A_{\Delta AEC}$$



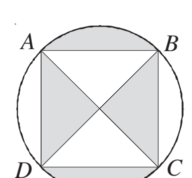

6. Los triángulos *ABD* y *BCD* son equiláteros de lado 10 *cm*; *Q*, *R*, *S* y *T* son los puntos medios de los lados de los triángulos. Determina el área sombreada.



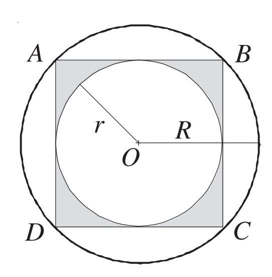

7. En un cuadrado *ABCD* de lado 10 *cm* se inscriben 2 semicircunferencias, como se muestra en la figura. Encuentra el área sombreada.



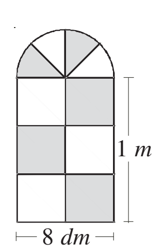

8. Se inscribe un cuadrado de lado 20 *dm* en una circunferencia. Determina el área sombreada que se muestra en la figura.



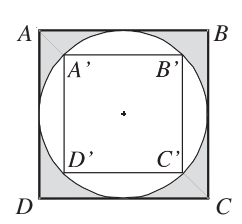

9. La figura *ABCD* es un cuadrado y $r = \frac{2}{3}R$. Determina el área sombreada si $R = 12$ *mm*.



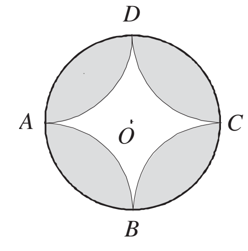

10. Calcula la cantidad de vitral opaco que se necesita en la siguiente ventana de tipo bizantino.



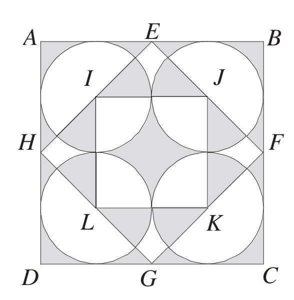
11. Si la figura *ABCD* es un cuadrado y el área *A'B'C'D'* tiene 392 $cm^2$, determina el área sombreada.



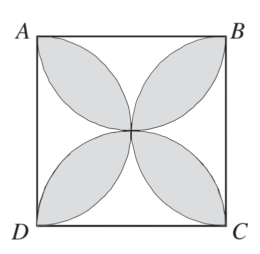

12. Precisa el área y el perímetro de la zona sombreada si $\overline{OC} = 24$ *mm* y los arcos $\widehat{AD}, \widehat{AB}, \widehat{BC}$ y $\widehat{CD}$ son cuartos de circunferencia.



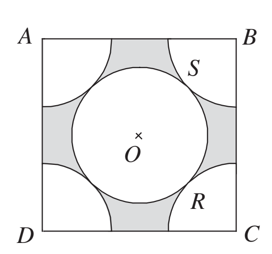

13. Encuentra el área sombreada si la figura *ABCD* es un cuadrado de lado 16 *mm*, los puntos *E*, *F*, *G*, *H* son puntos medios del cuadrado *ABCD*, y los puntos *I*, *J*, *K*, *L* son puntos medios del cuadrado *HEFG*.




14. Halla el área de la zona sombreada si la figura *ABCD* es un cuadrado de lado 16 *mm*, y *AB*, *BC*, *CD* y *DA* son semicircunferencias.



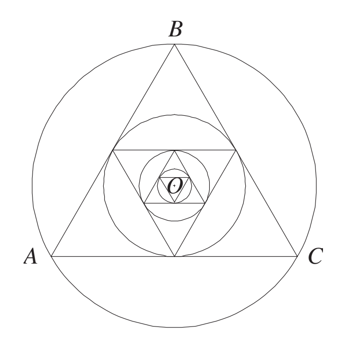

15. La figura *ABCD* es un cuadrado de lado 32 *cm*, *R* y *S* son puntos medios de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ respectivamente, y las figuras de las esquinas del cuadrado son cuartos de circunferencia. Determina el área sombreada.



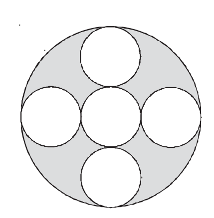
16. Si el triángulo $ABC$ es equilátero y $\overline{OA} = 16\ dm$:

*a)* Calcula el área del triángulo más pequeño.

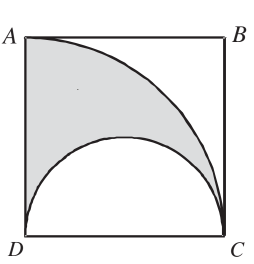
*b)* Calcula la suma de todas las superficies de los triángulos si la figura se proyecta infinitamente.



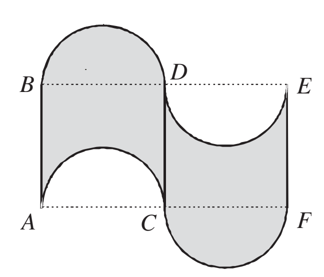

17. Determina el área de la zona sombreada en la siguiente figura si el diámetro del círculo mayor mide 18 *cm.*



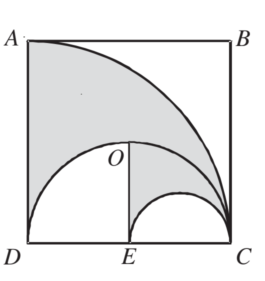
18. Encuentra el área de la zona sombreada si $\overline{AC} = \sqrt{2}cm$ y $ABCD$ es un cuadrado.




19. Determina el área y perímetro de la zona sombreada en la siguiente figura, si $ABDC$ y $DCFE$ son cuadrados de lado 1 *cm.*




20. Precisa el área y perímetro de la zona sombreada en la siguiente figura, si $ABCD$ es un cuadrado de lado 4 *cm* y $E$ es el punto medio de $\overline{CD}$.

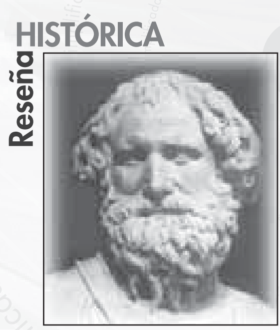



**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 10

## CUERPOS GEOMÉTRICOS, ÁREAS Y VOLÚMENES

**Reseña HISTÓRICA**



Arquímedes
(287 – 212 *a. C.*)

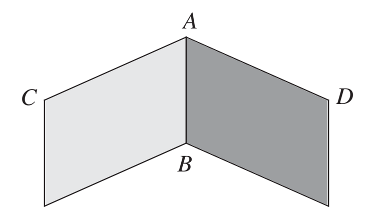
"Dadme un punto de apoyo y moveré al mundo"

Matemático y geómetra griego, a quien se considera el mayor científico y matemático de la Antigüedad, entre sus legados destacan: el principio de Arquímedes, sus aportes a la cuadratura del círculo, el estudio de la palanca, el tornillo de Arquímedes, la espiral de Arquímedes y la relación aproximada que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, lo que dio origen al número $\pi$ (pi).

Con sus estudios sobre áreas y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas se anticipó al descubrimiento del cálculo integral. Demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe.

## Ángulo diedro

Es el espacio que limitan dos semiplanos (caras) que tienen una recta en común (arista).

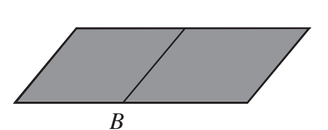



$\overline{AB}$ : Arista
*CAB, DAB*: Caras

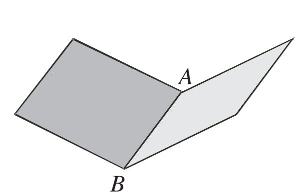
### Clasificación

Un diedro es agudo, recto, obtuso o llano, según la medida del ángulo rectilíneo correspondiente.

**Diedro llano.** Se forma por dos semiplanos opuestos.

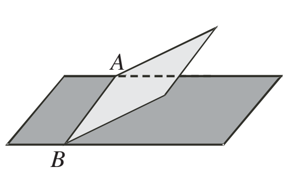



**Diedro cóncavo.** Es aquel cuya medida es mayor que un diedro llano.



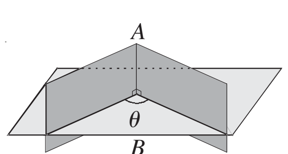

**Diedro convexo.** Su medida es menor que un diedro llano.

**Diedros adyacentes.** Son aquellos cuya suma es igual a un diedro llano.



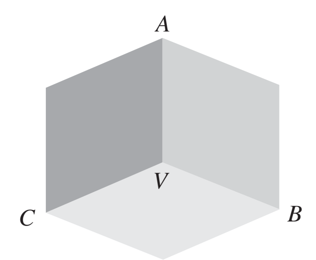

**Rectilíneo correspondiente a un diedro.** Es el ángulo plano $\theta$ formado por lados perpendiculares a la arista sobre las caras y es igual al ángulo diedro.

Se traza un plano perpendicular a la arista del diedro y se obtiene en la intersección el rectilíneo correspondiente.




## Ángulo triedro

Es el espacio que comprenden tres planos, los cuales se cortan dos a dos y tienen un punto en común.

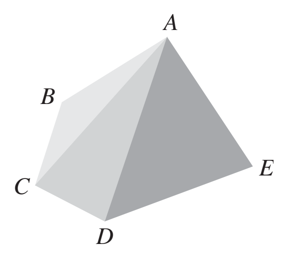



*V:* Vértice
$\overline{AV}$, $\overline{CV}$ y $\overline{BV}$: Arista
*AVC, AVB* y *BVC:* Caras

## Clasificación

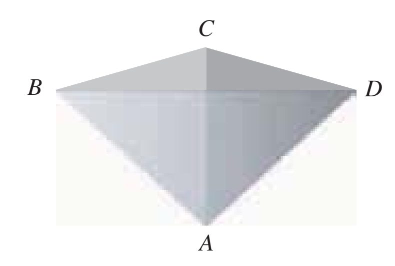
**Triedros escalenos.** Si las caras son desiguales.

$$BAC \neq CAD \neq ADE$$



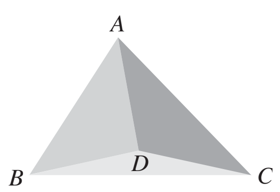

**Triedros isósceles.** Si dos caras son iguales y una desigual.

$$ABC = ACD \neq ABD$$




**Triedros equiláteros.** Si las caras son iguales.

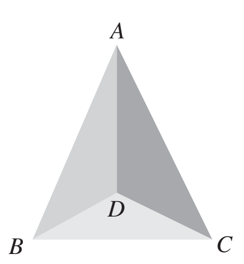
$$ADB = BDC = CDA$$




**Triedros trirrectángulos.** Si sus diedros y caras son rectos.

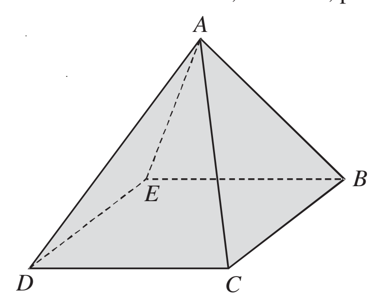
$$ADB \perp ADC,\ BDA \perp BDC,\ BDC \perp CDA$$

$$\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 90°$$



## Ángulo poliedro

Es el ángulo que forman tres o más planos que concurren en un punto llamado vértice del poliedro. De acuerdo con el número de caras, recibe el nombre de triedro, tetraedro, pentaedro, etcétera.




*A:* Vértice del poliedro

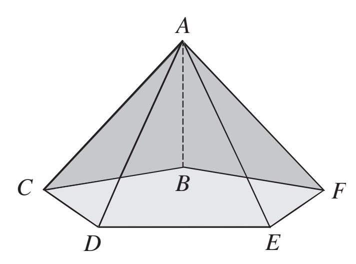
$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$: Aristas

*AED*, *ADC*, *ACB*, *ABE*: Caras

### Clasificación

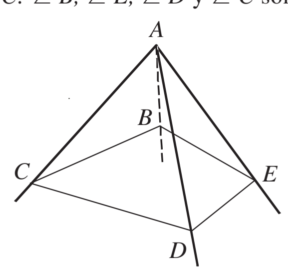
**Ángulo poliedro regular.** Si todos los diedros y todas las caras son iguales entre sí.

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF = \angle FAB$$



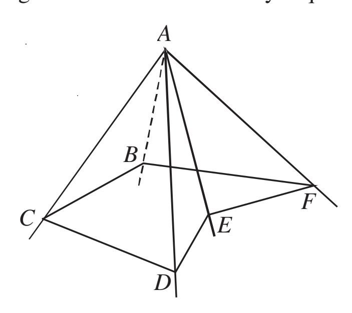

**Ángulo poliedro cóncavo.** Si al cortar sus caras con un plano determina un polígono cóncavo.

En el cuadrilátero *BEDC:* $\angle B$, $\angle E$, $\angle D$ y $\angle C$ son menores que 180°



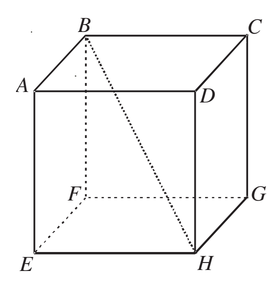

**Ángulo poliedro convexo.** Si al cortar sus caras mediante un plano determina un polígono convexo.

En el polígono *BCDEF:* $\angle E$ es mayor que 180°



# Poliedro

Es un cuerpo geométrico al que limitan polígonos.




## Elementos

**Cara.** Cada uno de los polígonos que lo limitan.

El cuadrado *ABCD* es una cara del poliedro.

**Arista.** Las intersecciones de las caras del poliedro.

El segmento $\overline{AE}$ es una arista.

**Vértice.** Los puntos donde concurren las aristas de un poliedro.

El punto *D* es un vértice.

**Ángulo diedro.** Se forman con las caras que tienen un arista en común.

Lo forman las caras *ADHE* y *CDHG*.

**Ángulo poliedro.** Se forman por tres o más caras que tienen un vértice en común.

Lo forman las caras *ADHE*, *CDHG* y *ABCD*.

**Diagonal.** Recta que une dos vértices que no pertenecen a una misma cara.

La recta $\overleftrightarrow{BH}$ es una diagonal del poliedro.

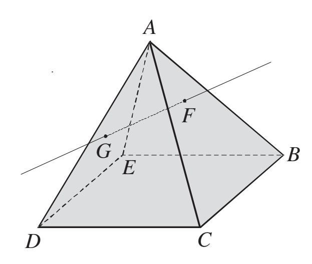
**Superficie.** Es el conjunto de todas las caras y se le denomina área del poliedro, ésta se obtiene mediante la suma de las áreas de las caras.

**Volumen.** Es la región de espacio que limita el área del poliedro.

## Clasificación

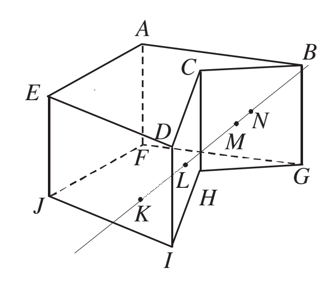
**Poliedros cóncavos.** Si una recta cualquiera cruza en dos puntos a sus caras.

*G* y *F* son los puntos de cruce.



**Poliedros convexos.** Si existe una recta que cruce en más de dos puntos a sus caras.

*K*, *L*, *M* y *N* son los puntos de cruce.

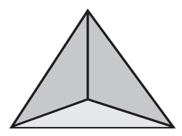



## Poliedros regulares

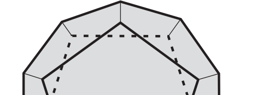
Son aquellos limitados por polígonos regulares iguales, sus ángulos poliedros son iguales y sus ángulos diedros iguales.

### Clasificación

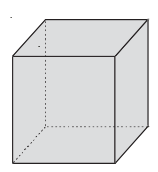
**Tetraedro.** Sus caras son cuatro triángulos equiláteros.



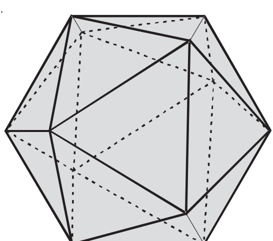
**Dodecaedro.** Sus caras son doce pentágonos regulares.



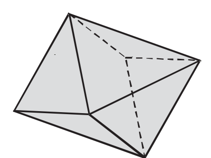
**Hexaedro o cubo.** Sus caras son seis cuadrados.



**Icosaedro.** Sus caras son veinte triángulos equiláteros.

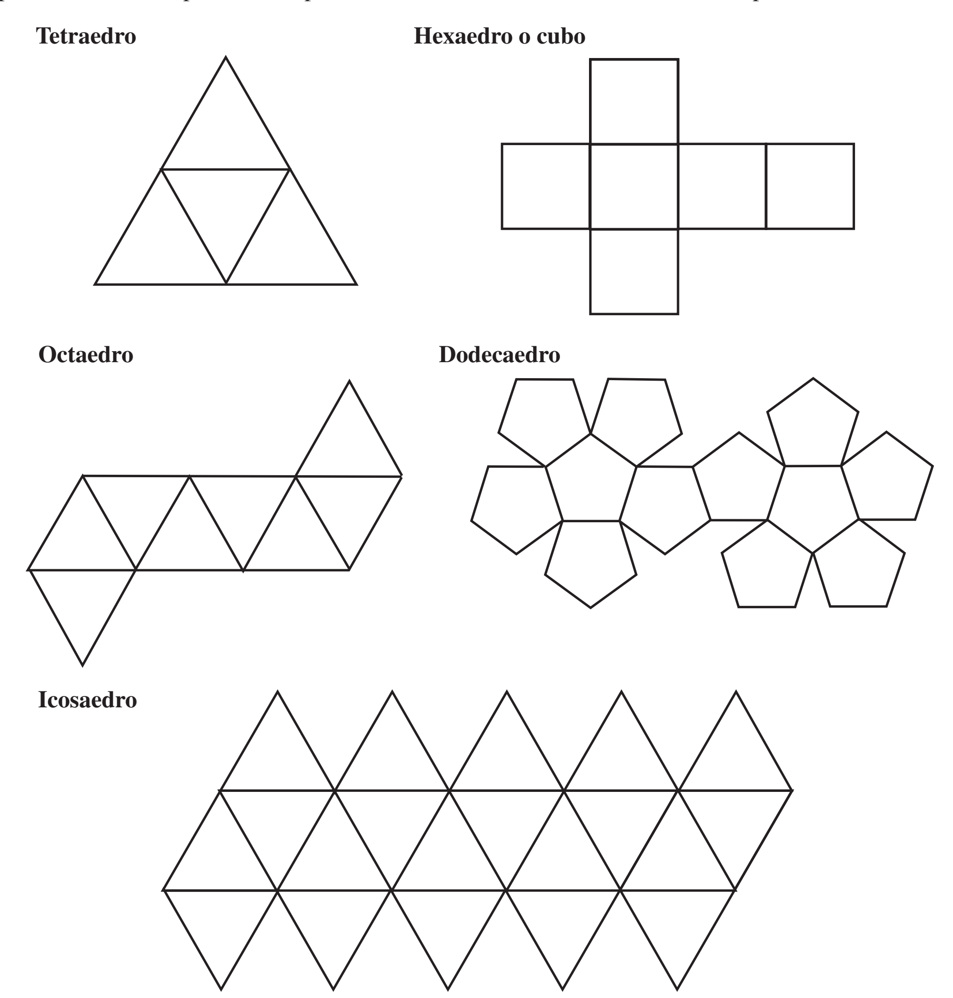


**Octaedro.** Sus caras son ocho triángulos equiláteros.



## Desarrollo

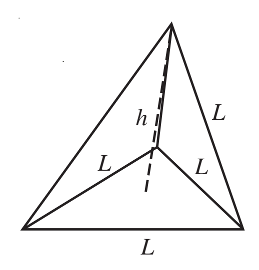
Es la representación en un plano de los poliedros, en la cual se tienen sus caras unidas por las aristas.




## Área y volumen de un poliedro regular

**Tetraedro.** Es el poliedro que forman cuatro caras triangulares iguales.

- **Área total:** cuatro veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** un tercio del área de una de las caras por la altura del cuerpo.




Área total en función de $L$

$$At = \sqrt{3}\, L^2$$

Volumen total en función de $L$

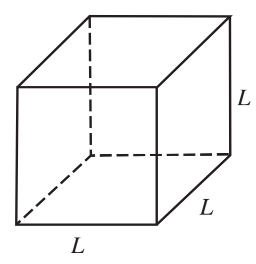
$$Vt = \frac{\sqrt{3}}{12} L^2 h = \frac{\sqrt{2}}{12} L^3$$

Donde,

$L$ = Longitud de la cara
$h$ = Altura del cuerpo

**Hexaedro o cubo.** Es el poliedro que forman seis caras cuadradas iguales.

- **Área total:** seis veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** cubo de su arista (se le denomina arista a la longitud de uno de los lados de una de las caras).




Área total

$$At = 6L^2$$

Volumen total

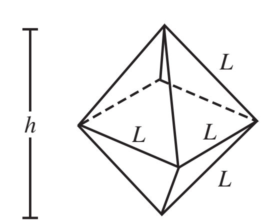
$$Vt = L^3$$

Donde,

$L$ = Longitud de la cara

**Octaedro.** Es el poliedro que forman ocho caras triangulares iguales.

- **Área total:** ocho veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** un tercio del cuadrado de la arista por la altura total del cuerpo.




Área total en función de $L$

$$At = 2\sqrt{3}\,L^2$$

Volumen total en función de $L$

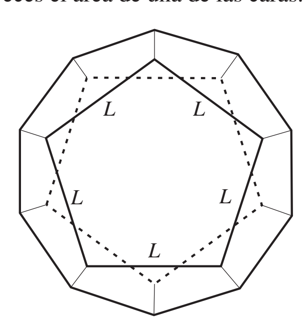
$$Vt = \frac{1}{3}L^2h = \frac{\sqrt{2}}{3}L^3$$

Donde,

$L$ = Longitud de la cara
$h$ = Altura total del cuerpo

**Dodecaedro.** Es el poliedro que forman 12 caras pentagonales iguales.

- **Área total:** doce veces el área de una de las caras.




Área total en función de $L$

$$At = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdot L^2$$

Volumen total en función de $L$

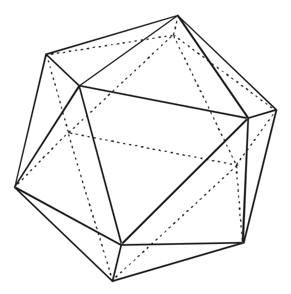
$$Vt = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}L^3$$

Donde,

$L$ = Longitud de la cara

**Icosaedro.** Es el poliedro que forman 20 caras triangulares iguales.

- **Área total:** veinte veces el área de una de las caras.



Área total en función de $L$

$$At = 5\sqrt{3}\cdot L^2$$

Volumen total en función de $L$

$$Vt = \frac{\left(15+5\sqrt{5}\right)}{12}L^3$$

Donde,

$L$ = Longitud de la cara

EJEMPLOS

1 Determina el área total y el volumen de un tetraedro con arista de 3 *cm*.

**Solución**

En este caso $L = 3\ cm$ y al sustituir en las fórmulas de área total y volumen se obtiene:

$$\text{Área total} = \sqrt{3}L^2 = \sqrt{3}(3\ cm)^2 = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{\sqrt{2}}{12}L^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}(3\ cm)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}(27\ cm^3) = \frac{9\sqrt{2}}{4}\ cm^3$$

2 Si el volumen de un hexaedro es de 128 $cm^3$, determina la arista y su área total.

**Solución**

El volumen de un hexaedro se define como: $V = L^3$, al sustituir $V$ y despejar $L$, se obtiene:

$$(128\ cm^3) = L^3 \qquad \rightarrow \qquad L = \sqrt{128\ cm^3} = 4\sqrt{2}\ cm$$

Entonces, la arista del hexaedro es $4\sqrt{2}\ cm$ y el área total es:

$$A = 6L^2 = 6(4\sqrt{2}\ cm)^2 = 6(32\ cm^2) = 192\ cm^2$$

Por tanto, el área total es 192 $cm^2$.

3 El área total de un octaedro es $54\sqrt{3}\ cm^2$. Determina su volumen.

**Solución**

El área total de un octaedro se define como: $A = 2\sqrt{3}\ L^2$, al sustituir en $A$ y despejar $L$ se tiene:

$$54\sqrt{3}\ cm^2 = 2\sqrt{3}\ L^2 \qquad \rightarrow \qquad L = \sqrt{\frac{54\sqrt{3}\ cm^2}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{27\ cm^2} = 3\sqrt{3}\ cm$$

luego, el volumen se define como: $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\ L^3$, sustituyendo $L = 3\sqrt{3}\ cm$, se obtiene:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}(3\sqrt{3}\ cm)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}(27\sqrt{27}\ cm^3) = \frac{\sqrt{2}}{3}(81\sqrt{3}\ cm^3) = 27\sqrt{6}\ cm^3$$

Por tanto, el volumen del octaedro es: $27\sqrt{6}\ cm^3$.

4 Determina la altura de un tetraedro de arista $\sqrt{2}\ cm$ si su volumen es $\frac{1}{3}\ cm^3$.

**Solución**

El volumen de un tetraedro en términos de la arista y la altura es: $V = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2h$, sustituyendo $V$ y $L$, se despeja $h$, entonces:

$$h = \frac{12V}{\sqrt{3}L^2} = \frac{12\left(\frac{1}{3}\ cm^3\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\ cm\right)^2} = \frac{4\ cm^3}{\sqrt{6}\ cm^2} = \frac{4\sqrt{6}}{6}\ cm = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ cm$$

Por consiguiente, la altura del tetraedro es: $\frac{2\sqrt{6}}{3}\ cm.$

# EJERCICIO 33

Determina el área total y el volumen de los siguientes poliedros regulares:

1. Tetraedro de arista 2 *cm*
2. Tetraedro de arista $\sqrt{3}$ *cm*
3. Hexaedro de arista $2\sqrt{3}$ *cm*
4. Cubo de arista $\frac{1}{2}$ *dm*
5. Octaedro de arista 6 *cm*
6. Octaedro de arista $\sqrt{3}$ *cm*
7. Dodecaedro de arista $2\sqrt{5}$ *cm*
8. Dodecaedro de arista 2 *cm*
9. Icosaedro de arista $\sqrt{3}$ *cm*
10. Icosaedro de arista $5\sqrt{2}$ *dm*

Resuelve los siguientes problemas:

11. Determina el área total de un tetraedro, si su altura es $\sqrt{6}$ *cm* y su volumen es $\frac{9}{4}\sqrt{2}$ $cm^3$
12. Determina el volumen de un tetraedro si su área total es $27\sqrt{3}$ $cm^2$
13. Encuentra la altura de un tetraedro si su volumen es $\frac{8}{3}$ $cm^3$
14. Encuentra el volumen de un cubo si su área total es 12 $cm^2$
15. Si el volumen de un cubo es 2 $m^3$, determina su arista y área total.
16. Determina la altura y el área total de un octaedro de volumen $72\sqrt{2}$ $cm^3$
17. La altura de un octaedro es de 2 cm y su área total es $4\sqrt{3}$ $cm^2$, encuentra su volumen.
18. Si la altura de un octaedro es de 6 cm determina su volumen.
19. Si el área total de un icosaedro es $10\sqrt{3}$ $cm^2$, encuentra su volumen.
20. Determina el volumen de un icosaedro de lado $L$ en términos del área total.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

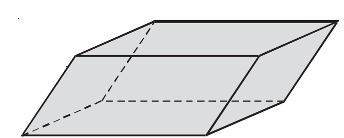
## Prisma

Es un poliedro en que dos de sus caras son polígonos iguales situados en planos paralelos; las caras restantes son paralelogramos.

### Clasificación

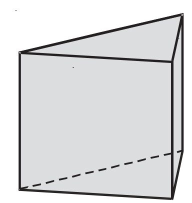
**Rectos.** Si las caras laterales son perpendiculares a las bases.

**Oblicuos.** Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases.

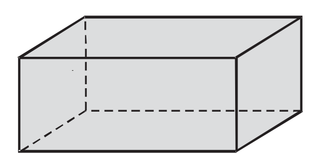


De acuerdo con sus bases, los prismas se clasifican también de acuerdo con el polígono que tienen como base.

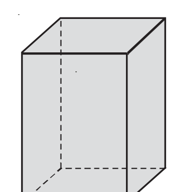
**Prisma triangular.** Sus bases son triángulos.



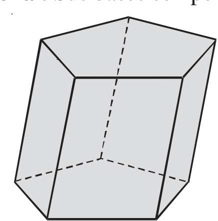
**Prisma rectangular.** Sus bases son rectángulos.



**Prisma cuadrangular.** Sus bases son cuadrados.

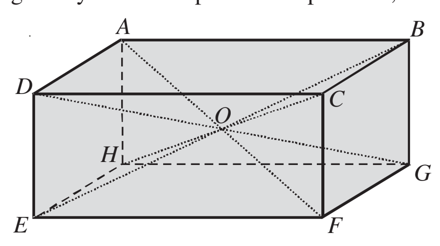


**Prisma pentagonal.** Sus bases son pentágonos.



*Paralelepípedo*

Son prismas cuya base es un paralelogramo y sus caras opuestas son paralelas, también se les conoce como ortoedros.




**Características principales**

1. Las cuatro diagonales de un paralelepípedo son iguales.

$$\overline{AF} = \overline{BE} = \overline{CH} = \overline{DG}$$

2. Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.

$$O \text{ es el punto medio de } \overline{AF}, \overline{BE}, \overline{CH} \text{ y } \overline{DG}$$

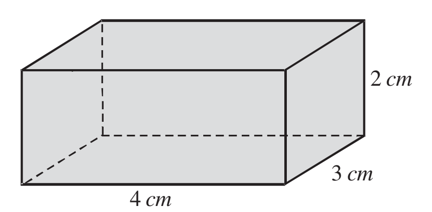
3. El punto de intersección de las diagonales de un paralelepípedo es el centro del mismo.

$$O \text{ es el centro del paralelepípedo}$$

4. La longitud de una diagonal es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las aristas que concurren en un vértice.

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{CF}^2}$$

Determina la longitud de la diagonal de un paralelepípedo si su ancho mide 3 *cm*, el largo 4 *cm* y el alto 2 *cm*.




**Solución**

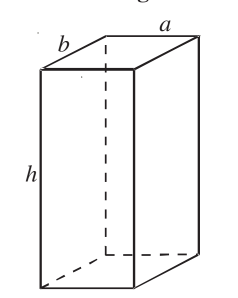
Sea $d$ la diagonal del paralelepípedo, entonces:

$$d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}\ cm$$

## Área y volumen

- **Área lateral de un prisma:** producto del perímetro de la base y la altura.
- **Área total:** suma del área lateral y el área de las dos bases.
- **Volumen de un prisma:** producto del área de la base y la altura del prisma.

**Prisma rectangular**




Área lateral

$A_L = 2(a + b)h$

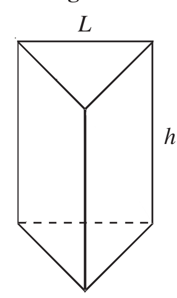
Área total

$A_T = 2(a + b)h + 2ab$

Volumen total

$V_T = abh$

**Prisma triangular**




Área lateral

$A_L = Ph$

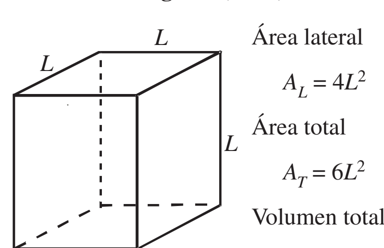
Área total

$A_T = Ph + 2A_B$

Volumen total

$V_T = A_B h$

**Prisma cuadrangular (cubo)**




Área lateral

$A_L = 4L^2$

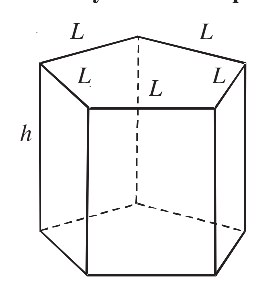
Área total

$A_T = 6L^2$

Volumen total

$V_T = L^3$

**Prisma cuya base es un polígono de *n* lados**




Área lateral

$A_L = Ph$

Área total

$A_T = Ph + 2A_B$

Volumen total

$V_T = A_B h$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina el área lateral, área total y volumen de un prisma triangular de 2 *cm* de lado con altura de 4 *cm*.

**Solución**

El área lateral de un prisma triangular se define: $A_L = Ph$, se determina el perímetro de la base,

$$P = 3(2\ cm) = 6\ cm, \text{ entonces } A_L = (3)(2\ cm)(4\ cm) = 24\ cm^2$$

El área total de un prisma triangular se define: $A_T = Ph + 2A_B$, por lo que se obtiene el área de la base triangular mediante la fórmula de Herón de Alejandría:

$$A_B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{3(3-2)(3-2)(3-2)} = \sqrt{3}\ cm^2$$

Luego el área total es:

$$A_T = Ph + A_B = 24\ cm^2 + \sqrt{3}\ cm^2 = \left(24+\sqrt{3}\right)cm^2$$

El volumen del prisma triangular se define $V_T = A_B h$, entonces:

$$V_T = A_B h = \left(\sqrt{3}\ cm^2\right)\left(4\ cm\right) = 4\sqrt{3}\ cm^3$$

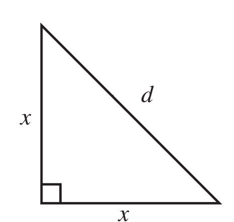
2 Determina el volumen de un prisma cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de área $\frac{25}{2}$ $cm^2$, si el área lateral del prisma es $\left(80+40\sqrt{2}\right)cm^2$.

**Solución**

El área de la base es un triángulo rectángulo isósceles, entonces:

$$A = \frac{1}{2}bh \quad \rightarrow \quad \frac{25}{2}cm^2 = \frac{1}{2}(x)(x) \quad \rightarrow \quad x^2 = 25\ cm^2 \quad \rightarrow \quad x = 5\ cm$$

luego, la hipotenusa ($d$) del triángulo es:




$$d^2 = x^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 2x^2 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{2}x$$

al sustituir $x = 5\ cm$ se obtiene:

$$d = 5\sqrt{2}\ cm$$

El área lateral de un prisma se define como: $A_L = Ph$, si $P = 10 + 5\sqrt{2}$, entonces:

$$h = \frac{A_L}{P} = \frac{80 + 40\sqrt{2}}{10 + 5\sqrt{2}} = \frac{8\left(10 + 5\sqrt{2}\right)}{10 + 5\sqrt{2}} = 8\ cm$$

por tanto, el volumen del prisma es:

$$V_T = A_B\, h = \left(\frac{25}{2}\ cm^2\right)(8\ cm) = 100\ cm^3$$

3 Determina el área total y el volumen de un prisma hexagonal de lado 1 $cm$ y altura 2 $cm$.

**Solución**

Se obtiene el área de la base que es el hexágono

$$A = \frac{1}{2}\ Pa, \text{ donde } a = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego,

$$A = \frac{1}{2}(6\ cm)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cm\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$$

Área total

$$A_T = Ph + 2A_B = (6)(1\ cm)(2\ cm) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2 = \left(12 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)cm^2$$

Volumen

$$V_T = A_B\, h = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}cm^2\right)(2\ cm) = 3\sqrt{3}\ cm^3$$

## EJERCICIO 34

Determina el área lateral, total y volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Prisma rectangular de dimensiones 2, 3 y 5 $cm$.
2. Prisma cuya base es un triángulo equilátero de 4 $cm$ de lado y 6 $cm$ de altura.
3. Prisma cuadrangular si el lado de la base es 1 $cm$ y su altura 4 $cm$.
4. Prisma de base un hexágono regular de lado 2.5 $cm$ y altura 6.5 $cm$.
5. Paralelepípedo de dimensiones $\sqrt{2}$, 4 y $2\sqrt{2}\ cm$.
6. Cubo de lado 2 $cm$.
7. Prisma cuadrangular si el área de la base es 12 $cm^2$ y la altura es 8 $cm$.
8. Prisma cuya base es un octágono regular de lado 10 $cm$ y apotema $(5 + 5\sqrt{2})$ $cm$ si su altura es de 5 $cm$.
9. Prisma hexagonal regular si el perímetro de la base es de 60 $cm$ y la altura es el doble que el lado de la base.

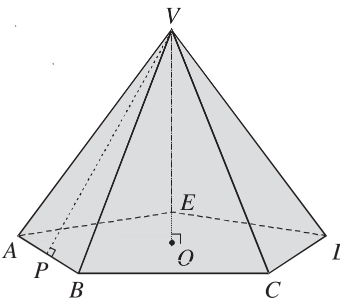
Resuelve los siguientes problemas:

10. Determina el área lateral de un prisma cuadrangular de volumen de 16 $cm^3$, si la altura mide 4 $cm$.
11. Determina el volumen de un cubo cuya diagonal es $3\sqrt{3}$.
12. Encuentra el área lateral de un paralelepípedo si las dimensiones de la base son 8 y 4 $cm$ y una de sus diagonales mide $2\sqrt{21}$ $cm$.
13. Determina el volumen de un prisma cuya base es un triángulo isósceles de lados 2, 2 y 3 $cm$ si la altura del prisma es el doble que la altura de la base.
14. Encuentra el área total de un prisma cuya base es un triángulo equilátero, si la altura excede en 1 $cm$ al lado de la base y el área lateral es de 90 $cm^2$.
15. Encuentra el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de lado 3 $cm$ y área lateral de $18\sqrt{3}$ $cm^2$.
16. Determina el área lateral de un prisma cuyo volumen es de 8 $cm^3$, si su base es un triángulo rectángulo isósceles con área de 2 $cm^2$.
17. El área lateral de un paralelepípedo si el largo de la base es el doble que el ancho, su altura es de 2 $cm$ y su diagonal mide 7 $cm$.
18. Expresa el volumen de un cubo de arista $x$ en términos de su área total y área lateral.
19. De acuerdo con la fórmula anterior encuentra el volumen de un cubo si su área total es de 27 $cm^2$.
20. Expresa el área lateral de un paralelepípedo en términos de su volumen si sus dimensiones son $L$, $2L$ y $\frac{3}{2}L$.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Pirámides

Es el espacio entre un ángulo poliedro y un plano que corta a las aristas del mismo, que recibe el nombre de base, la superficie que lo limita se denomina superficie piramidal y son caras triangulares (caras laterales) terminadas en un vértice en común.

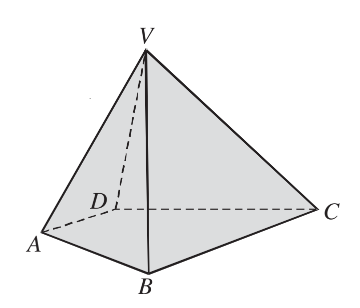



*V:* Vértice
*O:* Centro de la base
$\overline{AV}$: Generatriz
$\overline{OV}$: Altura
$\overline{PV}$: Apotema
*ABCDE:* Base de la pirámide
*AVB*, *BVC*, *CVD*, *DVE* y *EVA*: Caras laterales

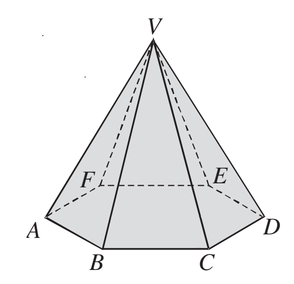
**Pirámide recta.** Es aquella cuyas caras son triángulos isósceles.

En la figura:

$$\overline{AV} = \overline{BV} = \overline{CV} = \overline{DV}$$



**Pirámide regular.** Es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.




En la figura:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$$

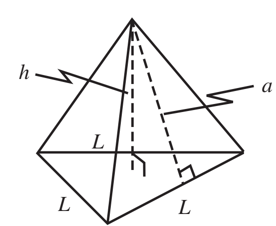
De acuerdo con el número de lados de la base, las pirámides se clasifican en:

1. Pirámide triangular, su base es un triángulo.
2. Pirámide cuadrangular, su base es un cuadrado.
3. Pirámide pentagonal, su base es un pentágono.

## Área y volumen

- **Área lateral:** producto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide (apotema de una pirámide es la altura de los triángulos que forman sus caras).
- **Área total:** suma del área lateral y el área de la base.
- **Volumen de la pirámide:** tercera parte del área de la base por la altura.

*Pirámide regular*




Área lateral

$$A_L = \frac{Pa}{2}$$

Área total

$$A_T = A_L + A_B$$

Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}A_B h$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área total y el volumen de una pirámide cuadrangular con arista de la base de 3 *cm*, apotema de 6 *cm* y altura $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ .

**Solución**

El área total se define como $A_T = A_L + A_B$ , entonces se determina el área lateral así como el área de la base:

Área lateral de la pirámide:

$$A_L = \left(\frac{Pa}{2}\right) = \left(\frac{4\cdot 3\cdot 6}{2}\right) = \frac{72}{2} = 36\ cm^2$$

Área de la base de la pirámide

$$A_B = L^2 = (3\ cm)^2 = 9\ cm^2$$

Por tanto, el área total es:

$$A_T = A_L + A_B = 36\ cm^2 + 9\ cm^2 = 45\ cm^2$$

El volumen se define como: $V_T = \frac{1}{3}A_B h$, sustituyendo $A_B = 9\ cm^2$ y $h = \frac{3}{2}\sqrt{15}\ cm$, se obtiene:

$$V_T = \frac{1}{3}A_B h = \frac{1}{3}(9\ cm^2)\left(\frac{3}{2}\sqrt{15}\ cm\right) = \frac{9}{2}\sqrt{15}\ cm^3$$

2 Determina el área lateral, área total y volumen de una pirámide hexagonal regular, si el lado de la base es de 4 *cm* y la apotema de la pirámide mide 5 *cm*.

**Solución**

El área lateral se define como: $A_L = \frac{Pa}{2}$, siendo $P = 6(4\ cm) = 24\ cm$

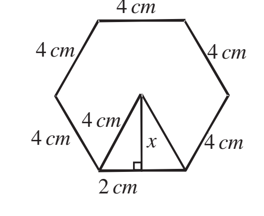
$$A_L = \frac{Pa}{2} = \frac{(24\ cm)(5\ cm)}{2} = \frac{120\ cm^2}{2} = 60\ cm^2$$

El área total se define como: $A_T = \frac{Pa}{2} + A_B$, y para determinarla se debe hallar el área de la base, entonces:

$$A_B = \frac{Px}{2}, \text{ donde } x\text{: apotema del hexágono.}$$

$$x = \sqrt{(4)^2 - (2)^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ cm$$

$$A_B = \frac{6(4\ cm)(2\sqrt{3}\ cm)}{2} = 24\sqrt{3}\ cm^2$$



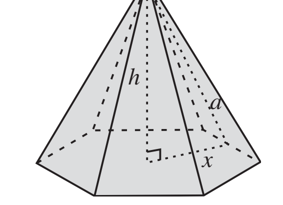

Por tanto, $A_T = 60\ cm^2 + 24\sqrt{3}\ cm^2 = (60 + 24\sqrt{3})\ cm^2$

El volumen se define como: $V_T = \frac{1}{3}A_B h$, de la cual no se conoce la altura, pero la pirámide es regular, esto indica que la altura coincide con el centro del polígono, generando un triángulo rectángulo con las aristas, tanto de la base como de la pirámide, entonces:

$$h = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(5)^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}\ cm$$

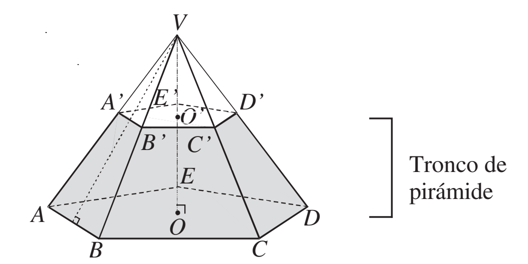
por tanto, el volumen es:

$$V_T = \frac{1}{3}A_B h = \frac{1}{3}(24\sqrt{3}\ cm^2)(\sqrt{13}\ cm) = 8\sqrt{39}\ cm^3$$




*Tronco de pirámide*

Es el poliedro que se obtiene al cortar una pirámide mediante una sección paralela a la base.




**Características principales**

- Si la pirámide inicial es regular, el tronco de pirámide también será regular y se formarán trapecios iguales.

$$ABB'A' = BCC'B' = \ldots = EAA'E'$$

- Las aristas laterales, alturas, apotemas y otras rectas trazadas desde el vértice quedan divididas en segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{BV}}{\overline{B'V}} = \ldots = \frac{\overline{EV}}{\overline{E'V}}$$

➲ Las áreas de la base y la sección paralela son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice.

$$\frac{\text{Área } ABCDE}{\text{Área } A'B'C'D'E'} = \frac{\left(\overline{OV}\right)^2}{\left(\overline{O'V}\right)^2}$$

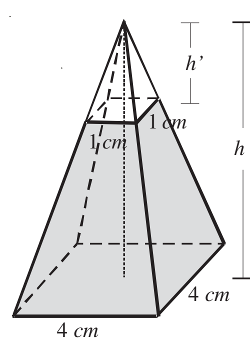
**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Una pirámide cuadrangular con base de 4 *cm* por lado y altura 8 *cm*, se corta mediante una sección paralela de lado de 1 *cm*, determina el volumen del tronco de pirámide que se genera.

**Solución**

Se establece la proporcionalidad entre las áreas de los polígonos y su distancia al vértice, sea *A*' y *A* el área del cuadrado de lado 1 *cm* y 4 *cm* respectivamente, entonces:




$$\frac{A'}{A} = \frac{(h')^2}{(h)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1\ cm^2}{16\ cm^2} = \frac{h'^2}{64\ cm^2}$$

al despejar *h*', se obtiene:

$$h' = \sqrt{\frac{(1\ cm^2)(64\ cm^2)}{16\ cm^2}} = \sqrt{4\ cm^2} = 2\ cm$$

por tanto, el volumen del tronco es la diferencia de volúmenes entre la pirámide mayor (*V*) y la menor (*V*'):

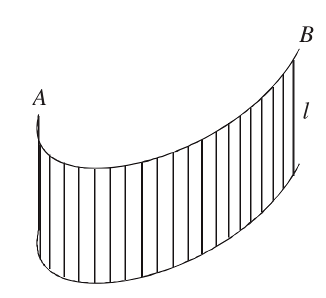
$$V_T = V - V' = \frac{1}{3}(4\ cm)^2(8\ cm) - \frac{1}{3}(1\ cm)^2(2\ cm) = \frac{32}{3}cm^3 - \frac{2}{3}cm^3$$

$$= 10\ cm^3$$

## Cuerpos con superficies no planas

Este tipo de cuerpos se clasifican en:

**Superficie cilíndrica.** La genera una línea recta que se mueve siempre paralela a sí misma sobre una directriz.




$\overline{AB}$: Directriz

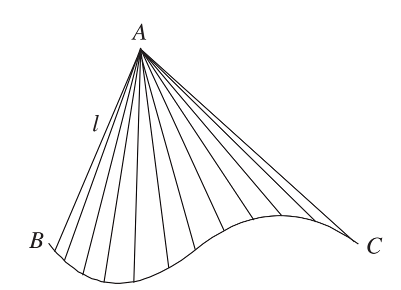
*l* : Generatriz

**Superficie cónica.** La genera una línea recta que se mueve sobre una directriz y pasa por un punto fijo llamado vértice.

*A*: Vértice

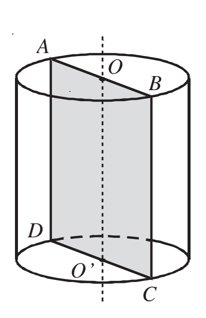
$\overline{BC}$: Directriz

*l* : Generatriz



**Figuras de revolución.** Las genera un plano al girar sobre una recta que pertenece al mismo plano.

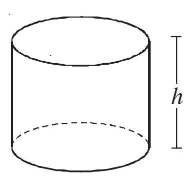
$\overline{OO'}$: Eje de la superficie
$ABCD$: Figura plana



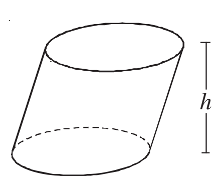

## Cilindro circular

Superficie cilíndrica cerrada que limitan dos círculos iguales y paralelos llamados bases.

**Cilindro circular recto.** Aquel cuyas generatrices son perpendiculares a las bases.




**Cilindro circular oblicuo.** Aquel cuyas generatrices no son perpendiculares a las bases.

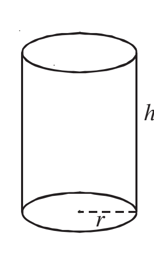



### *Área y volumen de un cilindro circular recto*

**Área lateral:** producto del perímetro de la base y la altura del cilindro.

**Área total:** la suma del área lateral y las áreas de la base y tapa.

**Volumen:** producto del área de la base y la altura.

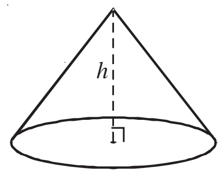



Área lateral
$A_L = 2\pi r h$
Área total
$A_T = 2\pi r (h + r)$
Volumen total
$V_T = \pi r^2 h$

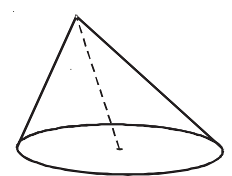
## Cono circular

Es la región del espacio que limita una superficie cónica cerrada y cuya base es un círculo.

**Cono circular recto.** Si el segmento que une al vértice y al centro de la base es perpendicular a la base.




**Cono circular oblicuo.** Si el segmento que une al vértice y al centro de la base no es perpendicular a la base.



### *Área y volumen de un cono circular recto*

- **Área lateral:** producto de $\pi$, radio y la generatriz.
- **Área total:** la suma del área lateral y el área de la base.

- **Volumen:** producto del área de la base y la tercera parte de la altura. La altura del cono es la recta que baja de su vértice al centro de la base.

Área lateral

$A_L = \pi\, r\, g$

Área total

$A_T = \pi\, r\, (g + r)$

Volumen total

$V_T = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$

## EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Calcula el área lateral, área total y el volumen de un cilindro con radio de la base de 3 *cm* y con altura de 6 *cm*.

**Solución**

El área lateral de un cilindro se define como: $A_L = 2\pi\, r\, h$, se sustituye $r = 3\ cm$ y $h = 6\ cm$ y se obtiene:

$$A_L = 2\pi\,(3\ cm)(6\ cm) = 36\pi\ cm^2$$

El área total de un cilindro está dada por la fórmula: $A_t = 2\pi\, r\, h + 2\pi r^2$

$$A_T = 2\pi\,(3\ cm)\,(6\ cm) + 2\pi\,(3\ cm)^2 = 36\pi\ cm^2 + 18\pi\ cm^2 = 54\pi\ cm^2$$

El volumen se define como: $V_T = \pi\, r^2\, h$, entonces:

$$V_T = \pi\,(3\ cm)^2\,(6\ cm) = \pi\,(9\ cm^2)\,(6\ cm) = 54\pi\ cm^3$$

**2** Determina el área lateral, área total y el volumen de un cono recto cuyo radio mide 1 *cm* y la altura 2 *cm*.

**Solución**

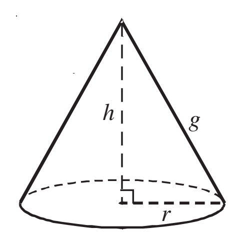
Se calcula la medida de la generatriz, la cual forma un triángulo rectángulo con la altura y el radio de la base, entonces:

$$g^2 = h^2 + r^2 \quad \rightarrow \quad g^2 = (2\ cm)^2 + (1\ cm)^2$$

$$g^2 = 4\ cm^2 + 1\ cm^2$$

$$g = \sqrt{5\ cm^2}$$

$$g = \sqrt{5}\ cm$$




Se sustituyen en las fórmulas $r = 1\ cm$, $h = 2\ cm$ y $g = \sqrt{5}\ cm$.

Área lateral

$$A_L = \pi\, r\, g = \pi(1\ cm)\left(\sqrt{5}\ cm\right) = \sqrt{5}\ \pi\ cm^2$$

Área total

$$A_T = \pi\, r\,(g + r) = \pi(1\ cm)\left(\sqrt{5}\ cm + 1\ cm\right) = \pi\left(\sqrt{5} + 1\right) cm^2$$

Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3}\,\pi\,(1\ cm)^2(2\ cm) = \frac{2}{3}\,\pi\ cm^3$$

# EJERCICIO 35

Determina el área lateral, total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Pirámide regular cuya base cuadrangular de lado tiene 3 *cm* si su altura mide 4 *cm*.
2. Pirámide regular cuya base es un triángulo equilátero de lado 1 *cm* si su altura mide $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *cm* y la arista de las caras laterales mide 1 *cm*.
3. Pirámide regular cuya base es un hexágono regular de lado 2 *cm* si su altura es 5 *cm*.
4. Pirámide regular cuya base es un octágono regular de lado 4 *cm*, apotema 4.8 *cm* y altura de 6.4 *cm*.
5. Cilindro circular recto de radio 3 *cm* y altura 5 *cm*.
6. Cilindro circular recto de diámetro 8 *cm* y altura 4 *cm*.
7. Cono circular recto de radio 7 *cm*, altura 9 *cm* y generatriz $\sqrt{150}$ *cm*.
8. Cono circular recto de radio 2 *cm* y altura 8 *cm*.
9. Cono circular recto de diámetro 5 *cm* y altura $\sqrt{3}$ *cm*.
10. Cono circular recto de radio 1 *cm* y generatriz 3 *cm*.

Resuelve los siguientes problemas:

11. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es un trapecio isósceles de base menor 2 *cm*, base mayor 4 *cm* y lados iguales $\sqrt{10}$ *cm* si la altura de la pirámide es de 4 *cm*.
12. Determina el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa $2\sqrt{2}$ *cm* y altura de la pirámide 6 *cm*.
13. Encuentra el volumen de una pirámide cuadrangular de lado 6 *cm*, si sus caras laterales son triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 8 *cm*.
14. Una pirámide cuadrangular de base 8 *cm* por lado y altura 10 *cm*, se corta mediante una sección paralela de lado 4 *cm*, determina el volumen del tronco de pirámide que se genera.
15. El área lateral de una pirámide es 60 $cm^2$, si su base es un hexágono regular y la apotema de la pirámide mide 5 *cm*, determina el área de la base.
16. Encuentra el volumen de un cilindro circular recto si su área total es $32\pi$ $cm^2$ y su altura mide 6 *cm*.
17. El volumen de un cilindro circular recto es $175\pi$ $cm^3$, si el radio es dos unidades menos que su altura, determina su área lateral.
18. El área total de un cono circular recto es $24\pi$ $cm^2$, si la generatriz excede en dos unidades al radio de su base, determina su volumen.
19. El área lateral de un cono circular recto es $32\pi$ $cm^2$, si la medida del radio es la mitad de la generatriz, encuentra el área total.
20. Expresa el área total de un cono circular recto en términos de su volumen si su altura es el doble de su radio.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Esfera

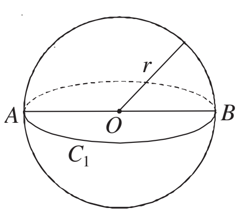
Es un sólido geométrico al que limita una superficie esférica, cuyos puntos equidistan de un punto fijo que se conoce como centro de la esfera.

$O$: Centro de la esfera

$r$: Radio de la esfera

$\overline{AB}$: Diámetro de la esfera

$C_1$: Circunferencia mayor

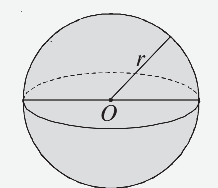
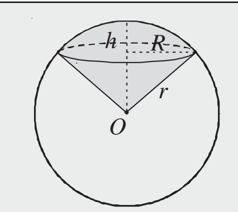
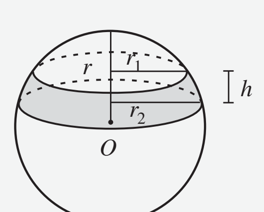
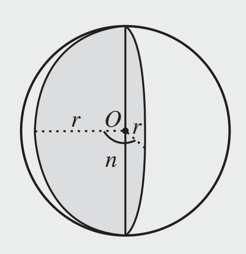



### Figuras esféricas y zonas esféricas

Resultan de cortar la esfera y la superficie esférica.

| | |
|---|---|
| **Casquete esférico.** Se obtiene al dividir la superficie esférica en dos partes, mediante un plano; si éste pasa por el centro de la esfera los casquetes son iguales.<br><br>**Segmento esférico.** Es el espacio que limitan el casquete esférico y el círculo base. | |
| **Zona esférica.** Es aquella superficie esférica limitada por dos planos.<br><br>**Rebanada esférica.** Es el espacio que limitan dos planos paralelos y la zona esférica correspondiente. | |
| **Huso esférico.** Es la porción de superficie esférica que se obtiene con dos planos que concurren en un diámetro.<br><br>**Cuña esférica.** Es la porción de espacio que limitan dos planos que concurren en un diámetro y el huso esférico correspondiente. | |
| **Sector esférico.** Es la porción de espacio limitado por un casquete esférico y la superficie cónica con vértice en el centro de la esfera cuya directriz es la base del casquete. | |

## Área de figuras esféricas y volumen de cuerpos esféricos

| | |
|---|---|
| **Área:** es igual al área de cuatro círculos máximos de esa esfera. $A = 4\pi r^2$ **Volumen:** es igual a cuatro tercios de $\pi$ por el radio al cubo. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ |   |
| **Volumen de un sector esférico** $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ Donde<br>$r$: Radio de la esfera<br>$h$: Altura del casquete esférico |   |
| **Área de un casquete esférico y zona esférica** $A = 2\pi rh$ **Volumen de un segmento esférico** $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r-h)$ **Volumen de una rebanada esférica:** diferencia de volúmenes de los segmentos esféricos con radio $r_2$ y $r_1$ respectivamente. $V = V_2 - V_1$ Donde<br>$r$: Radio de la esfera<br>$r_1$ y $r_2$: Radios de las circunferencias que limitan la rebanada<br>$h$: Altura del casquete esférico o zona esférica<br>$R$: Radio de la base del casquete esférico |     |
| **Área del huso esférico** $A = \frac{\pi r^2 n}{90°}$ **Volumen de la cuña esférica** $V = \frac{\pi r^3 n}{270°}$ Donde<br>$r$: Radio de la esfera<br>$n$: Ángulo que forman los planos de un huso | |

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área y el volumen de una esfera de 6 $cm$ de diámetro.

**Solución**

El área de una esfera está dada por la fórmula: $A = 4\pi r^2$, si $r = \frac{D}{2}$ entonces:

$$A = 4\pi\left(\frac{6\ cm}{2}\right)^2 = 4\pi\,(9\ cm^2) = 36\pi\ cm^2$$

El volumen de una esfera está dado por la fórmula: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, se sustituye $r = 3$, obteniendo:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(3\ cm)^3 = \frac{4}{3}\pi\,(27\ cm^3) = 36\pi\ cm^3$$

Por tanto, $A = 36\pi\ cm^2$ y $V = 36\pi\ cm^3$.

2 Determina el área del huso esférico y el volumen de la cuña esférica que forman dos planos con un ángulo diedro de 45º, si el radio de la esfera es de 9 $m$.

**Solución**

El área del huso esférico está dada por la fórmula: $A = \frac{\pi r^2 n}{90°}$, sustituyendo $r = 9\ m$ y $n = 45°$, se obtiene:

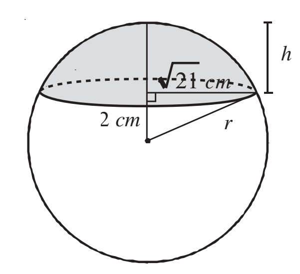
$$A = \frac{\pi(9\ m)^2 \cdot 45°}{90°} = \frac{\pi(81\ m^2)}{2} = \frac{81\pi}{2}\ m^2$$

El volumen de una cuña se obtiene mediante la fórmula: $V = \frac{\pi r^3 n}{270°}$, entonces:

$$V = \frac{\pi r^3 n}{270°} = \frac{\pi(9\ m)^3 \cdot 45°}{270°} = \frac{\pi \cdot 729\ m^3}{6} = \frac{243\pi}{2}\ m^3$$

Por tanto, el área del huso esférico y el volumen de la cuña son: $\frac{81\pi}{2}\ m^2$ y $\frac{243\pi}{2}\ m^3$ respectivamente.

3 Determina el área del casquete esférico cuya base dista 2 $cm$ del centro, si el radio de la base es $\sqrt{21}\ cm$.

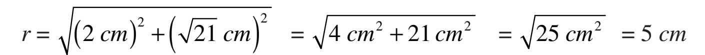



**Solución**

El área de un casquete esférico se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$A = 2\pi rh$$

de los cuales se desconoce $r$ y $h$, de la figura se tiene que:



$$r = \sqrt{(2\ cm)^2 + \left(\sqrt{21}\ cm\right)^2} = \sqrt{4\ cm^2 + 21\ cm^2} = \sqrt{25\ cm^2} = 5\ cm$$

luego, la altura del casquete es:

$$h = r - 2\ cm = 5\ cm - 2\ cm = 3\ cm$$

al sustituir $r = 5\ cm$ y $h = 3\ cm$ en $A = 2\pi rh$, se obtiene:

$$A = 2\pi\,(5\ cm)(3\ cm) = 30\pi\ cm^2$$

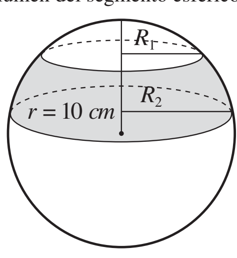
Por consiguiente, el área del casquete esférico es $30\pi\ cm^2$.

4 Una esfera de 10 *cm* de radio se corta mediante dos planos paralelos a una distancia de un mismo lado del centro de 2 *cm* y 6 *cm* respectivamente, determina el volumen del segmento esférico.

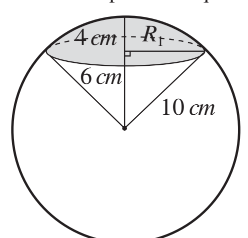
**Solución**

Para determinar el segmento esférico, primero se encuentran los volúmenes de los casquetes esféricos, como lo muestra la figura:

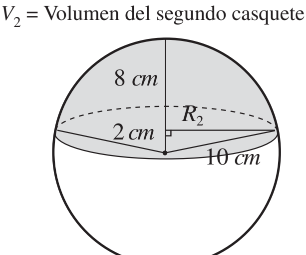
$V$ = Volumen del segmento esférico




$V_1$ = Volumen del primer casquete




$V_2$ = Volumen del segundo casquete




$V = V_2 - V_1$

En la figura, $R_1 = \sqrt{100-36}$

$R_1 = 8$ *cm*

En la figura, $R_2 = \sqrt{100-4}$

$R_2 = \sqrt{96}$

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r-h) = \frac{2}{3}\pi(10)^2(4) - \frac{1}{3}\pi(8)^2(10-4) = \frac{800}{3}\pi - \frac{384}{3}\pi = \frac{416}{3}\pi$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r-h) = \frac{2}{3}\pi(10)^2(8) - \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{96}\right)^2(10-8) = \frac{1600}{3}\pi - \frac{192}{3}\pi = \frac{1408}{3}\pi$$

Por tanto, $V = V_2 - V_1 = \frac{1408}{3}\pi\ cm^3 - \frac{416}{3}\pi\ cm^3 = \frac{992}{3}\pi\ cm^3$

# EJERCICIO 36

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina el área y volumen de una esfera con radio de 4 *cm*.
2. Encuentra el volumen de una esfera cuyo diámetro mide $6\sqrt{5}$ *cm*.
3. El radio de una esfera es de 3 *cm*, determina el volumen de un sector esférico cuyo casquete esférico tiene una altura de 1 *cm*.
4. Determina el volumen de un sector esférico si la base de su casquete esférico se encuentra a 4 *cm* del centro de la esfera cuyo radio es de 9 *cm*.
5. El radio de una esfera mide 10 *cm*, ¿cuál es el área del casquete esférico cuya base se encuentra a 7 *cm* del centro de la esfera?
6. ¿Cuál es el área de un casquete esférico cuya base dista del centro de una esfera 2 *cm* y su radio mide $2\sqrt{15}$ *cm*?
7. ¿Cuál es el volumen de un segmento esférico cuya base tiene una altura de 2 *cm* y el diámetro de la esfera mide 6 *cm*?
8. Encuentra el volumen de un segmento esférico si su base tiene un radio de 4 *cm* y el radio de la esfera mide 5 *cm*.
9. Una esfera con un radio de 12 *cm* se corta mediante dos planos paralelos a una distancia de un mismo lado del centro de 4 *cm* y 7 *cm* respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.
10. Una esfera con un radio de 1 *cm* se corta mediante dos planos paralelos, uno a cada lado del centro a una distancia de $\frac{1}{2}$ *cm* y $\frac{1}{3}$ *cm* respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.

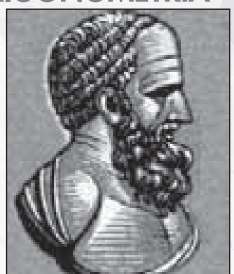
11. Encuentra el área del huso esférico si el ángulo que forman sus planos es de 60º y el radio de la esfera mide 10 *cm*.
12. El área de un huso esférico es $\frac{16}{3}\pi$, si el radio de la esfera mide 2 *cm*, ¿qué ángulo forma el huso esférico?
13. Calcula el volumen de una cuña esférica si el ángulo que forman sus planos es de 30º si el área de la esfera es $36\pi\, cm^2$.
14. Dos planos que concurren en un diámetro forman una cuña esférica de volumen $\frac{9}{2}\pi\, cm^3$ y un huso esférico de área $3\pi\, cm^2$, encuentra el radio, área y volumen de la esfera.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 11

## Funciones trigonométricas

### TRIGONOMETRÍA



Hiparco de Nicea
(190-120 *a. C.*)

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y lados en cualquier triángulo.

Desde hace más de 3000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos y las razones trigonométricas para efectuar medidas en la agricultura, así como para la construcción de pirámides.

**Hiparco de Nicea**

Astrónomo, matemático y geógrafo griego nacido en Nicea. Uno de los principales desarrolladores de la trigonometría (plana y esférica), construyó tablas que relacionaban los ángulos centrales con las cuerdas delimitadas por su ángulo central correspondiente. Gracias a esta tabla, equivalente a una tabla de senos actual, logró relacionar los lados y ángulos en cualquier triángulo plano.

Los triángulos esféricos se forman en la superficie de una esfera y son objeto de estudio de la trigonometría esférica, la cual se aplica en la náutica y navegación.

## Funciones trigonométricas

A las razones que existen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les llama funciones o razones trigonométricas.

### Definiciones

**Seno de un ángulo.** Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

**Coseno de un ángulo.** Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

**Tangente de un ángulo.** Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

**Cotangente de un ángulo.** Es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.

**Secante de un ángulo.** Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

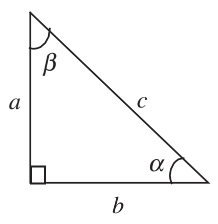
**Cosecante de un ángulo.** Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

**Nota:** los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el siguiente triángulo determina los catetos opuesto y adyacente para cada uno de los ángulos agudos.



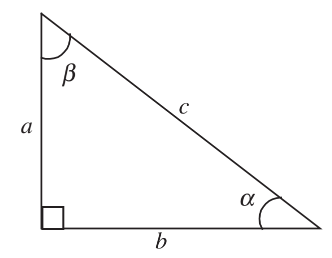

**Solución**

Para el ángulo $\alpha$:
cateto opuesto = $a$
cateto adyacente = $b$
hipotenusa = $c$

Para el ángulo $\beta$:
cateto opuesto = $b$
cateto adyacente = $a$
hipotenusa = $c$

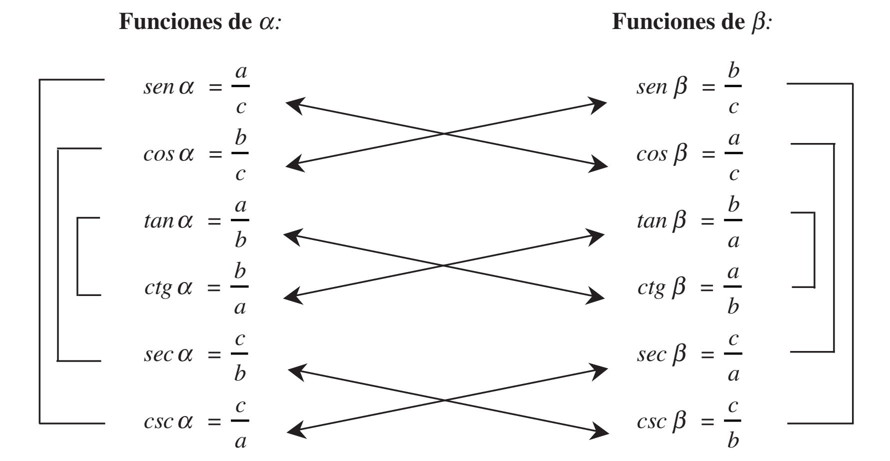
El cateto que es opuesto para uno de los ángulos será el adyacente para el otro, siendo la hipotenusa el lado que no presenta variante.

2 Obtén las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:

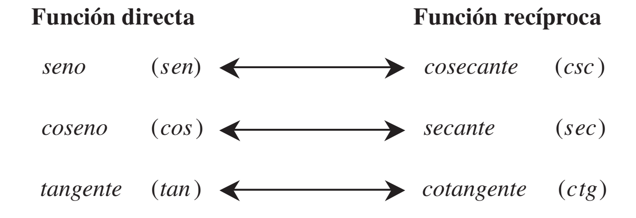


**Solución**

En el triángulo la hipotenusa es $c$ y los catetos son $a$ y $b$, entonces las funciones para los ángulos agudos $\alpha$ y $\beta$ son:



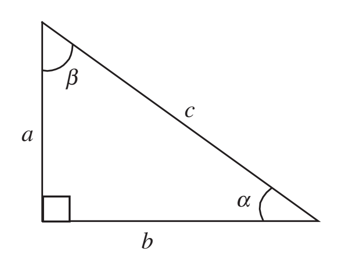

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo guardan ciertas relaciones entre sí:




## Cofunciones

Cualquier función de un ángulo es igual a la cofunción de su complemento.

En el triángulo rectángulo:




Por geometría:
$90° + \alpha + \beta = 180°$
Donde:
$\alpha + \beta = 90°;\ \beta = 90° - \alpha$
por tanto, $\alpha$ y $\beta$ son complementarios.

Entonces, mediante las definiciones:

$$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha) = cos\ \beta$$
$$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha) = sen\ \beta$$
$$tan\ \alpha = ctg\ (90° - \alpha) = ctg\ \beta$$
$$ctg\ \alpha = tan\ (90° - \alpha) = tan\ \beta$$
$$sec\ \alpha = csc\ (90° - \alpha) = csc\ \beta$$
$$csc\ \alpha = sec\ (90° - \alpha) = sec\ \beta$$

**Ejemplos**

Dadas las funciones trigonométricas, se determinan sus respectivas cofunciones:

$$sen\ 32° = cos\ (90° - 32°) = cos\ 58°$$

$$tan\ 25° = ctg\ (90° - 25°) = ctg\ 65°$$

$$cos\ \frac{\pi}{3} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\ \frac{\pi}{6}$$

$$sec\ \frac{\pi}{4} = csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = csc\ \frac{\pi}{4}$$

## Rango numérico

Dado que la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es mayor que cualquiera de los dos catetos, los valores del seno y el coseno de un ángulo agudo no pueden ser mayores que +1, ni menores que –1, mientras que los valores de las funciones cosecante y secante, al ser recíprocas del seno y coseno, no pueden estar entre –1 y +1; los catetos de un triángulo rectángulo pueden guardar entre sí cualquier proporción, por tanto, los valores de la tangente y la cotangente varían sobre todo el conjunto de números reales.

## Valor

Dada una función trigonométrica de un ángulo agudo se pueden determinar las demás funciones a partir de la construcción de un triángulo rectángulo y el empleo del teorema de Pitágoras como a continuación se ilustra.

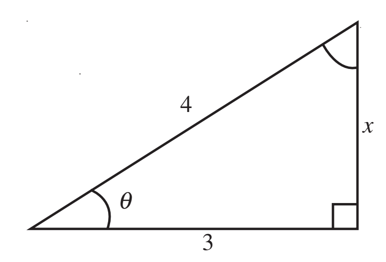
**EJEMPLOS**

1 Si $\theta$ es agudo, y $cos\ \theta = \frac{3}{4}$, calcula los valores de las funciones trigonométricas para $\theta$.

**Solución**

Se construye un triángulo rectángulo, donde $\theta$ es uno de los ángulos agudos, la hipotenusa es 4 y el cateto adyacente es 3.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:




$$(4)^2 = (x)^2 + (3)^2$$
$$16 = x^2 + 9$$
$$16 - 9 = x^2$$
$$7 = x^2$$
$$\sqrt{7} = x$$

Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\theta$ son:

$$sen\ \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad ctg\ \theta = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad csc\ \theta = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$tan\ \theta = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad sec\ \theta = \frac{4}{3}$$

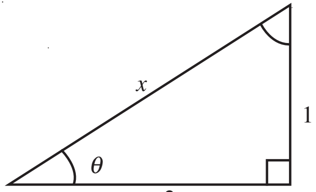
**2** Si $\theta$ es agudo y $tan\ \theta = \frac{1}{2}$, calcula los valores de seno y coseno del ángulo $\theta$.

**Solución**

Se construye un triángulo rectángulo, donde $\theta$ es uno de los ángulos agudos, el cateto opuesto es 1 y el cateto adyacente es 2.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:

$$(x)^2 = (1)^2 + (2)^2$$
$$x^2 = 1 + 4$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$

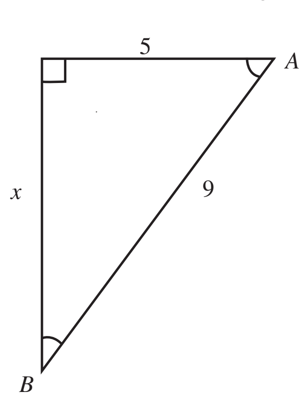



Por consiguiente, $sen\ \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y $cos\ \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

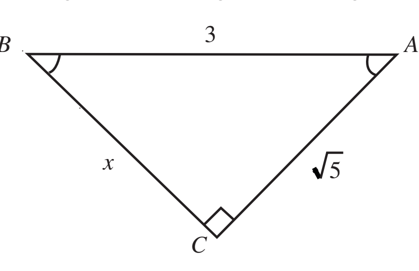
## EJERCICIO 37

1. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos, en los siguientes triángulos:

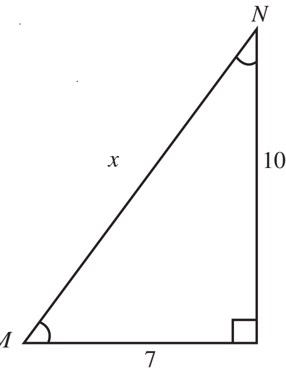
*a*)



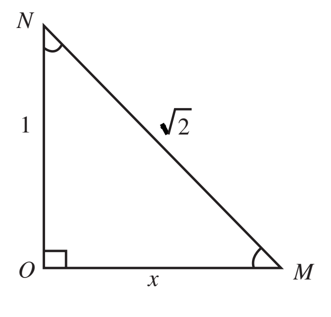

*c*)




*b*)




*d*)




2. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos:

*a)* Si $\theta$ y $\alpha$ son los ángulos agudos y $cos\ \theta = \frac{1}{5}$

*b)* Si $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios y $tan\ B = \frac{2}{3}$

*c)* Si $\angle M$ y $\angle N$ son complementarios y $csc\ N = 2$

*d)* Si $\theta$ y $\alpha$ son los ángulos agudos y $sec\ \theta = 2\sqrt{3}$

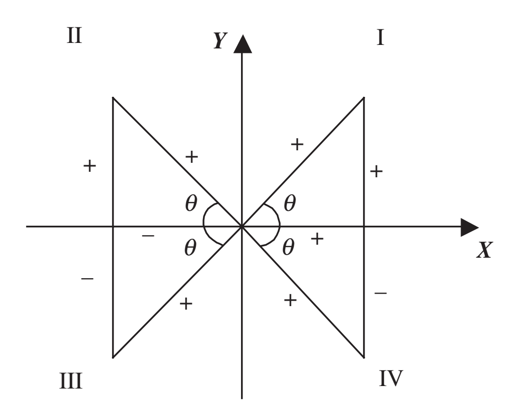
*e)* Si $\alpha + \beta = 90°$ y $ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

*f)* sen $A = \frac{4}{\sqrt{29}}$ y $\angle B$ es complemento de $\angle A$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Signos de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Si un triángulo rectángulo se ubica en el plano cartesiano, de manera que uno de sus catetos coincida con el eje horizontal, las funciones trigonométricas tendrán un signo dependiendo del cuadrante sobre el cual se encuentre dicho triángulo.




## Tabla de signos

| | I cuadrante | II cuadrante | III cuadrante | IV cuadrante |
|---|---|---|---|---|
| Seno | + | + | – | – |
| Coseno | + | – | – | + |
| Tangente | + | – | + | – |
| Cotangente | + | – | + | – |
| Secante | + | – | – | + |
| Cosecante | + | + | – | – |

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Sea el punto $A(-3, 4)$, determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = \angle XOA$.

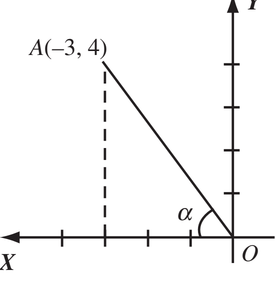
**Solución**

Por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = (-3)^2 + (4)^2$$

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = 9 + 16$$

$$\overline{OA} = \sqrt{25} = 5$$




Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$, son:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} \qquad tan\ \alpha = -\frac{4}{3} \qquad sec\ \alpha = -\frac{5}{3}$$

$$cos\ \alpha = -\frac{3}{5} \qquad ctg\ \alpha = -\frac{3}{4} \qquad csc\ \alpha = \frac{5}{4}$$

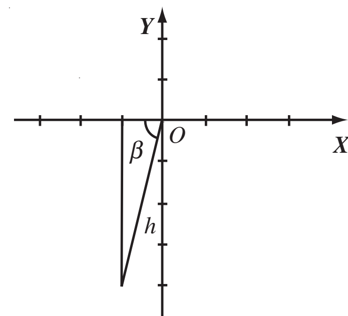
2 Calcula las funciones trigonométricas para el ángulo $\beta$, si se sabe que $tan\ \beta = 4$ y $180° \leq \beta \leq 270°$.

**Solución**

El ángulo se define en el tercer cuadrante y la función tangente es positiva, por tanto, $tan\ \beta = \frac{4}{1} = \frac{-4}{-1}$, estos valores se ubican en el plano cartesiano.

Por el teorema de Pitágoras:

$$(h)^2 = (-4)^2 + (-1)^2$$
$$h^2 = 16 + 1$$
$$h = \sqrt{17}$$




Entonces, las funciones trigonométricas del ángulo $\beta$ son:

$$sen\ \beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad tan\ \beta = 4 \qquad csc\ \beta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

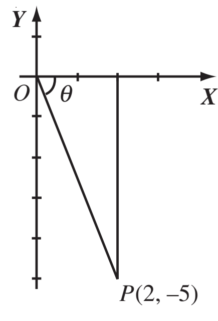
$$cos\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17} \qquad ctg\ \beta = \frac{1}{4} \qquad sec\ \beta = -\sqrt{17}$$

3 Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\theta$ que forman el punto $P(2, -5)$ y el eje horizontal.

**Solución**

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP}^2 = (2)^2 + (-5)^2$$
$$\overline{OP} = \sqrt{4 + 25}$$
$$\overline{OP} = \sqrt{29}$$




Las funciones trigonométricas son:

$$sen\ \theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29} \quad tan\theta = -\frac{5}{2} \quad sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29} \quad ctg\theta = -\frac{2}{5} \quad csc\theta = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

# EJERCICIO 38

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = < XOM$ que forman el punto $M( 12, -5)$ y el eje horizontal.
2. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha =$ $YON$ que forman el punto $N(-4, -7)$ y el eje vertical.
3. Determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\beta = XOA$ que forman el punto $A(2, 3)$ y el eje horizontal.
4. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\omega =$ $XOB$ que forman el punto $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y el eje horizontal.
5. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$, si se encuentra en el tercer cuadrante con $csc\ \alpha = -\frac{3}{2}$
6. Determina las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$, si se encuentra en el cuarto cuadrante con $ctg\ \alpha = -\frac{2}{\sqrt{7}}$
7. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo $\beta$, si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{9}{13}$ y $90° \leq \beta \leq 180°$
8. Obtén las funciones trigonométricas del ángulo $\omega$, si se sabe que $ctg\ \omega = -8$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \omega \leq 2\pi$
9. Si $csc\ \delta = \frac{13}{5}$ si $90° \leq \delta \leq 180°$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\delta$
10. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\beta$ si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\pi \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$
11. Si $sen\ \alpha > 0$, $tan\ \alpha < 0$ y $sec\ \alpha = -2$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$
12. Si $sec\ \alpha > 0$, $ctg\ \alpha < 0$ y $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Funciones trigonométricas para ángulos mayores que 90°

Todo ángulo mayor que 90°, se puede expresar en la forma $(n \cdot 90° \pm \alpha)$ o bien $\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, donde $n$ es un entero positivo y $\alpha$ es un ángulo cualquiera, la función de dicho ángulo será equivalente a:

*i*) La misma función de $\alpha$ si $n$ es un número par.
*ii*) La cofunción correspondiente de $\alpha$ si $n$ es un número impar.

Esto con el fin de expresar la función trigonométrica de dicho ángulo en una expresión equivalente, pero con un ángulo agudo, conservando el signo correspondiente a la función dada, según el cuadrante donde se encuentre el lado terminal.

### EJEMPLOS

Ejemplos

1. Expresa como función de un ángulo agudo *tan* 140°.

**Solución**

El ángulo se sitúa en el segundo cuadrante, donde la función tangente es negativa, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (2 \cdot 90° - 40°) = -tan\ 40°$$

Ahora bien, *tan* 140° se puede expresar también como *tan* $(1 \cdot 90° + 50°)$, $n = 1$, por tanto se utiliza cotangente, la cual es cofunción de la tangente, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (1 \cdot 90° + 50°) = -ctg\ 50°$$

2 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\ \frac{11}{9}\pi$.

**Solución**

El ángulo está en el tercer cuadrante, donde la función seno es negativa, entonces:

$$sen\ \frac{11}{9}\pi\ = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{9}\pi\right) = -sen\ \frac{2}{9}\pi$$

$sen\ \frac{11}{9}\pi$ se puede representar también como $sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right)$, $n = 3$ por tanto se utiliza la cofunción del seno, es decir, se expresa en términos del coseno.

$$sen\ \frac{11}{9}\pi\ = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right) = -cos\ \frac{5}{18}\pi$$

3 Expresa como función de un ángulo agudo *sec* 350° 15’ 28”.

**Solución**

El ángulo está situado en el cuarto cuadrante donde la función secante es positiva, entonces:

$$sec\ 350°\ 15'\ 28'' = sec\ (4 \cdot 90° - 9°\ 44'\ 32'') = sec\ 9°\ 44'\ 32''$$

O en términos de cosecante:

$$sec\ 350°\ 15'\ 28'' = sec\ (3 \cdot 90° + 80°\ 15'\ 28'') = csc\ 80°\ 15'\ 28''$$

4 Expresa como función de un ángulo agudo *cos* 1 000°.

**Solución**

Cuando el ángulo es mayor que 360°, debe dividirse entre esta cantidad para obtener el número de giros o vueltas que da el lado terminal y el residuo es el ángulo que debe expresarse en función de un ángulo agudo.

2 ← giros o vueltas

360° | 1 000°

280° ← Ángulo equivalente

El ángulo equivalente a 1 000° es 280°, situado en el cuarto cuadrante donde la función coseno es positiva, entonces:

$$cos\ 1\,000° = cos\ 280° = cos\ (4 \cdot 90° - 80°) = cos\ 80°$$

O bien, en términos de la función seno,

$$cos\ 1\,000° = cos\ 280° = cos\ (3 \cdot 90° + 10°) = sen\ 10°$$

5 Expresa como función de un ángulo agudo *sen* 6 290°.

**Solución**

Se obtiene el ángulo equivalente, que sea menor que 360°,

17

360° | 6 290°

170°

El ángulo equivalente es 170°, el cual se sitúa en el segundo cuadrante donde la función seno es positiva, entonces,

$$sen\ 6\,290° = sen\ 170° = sen\ (2 \cdot 90° - 10°) = sen\ 10°$$

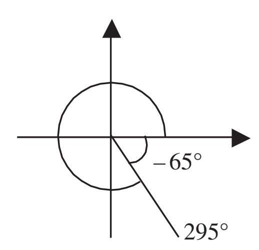
O bien, en términos de coseno,

$$sen\ 6\,290° = sen\ 170° = sen\ (1 \cdot 90° + 80°) = cos\ 80°$$

6 Expresa como función de un ángulo agudo $tan\,(-65°)$.

**Solución**

Se traza el ángulo negativo, el cual girará en sentido horario y será equivalente a un ángulo de 295°, que se sitúa en el cuarto cuadrante, donde la función tangente es negativa.




Por consiguiente:

$$tan\,(-65°) = tan\,295° = tan\,(4 \cdot 90° - 65°) = -tan\,65°$$

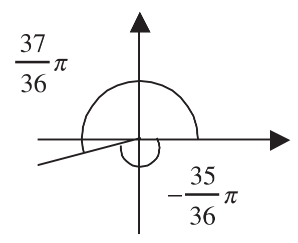
O bien, en términos de cotangente:

$$tan\,(-65°) = tan\,295° = tan\,(3 \cdot 90° + 25°) = -ctg\,25°$$

7 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right)$

**Solución**

Se traza el ángulo negativo, el cual se encuentra en el tercer cuadrante donde la función seno es negativa.




Por tanto,

$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\,\frac{37}{36}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{36}\right) = -sen\,\frac{\pi}{36}$$

O bien, en términos de coseno:

$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\,\frac{37}{36}\pi = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{17}{36}\pi\right) = -cos\,\frac{17}{36}\pi$$

## Funciones trigonométricas de ángulos negativos

Los ángulos negativos giran en sentido horario y las funciones trigonométricas de ángulos negativos, se expresan en términos de funciones trigonométricas de ángulos positivos.

En el triángulo Δ *AOB*, ubicado en el primer cuadrante:

$sen\ \theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AO}}$ $\quad tan\ \theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BO}}$ $\quad sec\ \theta = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$

$cos\ \theta = \dfrac{\overline{BO}}{\overline{AO}}$ $\quad ctg\ \theta = \dfrac{\overline{BO}}{\overline{AB}}$ $\quad csc\ \theta = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$

En el triángulo Δ *AOB,* ubicado en el cuarto cuadrante:

$sen\ (-\theta) = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AO}}$ $\quad tan\ (-\theta) = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BO}}$ $\quad sec\ (-\theta) = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$

$cos\ (-\theta) = \dfrac{\overline{BO}}{\overline{AO}}$ $\quad ctg\ (-\theta) = -\dfrac{\overline{BO}}{\overline{AB}}$ $\quad csc\ (-\theta) = -\dfrac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$

Por consiguiente: $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$ $\quad tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ $\quad sec\ (-\theta) = sec\ \theta$

$cos\ (-\theta) = cos\ \theta$ $\quad ctg\ (-\theta) = -ctg\ \theta$ $\quad csc\ (-\theta) = -csc\ \theta$

EJEMPLOS

1 Expresa *sen* (–30°) en términos de un ángulo positivo.

**Solución**

Al aplicar $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$, se obtiene:

$$sen\ (-30°) = -sen\ 30°$$

2 Expresa *tan* (–120°) en términos de un ángulo positivo y agudo.

**Solución**

Se aplica $tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ y se obtiene:

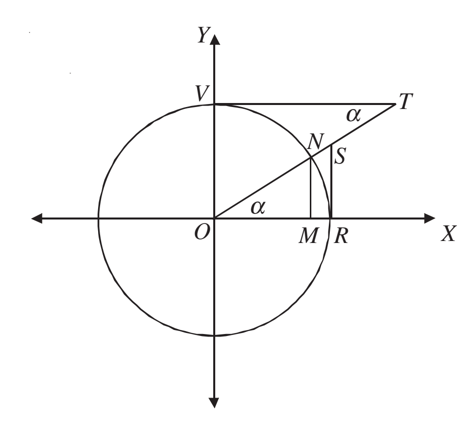
$$tan\ (-120°) = -tan\ 120°$$

y al reducir a un ángulo agudo,

$$tan\ (-120°) = -tan\ 120° = -tan\ (2 \cdot 90° - 60°) = -(-tan\ 60°) = tan\ 60°$$

## Valores numéricos de las funciones trigonométricas circulares

Los valores de las funciones trigonométricas guardan una estrecha relación con el círculo unitario y se pueden calcular por medio de la medición de algunos segmentos de éste, el uso de tablas matemáticas o con el empleo de una calculadora.



Si se consideran las distancias $\overline{OR} = \overline{ON} = \overline{OV} = 1$, entonces para calcular el valor de las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$, se emplean las definiciones de las mismas y representan la longitud de los segmentos:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\overline{MN}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{MN}}{1} = \overline{MN}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$

$$tan\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{SR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{SR}}{1} = \overline{SR}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{VT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{VT}}{1} = \overline{VT}$$

$$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OS}}{1} = \overline{OS}$$

$$csc\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

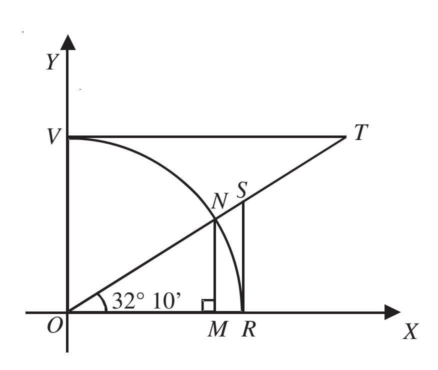
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor de las funciones trigonométricas del ángulo 32° 10'.

**Solución**

Si se emplea el círculo unitario para calcular las funciones, donde $\alpha$ = 32° 10', entonces:




Se consideran los segmentos $\overline{OR} = \overline{ON} = \overline{OV} = 1$, entonces:

*sen* 32° 10' = $\overline{MN}$ = 0.5324

*cos* 32° 10' = $\overline{OM}$ = 0.8465

*tan* 32° 10' = $\overline{SR}$ = 0.6289

*csc* 32° 10' = $\overline{OT}$ = 1.8783

*sec* 32° 10' = $\overline{OS}$ = 1.1813

*ctg* 32° 10' = $\overline{VT}$ = 1.5900

Si se emplean las tablas matemáticas (incluidas al final del texto) para calcular el valor de las funciones trigonométricas de 32° 10', entonces, se procede de la siguiente forma:

| Grados | Radianes | Sen | Tan | Ctg | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° 00' | .0000 | .0000 | .0000 | | 1.0000 | 1.5708 | 90° 00' |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 32° 00' | .5585 | .5299 | .6249 | 1.6003 | .8480 | 1.0123 | 58° 00' |
| 10' | .5614 | **.5324** | **.6289** | **1.5900** | **.8465** | 1.0094 | 50' |
| 20' | .5643 | .5348 | .6330 | 1.5798 | .8450 | 1.0065 | 40' |
| 30' | .5672 | .5373 | .6371 | 1.5697 | .8434 | 1.0036 | 30' |
| 40' | .5701 | .5398 | .6412 | 1.5597 | .8418 | 1.0007 | 20' |
| 50' | .5730 | .5422 | .6453 | 1.5497 | .8403 | .9977 | 10' |
| 33° 00' | .5760 | .5446 | .6494 | 1.5399 | .9387 | .9948 | 57° 00' |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 45° 00' | .7854 | .7071 | 1.0000 | 1.0000 | .7071 | .7854 | 45° 00' |
| | | Cos | Ctg | Tan | Sen | Radianes | Grados |

El renglón superior corresponde a la columna izquierda cuyos valores van desde 0° 00' a 45° 00' y el renglón inferior va desde 45° 00' a 90° 00'.

El valor de *sen* 32° 10' se busca en la columna izquierda de arriba hacia abajo y además se observa que es el mismo valor que el de *cos* 57° 50', buscado en la columna derecha de abajo hacia arriba, esto es porque son cofunciones.

Si se busca el valor de las funciones trigonométricas empleando una calculadora, el procedimiento es el siguiente:

*a)* Verificar si la calculadora es de renglón simple o es más sofisticada y cuenta con doble renglón. Esto es porque se teclea de forma diferente; en la explicación que a continuación se presenta se considera que el estudiante empleará una máquina de doble renglón.

*b)* Es necesario definir en qué medidas angulares se desea trabajar (grados o radianes).

*c)* Considerar que el idioma que regularmente emplean los fabricantes en los menús y teclados es el inglés, es por ello que el ejemplo así lo considera.

*d)* Para encontrar las funciones cosecante, secante y cotangente, es necesario encontrar primero sus respectivas funciones recíprocas, ya que las calculadoras no cuentan con estas funciones de manera directa, y después dividir la unidad entre dicho resultado.

Si se emplea la medida en grados debes digitar la tecla de [Mode] y elegir la opción [Deg], la cual indica que la medida angular está en grados sexagesimales.

Si se busca el *sen* 32° 10*'*, entonces:

Se digita [sin] después, el valor de los grados 32 a continuación la tecla [° ' "] enseguida 10 y por último la tecla [° ' "]. Para que el resultado aparezca en la pantalla es necesario digitar la tecla [=] y el resultado desplegado en la pantalla de la calculadora es 0.53238389.

Si la función buscada es *sec* 32° 10', ésta no puede ser calculada de forma directa, por lo que es necesario encontrar su función recíproca. Además, ahora vamos a usar la medida angular en radianes, por tanto:

Se digita [Mode] y se elige la opción [Rad], la cual indica que la medida angular empleada está en radianes, 32° 10' = 0.5614 *rad.*

Se comienza digitando un paréntesis [(], en seguida la función recíproca de la secante, la cual es el coseno [cos] de 0.5614, después se cierra el paréntesis [)] y por último la tecla [$x^{-1}$], la cual es la función recíproca. Para que aparezca el resultado se teclea [=] y se desplegará en la pantalla 1. 1813.

# EJERCICIO 39

1. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

*a*) *sen* 210°
*b*) *tan* 165°
*c*) *cos* 280°
*d*) *csc* 120°
*e*) *sec* 358°
*f*) *sen* 240° 37’25”
*g*) *ctg* 315°
*h*) *tan* 254° 46’24”
*i*) *cos* 95° 25’
*j*) *sec* 320° 48’12”
*k*) *csc* 127°
*l*) *ctg* (–48°)
*m*) *cos* (–38° 54’)
*n*) *sen* (–28° 35’24”)

2. Expresa en términos de un ángulo positivo las siguientes funciones:

*a*) *sen* (–160°)
*b*) *ctg* (–140°)
*c*) *sec* (–240°)
*d*) *cos* (–280°)
*e*) *tan* (–345°)
*f*) *csc* (–90°)
*g*) *cos* (–225° 15’ 46”)
*h*) *ctg* (–176° 45’ 23”)
*i*) *sec* (–108° 32’)
*j*) *sen* (–228° 15’)

3. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

*a*) *sen* (–160°)
*b*) *ctg* 1 240°
*c*) *cos* (–2 800°)
*d*) *tan* 5 445°
*e*) *csc* (–98° 32’ 12”)
*f*) *sec* (–230°)
*g*) *sen* (1 315°)
*h*) *tan* 823° 25’ 18”
*i*) *cos* (–428° 45’ 24”)
*j*) *ctg* 920°
*k*) *sec* (–220°)
*l*) *csc* 328° 33’ 41”

4. Encuentra el valor de las siguientes funciones trigonométricas (empleando tablas o calculadora):

*a*) *sen* 18°
*b*) *ctg* 46°
*c*) *sec* 25°
*d*) *cos* 83°
*e*) *tan* 37°
*f*) *csc* 79°
*g*) *cos* 22° 10’
*h*) *ctg* 14° 40’
*i*) *sec* 10° 30’
*j*) *sen* 29° 50’

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 12

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS NOTABLES

### Reseña HISTÓRICA

Ptolomeo
(100 *d. C.* – 170 *d. C.*)

Astrónomo, matemático y geógrafo egipcio del siglo II de la era cristiana, nace en Tolemaida Hermia (en el Alto Egipto), alrededor del año 100, y vive y trabaja en Alejandría.

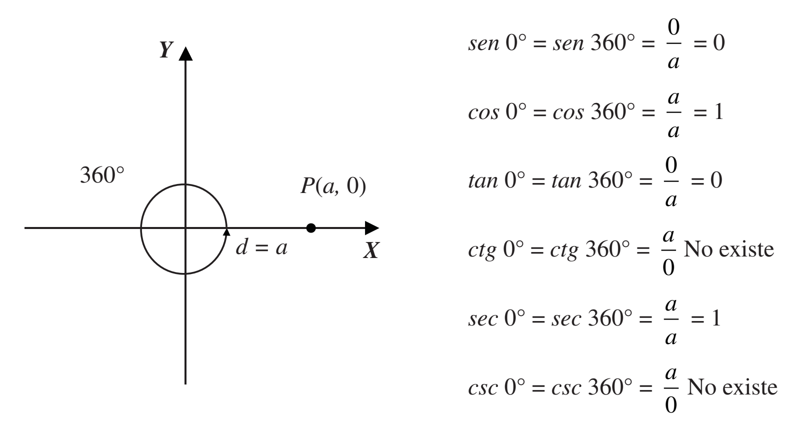
Ptolomeo calculó cuerdas inscribiendo polígonos regulares de lados 3, 4, 5 y 6 en un círculo, lo cual le permitió calcular cuerdas subtendidas por ángulos de 36°, 72°, 60°, 90° y 120°. En su obra *Almagesto*, Ptolomeo proporcionó una tabla de cuerdas de 0° a 180° con variaciones de 1°, con una exactitud de 1/3 600 de una unidad.

Los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno, en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos. Los matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ (radio de la circunferencia) y esto dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas.

## Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Las coordenadas del punto *P* sobre el eje *X* son (*a*, 0) y la distancia al origen es igual a *a*, entonces las funciones de los ángulos de 0° y 360° son:




$sen\ 0° = sen\ 360° = \frac{0}{a} = 0$

$cos\ 0° = cos\ 360° = \frac{a}{a} = 1$

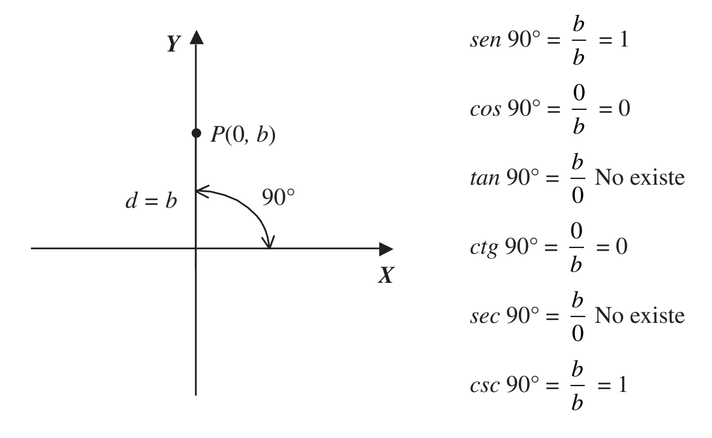
$tan\ 0° = tan\ 360° = \frac{0}{a} = 0$

$ctg\ 0° = ctg\ 360° = \frac{a}{0}$ No existe

$sec\ 0° = sec\ 360° = \frac{a}{a} = 1$

$csc\ 0° = csc\ 360° = \frac{a}{0}$ No existe

Para el ángulo de 90°, las coordenadas de cualquier punto *P* sobre el eje *Y* es *P*(0, *b*), la distancia al origen es *b*, entonces:




$sen\ 90° = \frac{b}{b} = 1$

$cos\ 90° = \frac{0}{b} = 0$

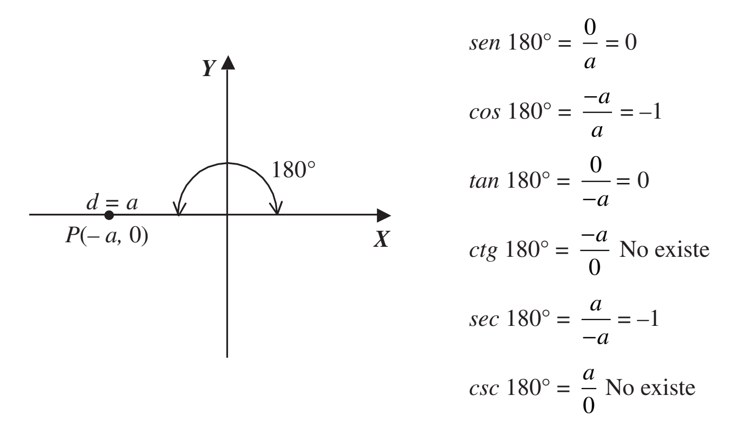
$tan\ 90° = \frac{b}{0}$ No existe

$ctg\ 90° = \frac{0}{b} = 0$

$sec\ 90° = \frac{b}{0}$ No existe

$csc\ 90° = \frac{b}{b} = 1$

Para el ángulo de 180° las coordenadas de cualquier punto *P* sobre el eje – *X* son (– *a*, 0), la distancia al origen es *a*.




$sen\ 180° = \frac{0}{a} = 0$

$cos\ 180° = \frac{-a}{a} = -1$

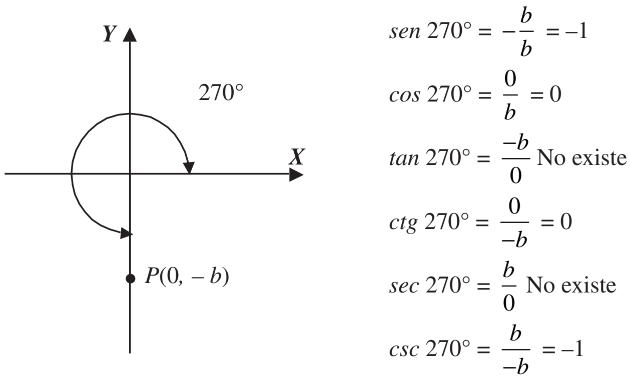
$tan\ 180° = \frac{0}{-a} = 0$

$ctg\ 180° = \frac{-a}{0}$ No existe

$sec\ 180° = \frac{a}{-a} = -1$

$csc\ 180° = \frac{a}{0}$ No existe

Para el ángulo de 270° las coordenadas de cualquier punto $P$ sobre el eje $-Y$ son $P(0, -b)$, la distancia al origen es $b$.




$$sen\ 270° = -\frac{b}{b} = -1$$

$$cos\ 270° = \frac{0}{b} = 0$$

$$tan\ 270° = \frac{-b}{0} \text{ No existe}$$

$$ctg\ 270° = \frac{0}{-b} = 0$$

$$sec\ 270° = \frac{b}{0} \text{ No existe}$$

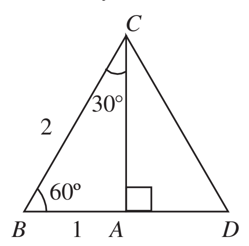
$$csc\ 270° = \frac{b}{-b} = -1$$

**Cuadro de valores de las funciones trigonométricas**

| | **0** | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Funciones | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
| seno | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |
| coseno | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |
| tangente | 0 | No existe | 0 | No existe | 0 |
| cotangente | No existe | 0 | No existe | 0 | No existe |
| secante | 1 | No existe | –1 | No existe | 1 |
| cosecante | No existe | 1 | No existe | –1 | No existe |

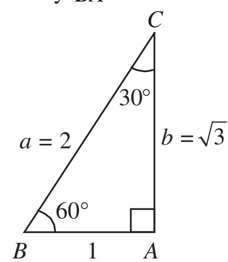
## Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

Para las funciones trigonométricas de los ángulos de 60° y 30° se construye un triángulo equilátero de lado igual a 2:




Se traza $\overline{CA} \perp \overline{BD}$, $\overline{CA}$ es bisectriz del $\angle C$ y mediatriz del lado $BD$.

En el triángulo $BAC$, $\angle B = 60°$, $\angle ACB = 30°$ y $\overline{BA} = 1$



Para obtener el lado $b=\overline{CA}$ se usa el teorema de Pitágoras:

$$\overline{CA}^2=\overline{BC}^2-\overline{AB}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{CA}^2=(2)^2-(1)^2$$

$$\overline{CA}^2=3$$

$$\overline{CA}=\sqrt{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \qquad sec\ 60° = \frac{2}{1}=2$$

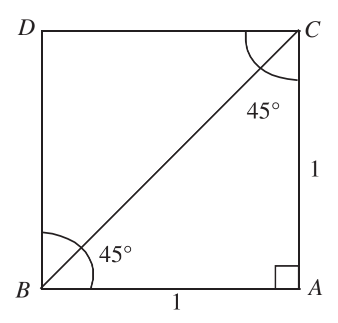
$$cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad ctg\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ctg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \qquad csc\ 30° = \frac{2}{1}=2$$

Para calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 45° se construye un cuadrado de longitud por lado igual a la unidad y se traza su diagonal.



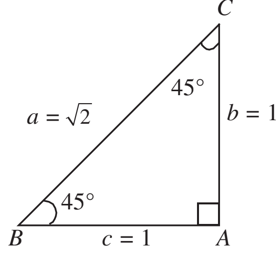

Para obtener el valor de la hipotenusa, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \text{donde:} \quad a^2=(1)^2+(1)^2$$

$$a^2=1+1$$

$$a^2=2$$

De acuerdo con el resultado anterior, $a=\sqrt{2}$




Las funciones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tan\ 45° = \frac{1}{1}=1 \qquad sec\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ctg\ 45° = \frac{1}{1}=1 \qquad csc\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

## Aplicación de los valores trigonométricos de los ángulos notables

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor numérico de $2\ sen\ 30°\ cos\ 60°$.

**Solución**

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se efectúa la operación:

$$2\ sen\ 30° \cdot cos\ 60° = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 Determina el valor numérico de la expresión: $tan^2\ 60° + ctg^2\ 45°$.

**Solución**

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se determina que:

$$tan^2\ 60° + ctg^2\ 45° = (tan\ 60°)^2 + (ctg\ 45°)^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$$

Por tanto, $tan^2\ 60° + ctg^2\ 45° = 4$

3 Calcula el valor numérico de $sen\ \frac{7}{6}\pi + 3\ sen\ \frac{11}{6}\pi$.

**Solución**

Los ángulos se expresan en función de ángulos agudos para obtener los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ \frac{7}{6}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\ sen\ \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$sen\ \frac{11}{6}\pi = sen\left(4\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = -\ sen\ \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Entonces,

$$sen\ \frac{7}{6}\pi + 3\ sen\ \frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Por tanto, sen $\frac{7}{6}\pi + 3\ sen\ \frac{11}{6}\pi = -2$

4 Mediante ángulos notables demuestra la siguiente igualdad:

$$sen\ 30° - (cos\ 30° \cdot ctg\ 60°)^2 = cos^2\ 60°$$

**Solución**

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}; \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad ctg\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

Después se sustituyen los valores de las funciones y se demuestra que se cumple con la igualdad:

$$sen\ 30° - (cos\ 30° \cdot ctg\ 60°)^2 = cos^2\ 60°$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Con lo cual queda demostrada la igualdad propuesta.

**5** Demuestra la siguiente igualdad, mediante el valor de los ángulos notables:

$$\sqrt{sen^2 \frac{3}{2}\pi + 3\, sec\, 2\pi} = csc\frac{\pi}{6}$$

**Solución**

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ \frac{3}{2}\pi\ = -1; \quad sec\ 2\pi\ = 1; \quad csc\ \frac{\pi}{6}\ = 2$$

Entonces:

$$\sqrt{(-1)^2 + 3(1)} = 2$$
$$\sqrt{1+3} = 2$$
$$\sqrt{4} = 2$$
$$2 = 2$$

Por tanto, la igualdad es verdadera.

## EJERCICIO 40

Completa la siguiente tabla:

| Grados | Radianes | sen | cos | tan | csc | sec | ctg |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | | | | | | |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | | | | | | |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | | | | | | |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | | | | | | |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | | | | | | |
| 120° | $\frac{\pi}{3}$ | | | | | | |
| 135° | $\frac{\pi}{4}$ | | | | | | |
| 150° | $\frac{\pi}{6}$ | | | | | | |
| 180° | $\pi$ | | | | | | |
| 210° | $\frac{7\pi}{6}$ | | | | | | |
| 225° | $\frac{5\pi}{4}$ | | | | | | |
| 240° | $\frac{4\pi}{3}$ | | | | | | |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ | | | | | | |
| 300° | $\frac{5\pi}{3}$ | | | | | | |
| 315° | $\frac{7\pi}{4}$ | | | | | | |
| 330° | $\frac{11\pi}{6}$ | | | | | | |
| 360° | $2\pi$ | | | | | | |

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

1. $2\,sen\,30°\,cos\,30°$
2. $2\,sen\,30°\,sen\,60°$
3. $3\,tan\,\frac{\pi}{6}\;sen\,\frac{\pi}{3}$
4. $sec^2\,45° - 2\,tan^2\,45°$
5. $sen^2\,30°\,cos^2\,30°$
6. $\left[sen^2\,45°\,cos^2\,45°\right]^{\frac{3}{2}}$
7. $3\,tan\,60°\,ctg\,30°\,sen\,45°\,csc\,45°$
8. $2\,sen\,60°\,sec\,30°\,cos\,45°\,tan\,45°$
9. $2\,sen\,\frac{\pi}{4}\;cos\,\frac{\pi}{4}\left(sen^2\,\frac{\pi}{6} + cos^2\,\frac{\pi}{6}\right)$
10. $2\,sen\,30°\,cos\,30°\,(1 - 2\,sen^2\,30°)$
11. $tan^2\,\frac{5}{3}\pi + 4\,sen\,\frac{5}{6}\pi - 3\,ctg^2\,\frac{5}{4}\pi$
12. $\dfrac{cos\,120° + sec\,180°}{csc\,270° + sen\,330°}$
13. $\left[\dfrac{(sen\,120°)(tan\,240°)}{tan\,315° - cos\,300°}\right]^3$
14. $\sqrt{(tan\,225°)(sen\,180°)(cos\,240°)}$
15. $sen\,90° + (cos\,210° + sen\,300°)^2 + sec\,240°$

Utiliza ángulos notables para demostrar las siguientes igualdades:

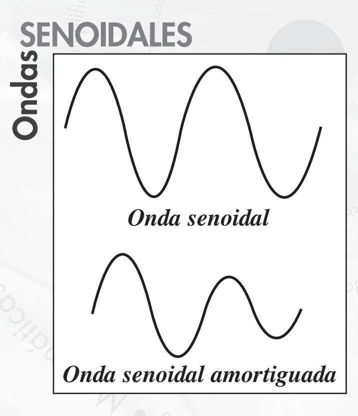
16. $\dfrac{sen\,240° + sen\,120° \cdot cos\,60°}{sen\,120° \cdot sen(-60°)} = tan\,210°$
17. $tan\,\frac{\pi}{3} \cdot sen\,\frac{2}{3}\pi = 1 + sen\,\frac{\pi}{6}$
18. $sen\,180° = 2\,sen\,60° + sen\,240°(sec\,45°)^2$
19. $cos\,225° + 3\,sen\,225° = -2\,sec\,45°$
20. $csc\,60° = -\dfrac{sen\,30°}{sen\,150° \cdot sen\,300°}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 13

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

### Ondas SENOIDALES


Onda senoidal

Onda senoidal amortiguada

Se les considera como fundamentales por diversas razones: poseen propiedades matemáticas muy interesantes (un ejemplo, con combinaciones de señales senoidales de diferente amplitud y frecuencia se puede reconstruir cualquier forma de onda), la señal que se obtiene de las tomas de corriente de cualquier casa tiene esta forma, las señales de test producidas por los circuitos osciladores de un generador de señal también son senoidales, la mayoría de las fuentes de potencia en AC (corriente alterna) producen señales senoidales.

La señal senoidal amortiguada es un caso especial de este tipo de ondas y se produce en fenómenos de oscilación, pero que no se mantienen en el tiempo.

# Gráficas de las funciones trigonométricas

Al establecer una regla de correspondencia entre dos conjuntos, por medio de las funciones trigonométricas, se establecen relaciones como:

$$y = sen\ x,\ f(x) = cos\ (-x),\ y = tan\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$$

Para construir la gráfica de una función o razón trigonométrica se dan valores al ángulo (Argumento), éstos van sobre el eje $x$, los valores obtenidos se grafican sobre el eje $y$.

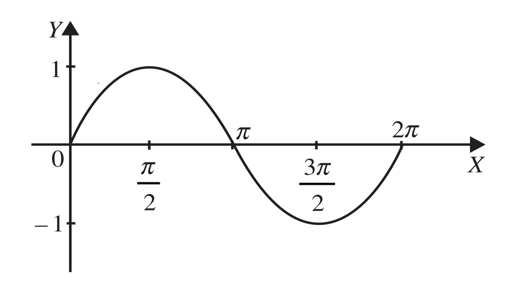
Los valores asignados para el argumento se expresan en grados sexagecimales o radianes.

## Gráfica de $y = sen\ x$

**Tabulación**

| | | 1o. cuadrante | | 2o. cuadrante | | 3o. cuadrante | | 4o. cuadrante | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
| | 0 | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° | 315° | 360° |
| Y | 0 | 0.7 | 1 | 0.7 | 0 | −0.7 | −1 | −0.7 | 0 |

**Gráfica**




**Características**

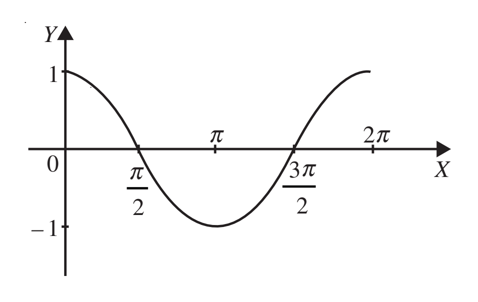
1. La función tiene periodo igual a $2\pi$ *rad.*
2. La función es creciente en el primero y cuarto cuadrantes.
3. La función decrece en el segundo y tercer cuadrantes.
4. La función es positiva en el primero y segundo cuadrantes y negativa en el tercero y cuarto cuadrantes.
5. La función interseca al eje horizontal en múltiplos enteros de $\pi$.
6. $-\infty < x < \infty$.
7. $-1 \leq y \leq 1$.

## Gráfica de $y = \cos x$

**Tabulación**

| | 1o. cuadrante | | 2o. cuadrante | | 3o. cuadrante | | 4o. cuadrante | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
| | 0 | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° | 315° | 360° |
| Y | 1 | 0.7 | 0 | – 0.7 | – 1 | – 0.7 | 0 | 0.7 | 1 |

**Gráfica**




**Características**

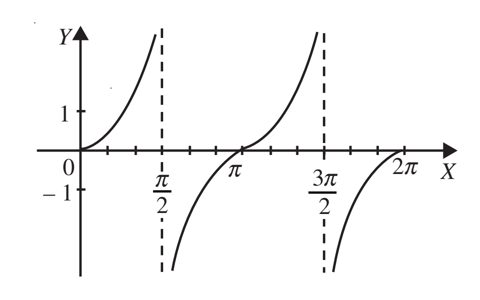
1. La función tiene periodo igual a $2\pi$ *rad*.
2. La función decrece en el primero y segundo cuadrantes.
3. La función crece en el tercero y cuarto cuadrantes.
4. La función es positiva en el primero y cuarto cuadrantes, y negativa en el segundo y tercer cuadrantes.
5. La función interseca al eje horizontal en múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
6. $-\infty < x < \infty$.
7. $-1 \le y \le 1$.

## Gráfica de $y = \tan x$

**Tabulación**

| | 1o. cuadrante | | | 2o. cuadrante | | | 3o. cuadrante | | | 4o. cuadrante | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
| Y | 0 | 0.57 | 1.7 | No existe | –1.7 | –0.57 | 0 | 0.57 | 1.7 | No existe | – 1.7 | –0.57 | 0 |

**Gráfica**




**Características**

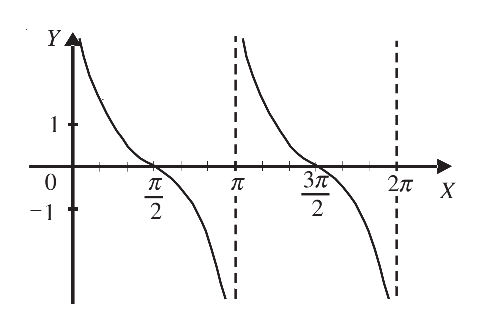
1. La función interseca al eje $X$ en múltiplos de $\pi$.
2. La función es positiva en el primero y tercer cuadrantes.
3. La función es negativa en el segundo y cuarto cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a $\pi$ *rad*.
5. $x$ es un número real tal que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $-\infty < y < \infty$.

## Gráfica de $y = ctg\ x$

**Tabulación**

| | 1o. cuadrante | | | 2o. cuadrante | | | 3o. cuadrante | | | 4o. cuadrante | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
| Y | No existe | 1.7 | 0.57 | 0 | –0.57 | –1.7 | No existe | 1.7 | 0.57 | 0 | – 0.57 | –1.7 | No existe |

**Gráfica**




**Características**

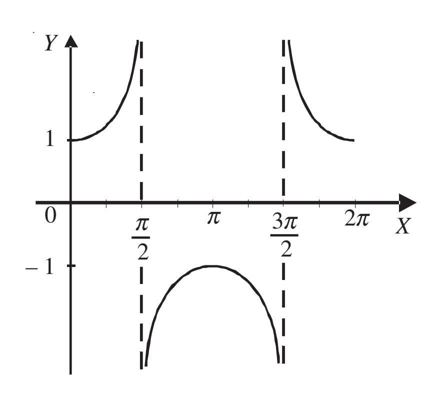
1. La función interseca al eje *X* en múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
2. La función es positiva en el primero y tercer cuadrante.
3. La función es negativa en el segundo y cuarto cuadrante.
4. La función tiene periodo igual a $\pi$ *rad.*
5. $x$ es un número real tal que $x \neq n\pi$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $-\infty < y < \infty$.

## Gráfica de $y = sec\ x$

**Tabulación**

| | 1o. cuadrante | | 2o. cuadrante | | 3o. cuadrante | | 4o. cuadrante | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
| Y | 1 | 14 | No existe | – 1.4 | –1 | –1.4 | No existe | 1.4 | 1 |

**Gráfica**




**Características**

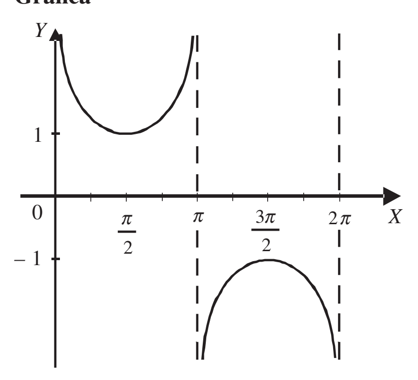
1. La función no interseca al eje *X.*
2. La función es positiva en el primero y cuarto cuadrantes.
3. La función es negativa en el segundo y tercer cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a $2\pi$ *rad.*
5. $x$ es un número real tal que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $y \geq 1$ o $y \leq -1$.

## Gráfica de $y = csc\ x$

**Tabulación**

| | 1o. cuadrante | | 2o. cuadrante | | 3o. cuadrante | | 4o. cuadrante | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
| Y | 1 | 1.4 | No existe | – 1.4 | – 1 | –1.4 | No existe | 1.4 | 1 |

**Gráfica**




**Características de la función cosecante**

1. La función no interseca al eje *X*.
2. La función es positiva en el primero y segundo cuadrantes.
3. La función es negativa en el tercero y cuarto cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a $2\pi$ *rad*.
5. El valor de $x$ es un número real tal que $x \neq n\pi$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $y \geq 1$ o $y \leq -1$.

## Resumen

La siguiente tabla muestra el periodo, la amplitud, las asíntotas verticales, el dominio y el rango de cada una de las funciones trigonométricas.

| | Periodo | Amplitud | Asíntotas verticales | Valores de *x* | Valores de *y* |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = sen\ x$ | $2\pi$ | 1 | No tiene | $\{x \in R\}$ | $\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$ |
| $y = cos\ x$ | $2\pi$ | 1 | No tiene | $\{x \in R\}$ | $\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$ |
| $y = tan\ x$ | $\pi$ | | $\frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z$ | $\left\{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$ | $\{y \in R\}$ |
| $y = ctg\ x$ | $\pi$ | | $n\pi, n \in Z$ | $\{x \in R / x \neq n\pi\}$ | $\{y \in R\}$ |
| $y = sec\ x$ | $2\pi$ | | $\frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z$ | $\left\{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$ | $\{y \in R / y \leq -1 \text{ o } y \geq 1\}$ |
| $y = csc\ x$ | $2\pi$ | | $n\pi, n \in Z$ | $\{x \in R / x \neq n\pi\}$ | $\{y \in R / y \leq -1 \text{ o } y \geq 1\}$ |

## Amplitud, periodo y desplazamiento de fase

Si $y = a\ sen\ bx$, o bien $y = a\ cos\ bx$, para $a,\ b \in R$, distintos de cero, entonces la gráfica tiene amplitud $|a|$, y periodo $\frac{2\pi}{|b|}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula la amplitud, el periodo y traza la gráfica de $y = 4\ sen\ 2x$.

**Solución**

De $y = 4\ sen\ 2x$ se obtiene $a = 4$ y $b = 2$, los cuales al sustituir en las fórmulas se determinan la amplitud y el periodo:

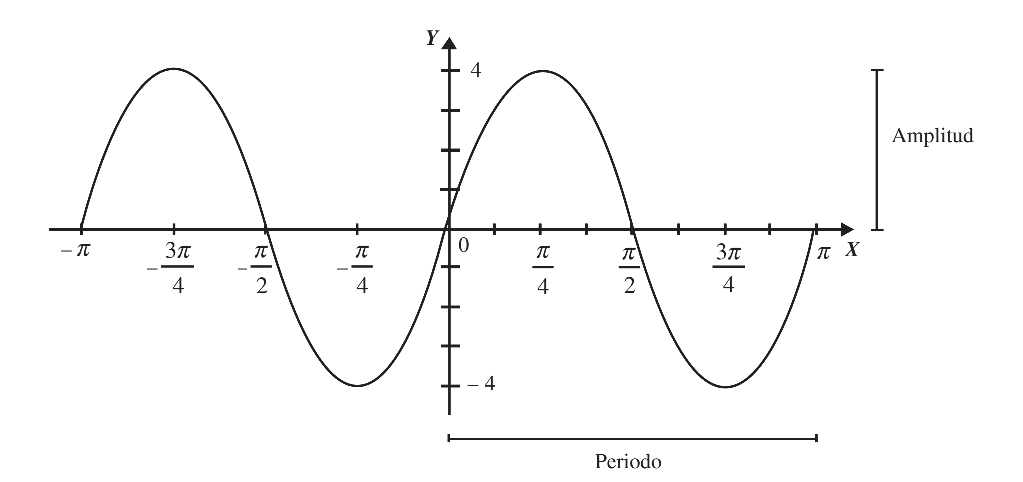
Amplitud: $|a| = |4| = 4$ Periodo: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Luego, la gráfica tiene amplitud 4 y periodo π.

**Tabulación**

| X | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 4 | 0 | – 4 | 0 | 4 | 0 | – 4 | 0 |

**Gráfica**



2 Calcula la amplitud, el periodo y traza la gráfica de $y = 2\ sen\ \frac{1}{2}x$.

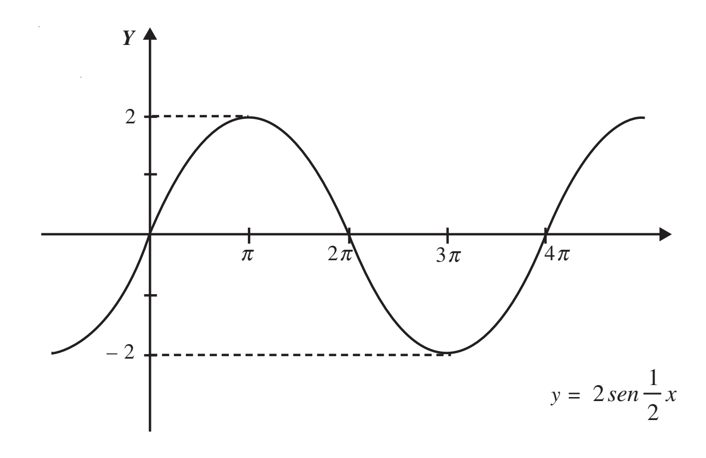
**Solución**

De $y = 2\ sen\ \frac{1}{2}x$ se obtiene $a = 2$ y $b = \frac{1}{2}$, los cuales al sustituirlos en las fórmulas se determinan la amplitud y el periodo:

$$\text{Amplitud: } |a| = |2| = 2 \qquad \text{Periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Entonces, la gráfica tiene amplitud 2 y periodo $4\pi$.

| X | Y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1.41 |
| $\pi$ | 2 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 1.41 |
| $2\pi$ | 0 |
| $\frac{5\pi}{2}$ | –1.41 |
| $3\pi$ | –2 |
| $\frac{7\pi}{2}$ | –1.41 |
| $4\pi$ | 0 |




3 Determina la amplitud y el periodo de $y = \frac{2}{3}cos\frac{1}{3}x$.

**Solución**

En este caso $a = \frac{2}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$, por tanto,

$$\text{Amplitud} = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

Entonces, la gráfica tiene amplitud $\frac{2}{3}$ y periodo $6\pi$.

*Desplazamiento de fase* (desfasamiento)

**Caso 1.** Si $y = a\ sen\ (b\ x + c)$, o bien $y = a\ cos\ (b\ x + c)$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

El desplazamiento de fase se calcula resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$b\ x + c = 0 \qquad \text{y} \qquad b\ x + c = 2\pi$$

## Ejemplo

Calcula la amplitud, periodo y desplazamiento de fase y traza la gráfica de:

$$y = 3\ sen\ (2x + \frac{\pi}{2})$$

## Solución

$y = 3\ sen\ (2x + \frac{\pi}{2})$, tiene la forma de $y = a\ sen\ (bx + c)$ donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \frac{\pi}{2}$, por consiguiente:

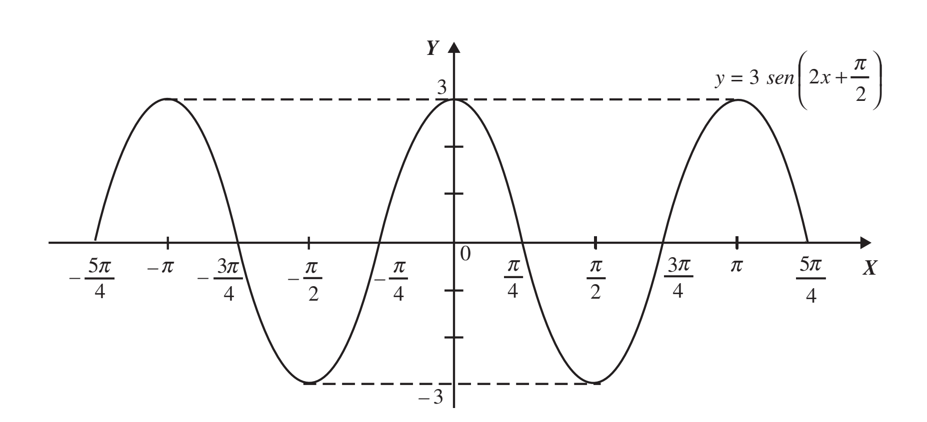
$$\text{Amplitud} = |a| = |3| = 3 \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Para determinar el desplazamiento de fase y el intervalo, se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Donde $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3}{4}\pi$, respectivamente.

| X | $-\frac{5}{4}\pi$ | $-\pi$ | $-\frac{3}{4}\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 3 | 0 | – 3 | 0 | 3 | 0 | – 3 | 0 | 3 | 0 | – 3 | 0 |




➲ **Caso 2.** Si $y = a\ tan\ (bx + c)$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces:

*a)* El periodo es $\frac{\pi}{|b|}$

Se pueden determinar las asíntotas verticales sucesivas en la gráfica resolviendo las ecuaciones:

$$b\,x + c = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad b\,x + c = \frac{\pi}{2}$$

*b)* El desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$

## Ejemplo

Calcula el periodo y traza la gráfica de $y = \frac{1}{2}\ tan\ (x + \frac{\pi}{4})$

**Solución**

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $c = \frac{\pi}{4}$, entonces,

*a)* El periodo es $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

*b)* Para determinar las asíntotas verticales sucesivas se resuelven las ecuaciones:

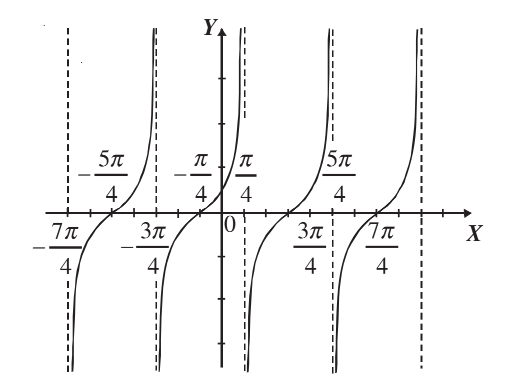
$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Donde $x = -\frac{3}{4}\pi$ y $x = \frac{\pi}{4}$, respectivamente, esto significa que cada $\pi$ *rad* se traza una asíntota.

*c)* En la función $a = \frac{1}{2}$, la gráfica de la ecuación en el intervalo $\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$ tiene la forma de $y = \frac{1}{2}\ tan\ x$, debido a que $c = \frac{\pi}{4}$ y $b = 1$, el desplazamiento de fase se define como $-\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$, por consiguiente, la gráfica se obtiene desplazando $y = \frac{1}{2}\ tan\ x$ hacia la izquierda una distancia de $\frac{\pi}{4}$

**Gráfica**

Finalmente se traza la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}\ tan\ (x + \frac{\pi}{4})$ con los datos ya obtenidos.




## Gráficas de $y = sen^{-1}\ x$, $y = cos^{-1}\ x$, $y = tan^{-1}\ x$

### *Seno inverso* ($y = sen^{-1}\ x$)

Se representa como $sen^{-1}$ y se define como sigue:

$$y = sen^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = sen\ y$$

donde $-1 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < \infty$

La expresión se puede escribir de las siguientes formas:

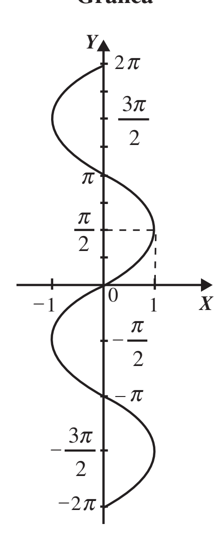
$$y = sen^{-1} x = arc\ sen\ x \quad \text{o} \quad y = ang\ sen\ x$$

Las cuales se leen, respectivamente, *arco seno de x* o *ángulo seno de x.*

**Tabulación**

| X | Y |
|---|---|
| 0 | $-\pi$ |
| –1 | $-\frac{1}{2}\pi$ |
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{4}\pi$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{6}\pi$ |
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}\pi$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{4}\pi$ |
| 1 | $\frac{1}{2}\pi$ |
| 0 | $\pi$ |

**Gráfica**




*Coseno inverso* ($y = cos^{-1}x$)

La expresión coseno inverso se define como:

$$y = cos^{-1}x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = cos\ y$$

donde $-1 \leq x < 1$, $-\infty < y < \infty$.

La expresión se puede escribir de la siguiente forma:

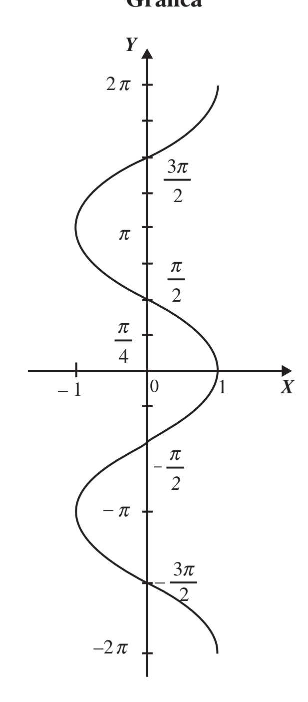
$$y = cos^{-1}\, x = arc\ cos\ x = ang\ cos\ x$$

Las cuales se leen, respectivamente, *arco coseno de x* o *ángulo coseno de x*.

**Tabulación**

| X | Y |
|---|---|
| –1 | $\pi$ |
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ |
| 0 | $\frac{1}{2}\pi$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}\pi$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{4}\pi$ |
| 1 | 0 |

**Gráfica**



*Tangente inversa* ($y = tan^{-1}x$)

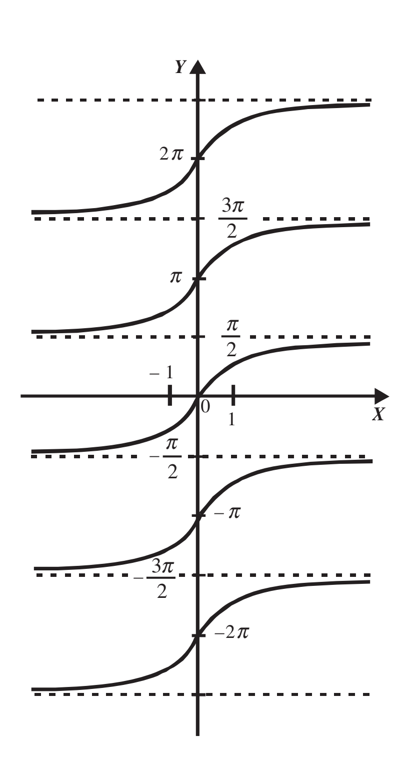
La expresión tangente inversa se define como:

$$y = tan^{-1}x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = tan\, y$$

donde $-\infty < x < \infty$, "$y$" es un real tal que $y \neq (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$ con $n \in Z$.

La tangente inversa se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = tan^{-1}x = arc\ tan\ x = ang\ tan\ x$$



# EJERCICIO 41

Obtén la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de las siguientes funciones:

1. $y = 2\ cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $y = 2\ sen\ 4x$
3. $y = \frac{4}{3}sen\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\pi\right)$
4. $y = 5sen\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$
5. $y = 4cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$
6. $y = -3\ cos\ 2x$
7. $y = \frac{3}{2}sen\left(\frac{1}{2}\pi - 5x\right)$
8. $y = -\frac{1}{3}cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}\right)$
9. $y = sen\left(\frac{x}{3}\right)$

Calcula el periodo, las asíntotas verticales y el desplazamiento de fase de las siguientes funciones:

10. $y = 3\ tan(2x)$
11. $y = 2\ tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
12. $y = \frac{1}{2}tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$
13. $y = -4\ tan\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$
14. $y = -\frac{3}{2}tan\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$
15. $y = tan\ (x - \pi)$

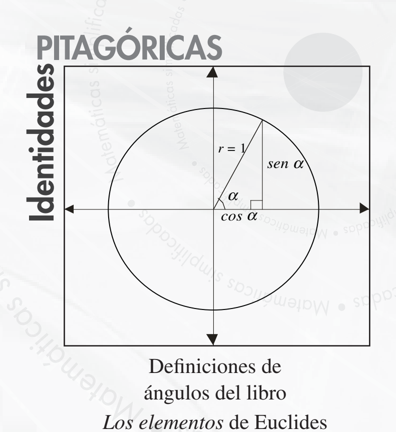
Traza la gráfica de:

16. $y = \frac{1}{2}sen\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$
17. $y = sen\ 2x$
18. $y = -3\ cos\left(2x + \frac{4}{3}\pi\right)$
19. $y = sen\left(\frac{x}{3}\right)$
20. $y = tan\ 2x$
21. $y = tan\left(\frac{x}{4}\right)$
22. $y = arc\ ctg\ x$
23. $y = sec^{-1}x$
24. $y = ang\ csc\ x$
25. $y = 2 + sen\ 3x$
26. $y = cos(2x) - 3$
27. $y = 1 + 2\ sen\ 4x$
28. $y = sen(3x - \pi)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 14

## IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS



Definiciones de
ángulos del libro
*Los elementos* de Euclides

Así se denomina a las identidades que resultan del teorema de Pitágoras y se obtienen del círculo unitario mediante un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y catetos con longitudes *sen* $\alpha$ y *cos* $\alpha$.

Por definición del teorema de Pitágoras:

$$(1)^2 = (sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2$$

$$1 = sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha$$

A la cual se le denomina identidad fundamental.

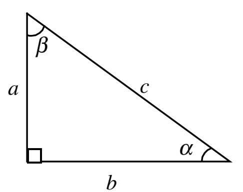
## Identidades trigonométricas

Son igualdades en las que intervienen funciones trigonométricas y es válida para cualquier valor angular.

### Obtención de las identidades trigonométricas básicas

Para determinar las identidades se hace uso de las definiciones de las funciones trigonométricas.

En el triángulo las funciones del ángulo $\alpha$ se definen:




$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \qquad tan\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad csc\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} \qquad ctg\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad sec\ \alpha = \frac{c}{b}$$

Al multiplicar una función directa por cada una de sus recíprocas se obtiene:

$$(sen\ \alpha)(csc\ \alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{a\cdot c}{c\cdot a} = 1$$

$$(cos\ \alpha)(sec\ \alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{b\cdot c}{c\cdot b} = 1$$

$$(tan\ \alpha)(ctg\ \alpha) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a\cdot b}{b\cdot a} = 1$$

Por tanto, se deducen las identidades recíprocas.

*Identidades recíprocas*

$$(sen\ \alpha)(csc\ \alpha) = 1 \qquad (cos\ \alpha)(sec\ \alpha) = 1 \qquad (tan\ \alpha)\ (ctg\ \alpha) = 1$$

Al realizar los respectivos despejes en las identidades anteriores, se obtienen las siguientes relaciones:

$$sen\ \alpha = \frac{1}{csc\ \alpha} \qquad tan\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha} \qquad csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$cos\ \alpha = \frac{1}{sec\ \alpha} \qquad ctg\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

*Identidades de cociente*

Si se realiza el cociente de la función seno ($sen\ \alpha$) por la función coseno ($cos\ \alpha$), se obtiene la función $tan\ \alpha$:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a}{b} = tan\ \alpha$$

De manera análoga se obtiene la función cotangente ($ctg\ \alpha$),

$$\frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b\cdot c}{a\cdot c} = \frac{b}{a} = ctg\ \alpha$$

Por tanto:

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad ; \quad ctg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

*Identidades pitagóricas*

En el triángulo se aplica el teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = c^2$ Se divide entre $c^2$ a ambos miembros.

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ Se aplica la ley de los exponentes.

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ Los cocientes son equivalentes a las funciones $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$, por consiguiente $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$

En forma semejante se obtienen las demás identidades pitagóricas, entonces:

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \quad ; \quad tan^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha \quad \text{y} \quad 1 + ctg^2\ \alpha = csc^2\ \alpha$$

De las identidades anteriores se realizan despejes, con el fin de obtener otras identidades:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha \qquad 1 + ctg^2\ \alpha = csc^2\alpha$$

$$sen\ \alpha = \pm\sqrt{(1 - cos^2\alpha)} \qquad tan\ \alpha = \pm\sqrt{(sec^2\alpha - 1)} \qquad ctg\ \alpha = \pm\sqrt{(csc^2\alpha - 1)}$$

$$cos\ \alpha = \pm\sqrt{(1 - sen^2\alpha)} \qquad sec\ \alpha = \pm\sqrt{(tan^2\alpha + 1)} \qquad csc\ \alpha = \pm\sqrt{(ctg^2\alpha + 1)}$$

## Demostración de identidades trigonométricas

Para realizar la demostración de una identidad trigonométrica se aplican procesos algebraicos como la factorización, las operaciones entre fracciones así como su simplificación, además de las identidades trigonométricas básicas.

La aplicación de estos procesos depende de la identidad en sí; esto significa que no existe un orden o procedimiento específico, debido a esta situación sugerimos iniciar con el lado más complejo o elaborado de la igualdad, con el fin de llegar a demostrar el lado más sencillo, como a continuación se ejemplifica.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente identidad: $sen\ x = \frac{cos\ x}{ctg\ x}$

**Demostración**

Se trabaja del segundo hacia el primer miembro, se sustituye $ctg\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}$ y realiza el cociente correspondiente:

$$sen\ x = \frac{cos\ x}{ctg\ x} \quad \rightarrow \quad sen\ x = \frac{cos\ x}{\frac{cos\ x}{sen\ x}} \quad \rightarrow \quad sen\ x = \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{cos\ x}$$

$$sen\ x \equiv sen\ x$$

Por tanto queda demostrada la identidad.

2 Demuestra la siguiente identidad: $sen\,\beta + cos\,\beta\; ctg\,\beta = csc\,\beta$

**Demostración**

Para esta identidad se trabaja con el primer miembro para obtener el segundo.

$sen\,\beta + cos\,\beta\; ctg\,\beta = csc\,\beta$ se utiliza la identidad del cociente $ctg\,\beta = \dfrac{cos\,\beta}{sen\,\beta}$

$sen\,\beta + cos\,\beta \cdot \dfrac{cos\,\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se efectúa el producto.

$sen\,\beta + \dfrac{cos^2\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se realiza la suma fraccionaria.

$\dfrac{sen^2\beta + cos^2\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se sustituye la identidad pitagórica $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$

$\dfrac{1}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se aplica $\dfrac{1}{sen\,\beta} = csc\,\beta$

$csc\,\beta \equiv csc\,\beta$

Finalmente, queda demostrada la identidad.

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{csc\,\alpha}{tan\,\alpha + ctg\,\alpha} = cos\,\alpha$$

**Demostración**

Se utiliza el primer miembro de la igualdad y se realizan los siguientes cambios:

$$\frac{csc\,\alpha}{tan\,\alpha + ctg\,\alpha} = cos\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{sen\,\alpha}}{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}} = cos\,\alpha$$

Se realiza la suma del denominador, $\dfrac{\frac{1}{sen\,\alpha}}{\frac{sen^2\alpha + cos^2\alpha}{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot}} = cos\,\alpha$

Y posteriormente la división, $\dfrac{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha \cdot (sen^2\alpha + cos^2\alpha)} = cos\,\alpha$

Se sustituye $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $\dfrac{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha\,(1)} = cos\,\alpha$

Y finalmente se simplifica la fracción: $cos\,\alpha \equiv cos\,\alpha$

4 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{cos\ x}{1-\ sen\ x} = \frac{1+sen\ x}{cos\ x}$$

**Demostración**

Se utiliza el segundo miembro como base para la demostración:

$$\frac{cos\ x}{1-\ sen\ x} = \frac{1+sen\ x}{cos\ x}$$

$$\frac{cos\ x}{1-sen\ x} = \frac{1+sen\ x}{cos\ x}\cdot\frac{1-sen\ x}{1-sen\ x}$$ Se multiplica por el conjugado del numerador.

$$\frac{cos\ x}{1-sen\ x} = \frac{1-sen^2 x}{(cos\ x)(1-sen\ x)}$$ se reemplaza $1 - sen^2 x = cos^2 x$.

$$\frac{cos\ x}{1-sen\ x} = \frac{cos^2 x}{(cos\ x)(1-sen\ x)}$$ se simplifica la fracción.

$$\frac{cos\ x}{1-sen\ x} \equiv \frac{cos\ x}{1-sen\ x}$$ se demuestra la identidad.

5 Demuestra la siguiente identidad:

$$2cos^2 x - 1 = 1 - 2sen^2 x$$

**Demostración**

En este caso se utiliza el primer miembro para obtener el segundo.

$$2cos^2 x - 1 = 1 - 2sen^2 x$$ Se utiliza la identidad $1 = sen^2 x + cos^2 x$.

$$2cos^2 x - (sen^2 x + cos^2 x) = 1 - 2sen^2 x$$

$$2cos^2 x - sen^2 x - cos^2 x = 1 - 2sen^2 x$$ se simplifican términos semejantes.

$$cos^2 x - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x$$ se emplea $cos^2 x = 1 - sen^2 x$.

$$1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x$$

$$1 - 2sen^2 x \equiv 1 - 2sen^2 x$$

Por lo que la identidad queda demostrada.

6 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{1+2sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$

**Solución**

Se utiliza el lado izquierdo para demostrar la identidad:

$$\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{1+2sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ Se emplea la identidad $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$$\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{sen^2\alpha+2sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha+cos^2\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ se factoriza denominador y numerador

$$\frac{(cos\,\alpha-sen\,\alpha)(cos\,\alpha+sen\,\alpha)}{(sen\,\alpha+cos\,\alpha)^2}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ se simplifica la fracción

$$\frac{cos\,\alpha-sen\,\alpha}{sen\,\alpha+cos\,\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ se divide entre $cos\,\alpha$ numerador y denominador.

$$\frac{\dfrac{cos\,\alpha-sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}{\dfrac{sen\,\alpha+cos\,\alpha}{cos\,\alpha}}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}\quad\rightarrow\quad\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}\equiv\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$

## EJERCICIO **42**

Demuestra las siguientes identidades:

1. $sen\,x\,(1 + cot\,x) = sen\,x + cos\,x$
2. $(1 + tan^2 x)\,cos\,x = sec\,x$
3. $\left(\dfrac{sen\,x}{tan\,x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{csc\,x}\right)^2=1$
4. $(sec\,x + sen^2 x + cos^2 x)(sec\,x - 1) = tan^2 x$
5. $csc\,\theta\,(1 - cos^2\theta) = sen\,\theta$
6. $\dfrac{ctg\,\alpha}{cos\,\alpha}=csc\,\alpha$
7. $\dfrac{1-sen^2\phi}{sec^2\phi}=cos^4\phi$
8. $ctg^2 y - cos^2 y = ctg^2 y\,cos^2 y$
9. $sec\,y=\dfrac{ctg\,y+tan\,y}{csc\,y}$
10. $\dfrac{1+cos\,\omega}{sen\,\omega}=\dfrac{sen\,\omega}{1-cos\,\omega}$
11. $sec\,\beta\cdot sen\,\beta\cdot ctg\,\beta = 1$

12. $ctg\ x - tan\ x = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{sen\ x \cdot \cos x}$

13. $2csc^2 y = \dfrac{1}{1-\cos y} + \dfrac{1}{1+\cos y}$

14. $\dfrac{1}{csc\ \alpha + ctg\ \alpha} = csc\ \alpha - ctg\ \alpha$

15. $3sen^2 x - 9sen\ x \cdot ctg\ x + 7\cos^2 x - 4\cos x = (4\cos x - 1)(\cos x - 3)$

16. $\cos^2 x + \dfrac{tan^2 x}{1+sec\ x} + sen^2 x = sec\ x$

17. $\cos^4 x + sen^2 x + sen^2 x \cos^2 x = 1$

18. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = 2csc\ \beta$

19. $\cos x\,(2sec\ x + tan\ x)(sec\ x - 2tan\ x) = 2\cos x - 3tan\ x$

20. $1 + \dfrac{sen\ x \cdot ctg^2 x}{1+sen\ x} = csc\ x$

21. $2(sen^6 x + \cos^6 x) - 3(sen^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

22. $sen\ x\,(1 + ctg\ x) = \cos^3 x\,(1 + tan\ x) + sen^3 x\,(1 + ctg\ x)$

23. $(csc\ x - sen\ x)^2 + (sec\ x - \cos x)^2 = tan^2 x + ctg^2 x - 1$

24. $\dfrac{2 - csc^2 x}{tan\ x - 1} - csc^2 x + 1 = ctg\ x$

25. $\dfrac{tan\ x + ctg\ x}{csc\ x - sen\ x} = sec^3 x$

26. $\dfrac{\cos x - sec\ x}{sen\ x - csc\ x} = sec\ x\,(sec^2 x - 1)\ sen\ x$

27. $sec^3 x = \dfrac{sec^3 x - sec\ x\ tan^2 x}{(1-sen\ x)(1+sen\ x)}$

28. $sen^2 x + tan^2 x + \cos^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

29. $sec^2 x + csc^2 x = (csc\ x\ sec\ x)^2$

30. $sec^2 x \equiv sen\ x\ csc\ x + sen\ x\,(sen\ x\ sec^2 x)$

31. $\dfrac{1}{csc\ x + ctg\ x} - \dfrac{1}{ctg\ x - csc\ x} = \dfrac{2}{sen\ x}$

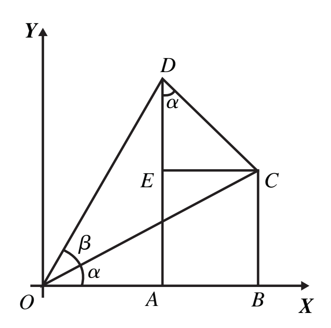
32. $1 - ctg\ x = \sqrt{(csc^2 x - 2ctg\ x)}$

**Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones**

## Obtención de las identidades trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Considerando que $\overline{OB} \perp \overline{BC}$, $\overline{OC} \perp \overline{DC}$, se realiza una proyección de $\overline{OD}$ con el eje $X$ y $\overline{OA} \perp \overline{AD}$, $\overline{DE} \perp \overline{CE}$, donde $\overline{AE} = \overline{BC}$, así como $\overline{AB} = \overline{CE}$

Para obtener *sen* $(\alpha + \beta)$




$sen\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OD}}$ pero $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}$;

entonces,

$$sen\,(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE} + \overline{ED}}{\overline{OD}} \qquad sen\,(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}$$

Para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos $\alpha$ y $\beta$

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \ldots(1) \qquad sen\,\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \ldots(3)$$

$$cos\,\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \ldots(2) \qquad cos\,\beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} \ldots(4)$$

Si se realiza el producto de (1) y (4); (2) y (3) se tiene:

$$(sen\,\alpha)(cos\,\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} \ldots(5)$$

$$(sen\,\beta)(cos\,\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} \ldots(6)$$

Al sumar (5) y (6):

$$(sen\,\alpha)(\,cos\,\beta) + (sen\,\beta)(\,cos\,\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene *sen* $(\alpha + \beta)$, entonces:

$$\mathbf{sen\,(\alpha + \beta) = (sen\,\alpha)(cos\,\beta) + (sen\,\beta)(cos\,\alpha)}$$

Para obtener *cos* $(\alpha + \beta)$

$$cos\,(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}; \qquad \text{pero} \qquad \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB};$$

entonces,

$$cos\,(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB} - \overline{AB}}{\overline{OD}} \qquad cos\,(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}}$$

Si se realiza el producto de (2) y (4); (1) y (3) se tiene:

$$(\cos\alpha)(\cos\beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \quad \ldots (7)$$

$$(\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta) = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} \quad \ldots (8)$$

Al restar (8) de (7):

$$(\cos\alpha)(\cos\beta) - (\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene $\cos(\alpha+\beta)$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha)(\cos\beta) - (\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta)}$$

Para obtener $\tan(\alpha+\beta)$, se emplean identidades básicas:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}; \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{(\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta)+(\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha)}{(\cos\alpha)(\cos\beta)-(\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta)}$$

Si se divide entre $(\cos\alpha)(\cos\beta) \neq 0$, entonces,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta)+(\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha)}{(\cos\alpha)(\cos\beta)}}{\dfrac{(\cos\alpha)(\cos\beta)-(\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta)}{(\cos\alpha)(\cos\beta)}} = \frac{\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta)}{(\cos\alpha)(\cos\beta)}+\dfrac{(\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha)}{(\cos\alpha)(\cos\beta)}}{\dfrac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{(\cos\alpha)(\cos\beta)}-\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta)}{(\cos\alpha)(\cos\beta)}};$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha)}+\dfrac{(\operatorname{sen}\beta)}{(\cos\beta)}}{1-\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha)}\cdot\dfrac{(\operatorname{sen}\beta)}{(\cos\beta)}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Finalmente se deduce que:

$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

Para obtener las identidades trigonométricas de la diferencia se emplean las identidades de los ángulos negativos en función de ángulos positivos, es decir:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \tan(-x) = -\tan(x)}$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = (\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta) + (\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha)$$

Se cambia $\beta$ por $-\beta$ y se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = (\operatorname{sen}\alpha)(\cos(-\beta)) + (\operatorname{sen}(-\beta))(\cos\alpha)$$
$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = (\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta) - (\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha)}$$

De una manera semejante se realiza la diferencia para las demás funciones trigonométricas y se obtiene:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha)(\cos\beta) + (\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta)}$$

$$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

**Resumen de fórmulas**

Identidades trigonométricas de la suma de ángulos:

$$sen\ (\alpha+\beta)=(sen\ \alpha)(cos\ \beta)+(sen\ \beta)(cos\ \alpha)$$
$$cos\ (\alpha+\beta)=(cos\ \alpha)(cos\ \beta)-(sen\ \alpha)(sen\ \beta)$$
$$tan\ (\alpha+\beta)=\frac{tan\ \alpha+tan\ \beta}{1-tan\ \alpha\cdot tan\ \beta}$$

Identidades trigonométricas de la diferencia de ángulos:

$$sen\ (\alpha-\beta)=(sen\ \alpha)(cos\ \beta)-(sen\ \beta)(cos\ \alpha)$$
$$cos\ (\alpha-\beta)=(cos\ \alpha)(cos\ \beta)+(sen\ \alpha)(sen\ \beta)$$
$$tan\ (\alpha-\beta)=\frac{tan\ \alpha-tan\ \beta}{1+tan\ \alpha\cdot tan\ \beta}$$

## Valor de una función trigonométrica para la suma y la diferencia de ángulos

Los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables se emplean para obtener el valor de una función cuyo ángulo se pueda descomponer en una suma o diferencia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el valor de $sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$.

**Solución**

Al aplicar la identidad para el seno de la suma de ángulos, se determina que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=sen\ \frac{\pi}{4}\ cos\ \frac{\pi}{6}+cos\ \frac{\pi}{4}\ sen\ \frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2 Calcula el valor exacto de $tan\ (90°-60°)$.

**Solución**

Se aplica la identidad de la tangente de la diferencia de ángulos y se obtiene:

$$tan\ (90°-60°)=\frac{tan\ 90°-tan\ 60°}{1+tan\ 90°tan\ 60°}$$

La $tan$ 90° no está definida, por consiguiente, se multiplica la identidad $tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\alpha-tan\beta}{1+tan\alpha\, tan\beta}$ por la unidad expresada como $1=\frac{ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha}$

$$tan(\alpha-\beta)=\left(\frac{tan\alpha-tan\,\beta}{1+tan\,\alpha\, tan\,\beta}\right)\left(\frac{ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha}\right)=\frac{tan\,\alpha\, ctg\,\alpha-tan\,\beta\, ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha+tan\,\alpha\, tan\,\beta\, ctg\,\alpha}$$

Por identidades $tan\ \alpha\ ctg\ \alpha=1$, entonces:

$$tan(\alpha-\beta)=\frac{1-tan\beta\ ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha+1(tan\,\beta)}=\frac{1-tan\beta\, ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha+tan\,\beta}$$

Sustituyendo $\alpha=90°$, $\beta=60°$ y posteriormente los valores de $ctg\ 90°=0$ y $tan\,60°=\sqrt{3}$, se obtiene como resultado:

$$tan(90°-60°)=\frac{1-tan\,60°\ ctg\,90°}{ctg\,90°+tan\,60°}=\frac{1-(\sqrt{3})(0)}{0+\sqrt{3}}=\frac{1-0}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3 Expresa en función de $x$ la identidad $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$

**Solución**

Se aplica la identidad del coseno de la diferencia de ángulos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Se obtiene:

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \cos\frac{3}{2}\pi\cos x + \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\operatorname{sen} x = (0)\cos x + (-1)\operatorname{sen} x$$
$$= 0 - \operatorname{sen} x$$
$$= -\operatorname{sen} x$$

Resulta que, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\operatorname{sen} x$

## EJERCICIO 43

Aplica las identidades de suma o diferencias de ángulos y determina el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
3. $\operatorname{sen}(45° + 60°)$
4. $\tan(45° + 90°)$
5. $\sec\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$
6. $\cos(270° - 45°)$
7. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$
8. $\csc\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$
9. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)$
10. $\operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{7}{4}\pi\right)$

Expresa en función del ángulo indicado las siguientes expresiones:

11. $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$
12. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$
13. $\operatorname{sen}(2\pi + \beta)$
14. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
15. $\csc\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$
16. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$
17. $\cos\left(x - \frac{8}{3}\pi\right)$
18. $\sec(\pi + 2\omega)$
19. $\tan(3\pi - \alpha)$
20. $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Aplicación de las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Para determinar el valor de una función trigonométrica de determinados ángulos, éstos se descomponen como la suma o la diferencia de dos ángulos notables.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el *cos* 75° y expresa 75° como una suma de ángulos notables.

**Solución**

El ángulo de 75°, como la suma de ángulos notables, es 75° = 30° + 45°

Entonces,

$$\cos 75° = \cos (30° + 45°)$$

Se emplea la identidad $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$$\cos(75°) = \cos(30° + 45°) = (\cos 30°)(\cos 45°) - (\operatorname{sen} 30°)(\operatorname{sen} 45°)$$

Al sustituir el valor de cada función trigonométrica, se determina que:

$$\cos 75° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 Determina *tan* 15° y expresa 15° como una diferencia de ángulos notables.

**Solución**

El ángulo de 15° se expresa como 60° – 45°, entonces:

$$\tan(15°) = \tan(60° - 45°)$$

Se emplea la identidad $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ en la que se sustituyen los valores de los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$,

$$\tan(15°) = \tan(60° - 45°) = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 45°}$$

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables:

$$\tan(15°) = \tan(60° - 45°) = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\left(\sqrt{3}\right)(1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Al racionalizar el denominador, se obtiene:

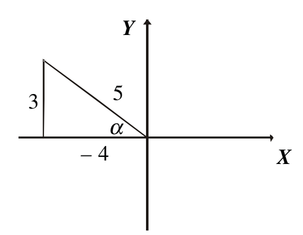
$$\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$$

3 Calcula las funciones trigonométricas básicas de $(\alpha + \beta)$ si sabes que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$ para $\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $\tan\beta = \dfrac{5}{12}$ para $\pi \leq \beta \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

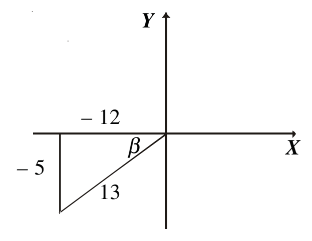
**Solución**

Se obtienen las funciones de los ángulos $\alpha$ y $\beta$, con el teorema de Pitágoras y se respetan los signos de las funciones en los cuadrantes indicados.

Para *sen* $\alpha$, el segundo cuadrante




Para *tan* $\beta$, el tercer cuadrante




***Funciones del ángulo*** $\alpha$: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ y $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$

***Funciones del ángulo*** $\beta$: $\operatorname{sen}\beta = -\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$ y $\tan\beta = \dfrac{5}{12}$

Por consiguiente, estos valores se sustituyen en las identidades de sumas de ángulos.

$$sen\ (\alpha+\beta) = (sen\ \alpha)(cos\ \beta) + (sen\ \beta)(cos\ \alpha) = \left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= -\frac{36}{65}+\frac{20}{65} = -\frac{16}{65}$$

$$cos\ (\alpha+\beta) = (cos\ \alpha)(cos\ \beta) - (sen\ \alpha)(sen\ \beta) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{48}{65}+\frac{15}{65} = \frac{63}{65}$$

$$tan\ (\alpha+\beta) = \frac{tan\ \alpha + tan\ \beta}{1 - tan\ \alpha \cdot tan\ \beta} = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{12}\right)} = \frac{-\frac{4}{12}}{\frac{63}{48}} = -\frac{16}{63}$$

Por tanto, los resultados son:

$$sen\ (\alpha+\beta) = -\frac{16}{65},\ cos\ (\alpha+\beta) = \frac{63}{65}\ \text{y}\ tan\ (\alpha+\beta) = -\frac{16}{63}$$

4 Demuestra la siguiente identidad:

$$arc\ tan\ \frac{2\sqrt{t}}{t-1} - arc\ ctg\ \sqrt{t} = arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

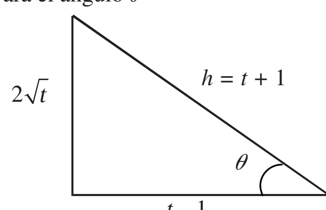
**Solución**

Sean $\theta = arc\ tan\ \frac{2\sqrt{t}}{t-1}$ y $\alpha = arc\ ctg\ \sqrt{t}$, entonces $\theta - \alpha = arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ que es la identidad a demostrar donde

$$tan\ \theta = \frac{2\sqrt{t}}{t-1}\ \ \text{y}\ \ ctg\ \alpha = \sqrt{t}$$

Se construyen los triángulos respectivamente,

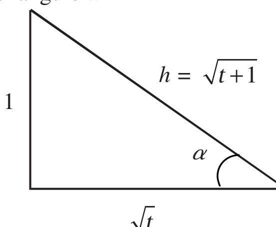
Para el ángulo $\theta$




Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 = (2\sqrt{t})^2 + (t-1)^2$$
$$h = \sqrt{4t + t^2 - 2t + 1}$$
$$h = \sqrt{t^2 + 2t + 1}$$
$$h = \sqrt{(t+1)^2} = t + 1$$

Para el ángulo $\alpha$




Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 = (\sqrt{t})^2 + (1)^2$$
$$h = \sqrt{t+1}$$

Se realiza la demostración aplicando seno a $(\theta - \alpha)$

$$sen\ (\theta - \alpha) = sen\ \theta\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \theta$$

Pero $sen\ \theta = \frac{2\sqrt{t}}{t+1}$, $cos\ \theta = \frac{t-1}{t+1}$, $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}$ y $sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, entonces

$$sen\ (\theta - \alpha) = \frac{2\sqrt{t}}{t+1}\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\cdot\frac{t-1}{t+1} = \frac{2t - t + 1}{(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{(t+1)}{(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Donde,

$$sen\ (\theta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad\rightarrow\quad \theta - \alpha = arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Así queda demostrada la identidad.

# EJERCICIO 44

Determina los valores de las siguientes funciones trigonométricas y expresa los ángulos como suma o diferencia:

1. $\tan 105°$
2. $\cot 75°$
3. $\csc 15°$
4. $\sec 105°$
5. $\tan 255°$
6. $\cos 285°$
7. $\tan 345°$
8. $\sec 165°$
9. $\csc 255°$
10. $\operatorname{sen} 165°$
11. Si $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ con $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $\tan\beta = \frac{2}{3}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ y $\tan(\alpha+\beta)$.
12. Si $\tan\alpha = 1$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $\sec\beta = 2$ con $\frac{3}{2}\pi \leq \beta \leq 2\pi$, halla $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ y $\tan(\alpha-\beta)$.
13. Si $\sec\alpha = -\frac{3}{2}$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{2}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las seis funciones trigonométricas de $(\alpha+\beta)$ y $(\alpha-\beta)$.

Demuestra las siguientes identidades:

14. $\left[\operatorname{sen}(\pi-x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\left[\operatorname{sen} x - \cos x\right] \equiv 1 - 2\cos^2 x$
15. $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) - \cos(\pi-x)\right] - \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right] \equiv 2\operatorname{sen} x$
16. $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \operatorname{sen}(\pi+x)\right] - \left[\cos(\pi+x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right] \equiv 3\operatorname{sen} x + \cos x$
17. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sec\beta} + \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\csc\beta} \equiv 1$
18. $\tan(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}(\pi-\alpha) \equiv 1 - \cos^2\alpha$
19. $\left[\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta\right]^2 - 2\cos(\alpha+\beta) + \left[\cos\alpha + \cos\beta\right]^2 \equiv 2$
20. $\dfrac{\sec(\pi-\omega)}{\csc\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)} + \dfrac{\operatorname{sen}(\pi+\omega)}{\cos(\pi+\omega)} \equiv \tan\omega - 1$
21. $\csc(\pi-y) + \dfrac{\cos(\pi+y)}{\tan(\pi+y)} \equiv \operatorname{sen} y$
22. $\dfrac{\csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - \dfrac{\tan(\pi-x)}{\operatorname{sen} x} \equiv \sec x\cdot(\csc x + 1)$
23. $\left[\operatorname{sen}(x+2\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2 + \dfrac{4\cos(x-2\pi)}{\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \equiv 4$
24. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta-\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta-\gamma)} \equiv \tan\alpha$

25. $sen(\theta+\omega)\cdot sen(\theta-\omega) \equiv (sen\,\theta + sen\,\omega)(sen\,\theta - sen\,\omega)$

26. $tan\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right) + tan\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) \equiv -\frac{2}{sen^2\,\delta - cos^2\,\delta}$

27. $4\,arc\,tan\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi \equiv 4\,arc\,tan\left(-\frac{1}{5}\right)$

28. $sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} \equiv -sen^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

29. $cos^{-1}\frac{12}{13} - cos^{-1}\frac{33}{65} \equiv -sen^{-1}\frac{3}{5}$

30. $sec^{-1}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} - ctg^{-1}t \equiv 0,\ t>0$

31. $arc\,sen\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - arc\,cos\frac{t^2-1}{t^2+1} \equiv -arc\,tan\frac{1}{t},\ t>0$

32. $sen^{-1}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \equiv sen^{-1}(1),\ t>0$

33. $sen^{-1}\sqrt{\frac{t}{t+1}} - sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{t+1}} \equiv sen^{-1}\frac{t-1}{t+1},\ t\geq 1$

34. $arc\,tan\,s - arc\,sen\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \equiv arc\,tan\frac{s-t}{1+st},\ s>0$ y $t>0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Funciones trigonométricas del ángulo doble

Estas funciones se obtienen a partir de las identidades de la suma de ángulos, como se muestra a continuación:

### Seno del ángulo doble *sen* (2$\alpha$)

Para obtener el *sen* (2$\alpha$) se emplea la identidad *sen* ($\alpha+\beta$) donde $\beta=\alpha$

Entonces:

$$sen\,(\alpha+\beta) = (sen\,\alpha)(cos\,\beta) + (sen\,\beta)(cos\,\alpha)$$
$$sen\,(2\alpha) = (sen\,\alpha)(cos\,\alpha) + (sen\,\alpha)(cos\,\alpha)$$
$$\mathbf{sen\,(2\alpha) = 2\,(sen\,\alpha)(cos\,\alpha)}$$

### Coseno del ángulo doble *cos* (2$\alpha$)

Para obtener *cos* (2$\alpha$) se emplea la identidad *cos* ($\alpha+\beta$) donde $\beta=\alpha$

Entonces:

$$cos\,(\alpha+\beta) = (cos\,\alpha)(cos\,\beta) - (sen\,\alpha)(sen\,\beta)$$
$$cos\,(2\alpha) = (cos\,\alpha)(cos\,\alpha) - (sen\,\alpha)(sen\,\alpha)$$
$$\mathbf{cos\,(2\alpha) = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha}$$ (con el empleo de identidades trigonométricas básicas)
$$\mathbf{cos\,(2\alpha) = 1 - 2\,sen^2\,\alpha}$$
$$\mathbf{cos\,(2\alpha) = 2\,cos^2\,\alpha - 1}$$

## Tangente del ángulo doble *tan* (2$\alpha$)

Para obtener *tan* (2$\alpha$) se emplea la identidad *tan* ($\alpha + \beta$) donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$tan\,(\alpha+\beta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\cdot tan\,\beta}$$

$$tan\,(2\alpha)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\alpha}{1-tan\,\alpha\cdot tan\,\alpha}$$

$$\mathbf{tan\,(2\alpha)}=\frac{2tan\,\alpha}{1-tan^2\,\alpha}$$

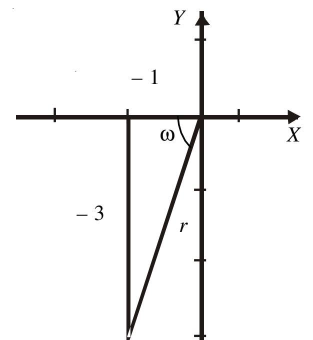
**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Obtén las funciones trigonométricas de (2$\omega$), si se sabe que *tan* $\omega = 3$, para $\pi \le \omega \le \frac{3\pi}{2}$

**Solución**

En este caso el ángulo $\omega$ se encuentra en el tercer cuadrante, entonces: *tan* $\omega = \frac{-3}{-1}$




Por el teorema de Pitágoras

$$r^2 = (-1)^2 + (-3)^2$$
$$r^2 = 1 + 9$$
$$r = \sqrt{10}$$

Se obtienen las funciones trigonométricas de $\omega$:

$$sen\,\omega=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10},\quad cos\,\omega=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}\quad \text{y}\quad tan\,\omega=\frac{-3}{-1}=3$$

Por tanto,

$$sen\,2\omega=2\,(sen\,\omega)(cos\,\omega)=2\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{(6)(10)}{100}=\frac{3}{5}$$

$$cos\,2\omega=cos^2\,\omega-sen^2\,\omega=\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2=\frac{10-90}{100}=-\frac{4}{5}$$

$$tan\,2\omega=\frac{2tan\,\omega}{1-tan^2\,\omega}=\frac{2\cdot(3)}{1-(3)^2}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}$$

2 Demuestra la siguiente identidad:

$$sen^6\,x+cos^6\,x=1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$$

**Demostración**

$(sen^2\,x+cos^2\,x)(sen^4\,x-sen^2\,x\cdot cos^2\,x+cos^4\,x)=1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$

$(1)(sen^4\,x-sen^2\,x\cdot cos^2\,x+cos^4\,x)=1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$

$sen^4\,x-sen^2\,x\cdot cos^2\,x+cos^4\,x+3sen^2\,x\cdot cos^2\,x-3sen^2\,x\cdot cos^2\,x=1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$

$(sen^4\,x+2sen^2\,x\cdot cos^2\,x+cos^4\,x)-3sen^2\,x\cdot cos^2\,x=1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$

$(sen^2\,x+cos^2\,x)^2-3sen^2\,x\cdot cos^2\,x=1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$

$1-3sen^2\,x\cdot cos^2\,x=1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$ (pero $sen\,2x = 2\,sen\,x\cdot cos\,x$)

$1-\frac{3}{4}sen^2\,2x\equiv 1-\frac{3}{4}sen^2\,2x$

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x} = sen\ 2x$$

**Demostración**

Se inicia con la sustitución de las siguientes identidades:

$$1 = sen^2 x + \cos^2 x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x \quad \text{y} \quad ctg\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y se simplifica:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x} = \frac{(sen^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - sen^2 x)}{ctg\ x} = \frac{2\cos^2 x}{\frac{\cos x}{sen\ x}} = \frac{2\cos^2 x\ sen\ x}{\cos x} = 2sen\ x \cos x$$

Pero 2 *sen x cos x* = *sen* 2*x*, por consiguiente se comprueba la igualdad:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x} \equiv sen\ 2x$$

## Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo

### Seno de la mitad de un ángulo: $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener el $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha) = 1 - 2\ sen^2\alpha$, entonces se realiza el cambio $\alpha = \frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \cos\omega = 1 - 2sen^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Se despeja $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\boldsymbol{sen\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}}$

### Coseno de la mitad de un ángulo: $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Entonces se realiza el cambio $\alpha = \frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 \quad \rightarrow \quad \cos\omega = 2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1$$

Se despeja $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}}$

### Tangente de la mitad de un ángulo: $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplean identidades trigonométricas básicas:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos\omega}{2}}{\frac{1+\cos\omega}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{(1-cos\ \omega)\cdot(1-cos\ \omega)}{(1+cos\ \omega)\cdot(1-cos\ \omega)}} = \sqrt{\frac{(1-cos\ \omega)^2}{1-cos^2\ \omega}} = \sqrt{\frac{(1-cos\ \omega)^2}{sen^2\ \omega}} = \frac{1-cos\ \omega}{sen\ \omega}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\ \omega}{1+cos\ \omega}} = \frac{1-cos\ \omega}{sen\ \omega}}$$

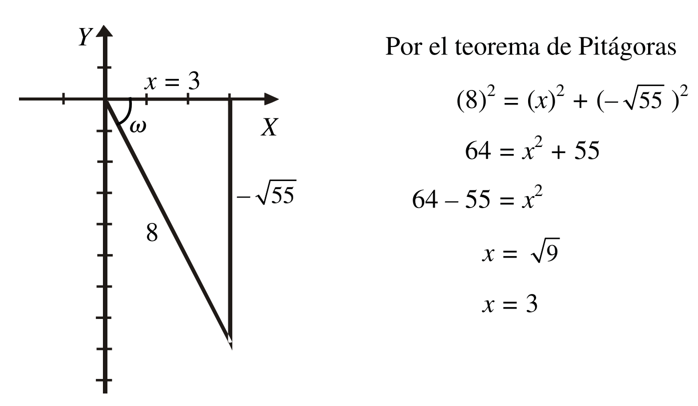
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén las funciones trigonométricas básicas de $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ si se sabe que: $sen\ \omega = -\frac{\sqrt{55}}{8}$ para $270° \leq \omega \leq 360°$.

**Solución**

Se ubica el ángulo $\omega$ en el cuarto cuadrante:




Por el teorema de Pitágoras

$$(8)^2 = (x)^2 + (-\sqrt{55})^2$$
$$64 = x^2 + 55$$
$$64 - 55 = x^2$$
$$x = \sqrt{9}$$
$$x = 3$$

Se obtienen las funciones trigonométricas del ángulo $\omega$:

$$sen\ \omega = -\frac{\sqrt{55}}{8} \qquad cos\ \omega = \frac{3}{8} \qquad tan\ \omega = -\frac{\sqrt{55}}{3}$$

De acuerdo con el resultado anterior, las funciones trigonométricas del ángulo $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ son:

$$sen\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\ \omega}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+cos\ \omega}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-cos\ \omega}{sen\ \omega} = \frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{55}}{8}\right)} = \frac{\frac{5}{8}}{-\frac{\sqrt{55}}{8}} = -\frac{5}{\sqrt{55}} = -\frac{\sqrt{55}}{11}$$

2 Obtén el valor de las funciones trigonométricas básicas del ángulo de 15°, haciendo $15° = \frac{30°}{2}$

**Solución**

*a)* Para hallar el valor de *sen* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$sen\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\omega}{2}}$$

Entonces,

$$sen\ 15° = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto:

$$sen\ 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

*b)* Para hallar el valor de *cos* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\omega}{2}}$$

Entonces,

$$\cos 15° = \cos\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

*c)* Para hallar el valor de *tan* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-\cos\omega}{sen\ \omega}$$

Entonces,

$$\tan 15° = \tan\left(\frac{30°}{2}\right) = \frac{1-\cos 30°}{sen\ 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}$$

Por consiguiente,

$$\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$$

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} \equiv \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

**Demostración**

Se aplican las identidades del doble del ángulo

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\cos\alpha - \left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1 + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Se realiza una factorización tanto en el numerador como en el denominador,

$$\frac{1 + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha(1+2\cos\alpha)} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Se aplican identidades básicas con el nuevo resultado,

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Pero $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ y $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, entonces se demuestra la igualdad

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} \equiv \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

# EJERCICIO 45

1. Utiliza las identidades del ángulo mitad para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$ y $\frac{7}{8}\pi$.
2. Obtén las funciones trigonométricas de $(2\alpha)$ y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, si se sabe que $csc\ \alpha = 4$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
3. Si se sabe que $tan\ \beta = \frac{12}{5}$, para $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, halla las funciones trigonométricas de $(2\beta)$ y $\left(\frac{\beta}{2}\right)$.
4. Dada la función trigonométrica $cos\ \omega = \frac{5}{8}$ donde $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de $(2\omega)$ y $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
5. Obtén las funciones trigonométricas de $(2\alpha)$ y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ si se sabe que: $sec\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
6. Si $sen\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, determina $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ y $tan\ \alpha$.
7. Si $cos\ 2\beta = \frac{15}{17}$ y $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de $\beta$ y $\frac{\beta}{2}$.
8. Si $sen\ \frac{1}{4}\alpha = \sqrt{\frac{10-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}}$, determina las funciones trigonométricas de $\alpha$ si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.
9. Si $csc\ \frac{1}{4}\beta = \sqrt{\frac{6}{3-\sqrt{6}}}$ y $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las funciones trigonométricas de $\beta$ y $\frac{\beta}{2}$.
10. Si $ctg\ \frac{\omega}{2} = -3$ y $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, halla las funciones trigonométricas de $\omega$, $2\omega$ y $4\omega$.

Demuestra las siguientes identidades:

11. $\frac{2}{1 + cos\ \alpha} = sec^2\ \frac{\alpha}{2}$
12. $[cos\ 2x - sen\ 2x]^2 - 1 = sen(-4x)$
13. $cos\ 8x + cos\ 4x = 2cos\ 2x - 4sen^2\ 3x \cdot cos\ 2x$
14. $sen\ 4x + sen\ 6x = 2\ (sen\ 5x \cdot cos\ x)$
15. $ctg\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \frac{1 + sen\ 2\omega}{cos\ 2\omega}$
16. $cos^8\beta - sen^8\beta = \frac{1}{4}\ cos\ 2\beta \cdot (3 + cos\ 4\beta)$
17. $\sqrt{2}\ sec\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\ (sen\ \alpha + cos\ \alpha)}{1 + sen\ 2\alpha}$
18. $cos\ 12°\ cos\ 24°\ cos\ 48°\ cos\ 96° = -\frac{1}{16}$
19. $\frac{cos^3\ x - sen^3\ x}{cos\ 2x} = cos\ x - \frac{sen\ 2x}{2\ (\ sen\ x + cos\ x\ )} + sen\ x$

20. $\dfrac{1}{1 + sen\ \varphi} = \dfrac{1 + tan^2 \dfrac{\varphi}{2}}{\left(tan^2 \dfrac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(1 + ctg\ \dfrac{\varphi}{2}\right)^2}$

21. $2\left[cos\dfrac{y}{2} - sen\dfrac{y}{2}\right] \cdot \left[sen\dfrac{y}{2} + cos\dfrac{y}{2}\right]cos\ x = cos(x+y) + cos(x-y)$

22. $sen(x+2y) - sen\ x = 2sen\ y \cdot cos(x+y)$

23. $4\ csc^2\beta \cdot cos\ \beta = ctg^2 \dfrac{\beta}{2} - tan^2 \dfrac{\beta}{2}$

24. $\left[3\ cos\ \dfrac{\theta}{2} - sen\ \dfrac{\theta}{2}\right] \cdot \left[cos\ \dfrac{\theta}{2} + sen\ \dfrac{\theta}{2}\right] = 2\ cos\ \theta + sen\ \theta + 1$

25. $sen^6\ x + cos^6\ x = 1 - \dfrac{3}{4}\ sen^2\ 2x$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Identidades trigonométricas para transformar un producto en suma o resta

De las identidades:

$$\begin{array}{rl} & sen\ (x + y) = (sen\ x)\ (cos\ y) + (sen\ y)\ (cos\ x) \quad \text{se realiza la suma con} \\ + & sen\ (x - y) = (sen\ x)\ (cos\ y) - (sen\ y)\ (cos\ x) \\ \hline & sen\ (x + y) + sen\ (x - y) = 2\ (sen\ x)(cos\ y) \end{array}$$

Al despejar,

$$\mathbf{(sen\ x)\ (cos\ y)} = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right]$$

De forma semejante se obtiene:

$$\mathbf{(cos\ x)\ (sen\ y)} = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) - sen(x-y)\right]$$

De las identidades:

$$\begin{array}{rl} & cos\ (x + y) = (cos\ x)\ (cos\ y) - (sen\ x)\ (sen\ y) \quad \text{se realiza la suma con} \\ + & cos\ (x - y) = (cos\ x)\ (cos\ y) + (sen\ x)\ (sen\ y) \\ \hline & cos\ (x + y) + cos\ (x - y) = 2\ (cos\ x)(cos\ y) \end{array}$$

Al despejar,

$$\mathbf{(cos\ x)\ (cos\ y)} = \frac{1}{2}\left[cos(x+y) + cos(x-y)\right]$$

De la misma manera se obtiene:

$$\mathbf{(sen\ x)\ (sen\ y)} = -\frac{1}{2}\left[cos(x+y) - cos(x-y)\right]$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa el siguiente producto en forma de suma o resta:

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x)$$

**Solución**

Se emplea la identidad $(cos\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[cos(x+y)+cos(x-y)\right]$ y se obtiene:

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x) = \frac{1}{2}\left[cos(8x+2x)+cos(8x-2x)\right]$$

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x) = \frac{1}{2}\left[cos(10x)+cos(6x)\right]$$

2 Encuentra el valor del siguiente producto:

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

**Solución**

Se emplea la identidad $(sen\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right]$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{9\pi+\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{9\pi-\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Al sustituir el valor de las funciones trigonométricas de ángulos notables:

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

## EJERCICIO 46

Convierte los siguientes productos en sumas o diferencias de funciones trigonométricas:

1. $sen(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta)$
2. $cos(45°)\,sen(60°)$
3. $sen(y+\beta)\,sen(y-\beta)$
4. $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
5. $sen(82°\,30')\,cos(37°\,30')$
6. $sen(37°\,30')\,sen(7°\,30')$
7. $cos(x+\alpha)\,sen(x-\alpha)$
8. $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
9. $sen(187°\,30')\,cos(217°\,30')$
10. $cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
11. $4\,sen(3\alpha)\,sen(\alpha)$
12. $5cos(2\alpha)\,sen(6\alpha)$
13. $cos(47°)\,sen(43°)$
14. $cos\left(\frac{2}{3}\alpha\right)cos\left(\frac{5}{3}\beta\right)$
15. $3sen(9\alpha)\,cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$
16. $sec\left(\frac{\pi}{3}\right)sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$
17. $tan\,2\alpha\,ctg\,\alpha$
18. $sec\left(\frac{3}{4}\pi\right)csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$
19. $tan(x+a)\,tan(x-a)$
20. $\frac{sen(2\alpha+\beta)}{sec(2\alpha-\beta)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Demostración de identidades

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente igualdad: $sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$

**Demostración**

Se aplica la identidad $(sen\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right]$

$$sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[sen\frac{\pi}{6}+sen0\right]$$

Pero $sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $sen0 = 0$, entonces:

$$sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+0\right] = \frac{1}{4}$$

Por tanto queda demostrada la igualdad.

2 Demuestra la siguiente expresión:

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = sen(x+y)$$

**Demostración**

Se aplica la transformación de productos a sumas y se obtiene:

$$sen\,x\,cos\,y = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right]$$

$$sen\,y\,cos\,x = cos\,x\,sen\,y = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)-sen(x-y)\right]$$

Al sumar ambas expresiones:

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[sen(x+y)-sen(x-y)\right]$$

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = \frac{1}{2}sen(x+y)+\frac{1}{2}sen(x-y)+\frac{1}{2}sen(x+y)-\frac{1}{2}sen(x-y)$$

Se simplifican términos semejantes, entonces:

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = sen(x+y)$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

# EJERCICIO 47

Demuestra las siguientes igualdades:

1. $\dfrac{1}{sec\ 30°\ csc\ 120°} = \dfrac{3}{4}$

2. $\dfrac{sen\ 75°\ cos\ 45°}{sen\ 225°\ cos\ 75°} = -2-\sqrt{3}$

3. $\dfrac{cos\ 35°\ sen\ 10° + cos\ 10°\ sen\ 35°}{cos\ 20°\ cos\ 10° - sen\ 20°\ sen\ 10°} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. $\dfrac{tan\dfrac{\pi}{6}\ tan\dfrac{5\pi}{12} + tan\dfrac{\pi}{12}\ tan\dfrac{5\pi}{12}}{1 - tan\dfrac{\pi}{6}\ tan\dfrac{\pi}{12}} = 2 + \sqrt{3}$

5. $sen\ x\ cos\ x + cos\ 3x\ sen\ x = \dfrac{1}{2}\ sen\ 4x$

6. $cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) sen\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\left[sen\ 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. $\dfrac{sen^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{cos(2\pi - x)cos^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)sen^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = sec\ x$

8. $cos\ x[cos\ 2x - 2sen^2\ x] = cos\ 3x$

9. $tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\ tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \dfrac{2cos\ 2x+1}{2cos\ 2x-1}$

10. $sen(10° + x)\ cos\ (20° - x) + cos(80° - x)sen(70° + x) = sen(2x - 10°)$

11. $sen\left(\dfrac{2}{9}\pi + x\right)cos\left(\dfrac{1}{18}\pi + x\right) - sen\left(\dfrac{5}{18}\pi - x\right)cos\left(\dfrac{4}{9}\pi - x\right) = \dfrac{1}{2}$

12. $\dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{csc\ 2x} - \dfrac{sen\,x}{csc\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)} = sen\ 3x$

13. $cos\ 2x + 2[sen\ x\ cos\ y + cos\ x\ sen\ y]\ sen(x - y) = cos\ 2y$

14. $sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot sen\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)\cdot cos\left(\pi - x\right) = cos^3\ x$

**Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones**

## Identidades para transformar sumas o restas de funciones trigonométricas en un producto

Dados los ángulos $x$ y $y$, tales que

$$x + y = \alpha \qquad ; \qquad x - y = \beta$$

Al resolver el sistema de ecuaciones para $x$ y $y$ se obtienen los siguientes resultados:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ; \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Estos valores angulares se sustituyen en la identidad:

$$(sen\ x)\ (cos\ y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right]$$

Y el resultado es:

$$sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\ \alpha + sen\ \beta\right]$$

Ahora, al despejar la suma de los senos, se determina que:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha + sen\ \beta = 2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

De la misma manera se obtiene:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha - sen\ \beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha + cos\ \beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha - cos\ \beta = -\,2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa lo siguiente: $sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6}$

**Solución**

Al aplicar la transformación de diferencia de senos a productos, se obtiene:

$$sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6} = 2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$ ; simplificando

$$sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6} = 2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 Calcula, sin hacer uso de las tablas trigonométricas:

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

**Solución**

Se emplea la identidad, $sen\ \alpha + sen\ \beta = 2\ sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\left[sen\left(\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\right)cos\left(\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}\right)\right]$$

Se simplifica,

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Dado que $\frac{\pi}{12}$ no es un ángulo notable, se puede emplear la identidad:

$$cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}}$$

Donde $\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\pi}{6}}{2}$, entonces,

$$cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\left[(1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3 Simplifica la siguiente expresión: $cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)$

**Solución**

Se emplea la identidad, $cos\ \alpha - cos\ \beta = -2\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\ sen\left(\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\ sen(\omega)\cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\ sen(\omega)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\cdot sen\ \omega$$

4 Simplifica la siguiente expresión: $sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$

**Solución**

Al utilizar la identidad, $sen\ \alpha - sen\ \beta = 2\ cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, se obtiene:

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2\ cos\left(\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)sen\left(\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\frac{x}{2}\ \ sen\ \frac{\pi}{2}$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\frac{x}{2}\ \ (1)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\frac{x}{2}$$

## EJERCICIO **48**

Convierte en producto las siguientes sumas y restas de funciones trigonométricas:

1. $sen\ 165° + sen\ 75°$
2. $cos(7\beta)+cos(-2\beta)$
3. $sen(240°) + sen(120°)$
4. $cos(5\theta) - cos(3\theta)$
5. $cos(37°\ 29')+cos(52°\ 31')$
6. $sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)-sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$
7. $cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)+cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$
8. $sen\ 35° - sen\ 25°$
9. $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
10. $cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$
11. $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$
12. $sen\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+sen\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$
13. $cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$
14. $sen\left(\beta+\frac{\pi}{8}\right)+sen\left(\beta-\frac{\pi}{8}\right)$
15. $sen\left(\frac{5}{8}\pi+\alpha\right)+sen\left(\frac{7}{8}\pi-\alpha\right)$
16. $cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Demostración de identidades

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente igualdad: $\dfrac{sen\ 50^{\circ}+sen\ 10^{\circ}}{cos\ 50^{\circ}+cos\ 10^{\circ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**Solución**

Se aplica la suma de senos y cosenos

$$\frac{sen\ 50^{\circ}+sen\ 10^{\circ}}{cos\ 50^{\circ}+cos\ 10^{\circ}}=\frac{2\left[sen\frac{1}{2}(50^{\circ}+10^{\circ})cos\frac{1}{2}(50^{\circ}-10^{\circ})\right]}{2\left[cos\frac{1}{2}(50^{\circ}+10^{\circ})cos\frac{1}{2}(50^{\circ}-10^{\circ})\right]}=\frac{sen\ 30^{\circ}cos\ 20^{\circ}}{cos\ 30^{\circ}cos\ 20^{\circ}}=tan\ 30^{\circ}$$

Pero $tan\ 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, por lo que la igualdad queda demostrada.

2 Demuestra la siguiente igualdad:

$$sen\ x+sen\ 3x+sen\ 5x+sen\ 7x=4\ sen\ 4x\ cos\ 2x\ cos\ x$$

**Solución**

Se agrupan dos a dos los sumandos

$$sen\ x+sen\ 3x+sen\ 5x+sen\ 7x=(sen\ x+sen\ 3x)+(sen\ 5x+sen\ 7x)$$

Se aplica la transformación de suma de senos a productos

$$sen\ x+sen\ 3x=2\left[sen\frac{1}{2}(x+3x)cos\frac{1}{2}(x-3x)\right]=2\left[sen\ 2x\ cos(-x)\right]=2\ sen\ 2x\ cos\ x$$

$$sen\ 5x+sen\ 7x=2\left[sen\frac{1}{2}(5x+7x)cos\frac{1}{2}(5x-7x)\right]=2\left[sen\ 6x\ cos(-x)\right]=2\ sen\ 6x\ cos\ x$$

Entonces,

$$sen\ x+sen\ 3x+sen\ 5x+sen\ 7x=2sen\ 2x\ cos\ x+2sen\ 6x\ cos\ x=2cos\ x\ (sen\ 2x+sen\ 6x)$$

En esta nueva expresión se aplica la transformación de sumas a productos,

$$2\ cos\ x\ (sen\ 2x+sen\ 6x)=2\ cos\ x\cdot 2\left[sen\frac{1}{2}(2x+6x)cos\frac{1}{2}(2x-6x)\right]$$

$$=4\ cos\ x\ [sen\ 4x\ cos(-2x)]$$

$$=4\ cos\ x\ sen\ 4x\ cos\ 2x$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

# EJERCICIO 49

Demuestra las siguientes igualdades:

1. $cos\frac{5}{12}\pi + cos\frac{11}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{sen\ 40° + sen\ 20°}{sen\ 40° - sen\ 20°} = \frac{\sqrt{3}}{3} ctg\ 10°$

3. $\frac{sen\frac{\pi}{6} + sen\frac{5\pi}{18}}{sen\frac{5\pi}{18} - sen\frac{\pi}{6}} = \frac{tan\frac{2\pi}{9}}{tan\frac{\pi}{18}}$

4. $cos\ (x - \pi) + cos\ (x + \pi) = -2\ cos\ x$

5. $sen\ 2x + sen\ 4x - sen\ 6x = 4sen\ x\ sen\ 2x\ sen\ 3x$

6. $sen\ x - sen\ 2x + sen\ 3x - sen\ 4x = -4sen\ \frac{x}{2}\ cos\ \frac{5x}{2}\ cos\ x$

7. $cos\ x + cos\ 2x + cos\ 3x + cos\ 4x = 4cos\ \frac{5x}{2}\ cos\ x\ cos\ \frac{x}{2}$

8. $tan\ x = \frac{sen\ 5x - sen\ 3x}{cos\ 5x + cos\ 3x}$

9. $\frac{1 - 2sen^2\ x}{sen\ 3x - sen\ x} = \frac{1}{2} csc\ x$

10. $\frac{cos(x+y) - cos(x-y)}{sen(x+y) - sen(x-y)} = -\ tan\ x$

11. $\frac{1}{sen\ x + sen\ 2x + sen\ 3x} = \frac{1}{4} csc\frac{3x}{2} \sec x\ sec\frac{x}{2}$

12. $\frac{1}{4}\left[cos(a+b+c) + cos(a+b-c) + cos(a-b+c) + cos(a-b-c)\right] = cos\ a\ cos\ b\ cos\ c$

**Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones**

## Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una expresión que tiene como incógnita valores angulares bajo los signos de funciones trigonométricas.

Al resolver una ecuación trigonométrica se debe encontrar el o los valores que satisfacen dicha ecuación, esto es, que en una ecuación trigonométrica no siempre existe una solución única, en ocasiones existen varias, las cuales se expresan como conjunto solución.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación para $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

**Solución**

Se despeja la incógnita $x$ y la función seno se representa como *arc sen* en el segundo miembro, luego el intervalo indica que se tomarán como solución aquellas entre 0° y 360°

$$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \left(x+\frac{\pi}{4}\right) = arc\ sen\ (1)$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = 45°$$

El resultado puede expresarse en grados o en radianes.

2 Resuelve la siguiente ecuación para $\theta$ si $0° \leq \theta \leq 360°$.

$$3\ tan\ \theta - 4 = tan\ \theta - 2$$

**Solución**

Se agrupan los términos que tienen a las incógnitas y se reducen:

$$3\ tan\ \theta - 4 = tan\ \theta - 2 \quad \rightarrow \quad 3\ tan\ \theta - tan\ \theta = -2 + 4$$

$$2\ tan\ \theta = 2$$

$$tan\ \theta = 1$$

De esta expresión se despeja el ángulo $\theta$

$$tan\ \theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = arc\ tan\ (1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Luego, la tangente es positiva en el primero y tercer cuadrantes, por consiguiente, el conjunto solución es $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

3 Resuelve la siguiente ecuación para $x$ si $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$2\ sen^2 x - 1 = -\ sen\ x$$

**Solución**

Se agrupan los términos en el primer miembro:

$$2\ sen^2 x - 1 = -sen\ x \quad \rightarrow \quad 2sen^2 x + sen\ x - 1 = 0$$

La expresión resultante se factoriza,

$$(2sen\ x - 1)(sen\ x + 1) = 0$$

Por tanto, $2sen\ x - 1 = 0$ y $sen\ x + 1 = 0$, de las cuales se despeja la incógnita $x$, entonces,

$$2sen\ x - 1 = 0 \qquad sen\ x + 1 = 0$$

$$sen\ x = \frac{1}{2} \qquad sen\ x = -1$$

$$x = arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right) \qquad x = arc\ sen\ (-1)$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad x = \frac{3\pi}{2}$$

Luego, el conjunto solución es $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

4 Resuelve la siguiente ecuación para $\theta$, si $0° \le \theta \le 360°$.

$$4\ cos^2\theta - 3 = 0$$

**Solución**

Se despeja $cos\ \theta$ de la ecuación:

$$4\ cos^2\theta - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 4\ cos^2\theta = 3 \quad \rightarrow \quad cos^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$cos\ \theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se obtienen dos ecuaciones

$$cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad cos\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se despeja el ángulo $\theta$

$$\theta = arc\ cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°, 330° \quad ; \quad \theta = arc\ cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°, 210°$$

Al final, el conjunto solución es 30°, 150°, 210° y 330°.

5 Resuelve la siguiente ecuación para $\theta$ si $0° \le \theta \le 360°$.

$$2\ sen^2\theta = -\ sen\ \theta$$

**Solución**

Se resuelve la ecuación:

$$2sen^2\theta + sen\ \theta = 0 \quad \rightarrow \quad sen\ \theta\ (2\ sen\ \theta + 1) = 0$$

Se obtienen dos ecuaciones:

$$sen\ \theta = 0 \qquad 2\ sen\ \theta + 1 = 0$$

Se despeja el ángulo $\theta$,

$$sen\ \theta = 0 \qquad 2\ sen\ \theta + 1 = 0$$

$$\theta = \text{arc}\ sen\ (0) \qquad \theta = arc\ sen\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 0°, 180°, 360° \qquad \theta = 210°, 330°$$

Por tanto, el conjunto solución es 0°, 180°, 210°, 330° y 360°.

6 Resuelve la siguiente ecuación para $x$ si $0° \le x \le 360°$.

$$2\ cos^2 x = sen\ x - 1$$

**Solución**

$$2\ cos^2 x = sen\ x - 1 \quad \rightarrow \quad 2(1 - sen^2 x) = sen\ x - 1$$

$$2 - 2sen^2 x = sen\ x - 1$$

$$2 - 2sen^2 x - sen\ x + 1 = 0$$

$$-\ 2sen^2 x - sen\ x + 3 = 0 \qquad (\div -1)$$

$$2sen^2 x + sen\ x - 3 = 0$$

$$(2sen\ x + 3)(sen\ x - 1) = 0$$

Se despeja el ángulo $x$ de ambas ecuaciones:

$$sen\ x - 1 = 0 \qquad 2\ sen\ x + 3 = 0$$

$$x = arc\ sen\ (1) \qquad sen\ x = -\frac{3}{2}\ \text{(no existe solución)}$$

$$x = 90°$$

Cabe mencionar que $2\ sen\ x + 3 = 0$ no tiene solución porque $-1 \le sen\ x \le 1$, entonces el conjunto solución es 90°.

# EJERCICIO 50

Resuelve las siguientes ecuaciones, tales que $0° \leq x \leq 360°$.

1. $sen\ x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. $cos\ x + 2\ sen\ x = 2$
3. $2\ cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$
4. $csc\ x = sec\ x$
5. $2\ cos\ x \cdot tan\ x - 1 = 0$
6. $4\ cos^2 x = 3 - 4\ cos\ x$
7. $3\ cos^2 x + sen^2 x = 3$
8. $2\ sen^2 x + sen\ x = 0$
9. $cos\ x + 9\ sen^2 x = 1$
10. $csc^2 x = 2\ cot^2 x$
11. $sen\ x \cdot tan\ x + 1 = sen\ x + tan\ x$
12. $2cos^2 x + 3sen\ x = 0$
13. $sen\ x - cos\ x = 0$
14. $3cos^2 x - sen^2 x = 0$
15. $cos\ x - \sqrt{3}\ sen\ x = 0$
16. $2sen\ x + csc\ x = 3$
17. $sen\ x \cdot ctg\ x - sen\ x = 0$
18. $2cos^3 x + cos^2 x - 2cos\ x - 1 = 0$
19. $4cos\ x - 2 = 2\ tan\ x \cdot ctg\ x - sec\ x$
20. $tan^5 x - 9\ tan\ x = 0$
21. $\frac{1}{ctg^2\ x} + \sqrt{3}\, tan\, x = 0$
22. $sen\ x \cdot sec\ x + \sqrt{2}\ sen\ x - \sqrt{2} = sec\ x$
23. $\left(2 - \sqrt{3}\right) sen\ x + \left(2 - \sqrt{3}\right) = 2cos^2\ x$
24. $\left(2 + \sqrt{5}\right) - \left(1 + 2\sqrt{5}\right) cos\ x = 2\ sen^2\ x$
25. $sec\ x(2sen\ x + 1) - 2(2sen\ x + 1) = 0$
26. $\frac{\sqrt{3}\, tan\, x}{sec\, x} - cos\, x = 0$
27. $\sqrt{2}\, cos\ x - \sqrt{2}\ sen\ x = -\sqrt{3}$
28. $5sen^2 x + cos^2 x = 2$
29. $\frac{5}{csc\ x} - 5\sqrt{3}\, cos\ x = 0$
30. $cos^2 x + cos\ x = sen^2 x$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 15

## Triángulos rectángulos

### El triángulo RECTÁNGULO

Medición de tierras en el antiguo Egipto mediante los anudadores

Su origen se encuentra en la cultura egipcia, específicamente en la geometría egipcia.

Los egipcios dominaban a la perfección los triángulos, ya que fueron la base para la construcción de sus pirámides así como la medición de tierras. Se auxiliaban de los anudadores, hacían nudos igualmente espaciados para medir y se dieron cuenta que al ubicar cuerdas de diversas longitudes en forma de triángulo obtenían ángulos rectos y, por tanto, triángulos rectángulos, lo cual significa que tenían conocimiento de la relación que existe entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

Sin embargo, Pitágoras fue el primero en demostrar el teorema que lleva su nombre, el cual establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, aunque los egipcios y babilónicos lo utilizaban en sus cálculos y construcciones pero sin haberlo demostrado.

## Solución de triángulos rectángulos

Dados tres datos de un triángulo, si uno de ellos es un lado, encontrar el valor de los datos restantes.

Para los triángulos rectángulos basta conocer el valor de uno de los lados y algún otro dato, el cual puede ser un ángulo u otro lado, debido a que el tercer dato siempre está dado ya que, al ser triángulo rectángulo, uno de los ángulos siempre será de 90°.

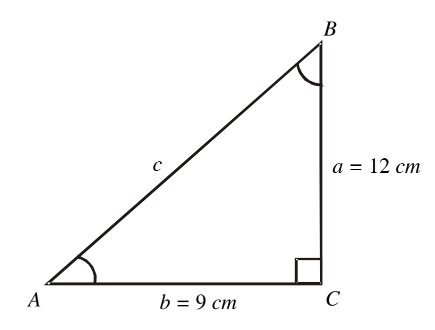
Cabe destacar que el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas son de suma importancia para la resolución de triángulos rectángulos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo $ABC$, $a = 12\ cm$, $b = 9\ cm$. Resuelve el triángulo.

**Solución**




Se proporcionan catetos; entonces, para encontrar la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Por lo tanto $c = 15\ cm$.

Para encontrar los ángulos se utilizan funciones trigonométricas; en este caso, al tener los tres lados se puede aplicar cualquier función. Por ejemplo, en el caso del ángulo $A$ se aplica la función tangente, entonces:

$$\tan A = \frac{12}{9}$$

Se despeja el ángulo $A$:

$$\angle A = \arctan\left(\frac{12}{9}\right) = 53°\ 7'\ 48''$$

Para encontrar el tercer ángulo, se tiene que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, en particular $\angle A + \angle B = 90°$ ya que $\angle C = 90°$, por tanto:

$$53°\ 7'\ 48'' + \angle B = 90°$$

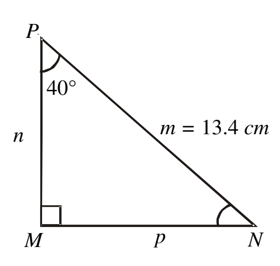
$$\angle B = 90° - 53°\ 7'\ 48''$$

$$\angle B = 36°\ 52'\ 12''$$

2 En el triángulo $MNP$, $m = 13.4$ *cm*, $\angle P = 40°$. Resuelve el triángulo.

**Solución**

Para hallar el $\angle N$, se aplica:




$$\angle N + \angle P + \angle M = 180°$$

Ya que $\angle M = 90°$, entonces,

$\angle N + \angle P = 90°$ donde $\angle N = 90° - \angle P$

$$\angle N = 90° - 40°$$

$$\angle N = 50°$$

Lado $n$

Se elige uno de los ángulos agudos, en este caso $\angle P$ y se establece la función trigonométrica de acuerdo al lado que se va a encontrar ($n$) y el lado conocido ($m = 13.4$), por lo que la función que se busca es el coseno de $P$, entonces:

$$\cos P = \frac{n}{m} \qquad \text{donde} \qquad \cos 40° = \frac{n}{13.4}$$

Al despejar $n$:

$$n = (13.4)(\cos 40°) = (13.4)(0.76604) = 10.265\ cm$$

Para hallar el lado restante ($p$) se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$p = \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{(13.4)^2 - (10.26)^2} = \sqrt{179.56 - 105.27} = \sqrt{74.29} = 8.62\ cm$$

3 En el triángulo $ABC$, $a = 54$ *cm*, $A = 36° 20'$. Resuelve el triángulo.

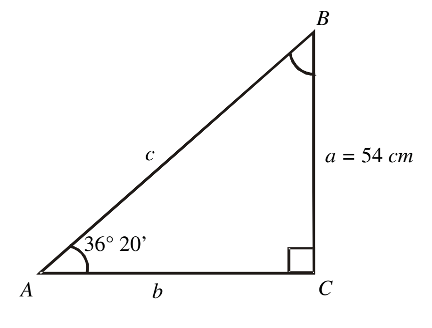
**Solución**

En el triángulo $ABC$:

$\angle B = 90° - \angle A$

$\angle B = 90° - 36° 20'$

$\angle B = 53° 40'$




Para hallar el lado $b$, se utiliza la función tangente de $\angle A$:

$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad \text{donde} \qquad \tan 36° 20' = \frac{54}{b}$$

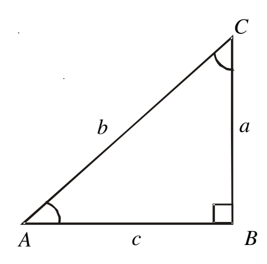
Al despejar $b$: $b = \dfrac{54}{\tan 36° 20'} = \dfrac{54}{0.7354} = 73.42\ cm$

El valor de la hipotenusa se encuentra mediante el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(54)^2 + (73.42)^2} = 91.14\ cm$$

# EJERCICIO 51

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo según los datos proporcionados:




1. $a = 12,\ b = 17$
2. $\angle A = 32°,\ b = 4$
3. $\angle C = 46°\ 20',\ a = 5$
4. $a = 32.5,\ c = 41.3$
5. $\angle A = 45°,\ a = 13$
6. $\angle C = 54°,\ b = 22.6$
7. $b = 22.5,\ c = 18.7$
8. $\angle A = 48°\ 12',\ b = 34.5$
9. $\angle C = 34°\ 32',\ c = 56.9$
10. $a = 18.23,\ b = 19.86$
11. $\angle A = 32°\ 27',\ a = 12$
12. $b = \sqrt{17},\ a = 2$
13. $\angle C = 48°\ 23',\ b = 23$
14. $a = 7.5,\ c = 2.5$
15. $c = 13,\ \angle A = 25°\ 49'$
16. Calcula el valor de los ángulos agudos si $a = \frac{c}{2}$.
17. Determina el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x$, $b = x + 8$ y $c = x + 7$.
18. Calcula el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x + 1$, $b = x + 2$ y $c = x$.
19. Determina el valor de los ángulos agudos si $a = c$.
20. Calcula el valor de los ángulos agudos si $b = 3a$.

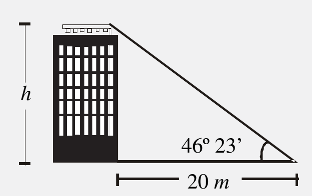
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Se sitúa un punto a 20 metros de un edificio. Si el ángulo de elevación al punto más alto del edificio es de 46° 23', encuentra la altura del edificio.

**Solución**

Se representa el problema con un dibujo:




Para hallar la altura del edificio se utiliza la función tangente, ya que se tienen como datos un ángulo y el cateto adyacente a éste, y la altura representa el cateto opuesto al ángulo dado:

$$\tan 46° \, 23' = \frac{h}{20}$$

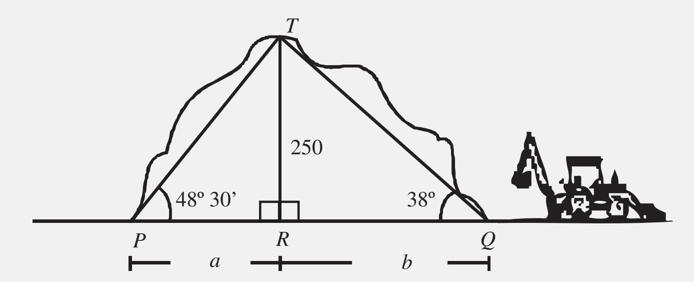
Al despejar $h$:

$$h = (20)(\tan 46° \, 23') = (20)(1.04949) \approx 21 \, m$$

De acuerdo con el dato anterior, la altura del edificio es de 21 $m$.

2 En la construcción de una carretera se encuentra una montaña de 250 metros de altura, a través de ella se construirá un túnel. La punta de la montaña se observa bajo un ángulo de 48° 30' desde un punto $P$ en un extremo de la montaña, y bajo un ángulo de 38° desde el otro extremo. ¿Cuál será la longitud del túnel?

**Solución**




La longitud del túnel está determinada por $a + b$.

Para obtener $a$, se utiliza el triángulo $PRT$ y se aplica la función tangente de $\angle P$:

$$\tan 48° \, 30' = \frac{250}{a}$$

Al despejar $a$

$$a = \frac{250}{\tan 48°30'} = \frac{250}{1.1302} = 221.19 \, m$$

Para obtener $b$, se utiliza el triángulo $QRT$ y se aplica la función tangente de $\angle Q$:

$$\tan 38° = \frac{250}{b}$$

Al despejar $b$

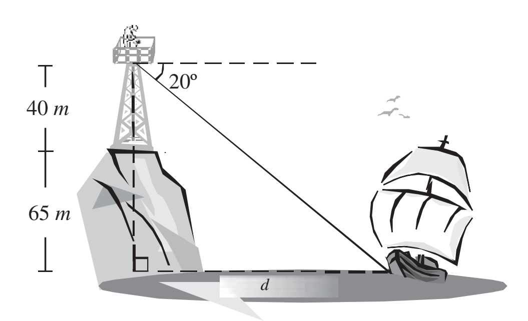
$$b = \frac{250}{\tan 380°} = \frac{250}{0.7812} = 320.02 \, m$$

Por tanto, la longitud del túnel es: 221.19 + 320.02 = 541.21 $m$.

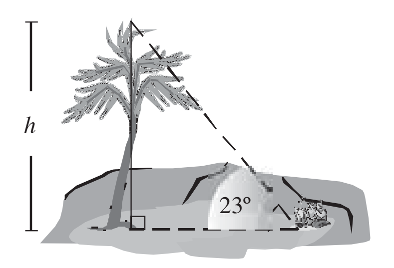
# EJERCICIO 52

Resuelve los siguientes problemas:

1. En una torre de 40 *m* que está sobre un peñasco de 65 *m* de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de 20° de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?

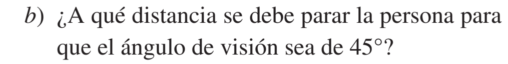


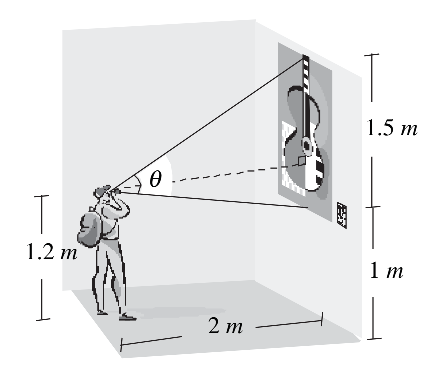

2. A una distancia de 10 *m* de la base de un árbol, la punta de éste se observa bajo un ángulo de 23°. Calcula la altura del árbol.

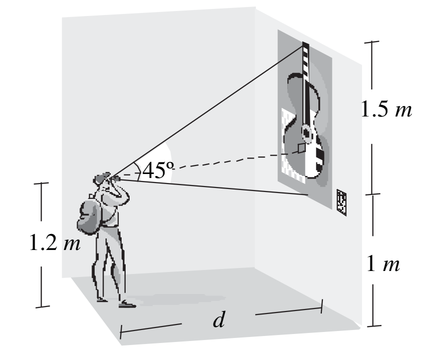



3. Una persona cuyos ojos están a 1.20 metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide 1.50 metros. Dicha persona se encuentra a dos metros de distancia de la pintura.

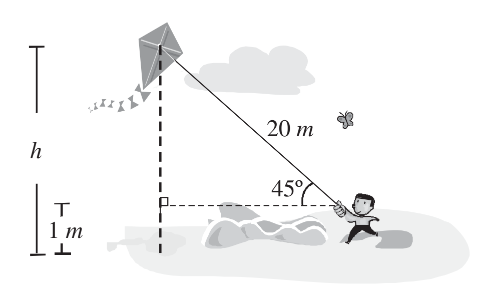
   *a*) ¿Cuál es el ángulo de visión?

   
   *b*) ¿A qué distancia se debe parar la persona para que el ángulo de visión sea de 45°?

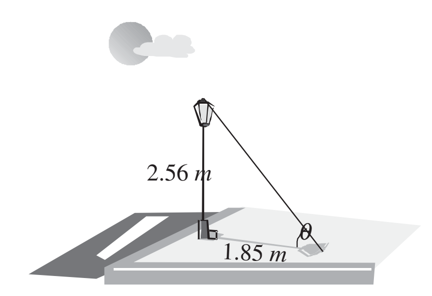


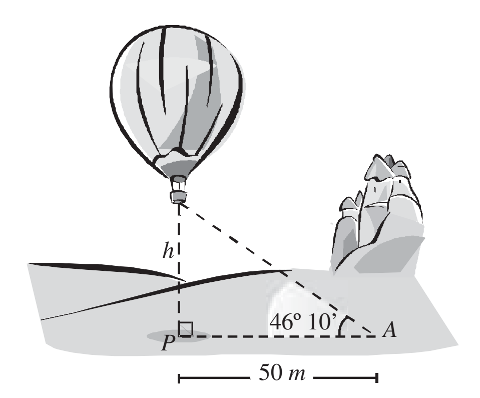
4. Un niño tiene un papalote, el cual hace volar sosteniendo una cuerda a un metro del suelo. La cuerda se tensa formando un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Obtén la altura del papalote con respecto al suelo si el niño suelta 20 metros de cuerda.



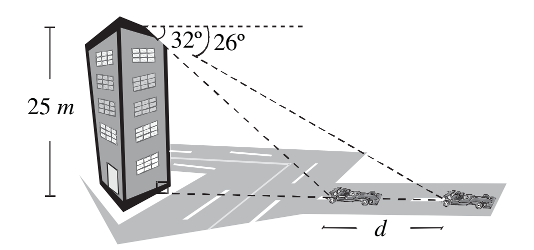

5. Determina el ángulo de elevación del Sol si un poste de 2.56 metros proyecta una sombra de 1.85 metros.



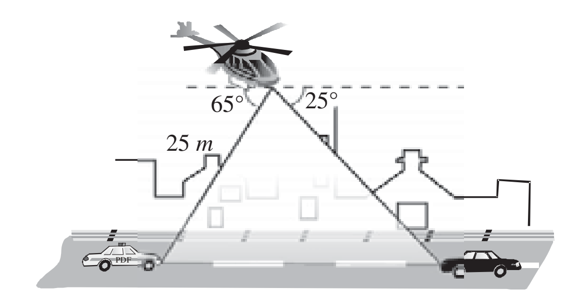

6. Un globo de aire caliente sube con un ángulo de elevación con respecto a un punto *A* de 46° 10'. Calcula la altura a la que se encuentra el globo, con respecto a un punto *P* del suelo, si la distancia de éste al punto *A* es de 50 metros.



7. Desde lo alto de una torre cuya altura es de 25 *m*, se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de 32°; si un instante después el ángulo es de 26°, ¿qué distancia se ha desplazado el automóvil?




8. Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero, como se muestra en la figura. Si el ángulo de depresión desde el helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de 25° y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de 65°, y su distancia a éste es de 25 metros,



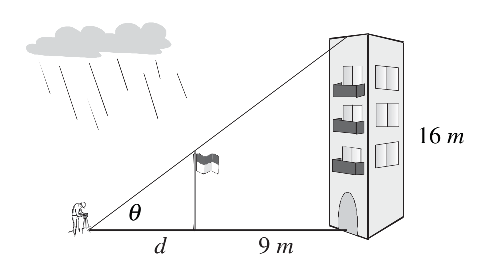

calcula:

La distancia entre el helicóptero y el delincuente.

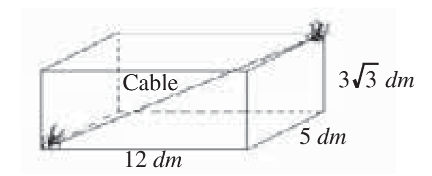
La distancia entre el patrullero y el delincuente.

La altura del helicóptero.

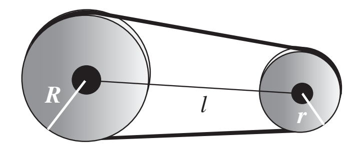
9. Un ingeniero civil desea conocer el ángulo de elevación del topógrafo, así como la distancia a la que se encuentra del asta bandera, si se sabe que el asta bandera mide la cuarta parte de la altura del edificio que es de 16 metros, y la distancia entre ambas es de 9 metros.



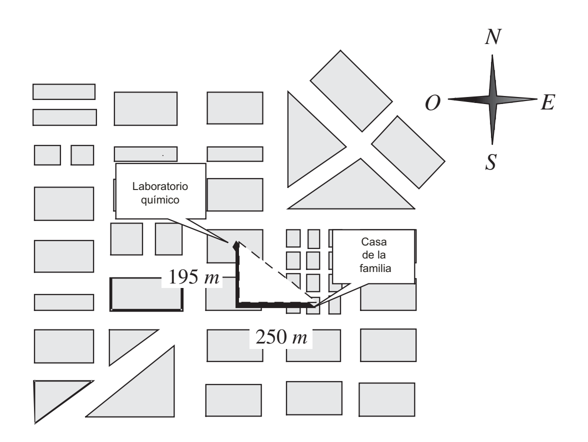
10. Una araña que se encuentra en la base de una caja desea alcanzar una mosca ubicada en la esquina opuesta de la caja, como se muestra en la figura. Las esquinas están conectadas por un cable tenso, determina cuál es el ángulo de elevación del cable y la distancia que recorrería la araña hasta llegar a la mosca por el cable.




11. Se tienen dos poleas de radios *R*, *r* y la distancia entre sus ejes es *l*, ¿cuál es la longitud de la cadena de transmisión?




12. Debido a un accidente en unos laboratorios químicos, se tuvieron que desalojar las casas que estuvieran en un radio de 500 *m* de los laboratorios. Una familia vivía a 250 *m* al este y 195 *m* al sur de los laboratorios. Determina si la familia desalojó su casa.

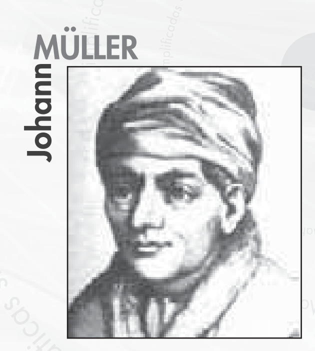



➡ **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 16

## Triángulos oblicuángulos

**Johann MÜLLER**



Johann Müller Von Königsberg (*regiomontanus*) 1436 - 1476

Astrónomo y matemático alemán que realizó tratados sobre la trigonometría y la astronomía, inventor de diversas herramientas para la observación y la medida del tiempo.

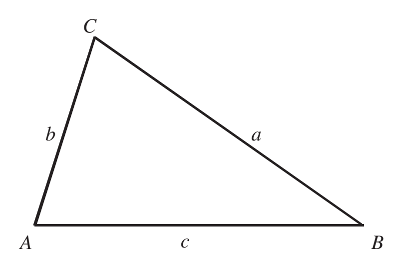
Su obra se compone de cinco libros llamados: *De triangulis omnimodis*, ¡publicada en Nuremberg 70 años después de haber sido escrita! Es interesante desde el punto de vista matemático, ya que en el primer libro se establecen las definiciones básicas de radio, arcos, igualdad, círculos, cuerdas y la función seno. En el segundo, la ley de senos para la resolución de problemas con triángulos, y del tercero al quinto libros se expone la trigonometría esférica.

## Solución de triángulos oblicuángulos

Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos, es decir, no tiene un ángulo recto. Este tipo de triángulos se resuelven mediante la ley de senos, de cosenos o de tangentes.

### Ley de senos

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.




Ley de senos:

$$\frac{a}{sen\ A}=\frac{b}{sen\ B}=\frac{c}{sen\ C}$$

La ley de senos se utiliza cuando:

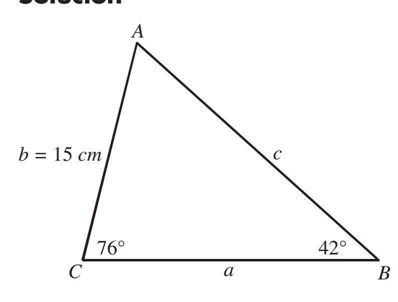
- Los datos conocidos son 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Los datos conocidos son 2 ángulos y cualquier lado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo $ABC$, $b = 15\ cm$, $\angle B = 42°$ y $\angle C = 76°$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.

**Solución**




Para obtener $\angle A$, se aplica $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, despejando,

$$\angle A = 180° - \angle C - \angle B = 180° - 42° - 76° = 62°$$

Se conoce el valor del lado $b$ y el ángulo $B$, opuesto a dicho lado, también se proporciona el ángulo $C$, por tanto, se puede determinar la medida del lado $c$,

$$\frac{c}{sen\ C}=\frac{b}{sen\ B}$$

Al sustituir $\angle C = 76°$, $\angle B = 42°$ y $b = 15\ cm$, se determina que,

$$\frac{c}{sen\ 76°}=\frac{15}{sen\ 42°}$$

De la expresión anterior se despeja $c$,

$$c=\frac{(15)(sen\ 76°)}{sen\ 42°}=\frac{(15)(0.9703)}{0.6691}=21.75\ cm$$

Por último, se determina el valor del lado $a$ con la siguiente relación:

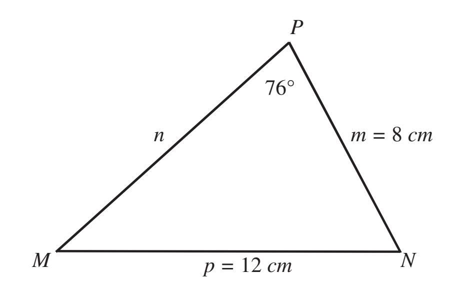
$$\frac{a}{sen\ A}=\frac{b}{sen\ B} \quad \text{donde} \quad \frac{a}{sen\ 62°}=\frac{15}{sen\ 42°}$$

Al despejar $a$:

$$a=\frac{(15)(sen\ 62°)}{sen\ 42°}=\frac{(15)(0.8829)}{0.6691}=19.8\ cm$$

2 En el triángulo $MNP$, $\angle P = 76^\circ$, $p = 12\ cm$ y $m = 8\ cm$. Resuelve el triángulo.

**Solución**




Con los datos del problema, se calcula el valor de $\angle M$ con la siguiente relación:

$$\frac{m}{sen\ M} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar *sen M y* sustituir los valores, se obtiene:

$$sen\ M = \frac{m\ sen\ P}{p} = \frac{(8)(sen\ 76^\circ)}{12} = \frac{(8)(0.97029)}{12} = 0.6469$$

Entonces:

$$\angle M = arc\ sen\ (0.6469)$$

$$\angle M = 40^\circ\ 18'$$

Por otro lado,

$$\angle N = 180^\circ - \angle P - \angle M = 180^\circ - 76^\circ - 40^\circ\ 18' = 63^\circ\ 42'$$

Se aplica la ley de senos para encontrar el valor del lado $n$:

$$\frac{n}{sen\ N} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar $n$,

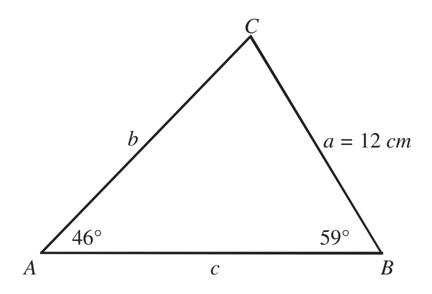
$$n = \frac{p\ sen\ N}{sen\ P} = \frac{(12)(sen\ 63^\circ 42')}{sen\ 76^\circ} = \frac{(12)(0.8965)}{0.9703} = 11.09\ cm$$

Por consiguiente,

$$\angle M = 40^\circ\ 18',\ \angle N = 63^\circ\ 42' \text{ y } n = 11.09\ cm$$

3 En el triángulo $ABC$, $\angle A = 46°$, $\angle B = 59°$ y $a = 12$ $cm$. Determina los elementos restantes del triángulo.

**Solución**




En el triángulo:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 46° - 59° = 75°$$

Para hallar el valor del lado $c$ se utiliza la relación:

$$\frac{c}{sen\ C} = \frac{a}{sen\ A} \qquad \text{donde} \qquad c = \frac{a\ sen\ C}{sen\ A} = \frac{(12)(sen\ 75°)}{sen\ 46°} = \frac{(12)(0.9659)}{0.7193} = 16.11\ cm$$

Asimismo, para obtener el valor del lado $b$ se utiliza la relación:

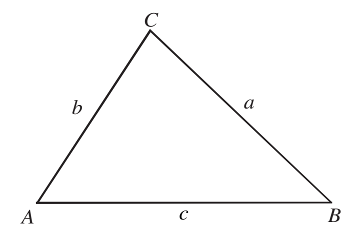
$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{a}{sen\ A} \qquad \text{donde} \qquad b = \frac{a\ sen\ B}{sen\ A} = \frac{(12)(sen\ 59°)}{sen\ 46°} = \frac{(12)(0.8571)}{0.7193} = 14.3\ cm$$

Finalmente, los elementos restantes son:

$$\angle C = 75°,\ c = 16.11\ cm \text{ y } b = 14.3\ cm$$

## Ley de cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.




Ley de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$

Al despejar

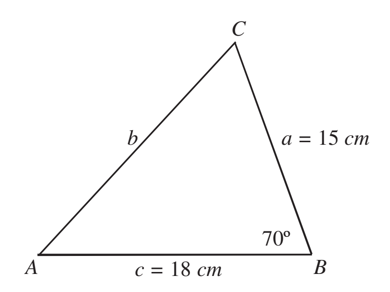
La ley de cosenos se utiliza cuando:

- Se tiene el valor de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se tiene el valor de los 3 lados.

EJEMPLOS

1 En el triángulo *ABC*, $a = 15$ *cm*, $c = 18$ *cm*, $\angle B = 70º$. Resuelve el triángulo.

**Solución**




Para calcular el valor del lado *b* se utiliza la fórmula:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Donde,

$$b = \sqrt{(15)^2 + (18)^2 - 2(15)(18)\cos 70º} = \sqrt{225 + 324 - 2(15)(18)(0.34202)} = \sqrt{364.3}$$

$$b = 19.09\ cm$$

Conocidos los 3 lados del triángulo se calcula el valor de $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(19.09)^2 + (18)^2 - (15)^2}{2(19.09)(18)} = \frac{364.43 + 324 - 225}{687.24} = 0.6743$$

Donde: $\angle A = \text{arc cos } 0.6743 = 47° 36'$

Por último, se determina la medida de $\angle C$:

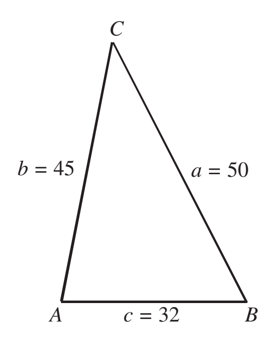
$$\angle C = 180º - \angle A - \angle B = 180° - 47° 36' - 70° = 62° 24'$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo *ABC* son:

$$b = 19.09\ cm,\ \angle A = 47° 36' \text{ y } \angle C = 62° 24'$$

2 En el triángulo $ABC$, $a = 50$, $b = 45$, $c = 32$. Resuelve el triángulo.

**Solución**




Para obtener $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(45)^2+(32)^2-(50)^2}{2(45)(32)} = \frac{2\,025+1024-2\,500}{2\,880} = 0.1906$$

Donde,

$$\angle A = \arccos 0.1906 = 79^{\circ}$$

Para obtener $\angle B$:

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(50)^2+(32)^2-(45)^2}{2(50)(32)} = \frac{2\,500+1\,024-2\,025}{3200} = 0.4684$$

Donde,

$$\angle B = \arccos 0.4684 = 62^{\circ}\ 4'$$

Para calcular $\angle C$:

$$\angle C = 180^{\circ} - \angle A - \angle B = 180^{\circ} - 79^{\circ} - 62^{\circ}\ 4' = 38^{\circ}\ 56'$$

Por consiguiente, los ángulos del triángulo $ABC$ son:

$$\angle A = 79^{\circ},\ \angle B = 62^{\circ}\ 4' \text{ y } \angle C = 38^{\circ}\ 56'$$

## Ley de tangentes

En todo triángulo oblicuángulo la razón entre la diferencia de 2 lados y la suma de los mismos, es igual a la razón entre la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a cada uno de los lados, y la tangente de la semisuma de dichos ángulos.

Fórmulas:

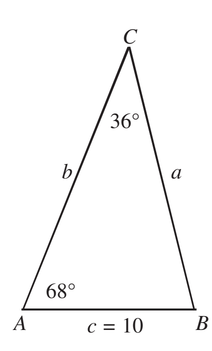
$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)},\quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} \text{ y } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo $ABC$, $c = 10$, $A = 68°$, $C = 36°$. Resuelve el triángulo.

**Solución**




Se determina el $\angle B$:

$$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 68° - 36° = 76°$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado $a$:

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle A = 68°$ y $\angle C = 36°$, se obtiene:

$$\frac{a-10}{a+10} = \frac{tan\left(\frac{68°-36°}{2}\right)}{tan\left(\frac{68°+36°}{2}\right)} = \frac{tan\ 16°}{tan\ 52°} = \frac{0.2867}{1.2799} = 0.2240$$

Entonces, de la expresión resultante:

$$\frac{a-10}{a+10} = 0.2240$$

Se despeja $a$:

$$a - 10 = 0.2240a + 2.240 \quad \rightarrow \quad a - 0.2240a = 2.240 + 10$$

$$0.776a = 12.240$$

$$a = \frac{12.240}{0.776}$$

$$a = 15.77\ cm$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado $b$:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle B = 76°$ y $\angle C = 36°$, se determina que:

$$\frac{b-10}{b+10} = \frac{tan\left(\frac{76°-36°}{2}\right)}{tan\left(\frac{76°+36°}{2}\right)} = \frac{tan\ 20°}{tan\ 56°} = \frac{0.3639}{1.4826} = 0.2454$$

De la expresión resultante,

$$\frac{b-10}{b+10} = 0.2454$$

Se despeja $b$:

$$b - 10 = 0.2454b + 2.454 \quad \rightarrow \quad b - 0.2454b = 10 + 2.454$$

$$0.7546b = 12.454$$

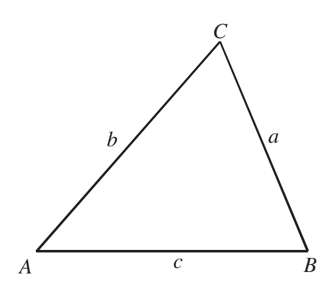
$$b = 16.5\ cm$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo son:

$$\angle B = 76°,\ a = 15.77\ cm \text{ y } b = 16.5\ cm$$

# EJERCICIO 53

Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo de acuerdo con los datos proporcionados.




1. $\angle B = 57° 20'$, $\angle C = 43° 39'$, $b = 18$
2. $\angle A = 63° 24'$, $\angle C = 37° 20'$, $c = 32.4$
3. $\angle A = 85° 45'$, $\angle B = 26° 31'$, $c = 43.6$
4. $\angle C = 49°$, $\angle A = 54° 21'$, $a = 72$
5. $\angle B = 29°$, $\angle C = 84°$, $b = 12.3$
6. $\angle A = 32°$, $\angle B = 49°$, $a = 12$
7. $a = 5$, $\angle A = 32°$, $b = 8$
8. $c = 13$, $b = 10$, $\angle C = 35° 15'$
9. $\angle B = 56° 35'$, $b = 12.7$, $a = 9.8$
10. $a = 9$, $c = 11.5$, $\angle C = 67° 21'$
11. $a = 15$, $b = 16$, $c = 26$
12. $a = 32.4$, $b = 48.9$, $c = 66.7$
13. $a = 100$, $b = 88.7$, $c = 125.5$
14. $a = 15$, $b = 12$, $c = 20$
15. $a = 12$, $b = 15$, $\angle C = 68°$
16. $a = 28$, $c = 32$, $\angle B = 76°$
17. $b = 45$, $c = 75$, $\angle A = 35°$
18. $a = 12.6$, $b = 18.7$, $\angle C = 56°$

Demuestra que para el triángulo se cumple:

- $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$

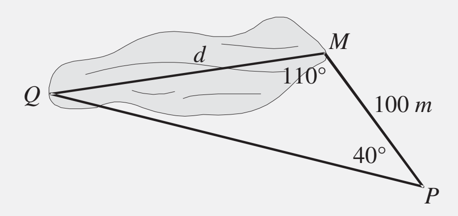
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para calcular la distancia entre 2 puntos a las orillas de un lago, se establece un punto $P$ a 100 metros del punto $M$; al medir los ángulos resulta que $\angle M = 110º$ y $\angle P = 40º$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos $M$ y $Q$?

**Solución**

Se realiza una figura que represente el problema:




De acuerdo con los datos se determina el valor de $\angle Q$:

$$\angle Q = 180° - 110° - 40° = 30°$$

Sea $\overline{MQ} = d$, entonces, al aplicar la ley de senos se obtiene:

$$\frac{d}{sen\ 40°} = \frac{100}{sen\ 30°}$$

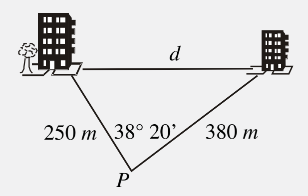
De la cual se despeja $d$:

$$d = \frac{(100)(sen\ 40°)}{sen\ 30°} = \frac{(100)(0.6427)}{0.5} = 128.54$$

En consecuencia, la distancia entre los puntos es de 128.54 metros.

2 Un observador se encuentra en un punto $P$ que dista de 2 edificios, 250 $m$ y 380 $m$, respectivamente. Si el ángulo formado por los 2 edificios y el observador es 38º 20', precisa la distancia entre ambos edificios.

**Solución**




Sea $d$ la distancia entre ambos edificios; entonces, por la ley de cosenos:

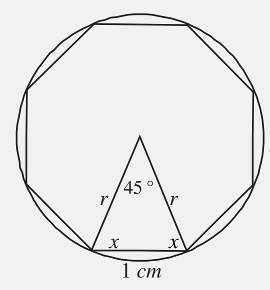
$$d = \sqrt{(250)^2 + (380)^2 - 2(250)(380)cos\ 38º20'} = \sqrt{62\,500 + 144\,400 - 149\,038.98} = 240.55$$

Finalmente, la distancia entre los edificios es de 240.55 $m$.

3 Se inscribe un octágono regular de lado 1 *cm* en una circunferencia; determina el área del círculo.

**Solución**

Si se inscribe un polígono regular en una circunferencia, la distancia del centro al vértice es el radio, si se trazan 2 radios a 2 vértices se forma un triángulo isósceles y la medida del ángulo central es $\frac{360°}{8} = 45°$, como lo muestra la figura:




Sea $x$ la medida de cada ángulo de la base en un triángulo isósceles, entonces:

$$2x + 45º = 180º \quad \rightarrow \quad 2x = 135º \quad \rightarrow \quad x = \frac{135º}{2} = 67.5º$$

Por la ley de senos se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{sen\ 45º} = \frac{r}{sen\ 67.5º}$$

Al despejar $r$ de la expresión anterior:

$$r = \frac{sen\ 67.5}{sen\ 45º} = 1.3\ cm$$

Luego, el área del círculo está dada por la expresión:

$$A = \pi\ r^2$$

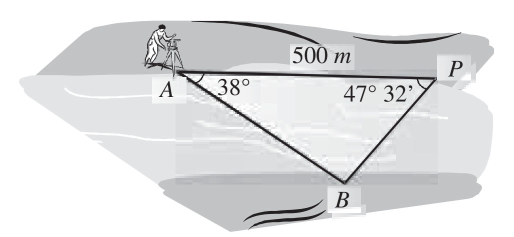
Se sustituye $r = 1.3\ cm$ y se obtiene:

$$A = \pi\ (1.3\ cm)^2 = 1.69\pi\ cm^2$$

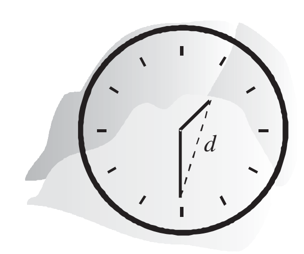
## EJERCICIO 54

Resuelve los siguientes problemas:

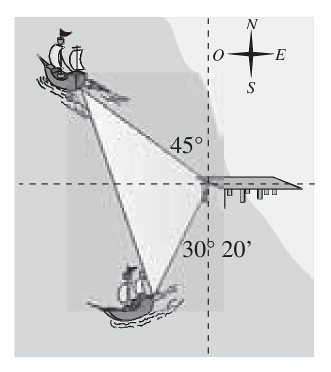
1. Para establecer la distancia desde un punto $A$ en la orilla de un río a un punto $B$ de éste, un agrimensor selecciona un punto $P$ a 500 metros del punto $A$, las medidas de $\angle BAP$ y $\angle BPA$ son 38° y 47° 32'. Obtén la distancia entre $A$ y $B$.



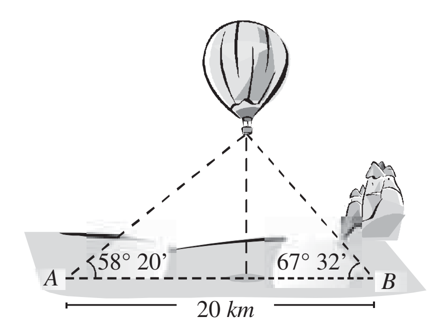
2. El horario y el minutero de un reloj miden respectivamente 0.7 y 1.2 *cm*. Determina la distancia entre los extremos de dichas manecillas a las 13:30 horas.



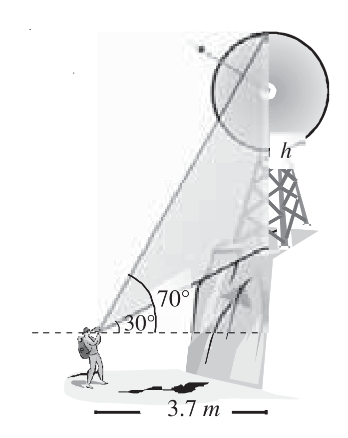

3. Un barco sale de un puerto a las 10:00 a.m. a 10 *km*/*h* con dirección sur 30°20'O. Una segunda embarcación sale del mismo puerto a las 11:30 *h* a 12 *km*/*h* con dirección norte 45°O. ¿Qué distancia separa a ambos barcos a las 12:30 horas?



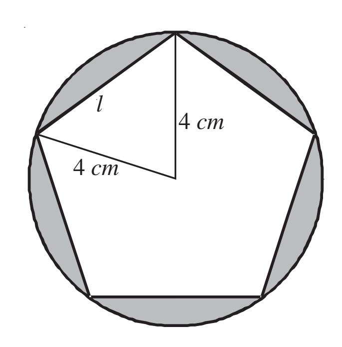

4. La distancia entre 2 puntos *A* y *B* es de 20 *km*. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de 58° 20' y 67° 32'. ¿A qué altura del suelo se encuentra?



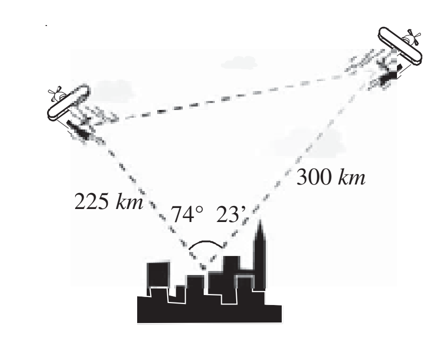

5. Una persona se encuentra a 3.7 *m* de un risco, sobre el cual se localiza una antena. La persona observa el pie de la antena con un ángulo de elevación de 30° y la parte superior de ésta con un ángulo de 70°. Determina la altura de la antena.



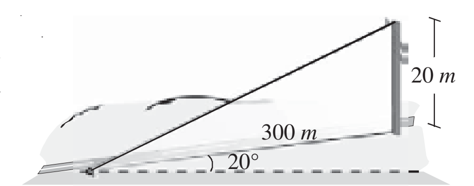
6. ¿Cuál es la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 centímetros de radio?



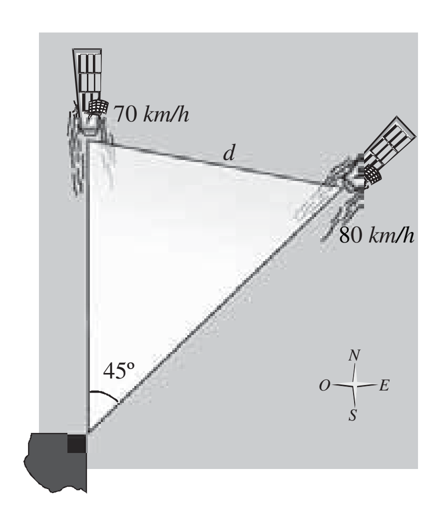

7. Dos aviones parten de una ciudad y sus direcciones forman un ángulo de 74° 23'. Después de una hora, uno de ellos se encuentra a 225 *km* de la ciudad, mientras que el otro está a 300 *km*. ¿Cuál es la distancia entre ambos aviones?



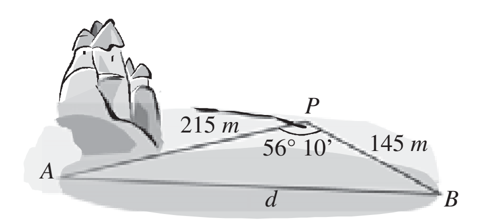

8. En un plano inclinado se encuentra un poste vertical de 20 metros de altura. Si el ángulo del plano con respecto a la horizontal es de 20°, calcula la longitud de un cable que llegaría de un punto a 300 metros cuesta abajo a la parte superior del poste.



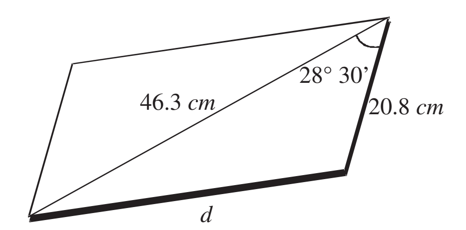

9. Un barco parte de un puerto y navega hacia el norte con una velocidad de 70 *km* por hora. Al mismo tiempo, pero en dirección noreste, otro buque viaja a razón de 80 *km* por hora. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro después de media hora?



10. La distancia que hay de un punto hacia los extremos de un lago son 145 y 215 metros, mientras que el ángulo entre las 2 visuales es de 56° 10'. Calcula la distancia entre los extremos del lago.

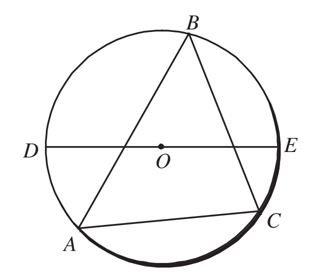



11. En un paralelogramo que tiene un lado que mide 20.8 *cm*, su diagonal mide 46.3 *cm*. Determina la longitud del otro lado si se sabe que el ángulo entre la diagonal y el primer lado es de 28° 30'.

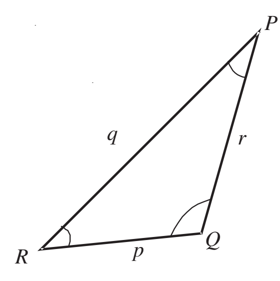



12. Si $\Delta\, ABC$ triángulo cualquiera y $\overline{DE}$ es el diámetro de la circunferencia, demuestra que:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{sen\, C} = \frac{\overline{BC}}{sen\, A} = \frac{\overline{CA}}{sen\, B}$$




13. Observa la siguiente figura:




*a*) Demuestra que dado un lado y 2 ángulos adyacentes, el área del triángulo será:

$$A = \frac{r^2\ sen\ Q\ sen\ P}{2\ sen\ (Q+P)} = \frac{q^2\ sen\ P\ sen\ R}{2\ sen\ (P+R)} = \frac{p^2\ sen\ R\ sen\ Q}{2\ sen\ (R+Q)}$$

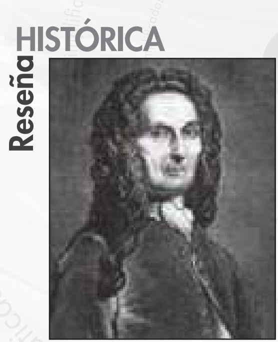
*b*) Demuestra que el área del triángulo está dada por cualquiera de las siguientes fórmulas:

- $A = \frac{1}{2} r^2\ sen\ P\ sen\ Q\ csc\ R$
- $A = \frac{2\,p\,q\,r}{p+q+r}\left[cos\left(\frac{1}{2}P\right)cos\left(\frac{1}{2}Q\right)cos\left(\frac{1}{2}R\right)\right]$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Reseña HISTÓRICA



Abraham de Moivre
(1667-1754)

**Abraham de Moivre** es conocido por la fórmula de Moivre y por su trabajo en la distribución normal y probabilidad. Fue amigo de Isaac Newton y Edmund Halley. En 1697 fue elegido miembro de Royal Society de Londres.

La fórmula de Moivre afirma que:

$$\forall x \in R \wedge \forall n \in Z (\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)^n = (\cos n\theta + i\ \text{sen}\ n\theta)$$

Esta fórmula es importante porque conecta los números imaginarios con la trigonometría.

## Forma trigonométrica o polar

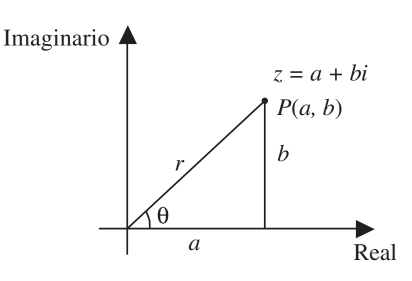
Sea el número complejo $z = a + bi$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ su valor absoluto y $\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right)$ el argumento o módulo de $z$, entonces su forma trigonométrica o polar se define como:

$$z = r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = r\ cis\ \theta = r\underline{|\theta} \quad \text{con } cos\ \theta + i\ sen\ \theta = cis\ \theta$$

**Demostración**

En el triángulo

$$cos\ \theta = \frac{a}{r},\ sen\ \theta = \frac{b}{r}$$




Al despejar $a$ y $b$ respectivamente

$$a = r\ cos\ \theta,\ b = r\ sen\ \theta$$

Si sustituyes en $z = a + bi$, obtienes:

$$z = r\ cos\ \theta + i\ r\ sen\ \theta = r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = r\ cis\ \theta = r\underline{|\theta}$$

**EJEMPLOS**

**Ejemplos**

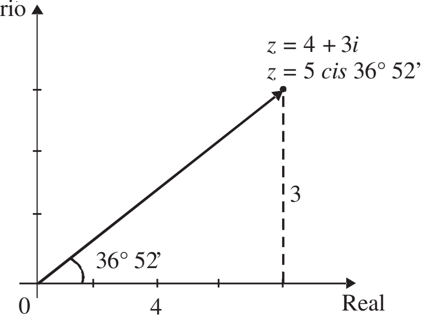
**1** Transforma el complejo $z = 4 + 3i$ a su forma trigonométrica con $0° \leq \theta \leq 360°$.

**Solución**

Se obtiene $\theta$ y $r$, entonces:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{3}{4}\right) = 36°\ 52'$$

$$r = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$




Por tanto, la forma trigonométrica es:

$$z = 5(cos\ 36°\ 52' + i\ sen\ 36°\ 52')$$

$$z = 5\ cis\ 36°\ 52' = 5\underline{|36°52'}$$

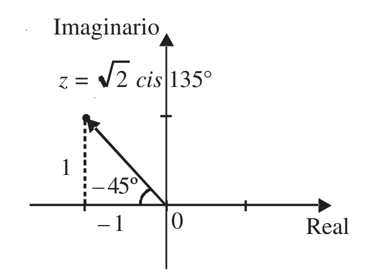
**2** Transforma el complejo $z = -1 + i$ a su forma trigonométrica con $0° \leq \theta \leq 360°$.

**Solución**

Se obtiene $\theta$ y $r$, entonces:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$




Por tanto, la forma trigonométrica es:

$$z = \sqrt{2}\ (cos\ 135° + i\ sen\ 135°)$$

$$z = \sqrt{2}\ cis\ 135° = \sqrt{2}\underline{|135°}$$

## Operaciones fundamentales

### *Multiplicación*

Sean los complejos $z_1 = r_1\,(cos\,\theta_1 + i\,sen\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2\,(cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$, entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,[cos\,(\theta_1 + \theta_2) + i\,sen\,(\theta_1 + \theta_2)] = r_1\;r_2\;cis\,(\theta_1 + \theta_2)$$

**EJEMPLOS**

**1** Si $z_1 = 2(cos\,60° + isen\,60°)$ y $z_2 = \sqrt{2}\,(cos\,45° + isen\,45°)$, determina $z_1 \cdot z_2$.

**Solución**

Se aplica la definición del producto de dos números complejos

$$z_1 \cdot z_2 = (2)(\sqrt{2})\,[cos\,(60° + 45°) + i\,sen\,(60° + 45°)] = 2\sqrt{2}\;[cos\,105° + i\,sen\,105°]$$

**2** Determina $z_1 \cdot z_2$ si $z_1 = 4\;cis\,\frac{\pi}{6}$ y $z_2 = 3\;cis\,\frac{\pi}{12}$.

**Solución**

Aplicando la definición del producto

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\;r_2\;cis\,(\theta_1 + \theta_2) = (4)(3)\;cis\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) = 12\;cis\frac{\pi}{4} = 12\underline{|\frac{\pi}{4}}$$

### *División*

Sean los complejos $z_1 = r_1\,(cos\,\theta_1 + i\,sen\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2\,(cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\;\theta_1 + isen\;\theta_1)}{r_2(cos\;\theta_2 + isen\;\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\right] = \frac{r_1}{r_2}cis(\theta_1 - \theta_2) = \frac{r_1}{r_2}\underline{|\theta_1 - \theta_2}$$

**EJEMPLOS**

**1** Sean $z_1 = 8(cos\,50° + i\,sen\,50°)$ y $z_2 = 4(cos\,15° + i\,sen\,15°)$, determina $\frac{z_1}{z_2}$.

**Solución**

Se aplica la definición del cociente de dos números complejos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{4}\left[cos(50° - 15°) + i\;sen(50° - 15°)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2[cos\,35° + i\,sen\,35°]$$

**2** Encuentra $\frac{z_2}{z_1}$, si $z_1 = 12\left(cos\frac{\pi}{15} + i\;sen\frac{\pi}{15}\right)$ y $z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{3} + i\;sen\frac{\pi}{3}\right)$.

**Solución**

Aplicando la definición del cociente:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{12}\left[cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15}\right) + i\;sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15}\right)\right]$$

Simplificando, se obtiene:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{4}\left[cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) + i\;sen\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right]$$

3 Si $z = \sqrt{2}\ cis\frac{\pi}{4}$, $z_1 = \sqrt{8}\ cis\frac{2\pi}{3}$, $z_2 = 2\ cis\frac{\pi}{12}$ y $z_3 = \frac{1}{2}\ cis\frac{5\pi}{6}$, determina $\frac{z\cdot z_2}{z_1\cdot z_3}$ .

**Solución**

Se realizan las operaciones del numerador y del denominador por separado:

$$z\cdot z_2 = \left(\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\right)\left(2cis\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1\cdot z_3 = \left(\sqrt{8}cis\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}cis\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{8}}{2}\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\ sen\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Por consiguiente la división se define como:

$$\frac{z\cdot z_2}{z_1\cdot z_3} = \frac{2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\ sen\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

Pero $-\frac{7\pi}{6}$ es igual al ángulo positivo $\frac{5\pi}{6}$, entonces:

$$\frac{z\cdot z_2}{z_1\cdot z_3} = 2\left[cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\ sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

*Potencia (fórmula de Moivre)*

Dado el complejo $z = r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, entonces,

$$z^n = r^n\,(cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean $z = 2(cos\ 15° + i\ sen\ 15°)$, encuentra $z^2$.

**Solución**

Aplicando la definición de la potencia para hallar $z^2$:

$$z^2 = 2^2(cos\ 2(15º) + i\ sen\ 2(15º)\ ) = 4(cos\ 30º + i\ sen\ 30º)$$

Es importante mencionar que algunos de los resultados están expresados en términos de un ángulo notable y se pueden sustituir por sus valores respectivos.

$$z^2 = 4(cos\ 30º + i\ sen\ 30º) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\ + 2i$$

**2** Sea $z = \frac{1}{2}(cos\ 36° + i\ sen\ 36°)$, encuentra $z^5$.

**Solución**

Se aplica la definición de potencia de un número complejo

$$z^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 (cos\ 5(36º) + i\ sen\ 5(36º)) = \frac{1}{32}(cos\ 180º + i\ sen\ 180º) = \frac{1}{32}(-1 + i(0)) = -\frac{1}{32}$$

Por tanto, $z^5 = -\frac{1}{32}$

**3** Si $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\ sen\frac{\pi}{12}\right)$ y $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\ sen\frac{3\pi}{4}\right)$, determina $\frac{z^2}{z_1}$.

**Solución**

Se obtiene la potencia de $z$:

$$z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\ sen\frac{\pi}{12}\right)\right)^2 = \frac{1}{3}\left(cos\frac{2\pi}{12} + i\ sen\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\frac{\pi}{6}\right)$$

Se procede a realizar la división, entonces:

$$\frac{z^2}{z_1} = \frac{\frac{1}{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\ sen\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\ sen\frac{\pi}{12}\right)$$

### *Raíz*

Sea el complejo $z = r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, entonces su raíz enésima se define como:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\ sen\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

Donde $k$ toma los valores 0, 1, 2, 3,…, $n - 1$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Determina la raíz cúbica de $z = 8\ cis\ 240º$.

**Solución**

Las raíces se obtienen aplicando la definición y $k$ adopta los valores de 0, 1 y 2, entonces:

Para $k = 0$

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{240º + 360º(0)}{3} + i\ sen\frac{240º + 360º(0)}{3}\right) = 2(cos\ 80º + i\ sen\ 80º)$$

Para $k = 1$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{240º + 360º(1)}{3} + i\ sen\frac{240º + 360º(1)}{3}\right) = 2(cos\ 200º + i\ sen\ 200º)$$

Para $k = 2$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{240º + 360º(2)}{3} + i\ sen\frac{240º + 360º(2)}{3}\right) = 2(cos\ 320º + i\ sen\ 320º)$$

2 Dado el número $z = 1$, determina $\sqrt[4]{z}$ .

**Solución**

El número complejo $z = 1$ en su forma trigonométrica es $z = 1\,(cos\ 0º + i\ sen\ 0º)$, luego $k$ adopta los valores de 0, 1, 2 y 3, entonces las raíces son:

$$z_0 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0º+360º(0)}{4} + i\ sen\frac{0º+360º(0)}{4}\right) = 1\,(cos\ 0° + i\ sen\ 0°) = 1$$

$$z_1 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0º+360º(1)}{4} + i\ sen\frac{0º+360º(1)}{4}\right) = 1\,(cos\ 90° + i\ sen\ 90°) = i$$

$$z_2 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0º+360º(2)}{4} + i\ sen\frac{0º+360º(2)}{4}\right) = 1\,(cos\ 180° + i\ sen\ 180°) = -1$$

$$z_3 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0º+360º(3)}{4} + i\ sen\frac{0º+360º(3)}{4}\right) = 1\,(cos\ 270° + i\ sen\ 270°) = -i$$

En consecuencia, los valores de la raíz cuarta de $z = 1$ son los complejos $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -i$.

## EJERCICIO 55

Transforma a su forma trigonométrica los siguientes números complejos:

1. $z = 4 - i$
2. $z = \sqrt{3} + i$
3. $z = -2 + 2i$
4. $z = 5$
5. $z = -3i$
6. $z = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$
7. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
8. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Sean los complejos $z_1 = \sqrt{2}\ cis\ 45°$, $z_2 = \sqrt{13}\ \ cis\frac{\pi}{6}$, $z_3 = 2\ cis\ 60°$ y $z_4 = \sqrt{2}\ \ cis\frac{3\pi}{4}$, determina:

9. $z_1 \cdot z_2$
10. $z_2 \cdot z_4$
11. $z_1 \cdot z_3$
12. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
13. $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4$
14. $\frac{z_1}{z_4}$
15. $\frac{z_2}{z_4}$
16. $\frac{z_1}{z_3}$
17. $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$
18. $\frac{z_2}{z_1 \cdot z_4}$
19. $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_4}$
20. $\frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z_4}$

Resuelve lo que se te pide.

21. Si $z = 3\ cis\ 120º$, determina $z^2$
22. Encuentra $z^4$ si $z = 3(cos\ 25º + i\ sen\ 25º)$
23. Determina $z^3$ si $z = 5\ cis\ 15º$
24. Encuentra $\sqrt{z}$ si $z = 16\left(cos\dfrac{\pi}{3} + i\ sen\dfrac{\pi}{3}\right)$
25. Si $z = 64\ cis\ 120º$, determina $\sqrt[6]{z}$
26. Encuentra $\sqrt[3]{z}$ si $z = -1$
27. Si $z = 4\ cis\dfrac{\pi}{9}$ y $z_1 = \dfrac{3}{2}cis\dfrac{2\pi}{9}$, determina $(z \cdot z_1)^2$
28. Si $z = 2(cos\ 30º + i\ sen\ 30º)$ y $z_1 = 4(cos\ 60º + i\ sen\ 60º)$, determina $\sqrt[3]{z \cdot z_1}$
29. Encuentra el resultado de: $\left[2(cos\ 32º + i\ sen\ 32º)\right]^2 \cdot 7(cos\ 36º + i\ sen\ 36º)$
30. Determina el resultado de: $\left[8\left(cos\dfrac{\pi}{12} + i\ sen\dfrac{\pi}{12}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Geometría analítica

# Capítulo 1

## Geometría analítica unidimensional

**Reseña HISTÓRICA**

René Descartes

(1596-1650)

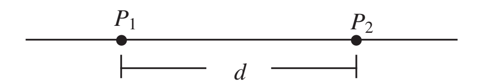
Filósofo y matemático francés, nació en 1596. Entre sus principales aportes a la filosofía está su famoso *Discurso del método*. Descartes afirmó que los orígenes de esta obra filosófica estaban en la lógica, la geometría y el álgebra. Por otra parte, este pensador ilustre hizo una importante contribución a las matemáticas. Al *Discurso del método* le añadió un "anexo" titulado Geometría, en el cual propuso un sistema nuevo para estudiar esta disciplina. Gracias al "sistema de coordenadas cartesianas", creado por Descartes y denominado así en su honor, diversas áreas de las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en los años posteriores. Este sistema permite asignar a cada punto del plano una pareja de números reales que lo identifica, inequívocamente. Así, cualquier figura geométrica puede ser identificada con un conjunto de parejas de números reales.

## Segmento de recta

Se define como la porción de recta limitada por dos puntos no coincidentes.

## Distancia entre dos puntos

Es la longitud de un segmento de recta. Dados los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ en la recta numérica:




La distancia que existe entre ellos se obtiene mediante la expresión:

$$d = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia que existe entre los puntos $P_1(-6)$ y $P_2(8)$?

**Solución**

Se sustituye $x_1 = -6$ *y* $x_2 = 8$ en la fórmula, y la distancia entre los puntos es:

$$d = |8-(-6)| = |8+6| = |14| = 14u$$

Donde $u$ representa la unidad de longitud que se utiliza.

2 Determina la distancia entre los puntos $P\left(\frac{2}{3}x\right)$ y $Q\left(-\frac{1}{6}x\right)$, con $x > 0$.

**Solución**

Se sustituye $x_1 = \frac{2}{3}x$ y $x_2 = -\frac{1}{6}x$ en la fórmula y se obtiene:

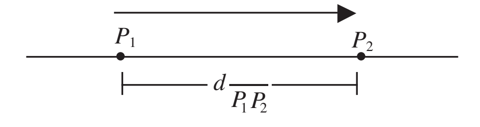
$$d = \left|-\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}x\right| = \left|-\frac{5}{6}x\right| = \frac{5}{6}x$$

Por consiguiente, la distancia entre los puntos es de $\frac{5}{6}x$ unidades.

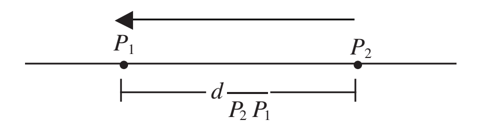
## Distancia dirigida

Es aquella que al medirla se establece un sentido entre sus puntos.

La distancia dirigida de $P_1$ a $P_2$ es: $d_{\overline{P_1P_2}} = x_2 - x_1$.



Ahora bien, la distancia dirigida de $P_2$ a $P_1$ es, $d_{\overline{P_2P_1}} = x_1 - x_2$.




Por consiguiente, se observa que: $d_{\overline{P_1P_2}} = x_2 - x_1 = -x_1 + x_2 = -(x_1 - x_2) = -d_{\overline{P_2P_1}}$. Es decir, el orden de los puntos indica el sentido del segmento de recta.

$$\overline{P_1P_2} = -\overline{P_2P_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la distancia dirigida $\overline{BA}$, si $A\left(\frac{2}{3}\right)$ y $B\left(\frac{1}{6}\right)$.

**Solución**

Se toma $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$, se sustituye en la fórmula $d_{\overline{BA}} = x_2 - x_1$ y se obtiene como resultado:

$$d_{\overline{BA}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,u$$

2 ¿Cuál es la distancia dirigida $\overline{PQ}$ y $\overline{QP}$, si $P\left(1\frac{1}{3}\right)$ y $Q\left(-\frac{2}{5}\right)$?

**Solución**

Para obtener la distancia de $\overline{PQ}$, se toma $x_1 = 1\frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{2}{5}$, se sustituyen en la expresión:

$$d_{\overline{PQ}} = x_2 - x_1$$

$$d_{\overline{PQ}} = -\frac{2}{5} - 1\frac{1}{3} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-6-20}{15} = -\frac{26}{15} = -1\frac{11}{15}\,u$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{26}{15}u = -1\frac{11}{15}u$.

Para obtener la distancia de $\overline{QP}$ se sustituyen los valores de $x_1$ y $x_2$ en la fórmula:

$$d_{\overline{QP}} = x_1 - x_2$$

$$d_{\overline{QP}} = 1\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{20+6}{15} = \frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}\,u$$

Estos resultados demuestran que:

$$\overline{QP} = -\overline{PQ}$$

# EJERCICIO 1

Determina la distancia entre los siguientes pares de puntos.

1. $A(-2)$ y $B(1)$
2. $P_1(-5)$ y $P_2(-1)$
3. $M\left(-\sqrt{3}\right)$ y $N\left(4\sqrt{3}\right)$
4. $P(-6)$ y $Q\left(-\frac{7}{2}\right)$
5. $A\left(\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(-\frac{1}{2}\right)$
6. $S(-0.5)$ y $T\left(\frac{1}{2}\right)$
7. $S\left(\frac{3}{8}\right)$ y $T\left(-\frac{1}{6}\right)$
8. $A\left(\frac{6}{5}\right)$ y $B\left(-\frac{11}{5}\right)$
9. $P(3a)$ y $Q(-2a)$
10. $P_1\left(\frac{2}{3}a\right)$ y $P_2\left(-\frac{5}{12}a\right)$

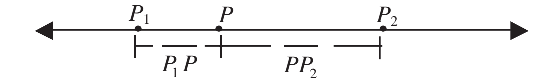
Para los puntos: $A(-3)$, $B(4)$, $C\left(\frac{3}{4}\right)$ y $D\left(-\frac{1}{2}\right)$, obtén las siguientes distancias dirigidas:

11. $\overline{AB}$
12. $\overline{DC}$
13. $\overline{AD}$
14. $\overline{BA}$
15. $\overline{CB}$
16. $\overline{DA}$
17. $\overline{DB}$
18. $\overline{CA}$
19. $\overline{BC}$
20. $\overline{CD}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## División de un segmento en una razón dada

Sea el segmento definido por los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, si $P(x)$ es un punto sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$, entonces $P$ lo divide en los segmentos $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ en la razón $r$.




Donde la razón se define como:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} \text{ o } r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$$

Siendo $\overline{P_1P} = x - x_1$ y $\overline{PP_2} = x_2 - x$, por tanto:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \text{ con } x_2 \neq x$$

Finalmente, la coordenada del punto de división $P$ es:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \text{ con } r \neq -1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El punto $P(-3)$ se encuentra entre los puntos $P_1(-5)$ y $P_2(0)$. Encuentra la razón en que el punto $P$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$.

**Solución**

Se sustituyen en la fórmula los siguientes valores: $x = -3$, $x_1 = -5$ y $x_2 = 0$.

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-3-(-5)}{0-(-3)} = \frac{-3+5}{0+3} = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente, la razón es igual a: $\frac{2}{3}$.

2 ¿Cuál es la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(-2)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$, cuyas coordenadas son $P_1(3)$ y $P_2(-1)$?

**Solución**

Dados $x = -2$, $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$, se sustituyen en la fórmula de la razón para obtener como resultado:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-2-3}{-1-(-2)} = \frac{-5}{-1+2} = \frac{-5}{1} = -5$$

El signo negativo de la razón indica que el punto $P(-2)$ se encuentra sobre la misma recta, pero fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$.



3 Determina la coordenada del punto de división del segmento definido por los puntos: $A(-1)$ y $B\left(\frac{4}{3}\right)$ si están en la relación $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{1}{2}$.

**Solución**

Se identifican y sustituyen en la fórmula correspondiente los valores, para obtener:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \Rightarrow x = \frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{10}{3}$$

Por tanto, la coordenada del punto $P$ es $-\frac{10}{3}$.

# EJERCICIO 2

Encuentra la razón en que el punto $P$ divide al segmento, cuyos extremos son $P_1$ y $P_2$.

1. $P_1(-3)$, $P_2(9)$ y $P(0)$
2. $P_1(4)$, $P_2(-6)$ y $P(2)$
3. $P_1(-10)$, $P_2(2)$ y $P(-4)$
4. $P_1(-5)$, $P_2(0)$ y $P(2)$
5. $P_1\left(-\frac{3}{7}\right)$, $P_2(4)$ y $P(-1)$
6. $P_1\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}\right)$ y $P\left(\frac{1}{4}\right)$
7. $P_1\left(-\frac{5}{8}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{8}\right)$ y $P\left(\frac{1}{4}\right)$
8. $P_1\left(-\frac{3}{4}\right)$, $P_2\left(-\frac{5}{4}\right)$ y $P(1)$

Determina el valor de la coordenada del punto $P(x)$ que divide a los siguientes segmentos, en las razones que se indican a continuación:

9. $P_1(-2)$, $P_2(6)$ y $r=-\frac{1}{4}$
10. $P_1\left(-\frac{3}{2}\right)$, $P_2(4)$ y $r=-3$
11. $P_1(-4)$, $P_2(2)$ y $r=\frac{1}{3}$
12. $P_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{9}{2}\right)$ y $r=1$
13. $P_1\left(-\frac{2}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{4}\right)$ y $r=\frac{1}{2}$
14. $P_1\left(-\frac{3}{10}\right)$, $P_2\left(\frac{4}{5}\right)$ y $r=-\frac{1}{5}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Punto medio

Es aquel que divide a un segmento en dos partes iguales. La coordenada del punto medio, $P_m$, del segmento definido por los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, se determina tomando la razón $r = 1$.

Se sustituye en $x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$ y se obtiene la coordenada del punto medio que es:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Determina el punto medio del segmento, cuyos extremos son $P_1(-6)$ y $P_2(4)$.

**Solución**

Se sustituyen en la fórmula los valores de $x_1=-6$ y $x_2=4$, para obtener como resultado:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x_m=\frac{-6+4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Por tanto, resulta que $P_m(-1)$.

**2** Uno de los extremos de un segmento es el punto $P_1(-5)$ y la coordenada de su punto medio es $P_m\left(-\frac{7}{2}\right)$. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo?

**Solución**

La coordenada que se desea encontrar es $x_2$, se sustituye $x_1=-5$ y $x_m=-\frac{7}{2}$ en la fórmula, para después despejar $x_2$:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2} \rightarrow -\frac{7}{2}=\frac{-5+x_2}{2} \rightarrow x_2=-7+5=-2, \text{ se obtiene } P_2(-2).$$

# EJERCICIO 3

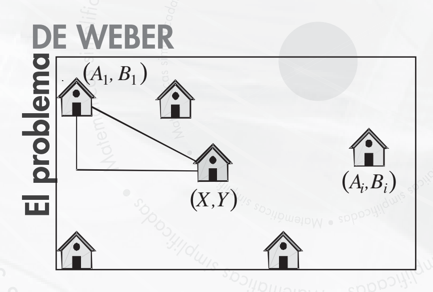
Determina la coordenada del punto medio de los siguientes segmentos:

1. $P(3)$ y $Q(-1)$
2. $S(4)$ y $T(7)$
3. $M(-6)$ y $N(-4)$
4. $R\left(-\frac{2}{3}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2}\right)$
5. $P\left(\frac{1}{6}\right)$ y $T\left(\frac{2}{3}\right)$
6. $A\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{1}{6}\right)$
7. $C\left(-2\sqrt{3}\right)$ y $D\left(5\sqrt{3}\right)$
8. $E\left(\frac{3}{4}a\right)$ y $F\left(-\frac{7}{6}a\right)$
9. $H\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $J(-3)$
10. Un extremo de un segmento es el punto $P(-1)$ y su punto medio es el punto $P_m\left(-\frac{5}{4}\right)$. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 2

## GEOMETRÍA ANALÍTICA BIDIMENSIONAL



Gráfica del problema de Weber

"Los problemas de localización investigan la mejor decisión de dónde localizar una o unas centrales que a su vez satisfaga unos puntos de demanda o clientes, sistemas de distribución o sistemas logísticos." Uno de los problemas más sencillos de localización es determinar el lugar hacia el cual se transportará material, acarreando un costo por unidad de distancia. Esto es lo que se conoce en administración de operaciones como "el problema de Weber".

El problema toma como base las coordenadas de los puntos desde o hacia los cuales hay que transportar el material. El sistema de coordenadas se puede tomar arbitrariamente desde un mapa, dando parejas ordenadas ($Ai$, $Bi$) para denotar la posición óptima del desplazamiento por las variables $X$, $Y$.

El problema se resuelve al encontrar las coordenadas del punto ($X,Y$) del nuevo desplazamiento, tal que el costo de transporte total sea mínimo.

$Min\ Z = \sum Wi \cdot di$, donde $di$ es la distancia que hay entre ($X,Y$) y ($Ai$, $Bi$), dada en unidades de longitud. $Wi$ es el costo por unidad de longitud.

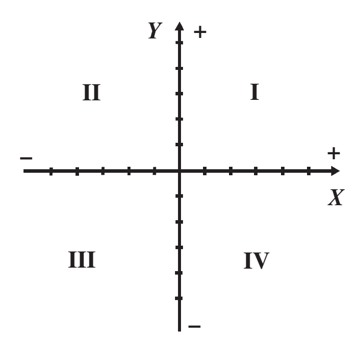
$$X = \frac{\sum \frac{Wi}{di}}{\sum \frac{Wi \cdot Ai}{di}}, \quad Y = \frac{\sum \frac{Wi \cdot Bi}{di}}{\sum \frac{Wi}{di}}$$

Con $di = \sqrt{(X - Ai)^2 + (Y - Bi)^2}$

## Plano cartesiano

El plano cartesiano son dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de eje $X$ o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje $Y$ o eje de las ordenadas.

El plano cartesiano presenta cuatro regiones llamadas "cuadrantes" y a cada punto $P$ se le asigna un par coordenado $P(x, y)$.

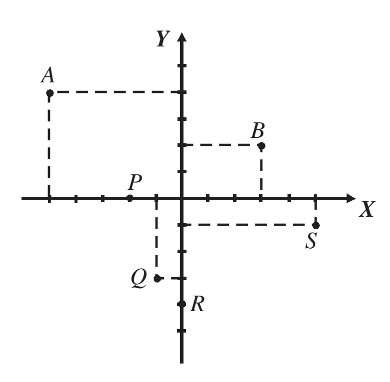



### Localización de puntos

Para localizar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano se toma como referencia el origen a partir de él, se avanza tanto como lo indique el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda, según sea su signo, y a partir de la nueva posición se avanza hacia arriba o abajo, según lo indique el signo del segundo número (ordenada).

**Ejemplo**

Grafica los siguientes puntos $A(-5, 4)$, $B(3, 2)$, $P(-2, 0)$, $Q(-1, -3)$, $R(0, -4)$ y $S(5, -1)$ en el plano cartesiano.




## EJERCICIO 4

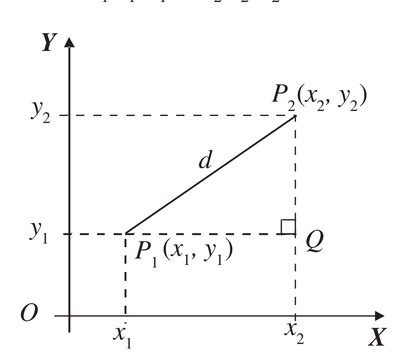
Localiza en el plano cartesiano los siguientes puntos y únelos:

1. $A(3, -1)$, $B(4, 3)$
2. $A(0, 2)$, $B(3, 0)$
3. $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$, $C(2, -3)$
4. $A(0, 5)$, $B(2, 1)$, $C(-3, 4)$
5. $A(-3, 2)$, $B(0, -2)$, $C(1, 1)$
6. $A(1, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -3)$, $D(4, 2)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Distancia entre dos puntos

Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos del plano, la distancia que existe entre ellos se determina de la siguiente forma:




En el triángulo $P_1QP_2$, por el teorema de Pitágoras

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(\overline{P_1Q}\right)^2 + \left(\overline{QP_2}\right)^2$$

Pero, $\overline{P_1P_2} = d$, $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$ y $\overline{QP_2} = y_2 - y_1$ entonces:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{ con}$$

$$d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_1}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia entre los puntos $A(6, 3)$ y $B(3, -1)$?

**Solución**

Se sustituye en la fórmula, $x_1 = 6$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$ y $y_2 = -1$ y se obtiene:

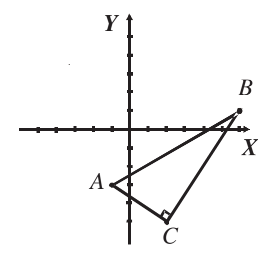
$$d = \sqrt{(3-6)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5u$$

2 Demuestra que el triángulo $ABC$ formado por los puntos $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$ es rectángulo.

**Demostración**

El triángulo es rectángulo si la suma de los cuadrados de sus lados menores (catetos) es igual al cuadrado del lado mayor (hipotenusa).

Se aplica la fórmula de distancia para obtener la longitud de cada lado del triángulo:




$$d_{AB} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(7)^2 + (4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$d_{AB}^{\,2} = d_{BC}^{\,2} + d_{AC}^{\,2}$$

$$\left(\sqrt{65}\right)^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2$$

$$65 = 52 + 13$$

$$65 = 65$$

Se demuestra entonces que el triángulo $ABC$ es rectángulo.

3 La distancia entre dos puntos es $\sqrt{34}$ . Si uno de los extremos tiene coordenadas $A(1, 3)$ y la abscisa del punto $B$ es la mitad de la ordenada, determina las coordenadas del extremo $B$.

**Solución**

Las coordenadas del punto $B$ están en la relación $x = \frac{1}{2}y$, por consiguiente, el punto se expresa como $B\left(\frac{1}{2}y,\ y\right)$.

Al sustituir en la fórmula, se despeja a $y$:

Se elevan ambos miembros al cuadrado $\sqrt{\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-3)^2}=\sqrt{34} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-3)^2 = 34$ Se desarrollan binomios

$$\frac{1}{4}y^2-y+1+y^2-6y+9 = 34$$

$$\frac{5}{4}y^2-7y-24 = 0$$

Al multiplicar por 4 ambos miembros de la igualdad: $5y^2 - 28y - 96 = 0$

Se resuelve la ecuación: $(y - 8)(5y + 12) = 0$

$$y = 8;\ y = -\frac{12}{5}$$

Se sustituyen estos valores en la relación $x = \frac{1}{2}y$, y se determina que:

Para $y = 8$, $x = 4$ para $y = -\frac{12}{5}$, $x = -\frac{6}{5}$

Por consiguiente, existen 2 puntos que se encuentran a la misma distancia del punto $A$.

Las coordenadas del punto $B$ son: $B(4, 8)$ y $B\left(-\frac{6}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

4 Demuestra por medio de distancias, que los puntos $A(-6,-8)$, $B(0,-4)$ y $C(3,-2)$, están en una misma recta (son colineales).

**Solución**

Se obtienen las distancias entre los puntos:

$$d_{AB}=\sqrt{(0-(-6))^2+(-4-(-8))^2}=\sqrt{(6)^2+(4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$

$$d_{BC}=\sqrt{(3-0)^2+(-2-(-4))^2}=\sqrt{(3)^2+(2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$$d_{AC}=\sqrt{(3-(-6))^2+(-2-(-8))^2}=\sqrt{(9)^2+(6)^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}$$

Los puntos son *colineales* si se satisface que la mayor de las distancias obtenidas es igual a la suma de las otras, es decir:

$$d_{AC}=d_{AB}+d_{BC} \qquad \sqrt{117}=\sqrt{52}+\sqrt{13}$$

$$\sqrt{(9)(13)}=\sqrt{(4)(13)}+\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{13}=2\sqrt{13}+\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{13}=3\sqrt{13}$$

Al cumplirse la condición, se demuestra que los puntos dados son colineales.

# EJERCICIO 5

Encuentra la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1. $A(-2, -7), B(6, -1)$
2. $A(4, 2), B(5, 0)$
3. $A(0, 2), B(7, 3)$
4. $A(7, 3), B(3, -1)$
5. $A\left(3\sqrt{6}, -2\sqrt{10}\right),\ B\left(5\sqrt{6}, -4\sqrt{10}\right)$
6. $A\left(3, \frac{1}{2}\right),\ B\left(\frac{4}{3}, -1\right)$
7. $A\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right),\ B\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$
8. $A(-1, 0)$ y $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
9. $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ y $B\left(-\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right)$
10. $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Calcula el perímetro de los triángulos, cuyos vértices son los siguientes puntos:

11. $A(-2, 2), B(7, -1)$ y $C(3, -8)$
12. $J(3, 1), K(2, 7)$ y $L(-1, 6)$
13. $M(1, 2), N(5, 3)$ y $P(-3, -6)$
14. $P(0, 0), Q(0, 4)$ y $R(3, 0)$
15. Verifica que los puntos $A(-2, -3), B(-4, -5)$ y $C(-1, -6)$, son los vértices de un triángulo isósceles.
16. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-2, 3)$ y $B(5, -8)$, ¿cuál es su perímetro y área?
17. La longitud de un segmento es de 13 $u$ y las coordenadas de uno de sus extremos son $A(8, 6)$, obtén la ordenada del otro extremo si su abscisa es –4.
18. El extremo de un segmento de recta es el punto $A(2, -4)$. Si la ordenada del otro extremo es $\frac{3}{2}$ de su abscisa, determina las coordenadas del punto, si la longitud del segmento es de $2\sqrt{26}\ u$.

Mediante la fórmula de la distancia, averigua qué puntos son colineales.

19. $A(-4, -5),\ B(0, -3)$ y $C(8, 1)$
20. $A(-3, -11),\ B(1, 3)$ y $C(5, -4)$
21. $A(-3, 3),\ B\left(1, \frac{1}{3}\right)$ y $C(3, -1)$
22. $A(2, 2),\ B(-1, 2)$ y $C(3, 3)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## División de un segmento en una razón dada

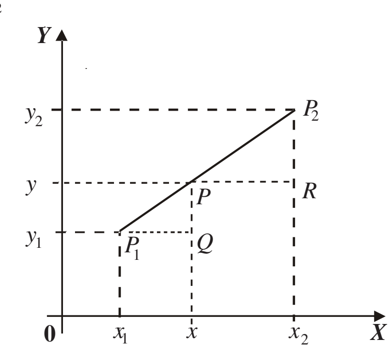
Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta, entonces la razón en que el punto $P(x, y)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en dos partes proporcionales se define como: $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$.

Por geometría, los triángulos $P_1PQ$ y $PP_2R$ son semejantes, la proporcionalidad que existe entre sus lados es:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{RP_2}}$$

Por otro lado, $\overline{P_1Q} = x - x_1$, $\overline{PR} = x_2 - x$,

$$\overline{QP} = y - y_1,\ \overline{RP_2} = y_2 - y$$



Entonces:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

1. Para determinar la razón dados los extremos y el punto de división se emplea:

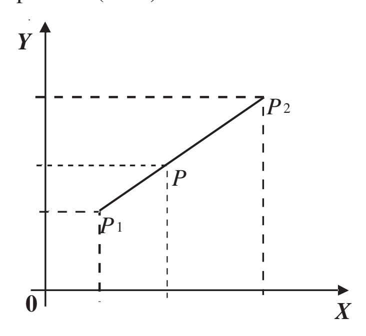
$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ o } r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

2. Para encontrar el punto de división dados los extremos y la razón se utiliza:

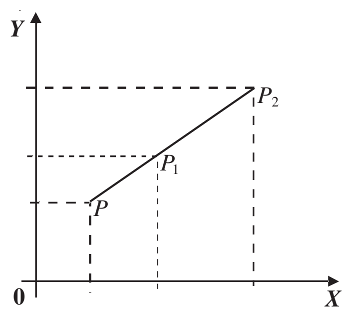
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r};\ y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

El signo de la razón indica si el punto de división se ubica entre los extremos del segmento o fuera de ellos sobre la misma recta.

1. Cuando $P(x, y)$ está en el segmento $\overline{P_1P_2}$, la razón es positiva ($r > 0$).




2. Cuando $P(x, y)$ está en la prolongación del segmento, la razón es negativa ($r < 0$).




EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(2, 7)$ divide al segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-1, 1)$ y $P_2(6, 15)$?

**Solución**

Se sustituyen los valores de $x = 2$, $x_1 = -1$ y $x_2 = 6$, en la fórmula:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{2 - (-1)}{6 - 2} = \frac{3}{4}$$

Por consiguiente, el valor de la razón es: $\frac{3}{4}$.

Se obtiene el mismo valor de $r$ si se toman los valores de las ordenadas y se sustituyen en la fórmula:

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$r = \frac{7 - 1}{15 - 7} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

2 ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(10, 7)$ divide al segmento de la recta, cuyos extremos son los puntos $P_1(-5, 2)$ y $P_2(1, 4)$?

**Solución**

Se sustituye $y = 7$, $y_1 = 2$ y $y_2 = 4$ en la siguiente fórmula:

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Obteniendo:

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{7 - 2}{4 - 7} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

Esta misma razón se obtiene al sustituir los valores de $x$.

En consecuencia, la razón es $r = -\frac{5}{3}$, el signo menos indica que el punto $P$ se encuentra sobre la recta que pasa por los puntos $P_1$ y $P_2$, pero no entre ellos.

**3** Determina las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón $r = -\frac{2}{7}$, y cuyos extremos son los puntos $P_1(0, 3)$ y $P_2(7, 4)$.

**Solución**

Se sustituyen los valores en las respectivas fórmulas y se obtiene la coordenada de *P:*

$$x = \frac{0+\left(-\frac{2}{7}\right)(7)}{1+\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{-\frac{2}{1}}{\frac{5}{7}} = -\frac{14}{5} \qquad y = \frac{3+\left(-\frac{2}{7}\right)(4)}{1+\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{3-\frac{8}{7}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{\frac{21-8}{7}}{\frac{7-2}{7}} = \frac{\frac{13}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{13}{5}$$

Por tanto, el punto de división tiene como coordenadas $P\left(-\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

**4** Para los puntos $P_1(5, 3)$ y $P_2(-3, -3)$, encuentra la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de $P$ a $P_1$ sea el triple de la que existe a $P_2$ y se encuentra entre $P_1$ y $P_2$.

**Solución**

En este caso $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{3}{1} = 3$, al sustituir en la fórmula:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{5+3(-3)}{1+3} = \frac{-4}{4} = -1\,; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{3+3(-3)}{1+3} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Entonces, las coordenadas del punto de división son $P\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.

**5** Dados los puntos $P_1(4, -3)$ y $P_2(1, 4)$, determina la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de $P$ a $P_1$ es el doble de la que existe a $P_2$ y se encuentra entre $P_1$ y $P_2$.

**Solución**

Según las condiciones del problema se establece que $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{2}{1} = 2$, luego al sustituir en la fórmula se determina que:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{4+2(1)}{1+2} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{-3+2(4)}{1+2} = \frac{-3+8}{3} = \frac{5}{3}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto de división son $P\left(2, \frac{5}{3}\right)$.

# EJERCICIO 6

Determina la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ en que el punto $P$ divide al segmento de recta de extremos $P_1$ y $P_2$.

1. $P_1(0, 2)$, $P_2(-2, 4)$ y $P(2, 0)$
2. $P_1(-1, 4)$, $P_2(0, 3)$ y $P(3, 0)$
3. $P_1(3, -4)$, $P_2(0, 2)$ y $P(2, -2)$
4. $P_1(3, 5)$, $P_2(-1, 4)$ y $P(-5, 3)$
5. $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $P_2(2, 1)$ y $P\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{18}\right)$
6. $P_1(-5, 1)$, $P_2(4, 3)$ y $P\left(-3, \frac{13}{9}\right)$

Dados los extremos $P_1$, $P_2$ y la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, encuentra las coordenadas del punto de división $P$ del segmento $\overline{P_1P_2}$.

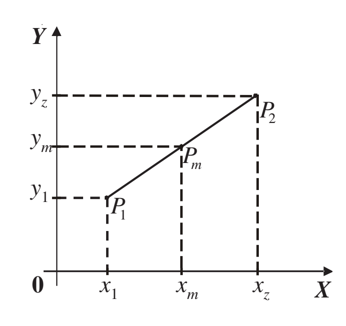
7. $P_1(4, 1)$, $P_2(5, -2)$ y $r = -2$
8. $P_1(0, 5)$, $P_2(6, -1)$ y $r = 5$
9. $P_1(-2, 3)$, $P_2(4, 5)$ y $r = \frac{2}{3}$
10. $P_1\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $P_2(0, 4)$ y $r = \frac{1}{2}$
11. $P_1(5, -6)$, $P_2(1, 0)$ y $r = \frac{1}{3}$
12. $P_1(a, 2b)$, $P_2(-3a, 4b)$ y $r = 1$
13. Los puntos extremos de un segmento de recta son $P_1(-2, 4)$ y $P_2(1, -2)$, determina la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ en la que el punto $P(3, -6)$ divide al segmento.
14. Si el punto $P(x, y)$ está a una distancia cuatro veces mayor a $P_1(-5, -3)$ que a $P_2(6, 10)$ y queda entre $P_1$ y $P_2$, encuentra las coordenadas de $P$.
15. Sean $P_1(6, -8)$ y $P_2(4, 2)$, los extremos de un segmento $\overline{P_1P_2}$, el cual se prolonga hasta $P$, de tal manera que la longitud de $\overline{P_1P}$ sea tres veces la longitud de $\overline{PP_2}$, encuentra las coordenadas de $P$.
16. Un punto $P(-14, -4)$ está entre $P_1(-6, 4)$ y $P_2(-18, -8)$. ¿En qué razón divide $P$ al segmento $\overline{P_1P_2}$?
17. Dados los puntos $P_1(-2, -3)$ y $P_2(4, 3)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de $P$ a $P_1$ sea el doble de distancia que a $P_2$ y se encuentra entre $P_1$ y $P_2$?
18. Dados los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(3, -3)$, obtén las coordenadas del punto $P(x, y)$ que está colocado fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$ y que se encuentran a una distancia tres veces mayor a $P_1$ que a $P_2$.
19. Puesto que el punto (3, 2) divide al segmento de recta que determinan los puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \frac{3}{2}$, determina las coordenadas de $P_2$.
20. Si $P_1(-2, -1)$ y $P_2(4, 5)$ son extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$, encuentra las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta, de tal manera que la longitud de $\overline{P_1P}$ sea $\frac{2}{3}$ de la longitud de $\overline{PP_2}$.
21. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ extremos de un segmento de recta, determina el valor de la razón $r$ para que el punto $P(x, y)$ divida al segmento en partes iguales, y deduce las coordenadas del punto medio.
22. Deduce las coordenadas de los puntos de trisección (que dividen en tres partes iguales) del segmento $\overline{P_1P_2}$ determinado por los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Punto medio de un segmento de recta

El punto medio del segmento de recta con extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, es aquel punto $P_m(x_m, y_m)$ que lo divide en dos segmentos iguales.

Si el punto $P_m = P$ divide a $\overline{P_1P_2}$ en dos segmentos de recta iguales, entonces: $\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$




$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{PP_2}} = 1$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio son:

$$P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las coordenadas del punto medio del segmento, cuyos extremos son los puntos $P_1(5, 7)$ y $P_2(1, -3)$

**Solución**

Se sustituye $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ y $x_2 = 1$, $y_2 = -3$, en las fórmulas:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3\,; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7+(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

En consecuencia, el punto medio tiene coordenadas: $P_m(3, 2)$.

2 Uno de los extremos de un segmento de recta es el punto (3, 2) y su punto medio es el punto (– 3, 5). Encuentra las coordenadas del otro extremo.

**Solución**

Conocidos los puntos $P_1(3, 2)$ y $P_m(-3, 5)$, se sustituyen los valores de las abscisas y las ordenadas en sus respectivas fórmulas y se realizan los despejes:

$$-3 = \frac{3 + x_2}{2} \qquad\qquad 5 = \frac{2 + y_2}{2}$$

$$(-3)(2) = 3 + x_2 \qquad\qquad (5)(2) = 2 + y_2$$

$$-6 = 3 + x_2 \qquad\qquad 10 = 2 + y_2$$

$$-6 - 3 = x_2 \qquad\qquad 10 - 2 = y_2$$

$$-9 = x_2 \qquad\qquad 8 = y_2$$

Entonces, se determina que las coordenadas del extremo $P_2$ son: (– 9, 8).

## Puntos de trisección de un segmento de recta

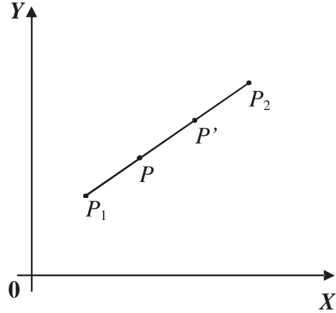
Los puntos de trisección $P$ y $P'$ del segmento de recta, cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son aquellos que lo dividen en tres partes iguales.

Para el punto $P$ la razón es $\frac{1}{2}$ y sus coordenadas son:

$$P\left(\frac{2x_1+x_2}{3}, \frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

Para el punto $P'$ la razón es 2 y sus coordenadas son:

$$P'\left(\frac{x_1+2x_2}{3}, \frac{y_1+2y_2}{3}\right)$$




**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-6, 2)$ y $P_2(3, 5)$?

**Solución**

Al sustituir los valores de las abscisas y ordenadas en las fórmulas se obtienen los puntos:

$$P\left(\frac{2(-6)+3}{3}, \frac{2(2)+5}{3}\right); \ P'\left(\frac{-6+2(3)}{3}, \frac{2+2(5)}{3}\right)$$

$$P(-3, 3); \ P'(0, 4)$$

Por tanto, los puntos de trisección del segmento de recta son $P(-3, 3)$ y $P'(0, 4)$.

## EJERCICIO 7

Determina las coordenadas del punto medio y de los puntos de trisección de los segmentos de recta definidos por los puntos:

1. $P_1(3, 5)$, $P_2(2, -1)$
2. $P_1(0, 4)$, $P_2(3, 7)$
3. $P_1(-1, 3)$, $P_2(9, 11)$
4. $P_1(5, -7)$, $P_2(11, -4)$
5. $P_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, 2\right)$
6. $P_1\left(\frac{2}{3}, -2\right)$, $P_2\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
7. Si el punto medio de un segmento de recta es $P_m(1, -3)$ y un extremo del segmento es $P_1(7, -1)$, ¿cuál es la coordenada del otro extremo?
8. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(-2, 3)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$. Encuentra las coordenadas de los vértices.
9. Los vértices de un triángulo son $A(-4, 1)$, $B(2, 7)$ y $C(-2, -3)$. Si $D$ es el punto medio del $\overline{AB}$ y $E$ es el punto medio del lado $\overline{BC}$, demuestra que la longitud del $\overline{DE}$ es la mitad de la longitud del $\overline{AC}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

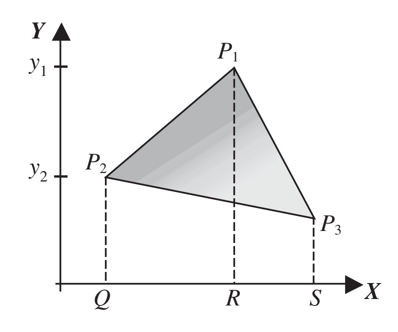
## Área de un triángulo

Para el triángulo con vértices en los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, su área o superficie $A$ se determina con la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right|$$

**Demostración**

En la figura el área $A$ del triángulo $P_1P_2P_3$ es igual al valor absoluto de la suma de las áreas de los trapecios $P_1P_2QR$ y $P_1RSP_3$ menos el área del trapecio $P_2QSP_3$ siendo el área de un trapecio:




$$A_t = \frac{(b + B)h}{2}$$

Entonces:

$$A = \left| \frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{2} + \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2} - \frac{(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)}{2} \right|$$

$$A = \left| \frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{2} + \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2} + \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2} \right|$$

$$A = \left| \frac{x_1(y_1 + y_2 - y_1 - y_3) + x_2(y_2 + y_3 - y_1 - y_2) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)}{2} \right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -2)$?

**Solución**

Al aplicar la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-3(5+2)+4(-2-2)+2(2-5)\right| = \frac{1}{2}\left|-21-16-6\right| = \frac{1}{2}(43) = 21.5u^2$$

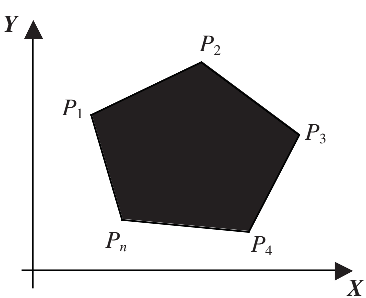
Donde $u^2$ son unidades cuadradas de superficie.

Por consiguiente, el área del $\Delta ABC$ es 21.5 $u^2$.

## Área de un polígono

El área $A$ de un polígono con vértices en: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos que se puedan trazar en él desde un solo vértice. Este procedimiento para determinar su área, se reduce al determinante definido como:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$




EJEMPLOS

1 Determina el área del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(-2, 5)$, $B(0, -1)$ $C(2, -6)$ y $D(-4, -3)$.

**Solución**

Se sustituyen los puntos en la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & -6 \\ -4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| 2+0-6-20-6-24+2-0 \right| = \frac{1}{2}(52) = 26$$

En consecuencia, el área del cuadrilátero es de 26 $u^2$.

2 Determina el área del pentágono, cuyos vértices son los puntos $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(4, 6)$, $D(2, -1)$ y $E(0, -3)$.

**Solución**

Se sustituyen los puntos en la fórmula:

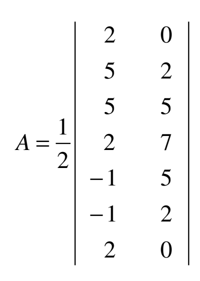
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| -4+18-4-6+0-3-0-12-16-6 \right| = \frac{1}{2}(33) = 16.5$$

Finalmente, el área del pentágono es de 16.5 $u^2$.

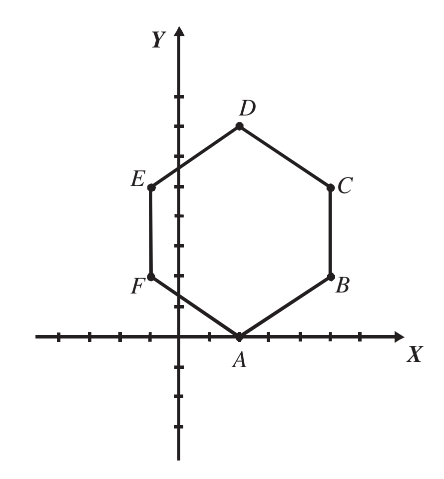
3 Calcula el área del hexágono, cuyos vértices son los puntos $A(2, 0)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$, $D(2, 7)$, $E(-1, 5)$ y $F(-1, 2)$.

**Solución**

Para desarrollar el determinante del área se colocan las coordenadas de los vértices y se repite la primera de ellas:



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$




$$A = \frac{1}{2}\left|4 + 25 + 35 + 10 - 2 - 10 - 10 + 7 + 5 - 4\right|$$

$$A = \frac{1}{2}(60)$$

$$A = 30u^2$$

Por consiguiente, el hexágono tiene una superficie de 30 $u^2$.

## EJERCICIO 8

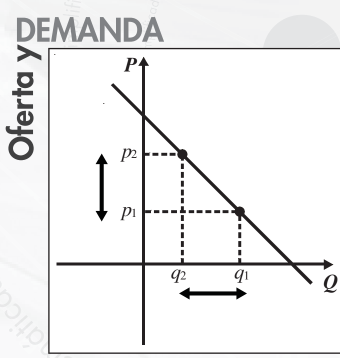
Determina el área de los siguientes polígonos definidos por los puntos:

1. $A(1, 3)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$
2. $A(-4, -5)$, $B(2, 1)$ y $C(-1, 3)$
3. $A(6, 2)$, $B(-1, 7)$ y $C(-4, 1)$
4. $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$
5. $A(-4, 0)$, $B(0, 0)$ y $C(0, -3)$
6. $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ y $C(0, a)$
7. $A(-6, -2)$, $B(4, 3)$, $C(5, 5)$ y $D(5, -2)$
8. $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$
9. $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 2)$
10. $A(-7, 1)$, $B(-5, 4)$, $C(2, 3)$, $D(0, -5)$ y $E(-4, -3)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 3

## Pendiente de una recta



Curva de demanda lineal

En la práctica algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en un intervalo.

En el análisis económico sólo se toma la porción de las rectas lineales que se encuentran en el primer cuadrante, ya que la oferta, el precio y la demanda son cero o positivas.

### Curva de demanda lineal

Caso I

Cuando la pendiente de la recta es negativa aumenta el precio y la cantidad de demanda disminuye y viceversa.

Caso II

Cuando la pendiente de la recta es cero el precio permanece constante, sin considerar que la demanda aumenta.

Caso III

Cuando la pendiente de la recta no existe el precio aumenta y la cantidad de demanda permanece constante.

$P$: Precio

$Q$: Cantidad de demanda

## Definiciones

**Inclinación de una recta.** Es el ángulo que una recta forma con el eje $X$ positivo, el cual se representa con el símbolo $\theta$, este ángulo se mide a partir del eje $X$ y girando en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

**Pendiente de una recta.** Se define como la tangente del ángulo de inclinación que tiene una recta y se representa con la letra $m$.

$$m = \tan\theta$$

Donde:

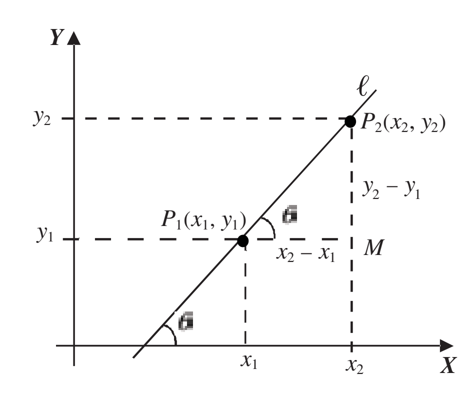
$$\theta = \arc\tan(m) \text{ si } m > 0 \qquad \theta = \arc\tan(m) + 180° \text{ si } m < 0$$

## Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Sea la recta $\ell$ que pasa por los puntos $P_1$ y $P_2$, entonces su pendiente se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Demostración**




La pendiente de la recta $\ell$ es,

$$m = \tan\theta$$

En el triángulo $P_1MP_2$,

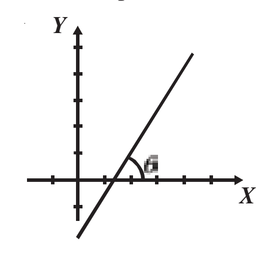
$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por consiguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

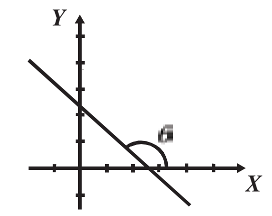
Los casos que se presentan para el valor de la pendiente y su ángulo de inclinación, son los siguientes:

1. Si $m > 0$ (positiva) entonces, el ángulo es agudo.



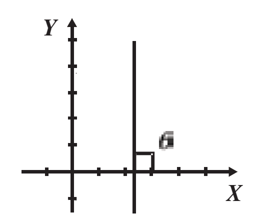

Si $m > 0$, entonces, $0° < \theta < 90°$

2. Si $m < 0$ (negativa) entonces, el ángulo es obtuso.

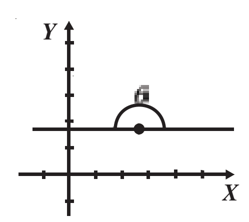



Si $m < 0$, entonces, $90° < \theta < 180°$

3. Si $m = \frac{c}{0}$ entonces, el ángulo es recto.




4. Si $m = 0$, el ángulo es llano.




EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una recta pasa por los puntos $A(-2, -1)$ y $B(3, 4)$. Determina su pendiente y el ángulo de inclinación.

**Solución**

Se sustituyen los valores de las abscisas y ordenadas en la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{4-(-1)}{3-(-2)} = \frac{4+1}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

Luego, si $m = 1$ entonces, $\tan\theta = 1$, en consecuencia:

$$\theta = \arctan(1) = 45°$$

Por consiguiente, $m = 1$ y $\theta = 45°$.

2 Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P(1, 4)$ y $Q(7, -3)$.

**Solución**

Al sustituir los valores en $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se obtiene:

$$m = \frac{-3-4}{7-1} = -\frac{7}{6}$$

Como $m = -\frac{7}{6}$, entonces, el ángulo de inclinación es:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{7}{6}\right) + 180° = -49° \ 23' + 180° = 130° \ 37'$$

Por tanto, el valor de la pendiente es $-\frac{7}{6}$ y el del ángulo de inclinación $130° \ 37'$.

3 Verifica si los puntos $A(-2, 4)$, $B(0, 1)$ y $C(4, -5)$ son colineales, aplica la fórmula de la pendiente.

**Solución**

Para verificar que tres puntos son colineales se debe de cumplir que:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Por consiguiente, se obtiene la pendiente de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1-4}{0-(-2)} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{BC} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-5-1}{4-0} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AC} \Rightarrow m_{AC} = \frac{-5-4}{4-(-2)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Se observa que las pendientes de los segmentos son iguales, en consecuencia los puntos son colineales.

4 La pendiente de una recta es $-4$ y pasa por el punto $A(1, 5)$. Si la abscisa del punto $B$ es $-2$, ¿cuál es su ordenada?

**Solución**

Se sabe que $x$ = abscisa, $y$ = ordenada, por tanto, los datos son:

$$m = -4,\ A(1, 5) \text{ y } B(-2, y)$$

Se sustituyen los valores anteriores en la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y se despeja $y$.

$$-4 = \frac{y-5}{-2-1} \quad \rightarrow \quad -4 = \frac{y-5}{-3} \quad \rightarrow \quad (-4)(-3) + 5 = y \quad \rightarrow \quad y = 17$$

Finalmente, el punto $B$ tiene como coordenadas $(-2, 17)$.

5 El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 5)$ y $P_2(x, 1)$ con el eje $X$ es de 135°. ¿Cuál es el valor de la abscisa de $P_2$?

**Solución**

Se obtiene la pendiente de la recta:

$$m = \tan 135°$$
$$m = -1$$

Se sustituyen los valores de la pendiente, las abscisas y ordenadas en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad -1 = \frac{1-5}{x-(-1)}$$

$$-1 = \frac{-4}{x+1}$$

Se despeja $x$:

$$-1(x+1) = -4$$

$$x + 1 = \frac{-4}{-1}$$

$$x = 4 - 1$$

$$x = 3$$

Por consiguiente, el valor de la abscisa de $P_2$ es 3.

# EJERCICIO 9

Determina la pendiente de los siguientes pares de puntos:

1. $A(-3, 5)$ y $B(2, 7)$
2. $A(-1, 2)$ y $B(4, -5)$
3. $A(8, -2)$ y $B(0, -1)$
4. $A(0, 4)$ y $B(-3, 0)$
5. $A(-5, 1)$ y $B(1, -3)$
6. $A(4, -2)$ y $B(7, -2)$
7. $A\left(5, \sqrt{3}\right)$ y $B(5, 1)$
8. $A\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ y $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$
9. $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $B\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$
10. $A\left(\frac{a}{b}, 1\right)$ y $B(a, b)$

Encuentra la medida de los ángulos de inclinación de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

11. $P(5, 7)$ y $Q(2, 4)$
12. $A(-1, 2)$ y $B(-2, 3)$
13. $A\left(\sqrt{3}, 3\right)$ y $B(0, 2)$
14. $R\left(3, \sqrt{2}\right)$ y $S(1, 0)$
15. $S(7, -1)$ y $T(7, 4)$
16. $Q(4, -5)$ y $R(-2, -5)$

Aplica el concepto de pendiente para saber cuáles de los siguientes puntos son colineales.

17. $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(-1, -2)$
18. $A(-2, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(-5, 1)$
19. $A(-1, 4)$, $B(3, 0)$ y $C(0, 3)$
20. $A(5, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(2, 7)$
21. $A(0, 2)$, $B(-2, 4)$ y $C(2, 0)$
22. $A(3, -4)$, $B(2, -2)$ y $C(0, -1)$
23. $A(x, 2)$, $B(2x, 2 - y)$ y $C(0, 2 + y)$
24. $A(a, b)$, $B(2a + b, a)$ y $C(-b, 2b - a)$
25. La pendiente de una recta es 3. Si la recta pasa por los puntos $A(2, -1)$ y el punto $B$, cuya ordenada es $-5$, ¿cuál es el valor de su abscisa?
26. Una recta tiene un ángulo de inclinación de 45° y pasa por los puntos $A$ y $B$. Si el punto $A$ tiene coordenadas $(3, -2)$ y la ordenada de $B$ es $-1$, encuentra su abscisa.
27. El ángulo de inclinación de una recta es de 60° y pasa por los puntos $A\left(2, 3\sqrt{3}\right)$ y $B$, cuya abscisa es $-\sqrt{3}$, ¿cuál es la ordenada de $B$?
28. Una recta forma un ángulo de 30° con el eje $X$ y pasa por los puntos $A\left(3\sqrt{3}, -1\right)$ y $B\left(-2\sqrt{3}, y\right)$. Calcula el valor de la ordenada de $B$.

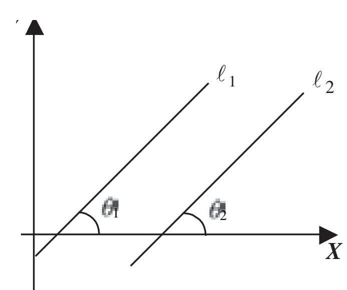
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Condición de paralelismo

Dos rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales y, por tanto, sus pendientes también.

$$m_1 = m_2$$

Se denota como $\ell_1 \parallel \ell_2$ para indicar que $\ell_1$ es paralela a $\ell_2$




Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, entonces

$$\theta_1 = \theta_2$$

Por ser correspondientes.

Aplicando la función tangente

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2$$

Finalmente, se determina que:

$$m_1 = m_2$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Demuestra que la recta $\ell_1$, que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$ es paralela a la recta $\ell_2$ que pasa por los puntos $C(8, 0)$ y $D(4, -2)$.

**Solución**

Se obtienen las pendientes de ambas rectas:

$$m_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ ;\ m_{CD} = \frac{-2-0}{4-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, entonces se demuestra que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

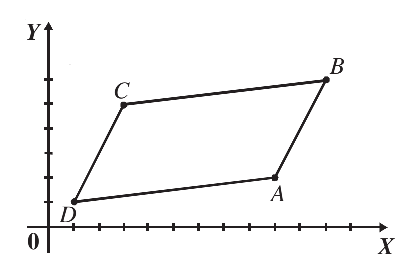
2 Demuestra que los puntos $A(9, 2)$, $B(11, 6)$, $C(3, 5)$ y $D(1, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

**Solución**

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \frac{6-2}{11-9} = \frac{4}{2} = 2\ ;\ m_{BC} = \frac{5-6}{3-11} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$m_{CD} = \frac{1-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2\ ;\ m_{AD} = \frac{1-2}{1-9} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$



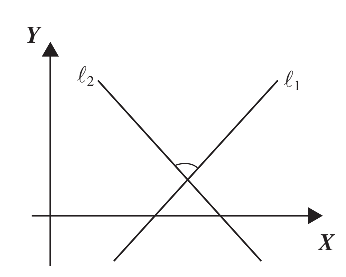

Se observa que $m_{AB} = m_{CD}$ y $m_{BC} = m_{AD}$, por tanto, se deduce que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.
Como los lados opuestos son paralelos, entonces la figura es un paralelogramo.

## Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a – 1.
*Si* $\ell_1 \perp \ell_2$ ($\ell_1$ es perpendicular a $\ell_2$), es decir, las rectas forman un ángulo de 90°, entonces:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Por tanto, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o $m_2 = -\frac{1}{m_1}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que la recta $\ell_1$, que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(7, 3)$, es perpendicular a la recta $\ell_2$, que pasa por los puntos $C(-1, -2)$ y $D(1, 3)$.

**Solución**

Se obtienen las pendientes de las rectas.

Pendiente de la recta $\ell_1$:

$$m_{AB} = \frac{3-5}{7-2} = -\frac{2}{5}$$

Pendiente de la recta $\ell_2$:

$$m_{CD} = \frac{3-(-2)}{1-(-1)} = \frac{3+2}{1+1} = \frac{5}{2}$$

Ahora se aplica la condición:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right) = -1$$

Se demuestra que la recta $\ell_1$ es perpendicular a la recta $\ell_2$.

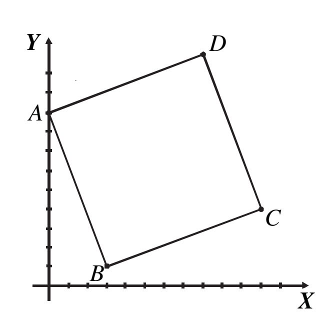
2 Demuestra que los lados adyacentes del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(0, 9)$, $B(3, 1)$, $C(11, 4)$ y $D(8, 12)$, son perpendiculares entre sí.

**Solución**

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \frac{1-9}{3-0} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3} \qquad m_{BC} = \frac{4-1}{11-3} = \frac{3}{8} \qquad m_{CD} = \frac{12-4}{8-11} = -\frac{8}{3} \qquad m_{AD} = \frac{12-9}{8-0} = \frac{3}{8}$$

En la figura:




Se observa que los lados adyacentes son:

$$\overline{AB} \text{ y } \overline{BC};\ \overline{BC} \text{ y } \overline{CD};\ \overline{CD} \text{ y } \overline{AD};\ \overline{AD} \text{ y } \overline{AB}$$

Ahora se multiplican las pendientes de los lados adyacentes para demostrar que son perpendiculares:

$$m_{AB}\cdot m_{BC} = \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = -1 \qquad m_{CD}\cdot m_{AD} = \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = -1$$

$$m_{BC}\cdot m_{CD} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = -1 \qquad m_{AD}\cdot m_{AB} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = -1$$

De aquí se determina que:

$$\overline{AB} \perp \overline{BC},\ \overline{BC} \perp \overline{CD},\ \overline{CD} \perp \overline{AD} \text{ y } \overline{AD} \perp \overline{AB}$$

Entonces, se demuestra que los lados adyacentes son perpendiculares entre sí.

# EJERCICIO 10

1. Averigua si la recta $\ell_1$ que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(-6, 5)$ es paralela o perpendicular a la recta $\ell_2$ que pasa por los puntos $C(0, 2)$ y $D(-2, -1)$.

2. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$, son vértices de un paralelogramo.

3. Demuestra que la recta que pasa por los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -4)$, es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(8, -7)$ y $D(5, -2)$.

4. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.

5. Demuestra que los cuatro puntos $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$, son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.

6. Una recta $\ell_1$ pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, y otra recta $\ell_2$ pasa por el punto $(-1, 2)$ y el punto $A$, cuya ordenada es $-4$. Determina la abscisa del punto $A$ cuando $\ell_1$ es perpendicular a $\ell_2$.

7. Demuestra por medio de pendientes que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Ángulo entre dos rectas

Para encontrar el ángulo $\theta$ formado por las rectas $\ell_1$ y $\ell_2$ se utiliza la fórmula:

$$tan\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Por geometría: $\beta = \alpha + \theta$ y $\theta = \beta - \alpha$

Aplicando tangente: $tan\ \theta = tan\ (\beta - \alpha)$

$$tan\ \theta = \frac{tan\ \beta - tan\ \alpha}{1 + tan\ \beta \cdot tan\ \alpha}$$

Pero $tan\ \beta = m_2$ y $tan\ \alpha = m_1$

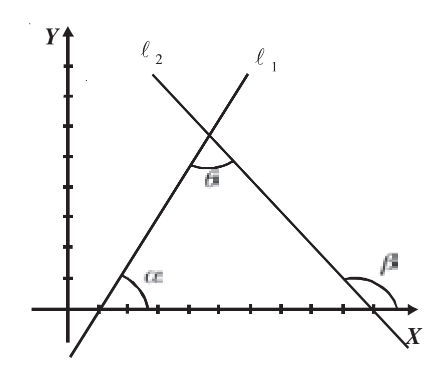
Entonces, $tan\ \theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Donde:

$\theta$: Ángulo entre las rectas

$m_1$: pendiente inicial de la recta $\ell_1$

$m_2$: pendiente final de la recta $\ell_2$




Se debe de tomar en cuenta que los ángulos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj; en la recta que inicie el ángulo, será la pendiente inicial, y en la recta que termine, la pendiente final.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la medida del ángulo obtuso que forman las rectas, cuyas pendientes son 2 y – 3.

**Solución**

En este caso no importa cuál sea la pendiente inicial o final, se escoge $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$, se sustituyen en la fórmula y se obtiene:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3-2}{1+(-3)(2)} = \frac{-5}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$$

De aquí, $\tan\theta = 1$ entonces: $\theta = \arctan(1) = 45°$.

El ángulo obtuso $\phi$ se determina al calcular el suplemento de $\theta$

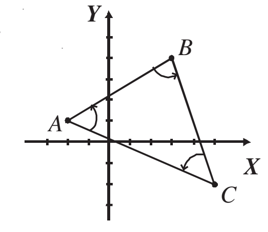
$$45° + \phi = 180°$$
$$\phi = 180° - 45°$$
$$\phi = 135°$$

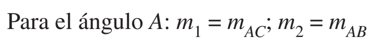
En consecuencia, el ángulo que se busca es igual a 135°.

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos interiores del triángulo determinado por los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -2)$?

**Solución**

Se grafica el triángulo en el plano cartesiano y se ubican para cada ángulo las pendientes inicial y la final.



Para el ángulo $A$: $m_1 = m_{AC}$; $m_2 = m_{AB}$

Para el ángulo $B$: $m_1 = m_{AB}$; $m_2 = m_{BC}$

Para el ángulo $C$: $m_1 = m_{BC}$; $m_2 = m_{AC}$

Se obtienen las pendientes de los lados del triángulo:

$$m_{AB} = \frac{4-1}{3-(-2)} = \frac{3}{5} \qquad m_{BC} = \frac{-2-4}{5-3} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad m_{AC} = \frac{-2-1}{5-(-2)} = -\frac{3}{7}$$

Se aplica la fórmula para cada uno de los ángulos, tomando como referencia las pendientes inicial y final.

$$\tan A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{9}{35}} = \frac{\frac{21+15}{35}}{\frac{35-9}{35}} = \frac{\frac{36}{35}}{\frac{26}{35}} = \frac{(35)(36)}{(35)(26)} = \frac{36}{26} = \frac{18}{13}$$

$$\tan B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 + (-3)\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{5}} = \frac{\frac{-15-3}{5}}{\frac{5-9}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{(5)(-18)}{(5)(-4)} = \frac{-18}{-4} = \frac{9}{2}$$

$$\tan C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{7} - (-3)}{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)(-3)} = \frac{-\frac{3}{7} + 3}{1 + \frac{9}{7}} = \frac{\frac{-3+21}{7}}{\frac{7+9}{7}} = \frac{\frac{18}{7}}{\frac{16}{7}} = \frac{(7)(18)}{(7)(16)} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Finalmente, los ángulos son:

$A = \arctan\left(\frac{18}{13}\right) = 54°\ 9'\ 44''$ $\qquad B = \arctan\left(\frac{9}{2}\right) = 77°\ 28'16''$

$C = \arctan\left(\frac{9}{8}\right) = 48°\ 21'59''$

Para comprobar los resultados se suman los ángulos interiores y el resultado debe ser 180°

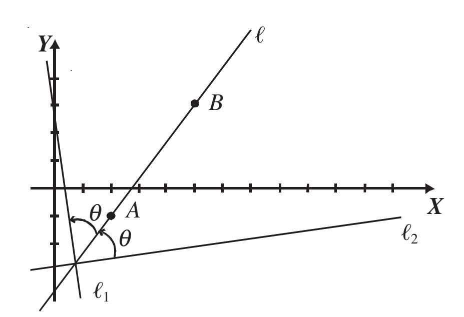
$$A + B + C = 180° \qquad 54°\ 9'\ 44'' + 77°\ 28'\ 16'' + 48°\ 21'\ 59'' = 180°$$
$$180° = 180°$$

3 ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 45°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(2, -1)$ y $B(5, 3)$?

**Solución**

Existen dos rectas que forman un ángulo de 45° con la recta $\ell$, por consiguiente, se tienen 2 casos:

1. La pendiente $\ell$ es inicial
2. La pendiente $\ell$ es final




Se obtiene la pendiente $\ell$ que pasa por los puntos $A$ y $B$:

$$m_{AB} = \frac{3-(-1)}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Cuando la pendiente $\ell$ es inicial, se debe de encontrar $m_2$, entonces:

$$tan\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad tan\ 45° = \frac{m_2 - \frac{4}{3}}{1+\left(\frac{4}{3}\right)m_2} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{3m_2-4}{3}}{\frac{3+4m_2}{3}}$$

$$1 = \frac{3m_2 - 4}{3+4m_2}$$

$$3 + 4m_2 = 3m_2 - 4$$

$$4m_2 - 3m_2 = -4 - 3$$

$$m_2 = -7$$

Cuando la pendiente $\ell$ es final, se debe de encontrar $m_1$, por consiguiente:

$$tan\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad tan\ 45° = \frac{\frac{4}{3} - m_1}{1 + m_1\left(\frac{4}{3}\right)} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{4-3m_1}{3}}{\frac{3+4m_1}{3}}$$

$$1 = \frac{4-3m_1}{3+4m_1}$$

$$3 + 4m_1 = 4 - 3m_1$$

$$4m_1 + 3m_1 = 4 - 3$$

$$m_1 = \frac{1}{7}$$

Finalmente, las pendientes son: $-7$ y $\frac{1}{7}$.

# EJERCICIO 11

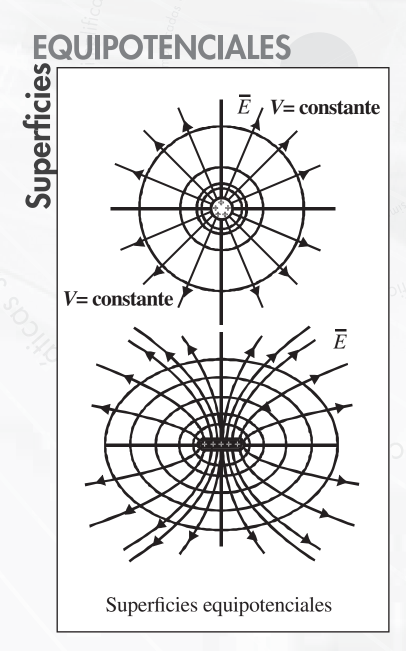
1. Determina la medida del ángulo agudo que forman las rectas con pendientes $\frac{1}{3}$ y $-\frac{4}{5}$.
2. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-2, 2)$, $B(1, -1)$ y $C(0, -4)$?
3. Determina los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$ $B(2, 3)$ y $C(1, -4)$.
4. Demuestra que los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(7, 0)$, son los vértices de un triángulo isósceles y encuentra la medida de sus ángulos interiores.
5. Comprueba que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(5, 2)$, son vértices de un triángulo rectángulo y encuentra la medida de sus ángulos agudos.
6. Encuentra la medida del ángulo obtuso del paralelogramo cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 2)$.
7. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos interiores del paralelogramo, cuyos vértices son los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$?
8. Comprueba que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$ son los vértices de un paralelogramo y determina la medida del ángulo obtuso que forman sus diagonales.
9. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 150°, si la recta final tiene pendiente $\frac{3}{5\sqrt{3}}$, calcula la pendiente de la recta inicial.
10. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 45°, la recta inicial pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(-4, 5)$ y la recta final pasa por el punto $C(3, 2)$ y por el punto $D$, cuya ordenada es 3. Determina el valor de la abscisa de $D$.
11. ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 135°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-3, 5)$ y $B(0, 1)$?
12. Las pendientes de dos rectas son 1 y $-2-\sqrt{3}$, respectivamente. Encuentra las pendientes de las bisectrices de los ángulos que forman (existen dos soluciones).

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 4

## Lugar geométrico

### Superficies EQUIPOTENCIALES



Superficies equipotenciales

Las superficies equipotenciales es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran al mismo potencial. Cumplen la condición de encontrarse en un plano perpendicular al campo eléctrico.

El trabajo desarrollado para mover una partícula de un punto *A* a otro punto *B* a lo largo de una superficie equipotencial es nulo, ya que:

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q_o}$$

A lo largo de una superficie equipotencial $V_A = V_B$ entonces $W_{AB} = 0$

## Problemas fundamentales de la geometría analítica

I. Dada una ecuación, representar el lugar geométrico que describe (discusión de un lugar geométrico).
II. Dadas las condiciones que deben cumplir los puntos que forman un lugar geométrico, encontrar su ecuación.

### Primer problema (discusión de un lugar geométrico)

Dada la ecuación de un lugar geométrico se determinan las intersecciones y su simetría con los ejes, la extensión, sus asíntotas y, por último, la gráfica.

#### *Intersecciones con los ejes*

*a*) Con el eje $X$ se sustituye $y = 0$ y se resuelve la ecuación para $x$.
*b*) Con el eje $Y$ se sustituye $x = 0$ y se resuelve la ecuación para $y$.

#### *Simetría con los ejes y el origen*

*a*) Simetría respecto al eje $X$.
Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable $y$ es reemplazada por $-y$, entonces la curva es simétrica respecto al eje $X$.
*b*) Simetría respecto al eje $Y$.
Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable $x$ es reemplazada por $-x$, entonces la curva es simétrica respecto al eje $Y$.
*c*) Simetría respecto al origen.
Si la ecuación de la curva no se altera al sustituir $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$, entonces la curva es simétrica respecto al origen.

#### *Extensión de la curva*

Determina los intervalos de variación para los cuales $x$ y $y$ están definidas.

#### *Asíntotas*

Son las rectas tales que si un punto se aleja del origen, la distancia de este punto a dicha recta va decreciendo, de tal forma que tiende a cero.

#### *Gráfica*

Conjunto de puntos del plano que satisfacen las condiciones establecidas por una ecuación.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Grafica la curva, cuya ecuación es $xy - 2x - 2y + 2 = 0$.

**Solución**

**Intersección con los ejes coordenados**

*a*) Se sustituye $y = 0$ y se despeja $x$:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0$$
$$x(0) - 2x - 2(0) + 2 = 0$$
$$-2x + 2 = 0$$
$$-2x = -2$$
$$x = 1$$

El punto de intersección con el eje $X$ es $(1, 0)$.

*b*) Se sustituye $x = 0$ y se despeja $y$:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (0)y - 2(0) - 2y + 2 = 0$$
$$-2y + 2 = 0$$
$$-2y = -2$$
$$y = 1$$

El punto de intersección con el eje $Y$ es (0, 1).

**Simetría**

*a)* Simetría respecto al eje $X$.

Se sustituye $y$ por $-y$ en la ecuación:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(-y) - 2x - 2(-y) + 2 = 0$$
$$-xy - 2x + 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por tanto, no hay simetría respecto al eje $X$.

*b)* Simetría respecto al eje $Y$.

Se sustituye $x$ por $-x$ en la ecuación:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)(y) - 2(-x) - 2y + 2 = 0$$
$$-xy + 2x - 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por consiguiente, no hay simetría respecto al eje $Y$.

*c)* Simetría respecto al origen.

Se sustituye $x$ por $-x$, $y$ por $-y$.

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)(-y) - 2(-x) - 2(-y) + 2 = 0$$
$$xy + 2x + 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por consiguiente, no hay simetría respecto al origen.

**Extensión de la curva**

*a)* Extensión respecto al eje $X$.

Se despeja la variable $y$:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2y = 2x - 2$$
$$y(x - 2) = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x-2}{x-2}$$

Para $x = 2$, la variable $y$ no está definida, por consiguiente, la extensión en $X$ es:

$$\{x \in R \mid x \neq 2\} \text{ también se puede escribir } \{x \in R \mid -\infty < x < 2\} \cup \{x \in R \mid 2 < x < \infty\}$$

*b)* Extensión respecto al eje $Y$.

Se despeja la variable $x$:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2x = 2y - 2$$
$$x(y - 2) = 2y - 2$$
$$x = \frac{2y-2}{y-2}$$

Para $y = 2$, la variable $x$ no está definida, en consecuencia, la extensión en $y$ es:

$$\{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o } \{y \in R \mid -\infty < y < 2\} \cup \{y \in R \mid 2 < y < \infty\}$$

**Asíntotas**

*a*) Asíntotas horizontales.

Se obtienen al despejar la variable $x$ y resolver la ecuación que resulta al igualar con cero el denominador:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2x = 2y - 2$$
$$x(y - 2) = 2y - 2$$
$$x = \frac{2y-2}{y-2}$$

$y - 2 = 0$, por tanto, la asíntota horizontal es $y = 2$.

*b*) Asíntotas verticales.

Se obtienen al despejar la variable $y$ y resolver la ecuación que resulta al igualar con cero el denominador, entonces:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2y = 2x - 2$$
$$y(x - 2) = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x-2}{x-2}$$

$x - 2 = 0$, por consiguiente, la asíntota vertical es $x = 2$.

***Gráfica***

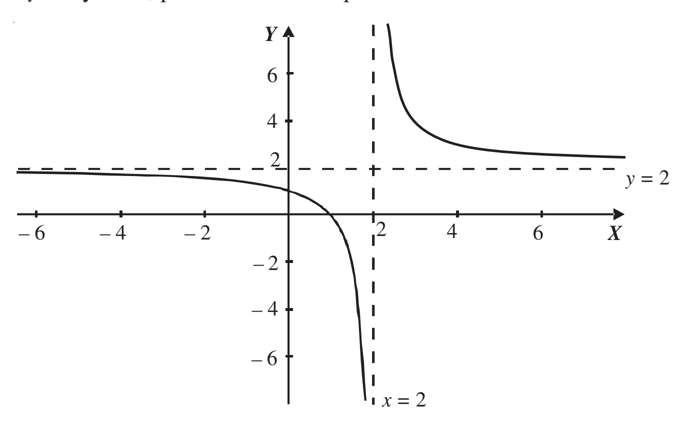
Se tabula la variable $y$ en función de la variable $x$, donde $x$ toma valores en el intervalo $\{x \in R \mid -\infty < x < 2\} \cup \{x \in R \mid 2 < x < \infty\}$

$$y = \frac{2x-2}{x-2}$$

***Tabulación:***

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1.6 | 1.5 | 1.3 | 1 | 0 | 4 | 3 | 2.6 | 2.5 | 2.4 |

Se grafican las asíntotas $y = 2$ y $x = 2$, posteriormente los puntos:




2 Construye la curva, cuya ecuación es $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

**Solución**

**Intersección con los ejes coordenados**

*a*) Se sustituye $y = 0$ y se despeja $x$:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9(0)^2 - 36 = 0$$
$$4x^2 = 36$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$
$$x = -3,\ x = 3$$

Los puntos de intersección con el eje $X$ son: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

*b*) Se sustituye $x = 0$ y se despeja $y$:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4(0)^2 + 9y^2 - 36 = 0$$
$$9y^2 = 36$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm\sqrt{4}$$
$$y = \pm 2$$
$$y = -2,\ y = 2$$

Los puntos de intersección con el eje $Y$ son: $(0, -2)$ y $(0, 2)$.

**Simetría**

*a*) Simetría respecto al eje $X$.
Se sustituye $y$ por $-y$ en la ecuación:

$$4x^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por tanto, sí es simétrica respecto al eje $X$.

*b*) Simetría respecto al eje $Y$.

Se sustituye $x$ por $-x$ en la ecuación:

$$4(-x)^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por consiguiente, es simétrica respecto al eje $Y$.

*c*) Simetría respecto al origen.

Se sustituye $x$ por $-x$, $y$ por $-y$.

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por tanto, es simétrica respecto al origen.

**Extensión de la curva**

*a*) Extensión respecto al eje $X$.
Se despeja la variable $y$:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 9y^2 = 36 - 4x^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9} \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{4(9 - x^2)}{9}}$$
$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

$y$ está definida cuando $9 - x^2 \geq 0$, resolviendo la desigualdad, se obtiene:

$$\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\} \text{ o } x \in [-3, 3]$$

Es decir, la curva se extiende en el eje $x$ desde $-3$ a 3.

*b*) Extensión respecto al eje $Y$.

Se despeja la variable $x$:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 36 - 9y^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{36 - 9y^2}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{9(4 - y^2)}{4}}$$
$$x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}$$

$x$ está definida cuando $4 - y^2 \geq 0$, resolviendo la desigualdad, se obtiene:

$$\{y \in R \mid -2 \leq y \leq 2\} \text{ o } y \in [-2, 2]$$

Es decir, la curva se extiende en el eje $y$ desde $-2$ a 2.

**Asíntotas**

*a*) Asíntotas horizontales.
Al despejar $y$ se obtiene $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, la variable $x$ no queda en el denominador por tanto no hay asíntotas horizontales.

*b*) Asíntotas verticales.

Al despejar $x$ se obtiene $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}$, la variable $y$ no queda en el denominador por tanto no hay asíntotas verticales.

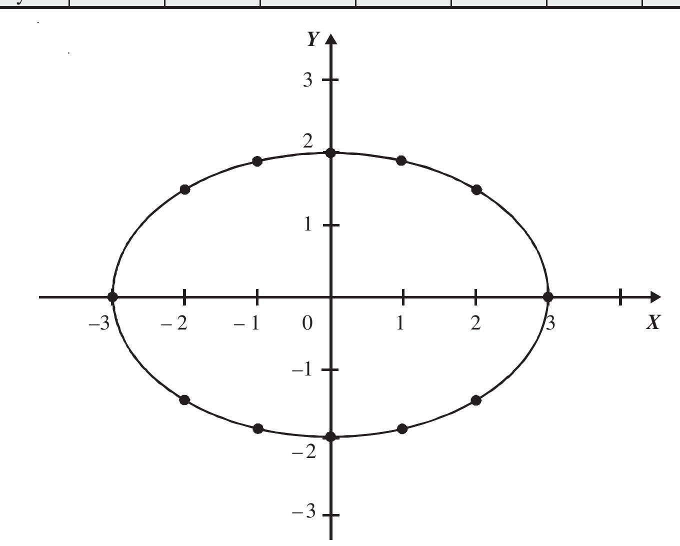
***Gráfica***

Se hace una tabulación en la ecuación obtenida al despejar a $y$, para valores de $x$ que estén en el intervalo $\{x \in R \mid -3 \le x \le 3\}$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

***Tabulación:***

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | ± 1.49 | ± 1.88 | ± 2 | ± 1.88 | ± 1.49 | 0 |




# EJERCICIO 12

Analiza las siguientes ecuaciones y encuentra las intersecciones con los ejes, simetría, extensión, asíntotas y traza la gráfica:

1. $xy - 3x - 6 = 0$
2. $xy + 2y + 4 = 0$
3. $xy - 5x + 2y = 0$
4. $xy + 3y - 4x = 0$
5. $2xy - 3y + 6 = 0$
6. $x^2 - 8y = 0$
7. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$
8. $x^2 + 4x + 4y + 20 = 0$
9. $x^2 + xy - y^2 = 0$
10. $9x^2 - 16y^2 = 144$
11. $y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$
12. $x^2 + y^2 - 6x = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Segundo problema (dadas las condiciones del lugar geométrico, encontrar su ecuación)

Para determinar la ecuación de un lugar geométrico se necesitan las condiciones que deben cumplir los puntos que lo forman o la figura misma. Analicemos a través de los siguientes ejemplos:

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos en el plano, cuya distancia al punto (3, 2) es siempre igual a 5.

**Solución**

La distancia de los puntos $(x, y)$ del plano al punto (3, 2) es 5, al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \rightarrow \quad 5 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

Se obtiene el cuadrado de ambos miembros, se desarrollan los binomios y se simplifica:

$$(5)^2 = \left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 25 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$25 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

Por consiguiente la ecuación del lugar geométrico es: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los puntos $A(1, -2)$ y $B(5, 4)$.

**Solución**

La condición es que la distancia del punto $P(x, y)$ a los puntos $A$ y $B$ sea la misma, es decir:

$$\overline{AP} = \overline{BP}$$

Al usar la fórmula de la distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, se obtiene:

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \qquad \overline{BP} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

Se sustituye en la condición:

$$\overline{AP} = \overline{BP}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar la expresión, se obtiene:

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}\right)^2$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - x^2 + 10x - 25 - y^2 + 8y - 16 = 0$$

$$(8x + 12y - 36 = 0) \div 4$$

$$2x + 3y - 9 = 0$$

3 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 7)$, es igual a 100.

**Solución**

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, la condición que se da es:

$$\left(\overline{PA}\right)^2+\left(\overline{PB}\right)^2=100$$

Al utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos $d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ se obtiene:

$$\overline{PA}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \qquad \overline{PB}=\sqrt{(x-6)^2+(y-7)^2}$$

Ahora bien, al sustituir en la condición:

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-6)^2+(y-7)^2}\right)^2=100$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(x-6)^2+(y-7)^2=100$$

En tanto que, al desarrollar los binomios y simplificar, se obtiene:

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9+x^2-12x+36+y^2-14y+49-100=0$$

$$2x^2+2y^2-16x-20y-2=0$$

$$(2x^2+2y^2-16x-20y-2=0)\div(2)$$

$$x^2+y^2-8x-10y-1=0$$

Por tanto la ecuación del lugar geométrico es: $x^2+y^2-8x-10y-1=0$.

4 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, es igual a 10.

**Solución**

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, que satisface la condición:

$$\overline{AP}+\overline{PB}=10$$

Al utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos $d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$, para determinar la distancia a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, se obtiene que:

$$\overline{AP}=\sqrt{x^2+(y-3)^2} \qquad \overline{PB}=\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

Se sustituye en la condición:

$$\overline{AP}+\overline{PB}=10$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=10$$

Se desarrolla y simplifica:

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10-\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2+(y-3)^2=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\left(\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2+(y-3)^2=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+(y+3)^2$$

$$x^2+y^2-6y+9=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+y^2+6y+9$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 - x^2 - y^2 - 6y - 9 - 100 = -20\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$
$$-12y - 100 = -20\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$
$$\left[-12y - 100 = -20\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right] \div (-4)$$
$$3y + 25 = 5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$
$$(3y + 25)^2 = \left[5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right]^2$$
$$9y^2 + 150y + 625 = 25[(x^2 + (y + 3)^2]$$
$$9y^2 + 150y + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 150y + 225$$
$$25x^2 + 25y^2 + 150y + 225 - 9y^2 - 150y - 625 = 0$$
$$25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$$

Por tanto, la ecuación del lugar geométrico es: $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

## EJERCICIO 13

Resuelve:

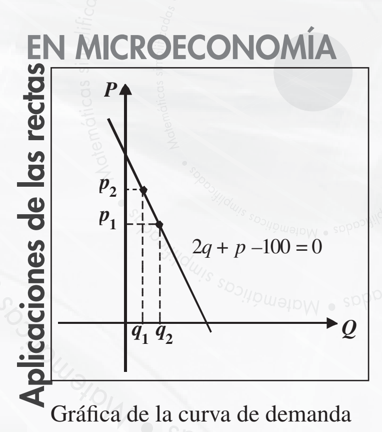
1. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que la diferencia de la ordenada con la abscisa es siempre igual a 2.
2. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que el producto de la abscisa y la ordenada sea igual a la unidad.
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que su ordenada es igual a la mitad de su abscisa.
4. Determina la ecuación del lugar geométrico del punto que equidista del origen, cinco unidades.
5. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(-3, 4)$ y $B(4, 1)$.
6. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a cinco unidades del punto $(4, -3)$.
7. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que equidista del eje de las abscisas y del punto $(0, -5)$.
8. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $(-2, 4)$ y $(-6, 2)$.
9. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia al punto $(-3, -2)$ es igual a 8.
10. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(-1, 3)$ y $B(7, 3)$, es igual a 50.
11. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se mueve de tal forma que la suma de las distancias a los puntos fijos $A(-4, 3)$ y $B(2, -6)$ es siempre igual a 15.
12. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$, sea igual a 10.
13. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$, es siempre igual a 3 (dos soluciones).
14. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, es igual a 8.
15. Encuentra la ecuación de los puntos del plano, tales que la diferencia de sus distancias a los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 5)$, sea siempre igual a 6.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 5

LÍNEA RECTA

## Aplicaciones de las rectas EN MICROECONOMÍA




Gráfica de la curva de demanda

### Curvas de demanda lineal

Las ecuaciones lineales proporcionan representaciones razonablemente precisas de la demanda en un intervalo limitado.

En general, las ecuaciones de demanda lineales se utilizan para mayor simplicidad y claridad al ilustrar cierto tipo de análisis.

La ecuación de la recta indica situaciones que se presentan al realizar un análisis:

Por ejemplo:

Cuando el precio es de 80 unidades monetarias (*u.m.*) se venden 10 relojes y se venden 20 cuando el precio es de 60 *u.m.* ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

| *Datos* | *Fórmula* |
|---|---|
| $q_1 = 10,\ p_1 = 80$ | $p - p_1 = \dfrac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)$ |
| $q_2 = 20,\ p_2 = 60$ | |

Al sustituir los datos se obtiene la ecuación:

$$2q + p - 100 = 0$$

Este ejemplo indica que mientras la cantidad de demanda aumenta el precio disminuye.

## Definición

La línea recta es el lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales al tomar dos cualesquiera, el valor de la pendiente $m$ siempre es constante.

## Ecuaciones de la recta

Para determinar la ecuación de una recta en función de las condiciones dadas, se emplean las siguientes ecuaciones, según corresponda.

### Ecuación general

Es aquella que se expresa de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: $A$, $B$ y $C$ son constantes.

### Ecuación punto – pendiente

Dado el punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta de pendiente $m$, su ecuación es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

### Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta, su ecuación es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

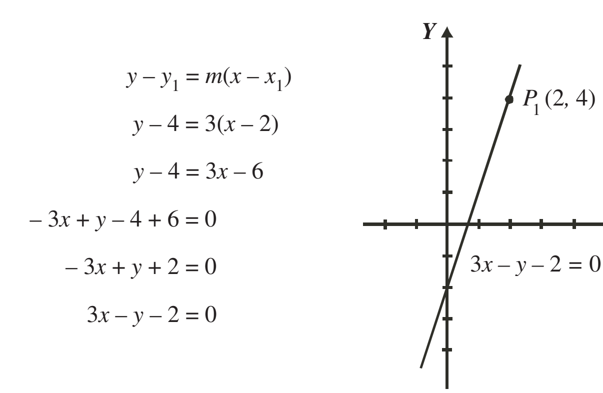
Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(2, 4)$ y tiene pendiente 3?

**Solución**

Se sustituyen los valores de $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ y $m = 3$ en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 3(x - 2)$$
$$y - 4 = 3x - 6$$
$$-3x + y - 4 + 6 = 0$$
$$-3x + y + 2 = 0$$
$$3x - y - 2 = 0$$




Por consiguiente, la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 4) y tiene pendiente 3, es: $3x - y - 2 = 0$.

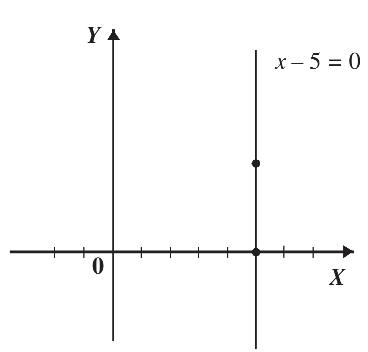
2 ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular al eje $X$ y que se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical?

**Solución**

Las rectas perpendiculares al eje $X$ tienen ecuación de la forma $x = x_1$, donde $x_1$ es la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje horizontal.

La recta se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical, entonces sus puntos tienen coordenadas $(5, y_1)$, y al sustituir el valor de la abscisa en la ecuación se obtiene:

$$x = 5$$
$$x - 5 = 0$$




3 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(2, -5)$

**Solución**

Los valores de las abscisas y ordenadas se sustituyen en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-5 - 2}{2 - (-1)}(x - (-1))$$

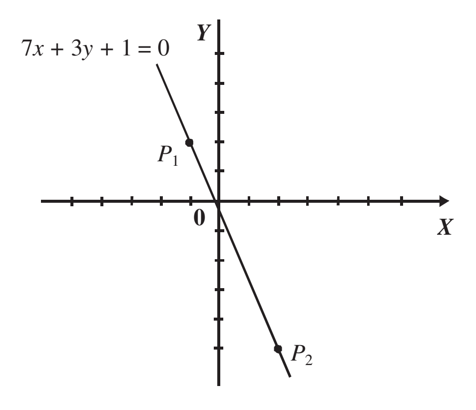
$$y - 2 = -\frac{7}{3}(x + 1)$$

$$3(y - 2) = -7(x + 1)$$

$$3y - 6 = -7x - 7$$

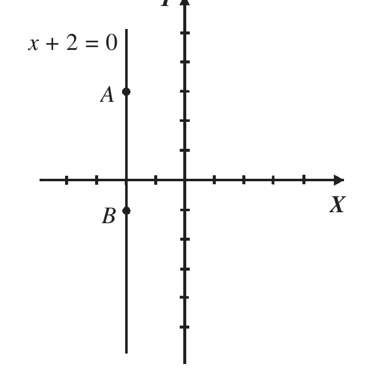
$$7x + 3y - 6 + 7 = 0$$

$$7x + 3y + 1 = 0$$




En consecuencia, la ecuación de la recta es: $7x + 3y + 1 = 0$.

4 Una recta pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(-2, -1)$. Encuentra su ecuación.




**Solución**

Al sustituir en la fórmula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, se determina que:

$$y - 3 = \frac{-1-3}{-2+2}(x - (-2))$$

$$y - 3 = -\frac{4}{0}(x + 2)$$

La pendiente de la recta es de la forma $\frac{c}{0}$ (no está definido), por consiguiente, es perpendicular al eje $X$ y su ecuación es de la forma:

$$x = x_1$$

Por tanto, su ecuación es:

$$x = -2$$

$$x + 2 = 0$$

Es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A$ y $B$ es: $x + 2 = 0$.

5 Determina los vértices del triángulo, cuyos lados están dados por las ecuaciones de las rectas:

$$3x + 7y - 13 = 0;\ x - y - 1 = 0;\ 7x + 3y + 23 = 0$$

**Solución**

Se combinan las rectas para formar tres sistemas de ecuaciones, los cuales se resuelven por cualquiera de los métodos conocidos:

Sistema de ecuaciones para el vértice $A$:

$$3x + 7y - 13 = 0$$
$$x - y - 1 = 0$$

Punto de intersección: $A(2, 1)$

Sistema de ecuaciones para el vértice $B$:

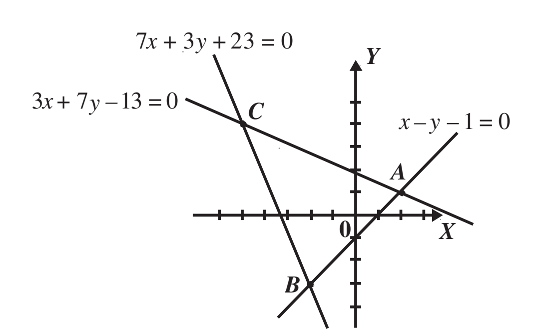
$$x - y - 1 = 0$$
$$7x + 3y + 23 = 0$$

Punto de intersección: $B(-2, -3)$

Sistema de ecuaciones para el vértice $C$:

$$3x + 7y - 13 = 0$$
$$7x + 3y + 23 = 0$$

Punto de intersección: $C(-5, 4)$



**6** Si se compran 20 pantalones el precio unitario de la prenda es de \$300, pero si se compran 50, entonces el costo de cada pantalón es de \$280, encuentra la ecuación de la demanda.

**Solución**

Considerando:

$x$ = número de pantalones $\qquad$ $y$ = precio por pantalón

Se forman los siguientes pares coordenados:

$$(20, 300) \text{ y } (50, 280)$$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se obtiene:

$$y-300=\frac{280-300}{50-20}(x-20) \quad \rightarrow \quad y-300=-\frac{20}{30}(x-20)$$

$$y-300=-\frac{2}{3}(x-20)$$

Al transformar esta última ecuación a su forma general, obtiene la ecuación de la demanda:

$$2x+3y-940=0$$

**7** Un resorte se deforma 2 centímetros bajo la acción de una fuerza de 15 newtons, si la fuerza se incrementa a 25 newtons, entonces se deforma $3\frac{1}{3}$ de centímetro, ¿cuál es la ecuación que representa la deformación que sufre el resorte en función de la fuerza?

**Solución**

Considere:

$x$ = fuerza que actúa sobre el resorte $\qquad$ $y$ = deformación

Se forma entonces la siguiente pareja de puntos:

$$(15,\ 2) \text{ y } \left(25,\ 3\frac{1}{3}\right)$$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y al convertir a su forma general se obtiene:

$$y-2=\frac{3\frac{1}{3}-2}{25-15}(x-15) \quad \rightarrow \quad y-2=\frac{\frac{10}{3}-2}{10}(x-15) \quad \rightarrow \quad y-2=\frac{\frac{4}{3}}{10}(x-15)$$

$$y-2=\frac{2}{15}(x-15)$$

$$15(y-2)=2(x-15)$$

$$15y-30=2x-30$$

$$0=2x-15y$$

Por consiguiente, la ecuación general de la deformación del resorte es: $2x-15y=0$.

# EJERCICIO 14

Encuentra las ecuaciones generales de las rectas que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Pasa por (– 3, 4) y $m = -\frac{2}{5}$
2. Pasa por (0, 3) y $m = 2$
3. Pasa por $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $m = 0$
4. Pasa por $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $m = -1$
5. Pasa por (– 2, 1) y (3, 4)
6. Pasa por (0, 2) y (– 3, – 2)
7. Pasa por (3, –1) y (3, 4)
8. Pasa por $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$
9. Pasa por (0, 1) y $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$
10. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{5}$.
11. Una recta pasa por (– 1, 4) y desciende tres unidades por cada dos unidades que incrementa $x$. ¿Cuál es su ecuación general?
12. Obtén la ecuación general de la recta, cuya intersección con el eje $X$ es 3 y su inclinación es de 120°.
13. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(6, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 135°.
14. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular al eje $X$ y está a tres unidades a la derecha del eje vertical.
15. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela al eje $Y$ y está cuatro unidades a la izquierda del eje horizontal.
16. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes $X$ y $Y$, son 4 y – 6, respectivamente. Determina su ecuación general.
17. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y determina sobre el eje $X$ el segmento – 2.
18. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 0)$. Obtén las ecuaciones generales de sus lados.
19. ¿Cuál es la ecuación general de la recta, cuya pendiente es – 2 y su intersección con el eje $Y$ es 4?
20. Una recta pasa por el punto $A(7, 8)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(-2, 2)$ y $D(3, -4)$. Determina su ecuación general.
21. Demuestra que los puntos $A(-1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(5, 6)$ son colineales, mediante la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

Con base al triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ y $C(-4, -5)$, realiza los ejercicios 22 al 27:

22. Obtén las ecuaciones generales de las rectas que pasan por los vértices y son paralelas a los lados opuestos.
23. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio de $A$ con $B$ y es perpendicular al mismo lado.
24. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio del $\overline{BC}$ y por el vértice $A$.
25. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el vértice $C$ y es perpendicular al lado $\overline{AB}$.
26. ¿Cuáles son las ecuaciones generales de las rectas que pasan por el vértice $B$ y trisecan al $\overline{AC}$ ?
27. Mediante las ecuaciones de línea recta, encuentra las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos puntos medios son los puntos $A$, $B$ y $C$.
28. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:

$$x - 3y + 3 = 0;\ 2x + 7y + 6 = 0;\ 4x + y - 14 = 0$$

Determina las coordenadas de los vértices.

29. Las ecuaciones de los lados de un paralelogramo son:

$$x - 4y + 11 = 0;\ 2x + y + 4 = 0;\ x - 4y - 7 = 0;\ 2x + y - 14 = 0$$

Determina las coordenadas de sus vértices.

30. Un automóvil se mueve con velocidad constante y recorre 60 km en media hora, si ese mismo automóvil recorre 150 km en una hora con 15 minutos, encuentra la ecuación que relaciona la distancia $y$ en kilómetros recorrida por el automóvil, en términos del tiempo $x$ en horas.

31. La velocidad de una partícula en un tiempo de 2 segundos es de 5 metros por segundo y para un tiempo de 8 segundos se mueve a razón de 14 metros por segundo. Determina la ecuación que relaciona la velocidad de la partícula en función del tiempo.
32. Si el dueño de una papelería le compra a un proveedor 100 libretas, éste le da un precio de $12.50 cada una, pero si le compra 120, entonces el precio de cada libreta disminuye en ¢50, escribe la ecuación de la demanda.
33. Una empresa desea realizar una campaña publicitaria de un nuevo producto, para esto visita un taller de impresión y les informan que el costo de producir 15 millares de folletos publicitarios tienen un costo de $3 000, pero si desean 20 millares, el costo es de $3 600, obtén la ecuación de la recta que representa esta situación. (Considera $x$ = número de millares; $y$ = costo).
34. Una temperatura de 20°C equivale a 68°F, y 50°C equivalen a 122°F, determina la ecuación que relaciona la temperatura $T_C$ en grados Celsius con la temperatura $T_F$ en grados Fahrenheit.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Formas de la ecuación de una recta

Conocidas las condiciones que determinan una recta o su ecuación, éstas se expresan de las siguientes formas:

### Ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen (forma ordinaria o reducida)

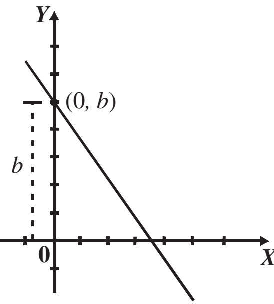
Una vez que se conoce la pendiente de una recta y su ordenada al origen (intersección con el eje $Y$), se determina la siguiente ecuación:

$$y = mx + b$$

Donde, $m$: pendiente

$b$: ordenada al origen

Esta forma de la ecuación de la recta, también se conoce como forma simplificada o reducida.




**EJEMPLOS**

Ejemplos

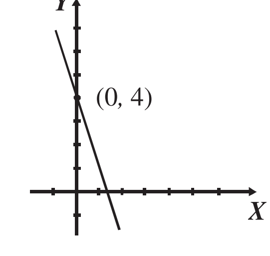
**1** Encuentra la ecuación de la recta, cuya intersección con el eje $Y$ es 4 y su pendiente – 3.

**Solución**

Los datos son: $m = -3$ y $b = 4$, al sustituir se obtiene:

$$y = mx + b$$
$$y = -3x + 4$$
$$3x + y - 4 = 0$$

Finalmente, la ecuación es: $3x + y - 4 = 0$.




**2** Determina la ecuación general de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje $Y$ es el punto (0, – 5).

**Solución**

Los datos son: $m = \frac{1}{2}$ y $b = -5$, al sustituir en la ecuación ordinaria, se obtiene:

$y = \frac{1}{2}x - 5$ Al multiplicar por 2 para eliminar el denominador.

$2y = x - 10$ Al igualar a cero la ecuación, resulta: $x - 2y - 10 = 0$.

*Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria*

Para transformar $Ax + By + C = 0$, a la forma $y = mx + b$, se procede de la siguiente manera:

Se despeja la variable $y$ de:

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación es de la forma pendiente–ordenada al origen.

Si se compara con la ecuación $y = mx + b$ se obtienen los valores de $m$ y $b$, en términos de los coeficientes de la ecuación general:

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la pendiente y la intersección con el eje $Y$ de la recta $4x - 5y + 12 = 0$?

**Solución**

Despejando la variable $y$:

$$4x - 5y + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad -5y = -4x - 12$$
$$y = \frac{-4}{-5}x - \frac{12}{-5}$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

Por consiguiente, la ecuación en su forma pendiente–ordenada al origen es:

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

De esta ecuación se determina la pendiente y el punto de intersección con el eje $Y$:

$$m = \frac{4}{5} \text{ y } \left(0, \frac{12}{5}\right)$$

2 Transforma a la forma simplificada la siguiente ecuación: $3x + 5y - 7 = 0$.

**Solución**

Se determinan los valores de $A$, $B$ y $C$ como sigue:

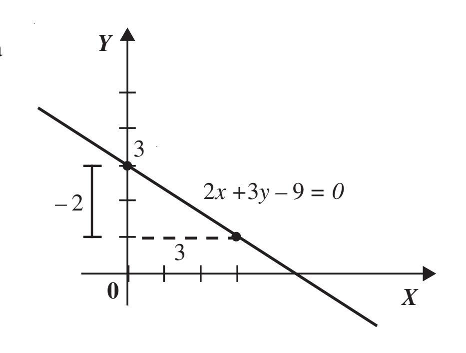
$$A = 3,\ B = 5 \text{ y } C = -7$$

Se sustituyen en $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, para obtener la forma simplificada:

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{-7}{5} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$$

3 Emplea la forma ordinaria de la ecuación de la recta y grafica la siguiente recta:

$$2x + 3y - 9 = 0$$




**Solución**

Se transforma la ecuación propuesta a su forma ordinaria:

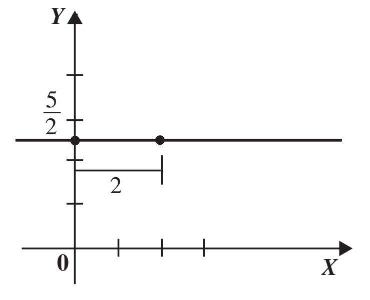
$$2x + 3y - 9 = 0$$
$$3y = -2x + 9$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

Se obtiene:

La ordenada al origen es $b = 3$, significa que la recta corta al eje $y$ 3 unidades por encima del origen.

La pendiente $m = -\frac{2}{3}$, significa que $y$ disminuye 2 unidades y $x$ aumenta tres.

4 Grafica la recta de la ecuación $2y - 5 = 0$.




**Solución**

Se expresa la ecuación como:

$$0x + 2y - 5 = 0$$

Se despeja $y$ de la ecuación y se obtiene:

$$y = \frac{0}{2}x + \frac{5}{2}$$

El valor de $b = \frac{5}{2}$

La pendiente es cero pero se expresa de manera equivalente como $m = \frac{0}{2}$ para poder graficar.

5 Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(-5, 3)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

**Solución**

La ecuación $3x + 2y - 6 = 0$ se expresa en su forma pendiente–ordenada al origen:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

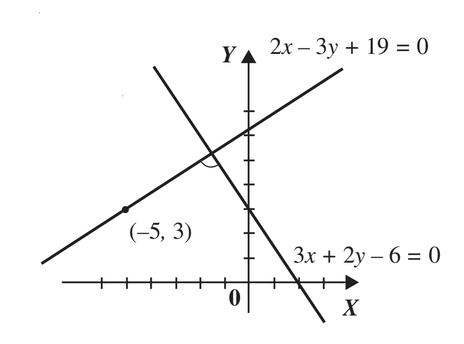
La pendiente de esta recta es: $m = -\frac{3}{2}$.

La recta perpendicular a ella que pasa por el punto $(-5, 3)$ cumple la condición: $m \cdot m' = -1$

$$-\frac{3}{2}m' = -1 \quad ; \quad m' = \frac{2(-1)}{-3} = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen las coordenadas del punto y la pendiente $m'$ en la ecuación:

$$y - y_1 = m'(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - (-5))$$
$$3(y - 3) = 2(x + 5)$$
$$3y - 9 = 2x + 10$$
$$-2x + 3y - 9 - 10 = 0$$
$$-2x + 3y - 19 = 0$$




Finalmente, la ecuación de la recta es:

$$2x - 3y + 19 = 0$$

6 Una recta pasa por el punto (2, 3) y es paralela a la recta $x - 2y = 0$, ¿cuál es su ecuación general?

**Solución**

Se expresa la ecuación $x - 2y = 0$ en su forma pendiente ordenada al origen:

$$y = \frac{1}{2}x$$

La pendiente de esta recta es $m = \frac{1}{2}$, como la recta que se busca es paralela, entonces tiene la misma pendiente: $m' = m = \frac{1}{2}$.

Se sustituye el punto y la pendiente en la ecuación y se expresa en su forma general, obteniendo como resultado:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \qquad \rightarrow \qquad x - 2y + 4 = 0$$

7 Para las rectas $x + 4y - 4 = 0$ y $2x - 3y + 6 = 0$, determina la medida del ángulo agudo que forman.

**Solución**

Se expresan las rectas en su forma ordinaria para obtener sus respectivas pendientes:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \qquad \rightarrow \qquad m_1 = -\frac{1}{4} \qquad\qquad y = \frac{2}{3}x + 2 \qquad \rightarrow \qquad m_2 = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen los valores de las pendientes en la fórmula de ángulo entre dos rectas:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right) = arc\ tan\left(\frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}\right) = arc\ tan\left(\frac{11}{10}\right) = 47°43'34''$$

Por tanto, el ángulo agudo que forman dichas rectas es de 47° 43′34″.

8 Un cuerpo tiene una velocidad de 4 metros por segundo, después de 6 segundos, su velocidad es de 12 metros por segundo. Expresa la velocidad de dicho cuerpo en función del tiempo, obtén su velocidad para un tiempo de 9 segundos y traza la gráfica.

**Solución**

Este problema relaciona a la velocidad $v$ con el tiempo $t$, por tanto, los pares ordenados son de la forma: $(t, v)$.

Por consiguiente, los pares ordenados son: (0, 4) y (6, 12).

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se despeja $v$:

$$v - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) \qquad \rightarrow \qquad v - 4 = \frac{12 - 4}{6 - 0}(t - 0) \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{4}{3}t + 4$$

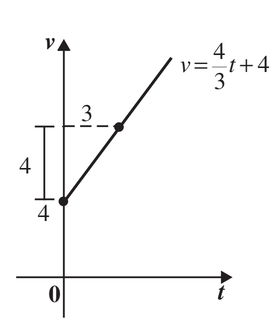
Se obtiene que $m = \frac{4}{3}$ y $b = 4$, la pendiente de la recta representa la aceleración del cuerpo y la ordenada al origen su velocidad inicial.

La velocidad del cuerpo en $t = 9\ s$, se obtiene al sustituir este valor en la ecuación:

$$v = \frac{4}{3}t + 4 \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{4}{3}(9) + 4$$

$$v = 16\frac{m}{s}$$

La representación gráfica del problema es:




Por tanto, para 9 segundos, la velocidad del cuerpo es de $16\frac{m}{s}$.

9 Cierta empresa se dedica a fabricar bolsas de plástico, el costo de fabricación de $x$ número de ellas es de $C = 4x + 3\,200$. Los ingresos por la venta de las bolsas fabricadas están dados por la ecuación $I = 12x$.

*a*) ¿Cuál es el costo de producción de 1 500 bolsas?
*b*) Si se fabrican 1 000 bolsas, ¿de cuánto es la utilidad?
*c*) ¿Cuántas bolsas se deben fabricar para que la utilidad sea nula?
*d*) Construye la gráfica que muestre la ecuación de costos e ingresos.

**Solución**

*a*) Se sustituye el valor de $x = 1\,500$ en la ecuación de costos:

$C = 4x + 3\,200$ $\qquad$ $C = 4(1\,500) + 3\,200$
$= 6\,000 + 3\,200$
$= 9\,200$

por consiguiente, producir 1 500 bolsas tiene un costo de \$9 200.

*b*) La ecuación de utilidad resulta de la diferencia de la ecuación de ingresos y costos.

$$U = I - C \qquad U = 12x - (4x + 3\,200) \qquad U = 8x - 3\,200$$

Para $x = 1\,000$ se obtiene:

$$U = 8(1\,000) - 3\,200$$
$$= 8\,000 - 3\,200$$
$$= 4\,800$$

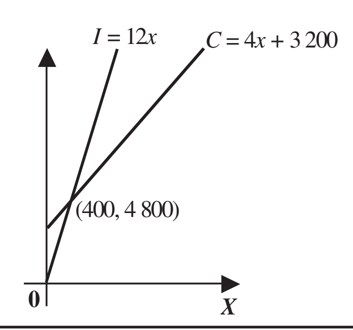
Finalmente, la utilidad que genera la venta de 1 000 bolsas es de \$4 800.

*c*) El número de bolsas que deben fabricarse y venderse para que la utilidad sea nula es:

$U = 8x - 3\,200$ $\qquad$ $0 = 8x - 3\,200$ $\qquad$ $-8x = -3\,200$
$$x = \frac{-3200}{-8}$$
$$x = 400$$

Para que la utilidad sea nula se deben fabricar y vender 400 bolsas.

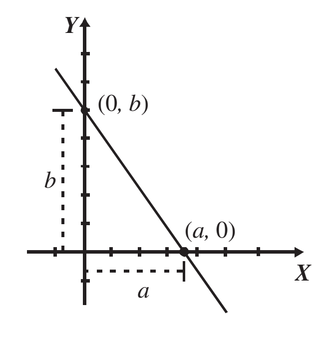
*d*) La representación gráfica es:



## Ecuación de la recta en su forma simétrica

Una recta cuyas intersecciones con los ejes $X$ y $Y$ son $a$ y $b$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ se representa por:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$




Donde:

$a$: abscisa al origen
(Representa la intersección con el eje $X$)
$b$: ordenada al origen
(Representa la intersección con el eje $Y$)

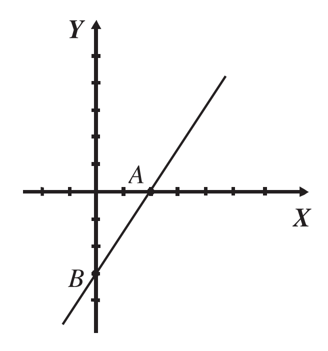
**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Encuentra la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $A(2, 0)$ y $B(0, -3)$.

**Solución**

En este caso $a = 2$ y $b = -3$, entonces al sustituir en la forma simétrica, se obtiene:




$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

$$6\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1\right)$$ Se multiplica por 6 la ecuación para eliminar los denominadores

$$3x-2y=6$$

$$3x-2y-6=0$$

Por tanto, la ecuación general de la recta es: $3x - 2y - 6 = 0$.

**2** Determina la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 5)$.

**Solución**

En este caso, $a = -1$ y $b = 5$, entonces:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{5}=1$$ Se multiplica por 5 ambos miembros

$$-5x+y=5$$ Se acomodan los términos

$$5x-y+5=0$$

Por consiguiente, la ecuación general de la recta es: $5x - y + 5 = 0$.

### *Transformación de la ecuación general a la forma simétrica*

Para transformar la ecuación $Ax + By + C = 0$ a la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, se realizan los siguientes pasos:

$$Ax+By+C=0$$

$$Ax+By=-C$$ El término independiente se pasa al segundo miembro.

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$$ Se divide la expresión por el término independiente.

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$ Se obtiene que $a=-\frac{C}{A}$ y $b=-\frac{C}{B}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a la forma simétrica y determina las intersecciones con los ejes de la recta:

$$2x + 3y - 6 = 0$$

**Solución**

La ecuación está en la forma general, al comparar con $Ax + By + C = 0$, se obtienen los valores de $A$, $B$ y $C$, éstos son:

$$A = 2,\ B = 3 \text{ y } C = -6$$

Para encontrar las intersecciones se sustituye en:

$$a = -\frac{C}{A} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Entonces,

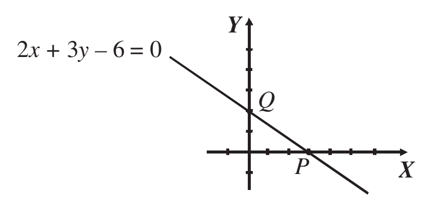
$$a = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ y } b = -\frac{(-6)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

En consecuencia, la ecuación en su forma simétrica es: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Las intersecciones con los ejes son:

con el eje $X$ el punto: $P(3, 0)$ con el eje $Y$ el punto: $Q(0, 2)$

Al graficar y unir estos puntos en el plano cartesiano, se obtiene la gráfica de la ecuación $2x + 3y - 6 = 0$.




2 Una recta pasa por los puntos (2, 5) y (– 1, 4). Expresa su forma simétrica.

**Solución**

Primero se sustituyen los puntos en la ecuación para encontrar la ecuación general:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 5 = \frac{4-5}{-1-2}(x-2)$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x-2)$$

$$3(y - 5) = 1(x - 2)$$

$$3y - 15 = x - 2$$

$$-x + 2 + 3y - 15 = 0$$

$$-x + 3y - 13 = 0$$

$$x - 3y + 13 = 0$$

Esta ecuación se encuentra en su forma general y los valores de $A$, $B$ y $C$, son:

$$A = 1,\ B = -3 \text{ y } C = 13$$

Al sustituir en $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$, se determina que:

$$a = \frac{-13}{1} = -13 \text{ y } b = \frac{-13}{-3} = \frac{13}{3}$$

Finalmente, la ecuación de la recta en la forma simétrica es:

$$\frac{x}{-13} + \frac{y}{\frac{13}{3}} = 1$$

3 Transforma la ecuación general de la recta $2x + 5y - 12 = 0$ a su forma simétrica.

**Solución**

$$2x + 5y - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 5y = 12$$

$$\frac{2x}{12} + \frac{5y}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{\frac{2x}{2}}{\frac{12}{2}} + \frac{\frac{5y}{5}}{\frac{12}{5}} = 1$$

$$\text{Forma simétrica: } \frac{x}{6} + \frac{y}{\frac{12}{5}} = 1$$

## EJERCICIO 15

Transforma a la forma ordinaria y simétrica las siguientes ecuaciones:

1. $x + y - 4 = 0$
2. $2x - 5y + 5 = 0$
3. $x - 3y + 8 = 0$
4. $2x - y = 0$
5. $x + 8y = 4$
6. $-3x + 4y = -12$
7. $3x + 5y - 10 = 0$
8. $\frac{1}{2}x + 3y + 5 = 0$
9. $-\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y = 4$
10. $x\,cos\,\omega + y\,sen\,\omega - p = 0$

Grafica las siguientes ecuaciones:

11. $y = -3x + 1$
12. $y = 2x - 3$
13. $y = -\frac{3}{4}x + 1$
14. $y = \frac{2}{3}x$
15. $4x - y - 2 = 0$
16. $x + 3y - 5 = 0$
17. $x - y = 0$
18. $\frac{3}{2}x + 3y - 6 = 0$
19. Determina la ecuación de la recta, cuya ordenada al origen es $-5$ y su inclinación es de 135°.
20. Una recta de pendiente 2 pasa por el punto $A(-1,2)$. Expresa su ecuación en la forma ordinaria.
21. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(6, -7)$ y tiene pendiente $-3$ en su forma ordinaria?
22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-5, 3)$ en su forma ordinaria.
23. Una recta tiene intersecciones con los ejes en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 5)$. Obtén su ecuación en su forma ordinaria.
24. Una recta pasa por el punto $(-1, 5)$ y es paralela a la recta con ecuación $5x - 3y + 7 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
25. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(2, 7)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $x - 4y + 7 = 0$.
26. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y es paralela a la recta $x - y + 2 = 0$.
27. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto medio de las intersecciones con los ejes de la recta $2x - 3y + 6 = 0$?
28. Determina la ecuación general de la recta perpendicular a la recta $2x + 3y - 7 = 0$ y pasa por la intersección de las rectas $x + y - 7 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$.

29. Encuentra la medida del ángulo obtuso formado por las rectas:

$$x + 3y - 6 = 0 \text{ y } 2y - 3 = 0$$

30. Los lados de un triángulo están formados por las rectas:

$$x - 6y + 15 = 0;\ 5x + 2y - 21 = 0;\ x + 2y - 1 = 0$$

¿Cuál es la medida de sus ángulos interiores?

31. La posición de una partícula está dada por la expresión:

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

Donde $x$ e $y$ están dados en metros, ¿cuál es su posición cuando $x = 20\ m$?

32. Un fabricante de pantalones tiene gastos fijos de $30 000 mensuales y por cada pantalón elaborado invierte $50 más.
   *a*) ¿Cuál es la ecuación de gastos del fabricante?
   *b*) ¿Cuánto invierte en la producción de 800 pantalones?
   (Considera $x$ = número de pantalones fabricados, $y$ = gasto total)

33. Para un tiempo de 5 segundos, un cuerpo posee una velocidad de $3\frac{m}{s}$, y para 8 segundos su velocidad es de $15\frac{m}{s}$.
   *a*) ¿Cuál es su aceleración?
   *b*) ¿Qué velocidad tendrá para un tiempo de 12 segundos?

34. Un restaurante debe invertir diariamente $6 000 en gastos fijos, más $30 por cada comida servida, si todos los platillos servidos tienen un precio al público de $80, obtén:
   *a*) La función de costo total del restaurante por día.
   *b*) ¿Cuál es la utilidad obtenida, si vende en un día 140 platillos?
   *c*) Si sólo vende 90 platillos, ¿obtiene ganancias?
   *d*) ¿Cuántos platillos debe vender para que no exista utilidad?

35. Representa la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45° en su forma simétrica.

36. Una recta tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje $Y$ es $-4$. Representa su ecuación en la forma simétrica.

37. Una recta pasa por los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, -2)$. Encuentra su ecuación en la forma simétrica.

38. Obtén la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección con el eje $Y$ de la recta $x + 2y - 7 = 0$ y es perpendicular a la misma.

39. Determina la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección de las rectas, $2x + y - 5 = 0$ y $3x - 4y - 2 = 0$, y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 6)$.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Familia de rectas

Se denomina familia de rectas al conjunto de rectas que satisfacen una condición geométrica; se clasifican en:

### *Rectas paralelas*

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde $b$ es el parámetro. Este tipo de rectas tienen la misma pendiente.

## Ejemplo

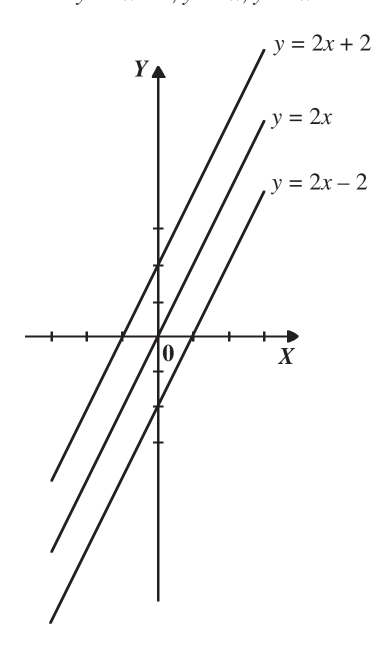
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = 2x + b$, con $b = -2, 0, 2$.

### Solución

Se sustituyen los valores del parámetro $b$ en la ecuación y se obtienen las siguientes rectas:

$$y = 2x - 2,\ y = 2x,\ y = 2x + 2$$

Cuya representación gráfica es:




*Rectas concurrentes*

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde $m$ es el parámetro; esto es, las rectas coinciden en la intersección con el eje $Y$.

## Ejemplo

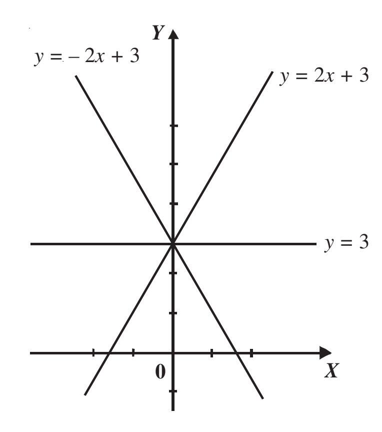
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = mx + 3$, con $m = -2, 0, 2$.

### Solución

Se sustituyen los valores de $m$ y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$y = -2x + 3,\ y = 3,\ y = 2x + 3$$

Cuya representación gráfica es:



# EJERCICIO 16

Representa gráficamente las siguientes familias de rectas:

1. $y=\frac{1}{2}x+b$
2. $y = mx + 1$
3. $y=-\frac{2}{3}x+b$
4. $y=mx-\frac{1}{2}$
5. $y = x + b$
6. $y = mx$
7. $y = -2x + b$
8. $y=mx+\frac{4}{3}$
9. $y = mx - 1$
10. $y=-\frac{4}{5}x+b$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de la recta en su forma normal

Sea $\overline{OP_1}$ un segmento perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$ de longitud $p$, y $\omega$ el ángulo determinado por el segmento y el eje $X$.

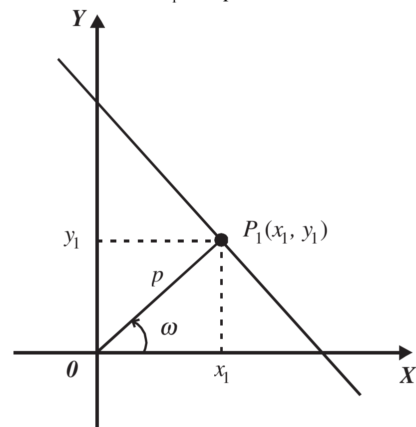
De la figura se obtiene:

$$sen\ \omega = \frac{y_1}{p} \rightarrow y_1 = p\ sen\ \omega$$

$$cos\ \omega = \frac{x_1}{p} \rightarrow x_1 = p\ cos\ \omega$$

Luego, la pendiente del segmento $\overline{OP_1}$ es:

$$m = tan\ \omega = \frac{y_1}{x_1} = \frac{p\ sen\ \omega}{p\ cos\ \omega} = \frac{sen\ \omega}{cos\ \omega}$$




Entonces, las coordenadas de $P_1$ son ($p\ cos\ \omega$, $p\ sen\ \omega$) y la pendiente, de la recta:

$Ax + By + C = 0$ es:

$$m = -\frac{cos\ \omega}{sen\ \omega}$$

Al sustituir $P_1$ y $m$ en la ecuación de la recta punto pendiente se obtiene la ecuación de la recta en su forma normal:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \rightarrow \qquad y - p\ sen\ \omega = -\frac{cos\ \omega}{sen\ \omega}(x - p\ cos\ \omega)$$

$$y\ sen\ \omega - p\ sen^2\ \omega = -x\ cos\ \omega + p\ cos^2\ \omega$$

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p\ sen^2\ \omega - p\ cos^2\ \omega = 0$$

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p(sen^2\ \omega + cos^2\ \omega) = 0$$

Pero $sen^2\omega + cos^2\omega = 1$, entonces:

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p = 0$$

Se concluye que una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, se puede expresar en su forma normal como:

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p = 0$$

Donde:

$p$: longitud del segmento $\overline{OP_1}$ y $\omega$: ángulo de inclinación del segmento de recta que parte del origen, perpendicular a la recta normal.

### *Transformación de la ecuación general a la forma normal*

Sean $Ax + By + C = 0$ y $x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p = 0$, las ecuaciones de una misma recta en su forma general y normal, respectivamente, entonces los coeficientes de ambas ecuaciones son iguales o proporcionales, por tanto:

$$\frac{cos\ \omega}{A} = \frac{sen\ \omega}{B} = -\frac{p}{C}, \text{ con } K = -\frac{p}{C}$$

Entonces, $K$ es la constante de proporcionalidad y en estas condiciones:

$$cos\ \omega = K\,A \qquad sen\ \omega = K\,B \qquad -p = K\,C$$

Al elevar al cuadrado y sumar las dos primeras igualdades se determina que:

$$cos^2\ \omega + sen^2\ \omega = K^2A^2 + K^2B^2 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$1 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$\frac{1}{A^2 + B^2} = K^2$$

$$K = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Con $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (radical).

Los valores de $cos\ \omega$, $sen\ \omega$ y $p$ están dados por:

$$cos\ \omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}};\ sen\ \omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ y } p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por consiguiente, la forma normal de $Ax + By + C = 0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Los signos de $r$ (radical) se consideran de la siguiente manera:

Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de $C$.

Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de $B$.

Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que $A$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $\sqrt{3}x + y - 9 = 0$ y determina el valor de $p$ y del ángulo $\omega$.

**Solución**

La forma normal de $Ax + By + C = 0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Se obtienen los coeficientes de la recta:

$$A = \sqrt{3}\text{ , } B = 1 \text{ y } C = -9$$

Luego, con los valores de $A$ y $B$ se obtiene el radical $\sqrt{A^2+B^2}$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Como $C$ es negativa, entonces $\sqrt{A^2+B^2}$ se toma con signo positivo, por consiguiente, la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

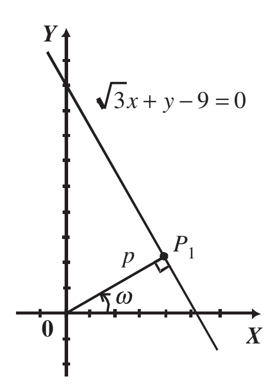
De aquí se obtiene:

$$\cos\,\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ , } \operatorname{sen}\,\omega = \frac{1}{2} \text{ y } p = \frac{9}{2}$$

Como $\operatorname{sen}\,\omega$ y $\cos\,\omega$ son ambos positivos; $\omega$ está en el primer cuadrante, entonces los valores de $p$ y $\omega$ están determinados por:

$$p = \frac{9}{2} \text{ y } \omega = 30°$$

Gráficamente se representa como:




Donde: $p = \frac{9}{2}$ y $\omega = 30°$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

2 Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $3x - 4y - 6 = 0$ y encuentra el valor de $p$ y $\omega$.

**Solución**

Con el valor de los coeficientes $A = 3$, $B = -4$ y $C = -6$, se obtiene el radical:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Debido a que $C$ es negativo, entonces $\sqrt{A^2 + B^2}$ es positivo, por tanto, la ecuación normal se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

De esta ecuación se determina que:

$$cos\ \omega = \frac{3}{5},\ sen\ \omega = -\frac{4}{5} \text{ y } p = \frac{6}{5}$$

Luego, para obtener el ángulo se despeja $w$ de cualquiera de las dos funciones trigonométricas:

$$sen\ \omega = -\frac{4}{5} \rightarrow \omega = arc\ sen\left(-\frac{4}{5}\right)$$

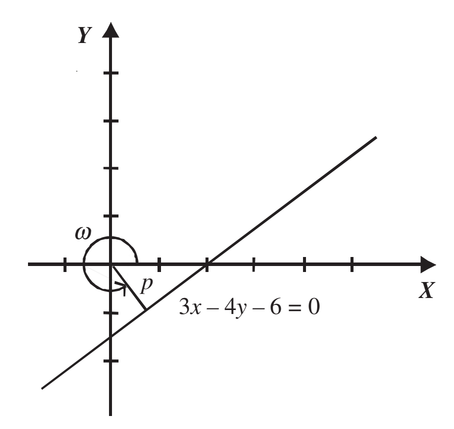
$$\omega = arc\ sen\ (-0.8) = -53°\ 7'$$

Como $cos\ \omega$ es positivo y $sen\ \omega$ es negativo, $\omega$ está en el cuarto cuadrante, por tanto:

$$\omega = 360° - 53°\ 07'$$

$$\omega = 306°\ 53'$$

***Gráfica:***




Donde: $p = \frac{6}{5}$ y $\omega = 306°\ 53'$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

# EJERCICIO 17

Expresa en su forma normal las siguientes rectas:

1. $2x + 3y - 5 = 0$
2. $x - y + 5 = 0$
3. $5x + 3y = 0$
4. $x - 3y + 7 = 0$
5. $12x + 5y = -13$
6. $\sqrt{5}x + 2y - 1 = 0$

Determina la ecuación de la recta en su forma normal si se conoce *w* y *p*.

7. $\omega = 30°$ y $p = 4$
8. $\omega = 45°$ y $p = \sqrt{2}$
9. $\omega = 60°$ y $p = 3$
10. $\omega = 120°$ y $p = 1$
11. $\omega = 180°$ y $p = \sqrt{3}$
12. $\omega = 150°$ y $p = 5$
13. $\omega = 225°$ y $p = 3\sqrt{2}$
14. $\omega = 300°$ y $p = 4\sqrt{3}$
15. Una recta es tangente a un círculo con centro en el origen y radio 2. Si el punto de tangencia es $(1, -\sqrt{3})$, ¿cuál es la ecuación de la recta en su forma normal?
16. ¿Cuál es la ecuación de la recta en forma normal, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es paralela a la recta $2x + 5y - 10 = 0$?
17. Expresa la ecuación de la recta $3x + ky + 7 = 0$ en su forma normal, cuando pasa por el punto $(-3, 2)$.
18. Encuentra la medida de los ángulos formados por las rectas con ecuaciones:

$$x \cos 330° + y \operatorname{sen} 330° - 1 = 0$$

$$x \cos 210° + y \operatorname{sen} 210° - 2 = 0$$

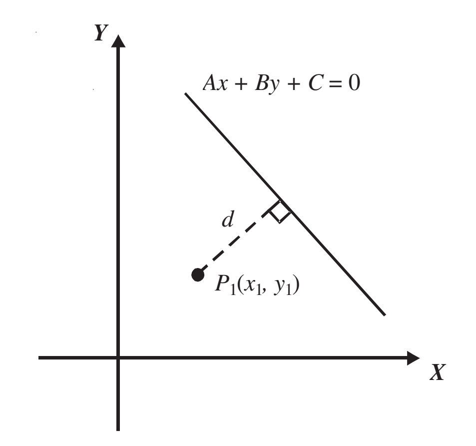
19. Determina la ecuación de la recta, cuya distancia al origen es $\frac{12}{5}$ *u* y pasa por el punto $A(0, -3)$.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

### *Distancia de un punto a una recta*

Es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado a partir del punto.

La distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, está determinada por la fórmula:




$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJEMPLOS

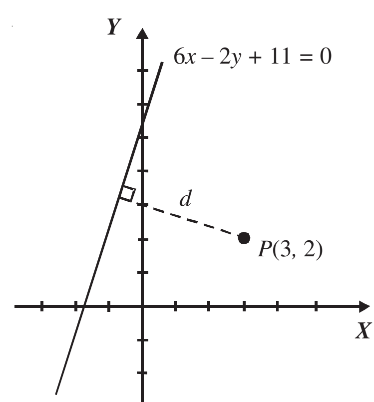
Ejemplos

**1** Encuentra la distancia del punto $A(3, 2)$ a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

**Solución**

Se sustituyen las coordenadas del punto $A$ y los coeficientes de la ecuación en la fórmula:

$$d = \frac{|\,6(3)-2(2)+11\,|}{\sqrt{(6)^2+(-2)^2}} = \frac{|\,18-4+11\,|}{\sqrt{36+4}} = \frac{|\,25\,|}{\sqrt{40}} = \frac{|\,25\,|}{\sqrt{4(10)}} = \frac{25}{2\sqrt{10}}$$




Finalmente, la distancia es: $\frac{25}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{4}\sqrt{10}u$.

**2** ¿Cuál es la longitud de la altura de un triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(1, -2)$, $B(7, 0)$ y $C(3, 3)$, del vértice $A$ sobre el lado $\overline{BC}$ ?

**Solución**

Se determina la ecuación de la recta que pasa por los vértices $B$ y $C$:

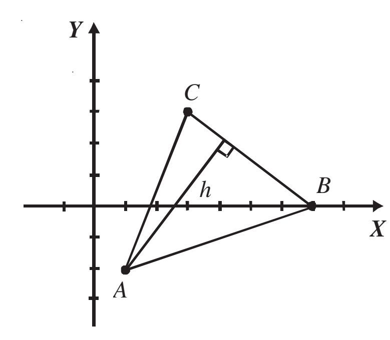
$$y - 0 = \frac{3-0}{3-7}(x-7)$$

$$y = -\frac{3}{4}(x-7)$$

$$4y = -3(x-7)$$

$$4y = -3x + 21$$

$$3x + 4y - 21 = 0$$




La longitud de la altura es la distancia que existe del vértice $A(1, -2)$ a la recta $3x + 4y - 21 = 0$, entonces, al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$h = \frac{|3(1)+4(-2)-21|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}} = \frac{|3-8-21|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-26|}{5} = \frac{26}{5} = 5.2u$$

Por consiguiente, la altura es de $5.2u$.

3 Encuentra el área del triángulo formado por los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$ y $C(3, 4)$.

**Solución**

Se determina la ecuación de uno de los lados, en este caso $\overline{AB}$.

$$y-3=\frac{-1-3}{1-(-2)}(x-(-2)) \rightarrow y-3=\frac{-4}{3}(x+2) \rightarrow 3y-9=-4x-8 \rightarrow 4x+3y-1=0$$

La longitud de la altura es la distancia del punto $C(3, 4)$ a la recta $4x + 3y - 1 = 0$

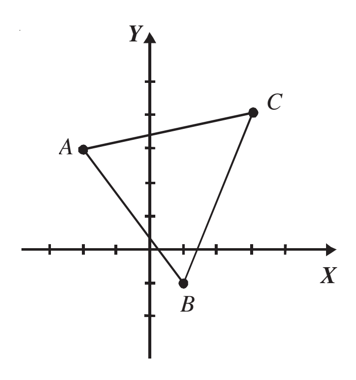
$$h=\frac{|4(3)+3(4)-1|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\frac{|12+12-1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|23|}{5}=\frac{23}{5}$$

La base del triángulo es la longitud del lado $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-(-2))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

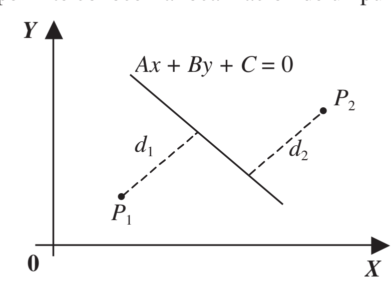
Entonces, el área del triángulo es:

$$A=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(5)\left(\frac{23}{5}\right)=\frac{23}{2}u^2$$




*Distancia dirigida.*

La distancia dirigida permite conocer la localización de un punto con respecto a una recta y al origen.




$$d=\pm\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

**Casos:**

Si la recta no pasa por el origen:

- La distancia que existe del punto a la recta es positiva si el punto y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta.
- Si el punto y el origen se encuentran en la misma región respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

Si la recta pasa por el origen:

- La distancia del punto a la recta es positiva si el punto se encuentra por encima o en la región de arriba respecto a la recta.
- Si el punto se encuentra por debajo o en la región de abajo respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

## EJEMPLOS

1 ¿Cuál es la distancia dirigida que existe del punto $P(3, -1)$ a la recta $3x - 2y - 6 = 0$?

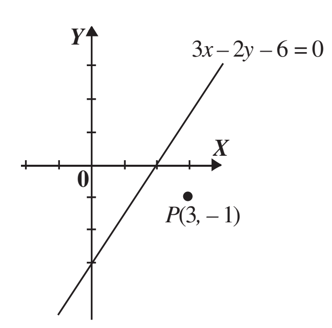
**Solución**

Se grafican la recta y el punto:

Se observa que el punto $P$ y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta, por consiguiente, la distancia es positiva e igual a:

$$d = \frac{|3(3) - 2(-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}u$$




2 Determina la distancia dirigida del punto $Q(-4, -2)$ a la recta $x + 4y = 0$.

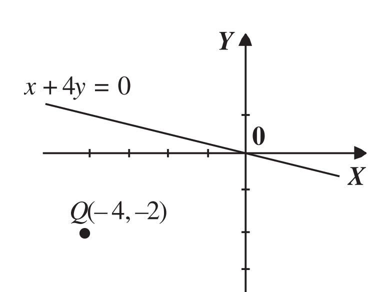
**Solución**

Se determina la posición del punto respecto a la recta:

El punto $Q$ se encuentra por debajo de la recta, por tanto, la distancia dirigida es negativa e igual a:

$$d = -\frac{|-4 + 4(-2)|}{\sqrt{1^2 + 4^2}}$$

$$d = -\frac{|-12|}{\sqrt{17}} = -\frac{12}{\sqrt{17}} = -\frac{12\sqrt{17}}{17}u$$



3 Determina la ecuación de la recta que dista 2 unidades de la recta $4x + 3y - 6 = 0$.

**Solución**

Existen dos rectas paralelas a $4x + 3y - 6 = 0$, una se encuentra arriba y la otra abajo, se sustituyen los datos en la fórmula:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

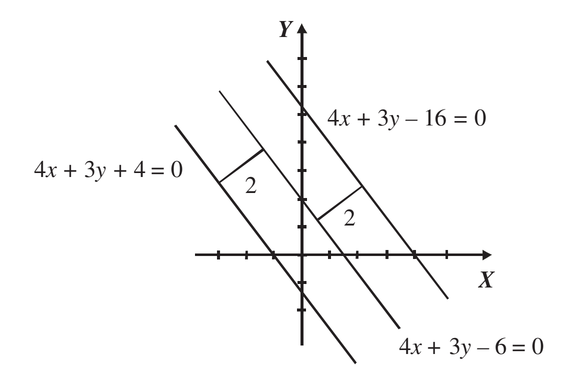
De la última ecuación se obtienen las ecuaciones de las rectas paralelas:

$$2 = \frac{4x + 3y - 6}{5} \qquad\qquad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{-5}$$

$$10 = 4x + 3y - 6 \qquad\qquad -10 = 4x + 3y - 6$$

$$4x + 3y - 16 = 0 \qquad\qquad 4x + 3y + 4 = 0$$

Gráficamente se representan de la siguiente manera:




*Distancia entre rectas paralelas*

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, se determina un punto en cualquiera de las rectas, después se calcula la distancia de ese punto a la otra recta.

## Ejemplo

Encuentra la distancia entre las rectas paralelas $2x + 3y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 6 = 0$.

**Solución**

La pendiente de ambas rectas es igual a $-\frac{2}{3}$, por tanto son paralelas.

Se determina un punto cualquiera sobre la recta $2x + 3y - 6 = 0$

$$\text{Si } x = 0,\ 2(0) + 3y - 6 = 0$$

$$3y - 6 = 0$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$y = 2$, se obtiene el punto $(0, 2)$

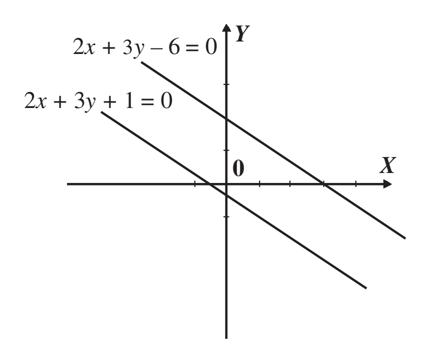
Se aplica la fórmula para obtener la distancia del punto (0, 2) a la recta $2x + 3y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(2)(0) + (3)(2) + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{|0 + 6 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$\frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{\left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

De acuerdo con lo anterior la distancia entre las rectas es: $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ unidades.




## EJERCICIO 18

Determina la distancia del punto dado a la recta indicada:

1. $P(1, 4)$; $2x - 7y + 3 = 0$
2. $P(-2, 5)$; $3x + 4y - 5 = 0$
3. $P(0, -4)$; $x + y - 6 = 0$
4. $P(-1, 7)$; $12x + 5y + 26 = 0$
5. $P(3, 0)$; $x - y + 4 = 0$
6. $P(-4, 0)$; $x + 3 = 0$
7. $P(-2, -5)$; $x + 4y - 10 = 0$
8. $P(-3, -7)$; $y - 3 = 0$
9. Encuentra la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$ del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(5, 8)$ y $C(1, -4)$.
10. ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(0, 0)$, $B(2, 4)$ y $C(6, 7)$?
11. Una circunferencia tiene su centro en (2, 3) y es tangente a la recta $3x + 4y - 25 = 0$. Determina el radio de la circunferencia.
12. Obtén el valor de $k$ para que la distancia de la recta $x + ky - 5 = 0$ al punto (3, 2) sea igual a $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Encuentra la distancia dirigida del punto dado a la recta indicada:

13. $P(2, -1)$; $2x - 3y - 5 = 0$
14. $P(-3, 2)$; $3x + 4y + 7 = 0$
15. $P(-2, 5)$; $3x + 4y = 0$
16. $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$; $5x + 2y - 3 = 0$
17. $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$; $6x + 8y - 3 = 0$
18. $P\left(-5, -\frac{3}{4}\right)$; $x + y - 1 = 0$
19. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas paralelas a $3x - 4y + 5 = 0$ y que se encuentran a tres unidades de distancia?

20. La distancia dirigida de $P(-2, y)$ a la recta con ecuación $x + 4y - 5 = 0$, es 4 unidades. Encuentra la ordenada de $P$.
21. ¿Qué distancia existe entre las rectas paralelas $2x + y - 6 = 0$ y $2x + y + 1 = 0$?
22. Obtén la distancia que existe entre las rectas paralelas $x - 2y + 5 = 0$ y $3x - 6y + 4 = 0$.
23. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a $x - y - 3 = 0$, y que dista 3 unidades de ella?
24. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y que la distancia de esta recta al punto (– 2, 3) sea igual a $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Rectas notables en el triángulo

En todo triángulo se trazan las siguientes rectas:

### Mediatriz

Recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. En un triángulo el punto de intersección de las mediatrices se conoce como *circuncentro*.

**Ejemplo**

¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-3, 0)$ y $B(1, 1)$?

**Solución**

Se obtiene el punto medio y la pendiente del segmento $\overline{AB}$.

$$P_m\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = P_m\left(-1, \frac{1}{2}\right) \qquad m = \frac{1-0}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$$

Para obtener la pendiente de la mediatriz se aplica la condición de perpendicularidad y se obtiene:

$$m \cdot m' = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot m' = -1 \quad \rightarrow \quad m' = -4$$

Se sustituyen las coordenadas del punto medio y $m'$ en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la mediatriz:

$$y - \frac{1}{2} = -4\left(x - (-1)\right) \quad \rightarrow \quad y - \frac{1}{2} = -4x - 4 \quad \rightarrow \quad 4x + y + \frac{7}{2} = 0$$

$$8x + 2y + 7 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la mediatriz es: $8x + 2y + 7 = 0$.

### Mediana

Segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las medianas es el *baricentro* (*centro de gravedad*).

**Ejemplo**

Para el triángulo determinado por los vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 4)$ y $C(5, -3)$, determina la ecuación de la mediana trazada desde el vértice $B$ al lado $\overline{AC}$.

**Solución**

Se obtiene el punto medio del segmento $\overline{AC}$:

$$P_m\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = P_m(1, -1)$$

Con el punto medio y las coordenadas del vértice $B$, se aplica la ecuación de la recta por dos puntos para obtener la ecuación de la mediana:

$$y-4=\frac{-1-4}{1-1}(x-1) \quad \rightarrow \quad y-4=\frac{-5}{0}(x-1) \quad \rightarrow \quad 0=x-1$$

Por tanto, la ecuación de la mediana trazada desde el vértice $B$ al lado $\overline{AC}$ es: $x - 1 = 0$.

## Altura

Recta trazada en forma perpendicular de un vértice al lado opuesto de un triángulo. El punto de intersección de las alturas es el *ortocentro*.

EJEMPLOS

1 Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$ y $C(0, -2)$, determina la ecuación de la altura trazada desde el vértice $A$.

**Solución**

Se obtiene la pendiente del lado $\overline{BC}$, y posteriormente la pendiente de la altura.

$$m=\frac{-2-0}{0-(-4)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}m'=-1 \quad \rightarrow \quad m'=2$$

Se sustituyen las coordenadas del vértice $A$ y la pendiente $m'$ en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la altura buscada:

$$y-3=2(x-2) \qquad y-3=2x-4 \qquad 2x-y-1=0$$

2 Los vértices de un triángulo son $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$, determina:

*a*) Las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.
*b*) Las ecuaciones y las coordenadas del punto de intersección de las mediatrices.
*c*) Las ecuaciones y el punto de intersección de las alturas.

**Solución**

*a*) Para las medianas se determinan los puntos medios de los lados del triángulo.

Punto medio $\overline{AB}$

$$x=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$y=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$

Punto medio $\overline{BC}$

$$x=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5$$
$$y=\frac{7+(-3)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$

Punto medio $\overline{AC}$

$$x=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$y=\frac{1+(-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$Pm\ \overline{AC}\ (2, -1)$

Para obtener las medianas se toma un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Mediana del vértice $A$

Se toman los datos $A(-2, 1)$ y $Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \rightarrow \quad y-1=\frac{2-1}{5-(-2)}(x-(-2))$$

$$y-1=\frac{1}{7}(x+2)$$
$$7(y-1)=1(x+2)$$
$$7y-7=x+2$$
$$x+2-7y+7=0$$
$$x-7y+9=0$$

Mediana del vértice $B$

Se toman los datos $B(4, 7)$ y $Pm\ \overline{AC}\ (2, -1)$

$$y-7=\frac{-1-7}{2-4}(x-4)\ \rightarrow y-7=\frac{-8}{-2}(x-4)$$
$$y-7=4(x-4)$$
$$y-7=4x-16$$
$$4x-16-y+7=0$$
$$4x-y-9=0$$

Mediana del vértice $C$

Se toman los datos $C(6, -3)$ y $Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$

$$y-(-3)=\frac{4-(-3)}{1-6}(x-6)\ \rightarrow\ y+3=\frac{4+3}{-5}(x-6)$$
$$y+3=-\frac{7}{5}(x-6)$$
$$5(y+3)=-7(x-6)$$
$$5y+15=-7x+42$$
$$7x-42+5y+15=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Para encontrar el baricentro, se realiza un sistema de ecuaciones entre dos medianas cualesquiera; en este caso se resuelve el sistema con las medianas del vértice $A$ y $C$.

$$x-7y+9=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen las coordenadas del punto de intersección.

$$\text{Baricentro}\left(\frac{8}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

*b*) Para las mediatrices se determinan las pendientes de los lados del triángulo.

Pendiente del lado $\overline{AB}$

$$m_{\overline{AB}}=\frac{7-1}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$$

Pendiente del lado $\overline{BC}$

$$m_{\overline{BC}}=\frac{-3-7}{6-4}=\frac{-10}{2}=-5$$

Pendiente del lado $\overline{AC}$

$$m_{\overline{AC}}=\frac{-3-1}{6-(-2)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Se aplica la condición de perpendicularidad para encontrar las pendientes de las mediatrices.

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AB}$ $\quad m_1=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=-1$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{BC}$ $\quad m_2=-\frac{1}{m_{\overline{BC}}}=\frac{1}{5}$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AC}$ $\quad m_3=-\frac{1}{m_{\overline{AC}}}=2$

Mediatriz sobre el lado $AB$

Se toma el punto medio $(1, 4)$ de $\overline{AB}$ y $m_1=-1$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-4=-1(x-1)$$
$$y-4=-x+1$$
$$x-1+y-4=0$$
$$x+y-5=0$$

Mediatriz sobre el lado *BC*

Se toma el punto medio (5, 2) de $\overline{BC}$, $m_2 = \frac{1}{5}$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{1}{5}(x - 5)$$

$$5(y - 2) = 1(x - 5)$$

$$5y - 10 = x - 5$$

$$x - 5 - 5y + 10 = 0$$

$$x - 5y + 5 = 0$$

Mediatriz sobre el lado *AC*

Se toma el punto medio (2, –1) de $\overline{AC}$, $m_3 = 2$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 1 = 2(x - 2)$$

$$y + 1 = 2x - 4$$

$$2x - 4 - y - 1 = 0$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del circuncentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos mediatrices cualesquiera:

$$x + y - 5 = 0$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$

*c*) Con las pendientes perpendiculares de los lados y los vértices opuestos se obtienen las ecuaciones de las alturas.

Altura sobre el lado *BC*.

Se toma el vértice *A*(– 2, 1) y la pendiente perpendicular al lado *BC*, $m_2 = \frac{1}{5}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{1}{5}(x + 2)$$

$$5(y - 1) = 1(x + 2)$$

$$5y - 5 = x + 2$$

$$x + 2 - 5y + 5 = 0$$

$$x - 5y + 7 = 0$$

Altura sobre el lado *AC*.

Se toma el vértice *B*(4, 7) y la pendiente perpendicular al lado *AC*, $m_3 = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 7 = 2(x - 4)$$

$$y - 7 = 2x - 8$$

$$2x - 8 - y + 7 = 0$$

$$2x - y - 1 = 0$$

Altura sobre el lado $AB$

Se toma el vértice $C(6, -3)$ y la pendiente perpendicular al lado $AB$, $m_1 = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y + 3 = -1(x - 6)$$

$$y + 3 = -x + 6$$

$$x - 6 + y + 3 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del ortocentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos alturas cualesquiera:

$$2x - y - 1 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

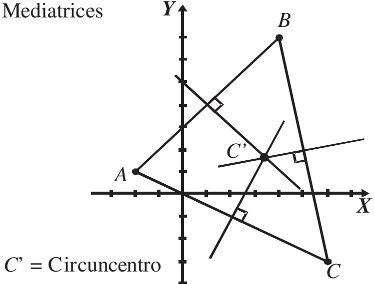
Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ que representa el ortocentro.

Medianas

Y B B' A X C

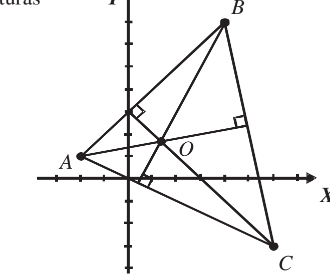
$B'$ = Baricentro

Mediatrices




$C'$ = Circuncentro

Alturas




$O$ = Ortocentro

## Bisectriz

Semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. En un triángulo, el punto de intersección de las bisectrices se conoce como *incentro*.

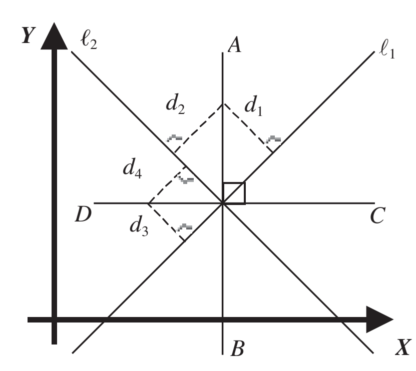
### *Ecuación de la bisectriz*

Sean las rectas $\ell_1$ y $\ell_2$, donde: $\ell_1$: $Ax + By + C = 0$; $\ell_2$: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, sus bisectrices son las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, cuyas ecuaciones están dadas por la condición:

$$|d_1| = |d_2|$$

De la cual se obtiene:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\left[\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2}}}\right]$$



Los signos de las distancias se eligen de la siguiente manera:

- Las distancias son positivas si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.
- Si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en la misma región, se usa el signo negativo para indicar el sentido.

Los signos del radical se consideran de la siguiente manera:

- Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de $C$.
- Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de $B$.
- Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que $A$.

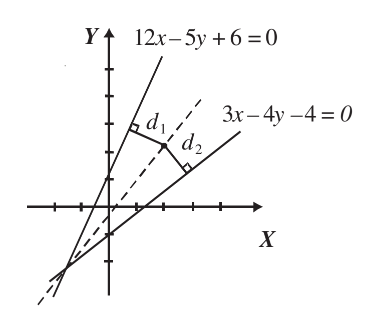
**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas, $3x - 4y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 6 = 0$?

**Solución**

Se traza la gráfica:




De la figura se obtiene que $-d_1 = -d_2$ ya que el punto $P(x, y)$ se encuentra en la misma región que el origen para ambas rectas, por tanto,

$$-d_1 = -d_2 \qquad \text{o bien} \qquad d_1 = d_2$$

Al sustituir en la fórmula

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{12x - 5y + 6}{-\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} = \frac{3x - 4y - 4}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$\frac{12x - 5y + 6}{-\sqrt{169}} = \frac{3x - 4y - 4}{\sqrt{25}}$$

$$5(12x - 5y + 6) = -13(3x - 4y - 4)$$

$$60x - 25y + 30 = -39x + 52y + 52$$

$$99x - 77y - 22 = 0$$

$$9x - 7y - 2 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo es la recta $9x - 7x - 2 = 0$.

2 Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la intersección de las rectas $x + 2y - 3 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$.

**Solución**

Al aplicar la definición se determina que las distancias se relacionan de la siguiente manera:

$$d_1 = d_2 \text{ y } d_1 = -d_2$$

Si $d_1 = d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = \frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = \frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = x - 2y - 2$$

$$x + 2y - 3 - x + 2y + 2 = 0$$

$$4y - 1 = 0$$

Si $d_1 = -d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = -x + 2y + 2$$

$$x + 2y - 3 + x - 2y - 2 = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

Finalmente, las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos son:

$$4y - 1 = 0;\ 2x - 5 = 0$$

## EJERCICIO 19

Resuelve los siguientes problemas:

1. Para el segmento definido por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-6, 1)$, determina la ecuación de la mediatriz.
2. Determina la ecuación general de la mediatriz del segmento formado por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, 5)$.
3. Encuentra la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \text{ y } y = 3$$

4. Obtén la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso formado por las rectas:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1 \text{ y } -\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{6}{\sqrt{5}} = 0$$

5. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

$$2x - y - 3 = 0 \text{ y } 2x + 4y + 5 = 0$$

6. Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:

$$3x - 4y + 5 = 0 \text{ y } 12x + 5y - 3 = 0$$

7. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son las rectas:

$$3x - 4y + 20 = 0;\ 4x + 3y - 25 = 0;\ 3x + 4y + 4 = 0$$

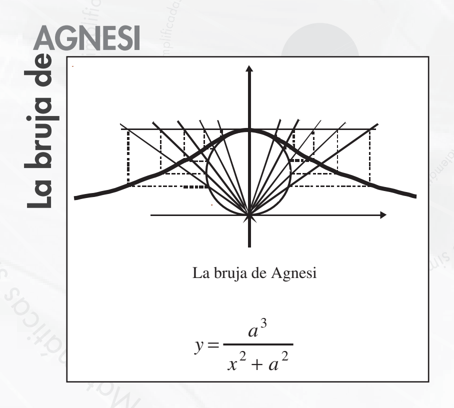
Obtén las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.

Para el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -7)$:

8. Encuentra las ecuaciones de las mediatrices y su punto de intersección.
9. Determina las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección.
10. ¿Cuáles son las ecuaciones de las medianas y su punto de intersección?
11. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.
12. Obtén la ecuación de la recta de Euler (recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro).

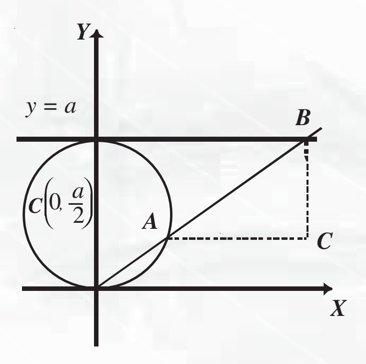
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**La bruja de AGNESI**




### Construcción de la gráfica de la bruja de Agnesi

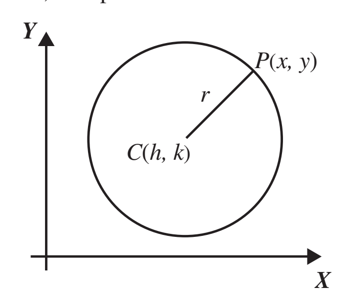
Se obtiene una circunferencia tangente al eje $X$ con centro en el eje $Y$ de coordenadas $\left(0,\frac{a}{2}\right)$, se traza una recta tangente a la circunferencia paralela al eje $X$ con ecuación $y = a$, se traza una recta secante que corte a la circunferencia en $A$ y a la recta $y = a$ en $B$, se construye el punto $C$ con la abscisa del punto $B$ y la ordenada del punto $A$, formando un triángulo rectángulo.




Cuando el punto $A$ recorre toda la circunferencia y el punto $B$ la recta tangente, se forma una curva a la cual se conoce como la bruja de Agnesi.

## Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre es constante.




Definición:

$$d_{CP} = r \rightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

Elementos:

$C$: centro

$r$: radio

$P(x, y)$: punto cualquiera de la circunferencia

## Ecuaciones de la circunferencia

Las formas de expresar la ecuación de una circunferencia son las siguientes:

### Ecuación en su forma ordinaria

Ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C$ $(h, k)$ y radio $r$.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

### Ecuación en su forma general

Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios e igualar a cero la ecuación ordinaria.

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \text{ con } A=C$$

### Ecuación en su forma canónica

Si el centro de la circunferencia se encuentra en el origen, entonces su ecuación es de la forma:

$$x^2+y^2=r^2$$

Análisis de la ecuación de una circunferencia

- Si $r$ es positivo la circunferencia es real.
- Si $r$ es negativo la circunferencia es imaginaria.
- Si $r$ es igual a cero entonces representa un punto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es de 6 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

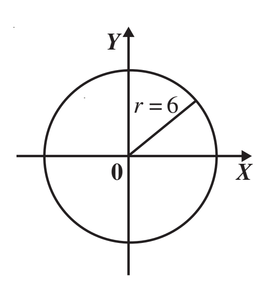
**Solución**

Se sustituye $r = 6$ en la forma canónica de la ecuación de la circunferencia y se transforma a la forma general:

$$x^2+y^2=6^2$$

$$x^2+y^2=36$$

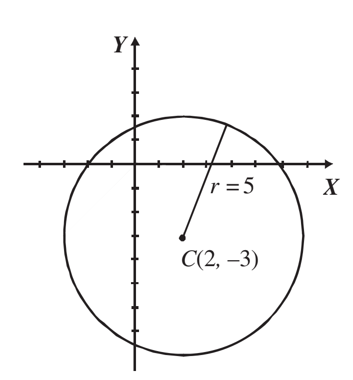
$$x^2+y^2-36=0$$



**2** Encuentra la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, – 3) y radio 5.

**Solución**

Se sustituyen el centro y el radio en la ecuación ordinaria y se transforma a su forma general:




$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = (5)^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Se concluye que la ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 4y + 6y - 12 = 0$

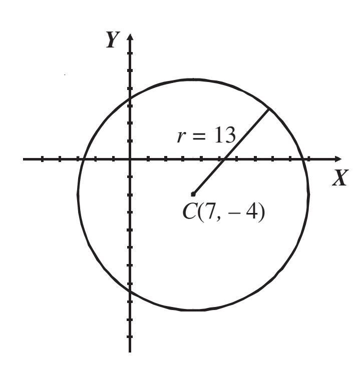
**3** Determina la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto (7, – 4) y que pasa por el punto (– 5, 1).

**Solución**

Por definición, la distancia del centro (7, – 4) al punto (– 5, 1) es el radio:

$$r = \sqrt{(7-(-5))^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{144+25} = 13$$

El centro $C(7, -4)$ y el radio $r = 13$ se sustituyen en la ecuación ordinaria:




$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(x - 7)^2 + (y - (-4))^2 = (13)^2$

$(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 169$

$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 - 169 = 0$

$x^2 + y^2 - 14x + 8y - 104 = 0$

La ecuación en su forma ordinaria es $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 169$ y en su forma general, $x^2 + y^2 - 14x + 8y - 104 = 0$

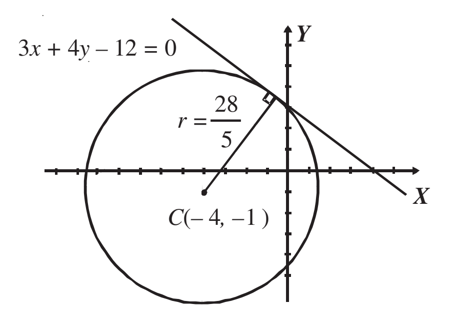
**4** Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro en (– 4, – 1) y que es tangente a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

**Solución**

El radio de la circunferencia es la distancia del centro a la recta tangente.

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(-4) + 4(-1) - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-12 - 4 - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-28|}{\sqrt{9+16}} = \frac{28}{\sqrt{25}} = \frac{28}{5}$$

Se sustituyen $r = \frac{28}{5}$ y el centro $C(-4, -1)$ en la forma ordinaria:




$$(x - (-4))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2$$

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = \frac{784}{25}$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = \frac{784}{25}$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - \frac{359}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$$

Por tanto, la ecuación general de la circunferencia es: $25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$.

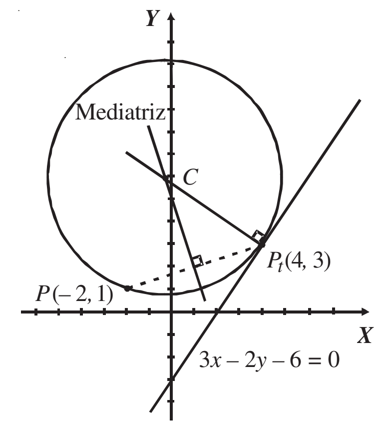
**5** Determina la ecuación general de la circunferencia que pase por el punto (– 2, 1) y sea tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, en el punto (4, 3).

**Solución**

Se traza la gráfica:

El centro es el punto de intersección entre la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$ y la ecuación perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los puntos que están sobre la circunferencia.




- Ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$

  Con el punto medio (1, 2) y la pendiente perpendicular – 3, se obtiene:

  $$3x + y - 5 = 0$$

- Ecuación de la recta perpendicular a $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto (4, 3)

  Con la pendiente perpendicular $-\frac{2}{3}$ y el punto (4, 3), se obtiene:

  $$2x + 3y - 17 = 0$$

Se resuelve el sistema formado por las rectas $2x + 3y - 17 = 0$ y $3x + y - 5 = 0$ y se obtienen las coordenadas del centro $(h, k)$:

$$C\left(-\frac{2}{7}, \frac{41}{7}\right)$$

El radio es la distancia que existe entre el centro y cualquiera de los puntos por los que pasa la circunferencia, por consiguiente se escoge el punto (4, 3):

$$r = \sqrt{\left(4 - \left(-\frac{2}{7}\right)\right)^2 + \left(3 - \frac{41}{7}\right)^2} = \frac{10\sqrt{13}}{7}$$

Con el centro y el radio se encuentra la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \rightarrow \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \left(\frac{10\sqrt{13}}{7}\right)^2$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene la ecuación en su forma general:

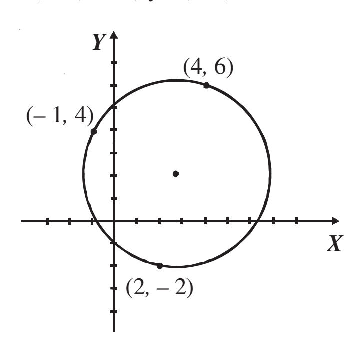
$$7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$$

6 Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, -2)$, $B(-1, 4)$ y $C(4, 6)$.

**Solución**

Existen dos formas de resolver el problema:

1. Sustituir todos los puntos en la ecuación general y resolver el sistema de ecuaciones.
2. Obtener el centro con la intersección de las mediatrices de los segmentos formados por los puntos y posteriormente el radio con la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos.




Aplicación de la primera opción:

La ecuación general es $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces si $A = C = 1$, se convierte en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustitución del punto $A(2, -2)$

$$(2)^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$
$$4 + 4 + 2D - 2E + F = 0$$
$$\text{Primera ecuación:} \quad 2D - 2E + F = -8$$

Sustitución del punto $B(-1, 4)$

$$(-1)^2 + (4)^2 + D(-1) + E(4) + F = 0$$
$$1 + 16 - D + 4E + F = 0$$
$$\text{Segunda ecuación:} \quad -D + 4E + F = -17$$

Sustitución del punto $C(4, 6)$

$$(4)^2 + (6)^2 + D(4) + E(6) + F = 0$$
$$16 + 36 + 4D + 6E + F = 0$$
$$\text{Tercera ecuación:} \quad 4D + 6E + F = -52$$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolviendo:

$$2D - 2E + F = -8$$
$$-D + 4E + F = -17$$
$$4D + 6E + F = -52$$

Se obtienen los valores de $D$, $E$ y $F$,

$$D = -\frac{16}{3}, E = -\frac{25}{6} \text{ y } F = -\frac{17}{3}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

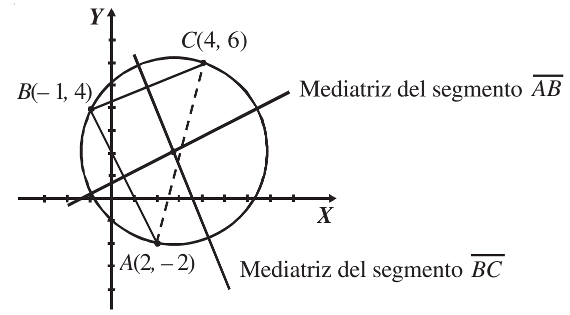
Por tanto, se concluye que la ecuación es:

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} = 0$$

Ahora bien, al multiplicar por seis para eliminar los denominadores, se obtiene:

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

Para la segunda opción, se utilizan las mediatrices:




Se obtienen las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos:

Mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = P_m\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-2} = -2$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y - 1 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow 2x - 4y + 3 = 0$$

Mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = P_m\left(\frac{3}{2}, 5\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m = \frac{6-4}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y - 5 = -\frac{5}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow 10x + 4y - 35 = 0$$

Para buscar el centro de la circunferencia se resuelve el sistema de ecuaciones formado con las mediatrices:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3 = 0 \\ 10x + 4y - 35 = 0 \end{cases}$$

El punto de intersección de las rectas es $\left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$, representa el centro de la circunferencia. Para obtener el radio, se calcula la distancia del centro al punto $B(-1, 4)$ o a cualquiera de los otros puntos.

$$r = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{25}{12} - 4\right)^2} \rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{23}{12}\right)^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{2\,465}{144}}$$

Se sustituyen el centro $\left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$ y el radio $r = \sqrt{\frac{2\,465}{144}}$ en la ecuación ordinaria de la circunferencia y se transforma a su forma general.

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{12}\right)^2 = \sqrt{\frac{2\,465}{144}} \rightarrow x^2 - \frac{16x}{3} + \frac{64}{9} + y^2 - \frac{25y}{6} + \frac{625}{144} - \frac{2\,465}{144} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{16x}{3} - \frac{25y}{6} - \frac{17}{3} = 0$$

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

Se observa que por cualquiera de los dos métodos, la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados o circunscrita en el triángulo es:

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

# EJERCICIO 20

De los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación en su forma general:

1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio de 4 unidades?
2. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades.
3. Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y radio de 2 unidades.
4. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y radio de $\frac{5}{6}$.
5. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y que pasa por el punto $(2, -3)$?
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro el segmento formado por los puntos $A(-4, 7)$ y $B(6, -1)$.
7. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y que pasa por el punto $(4, 3)$.
8. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en $(-1, -5)$ y es tangente al eje $Y$?
9. El centro de una circunferencia es el punto $(5, -2)$ y pasa por el origen. ¿Cuál es su ecuación?
10. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(-4, 2)$ y diámetro 8.
11. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados, su radio es de 5 unidades y su centro está en el cuarto cuadrante?
12. Una circunferencia tiene su centro en el eje $X$ y pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(2, 3)$. Determina su ecuación.
13. El centro de una circunferencia está en el eje $Y$ y pasa por $(0, -2)$ y $(3, -6)$. Encuentra su ecuación.
14. Una circunferencia tiene su centro en $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
15. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en $(4, -3)$ y que es tangente a la recta $3x + 4y - 10 = 0$?
16. El radio de una circunferencia es 4 y su centro está en las intersecciones de las rectas $x + 3y - 7 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$. Obtén su ecuación.
17. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 6 = 0$, $3x + y + 13 = 0$, además, es tangente a la recta $5x + 12y - 106 = 0$.
18. Una circunferencia pasa por el punto $(1, -6)$ y su centro está en la intersección de las rectas $4x - 7y + 10 = 0$ y $7x + 3y - 13 = 0$. Encuentra su ecuación.

Encuentra las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los siguientes puntos.

19. $(3, 4)$, $(2, -1)$ y $(0, -3)$
20. $(9, -1)$, $(7, 3)$ y $(4, -8)$
21. $(-2, -2)$, $(-2, 1)$ y $(7, 0)$
22. $(-1, -1)$, $(1, 1)$ y $(5, -3)$
23. Encuentra la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo, cuyos vértices son los puntos $(-4, 2)$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}\right)$ y $(16, -13)$.

Para los ejercicios 24 a 27 utiliza el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3, -2)$, $B(1, 2)$ y $C(-5, -4)$.

24. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita en él.
25. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo?
26. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice $A$ y es tangente al lado $BC$.
27. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $2x + 3y + 1 = 0$ y que pasa por los vértices $A$ y $C$?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Sea la ecuación de la circunferencia $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en su forma general y $A = C$, entonces para hallar el centro y el radio se siguen los siguientes pasos:

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$

$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$ — Se divide la ecuación entre $A$.

$x^2+\frac{D}{A}x+y^2+\frac{E}{A}y=-\frac{F}{A}$ — Se agrupan los términos de $x$ y $y$, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}+y^2+\frac{E}{A}y+\frac{E^2}{4A^2}=\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}$ — Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$ — Se factoriza.

Ahora, al comparar la ecuación con su forma ordinaria se obtiene:

$$Centro=\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2A}\right) \text{ y } radio=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$$

Lo anterior indica que para transformar la ecuación general a la forma ordinaria se utilizan los siguientes métodos:

- Fórmula
- Completando trinomio cuadrado perfecto

Con los cuales se encuentran las coordenadas del centro y la longitud del radio de una circunferencia.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Emplea las fórmulas para obtener el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$$

**Solución**

Se determinan los valores de $A$, $D$, $E$ y $F$:

$$A = 1, D = 4, E = -6 \text{ y } F = 6$$

Éstos se sustituyen en las fórmulas:

$$Centro=\left(-\frac{4}{2(1)},-\frac{(-6)}{2(1)}\right) = (-2,\ 3) \text{ y } radio=\frac{1}{2(1)}\sqrt{(4)^2+(-6)^2-4(1)(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{28}=\sqrt{7}$$

Se concluye que el centro es el punto $(-2, 3)$ y el radio $\sqrt{7}$ .

2 Para la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

Determina completando los trinomios cuadrados perfectos el centro y el radio.

**Solución**

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 11$ — Se agrupan los términos en $x$ y en $y$, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$(x^2 - 6x + (3)^2) + (y^2 + 8y + (4)^2) = 11 + (3)^2 + (4)^2$ — Se completan los trinomios cuadrados perfectos.

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 36$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 6^2$ — Se factoriza para obtener la forma ordinaria.

Resulta que las coordenadas del centro son $C(3, -4)$ y el radio $r = 6$.

**3** Encuentra las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia, cuya ecuación es:

$$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$$

**Solución**

$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$

$\frac{9x^2}{9}+\frac{9y^2}{9}+\frac{18x}{9}-\frac{12}{9}y+\frac{10}{9}=0$ Se divide entre nueve la ecuación.

$x^2+y^2+2x-\frac{4}{3}y+\frac{10}{9}=0$ Se agrupan los términos de $x$ y $y$ y se pasa al segundo miembro el término independiente.

$x^2+2x+1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=-\frac{10}{9}+1+\frac{4}{9}$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$(x+1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$ Se factoriza y simplifica para obtener la ecuación ordinaria.

Finalmente, las coordenadas del centro son $C\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$ y el radio $r=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

**4** ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-4, -1)$ y es concéntrica con la circunferencia $C_1$: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$?

**Nota:** Concéntricas: tienen el mismo centro.

**Solución**

Se obtiene el centro de la circunferencia $C_1$:

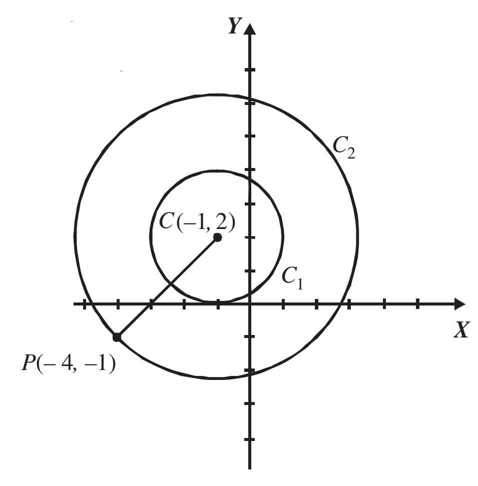
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -1 + 1 + 4$$
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Entonces, el centro es $C(-1, 2)$.

El radio de $C_2$ se obtiene de la distancia del centro $C(-1,2)$ al $(-4, -1)$.

$$r=\sqrt{(-4-(-1))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

***Gráfica:***




Por consiguiente, la ecuación de la circunferencia $C_2$ es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \rightarrow (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 18$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

La ecuación de la circunferencia $C_2$ está determinada por:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

5 Obtén la ecuación general de la circunferencia que es tangente a la recta $x + y - 2 = 0$ y concéntrica con la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$.

**Solución**

Se obtiene el centro de $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{3}+\frac{3y^2}{3}-\frac{6}{3}x-\frac{4}{3}y=0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = 1 + \frac{4}{9}$$

$$(x-1)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$$

El centro de la circunferencia es $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$.

El radio es la distancia del punto $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$ a la recta $x + y - 2 = 0$, entonces,

$$r = \frac{\left|1+\frac{2}{3}-2\right|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, la ecuación general de la circunferencia con centro en $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$ y radio $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad\rightarrow\quad (x-1)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Al multiplicar por 18,

$$18x^2 - 36x + 18 + 18y^2 - 24y + 8 = 1$$

$$18x^2 + 18y^2 - 36x - 24y + 25 = 0$$

6 Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0\ ;\ C_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

**Solución**

Se restan las ecuaciones de las circunferencias, para eliminar los términos cuadráticos:

$$\begin{array}{r} x^2+y^2-2x+16y=0 \\ -\ \left(x^2+y^2-6x-4y=0\right) \\ \hline 4x+20y=0 \end{array}$$

Se despeja $x$ de la última igualdad:

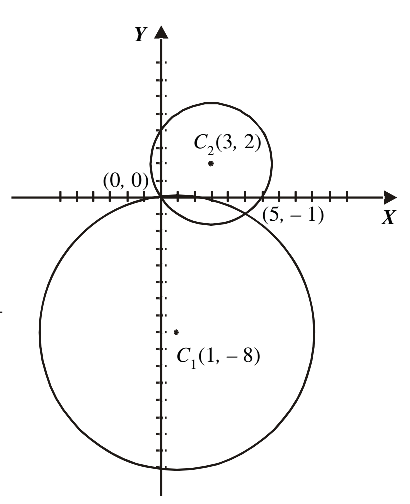
$$x=-\frac{20y}{4} \rightarrow x=-5y$$

Se sustituye el valor de $x$ en cualquiera de las ecuaciones de las circunferencias:

$$(-5y)^2+y^2-2(-5y)+16y=0$$

$$25y^2+y^2+10y+16y=0$$

$$26y^2+26y=0$$



Esta última ecuación se resuelve y se obtiene:

$$26y^2 + 26y = 0 \rightarrow 26y(y+1) = 0$$

$$y = 0;\ y = -1$$

Los valores obtenidos de $y$ se sustituyen en la igualdad $x = -5y$ para obtener los valores de $x$:

| Para $y = 0$ | Para $y = -1$ |
|---|---|
| $x = -5(0)$ | $x = -5(-1)$ |
| $x = 0$ | $x = 5$ |

Entonces, los puntos de intersección de las circunferencias son: (0, 0) y (5, – 1).

## EJERCICIO 21

Determina el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

1. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 14x - 8y + 40 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 3 = 0$
9. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 9 = 0$
10. $5x^2 + 5y^2 - 2x - 30y + 42 = 0$
11. $12x^2 + 12y^2 - 18x + 4y + 5 = 0$
12. $36x^2 + 36y^2 + 48x - 36y - 299 = 0$
13. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto (7, 5) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 16y - 22 = 0$.
14. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto (3, 5) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 7x + y - 10 = 0$, en el punto (1, 1).
15. ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y es tangente a la recta $2x + 3y - 7 = 0$, en el punto (2, 1)?
16. Obtén la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 + 17x + 3y + 2 = 0$, y cuyo centro está sobre la recta $x + 2y + 5 = 0$.
17. Determina el valor de $k$ para que la recta $kx + y - 15 = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$.
18. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0$ con la recta $x - y + 8 = 0$?
19. Encuentra los puntos de intersección de la recta $2x + 3y - 10 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 28 = 0$.
20. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la recta $5x - 7y - 35 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$?
21. Encuentra los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 12x - 14y + 72 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

22. Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 16x - 2y + 45 = 0$$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Familia o haz de circunferencias

Son aquellas circunferencias que satisfacen la condición:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=p^2$$

Donde $p$ es el parámetro y es un número positivo.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Representa gráficamente la familia de circunferencias con centro en el punto (2, – 3) y $p$ = 1, 2 y 3.

**Solución**

Se trata de una familia de circunferencias concéntricas.

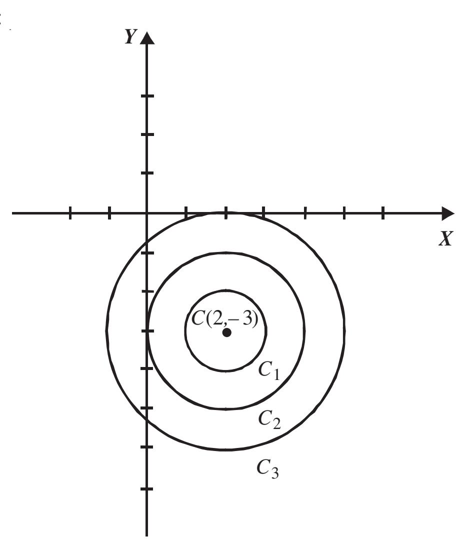
Las ecuaciones de las circunferencias son:

$C_1$: $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ o $x^2+y^2-4x+6y+12=0$

$C_2$: $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ o $x^2+y^2-4x+6y+9=0$

$C_3$: $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ o $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

Sus representaciones gráficas son:




## EJERCICIO 22

Representa gráficamente las siguientes familias de circunferencias:

1. Centro en el punto (1, 2) y $p$ = 1, 2 y 3
2. Centro en el punto (– 2, – 3) y $p$ = 1, 3 y 5
3. Centro en el origen y $p$ = 2, 4 y 6
4. $(x-1)^2+(y-3)^2=p^2$
5. $x^2+(y-2)^2=p^2$
6. $x^2+y^2=p^2$
7. Centro en el punto (– 3, 4) y $p = 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
8. $(x+2)^2+(y-3)^2=p^2$
9. $(x-3)^2+y^2=p^2$
10. Centro en el punto (0, – 2) y $p$ = 2, 4 y 6

Determina la familia de circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:

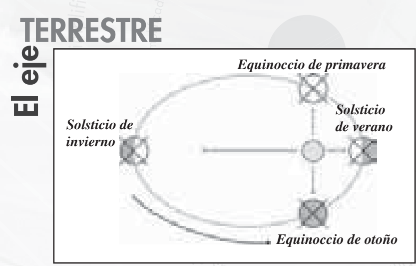
11. Centro en la intersección de las rectas $2x+3y-5=0$, $x-4y+3=0$
12. Centro en el punto medio del segmento, cuyos extremos son (3, – 2) y (– 5, – 4)
13. Concéntricas con $x^2+y^2+4x-6y-12=0$
14. Concéntricas con la circunferencia que pasa por los puntos (0, 0), (1, 1), (1, – 1)

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 7

## Transformación de coordenadas

### El eje TERRESTRE




Movimiento de traslación de la Tierra

El eje terrestre es una línea imaginaria que atraviesa la Tierra y pasa por su centro.

La traslación, sumada a la inclinación del eje terrestre, hace que la Tierra ocupe distintas posiciones respecto al Sol durante el año que demora en completar su órbita. Esto origina la sucesión de las distintas estaciones (verano, otoño, invierno y primavera).

Debido a la inclinación de la Tierra, siempre hay una mitad que está más cerca del Sol. Esto provoca diferencias en las temperaturas y en la duración del día y la noche durante el año. Cada variación brusca de estos factores marca el inicio de una de las cuatro estaciones.

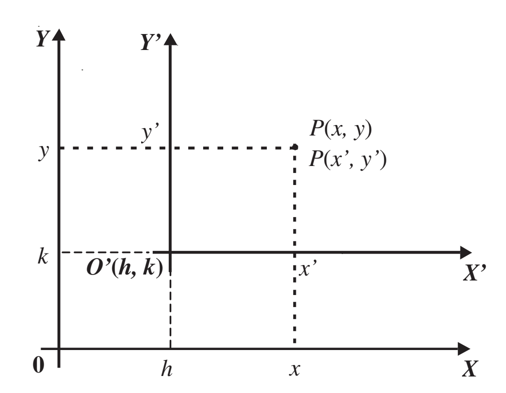
Cuando es el polo norte el que se inclina hacia el Sol (de marzo a septiembre), los rayos solares llegan con intensidad al hemisferio norte, lo que determina la sucesión de la primavera y el verano, mientras que en el hemisferio sur se suceden el otoño y el invierno, el polo sur está en oscuridad. La situación se invierte cuando es el hemisferio sur el que se inclina hacia el Sol, de septiembre a marzo. En el verano los días (horas de sol) son prolongados, por el contrario, en el invierno, son mucho más cortos, ya que el Sol sale tarde y se pone temprano.

## Traslación de ejes

Desplazamiento de los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que el nuevo origen sea el punto $O'(h, k)$. La traslación se utiliza para eliminar los términos lineales de la ecuación de segundo grado de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Fórmulas que relacionan el sistema de coordenadas $X'Y'$ con el sistema $XY$.




Ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

### Traslación de un punto a un nuevo sistema de coordenadas

**Ejemplo**

Si el origen se traslada al punto (1, 1), ¿cuáles son las coordenadas del punto (– 3, 6)?

**Solución**

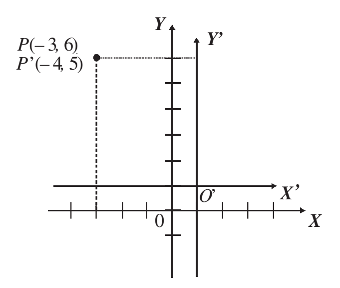
Se calculan los valores de $x$, y, $h$ y $k$:

$$x = -3,\ y = 6,\ h = 1 \text{ y } k = 1$$

Los valores se sustituyen en las ecuaciones de traslación, para encontrar el valor de $x'$ y $y'$:

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$-3 = x' + 1 \qquad 6 = y' + 1$$
$$-3 - 1 = x' \qquad 6 - 1 = y'$$
$$x' = -4 \qquad y' = 5$$




Por tanto, las coordenadas del punto en el nuevo sistema son:

$$(-4, 5)$$

## Transformación de una curva trasladando el origen

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$, trasladando el origen al punto $C(2, -2)$.

**Solución**

El nuevo origen es el punto $C(h, k) = C(2, -2)$, entonces $h = 2$ y $k = -2$.

Se sustituyen los valores en las ecuaciones de traslación:

$$x = x' + h = x' + 2 \qquad y = y' + k = y' - 2$$

Éstas se sustituyen en la ecuación de la circunferencia:

$$(x' + 2)^2 + (y' - 2)^2 - 4(x' + 2) + 4(y' - 2) = 0$$

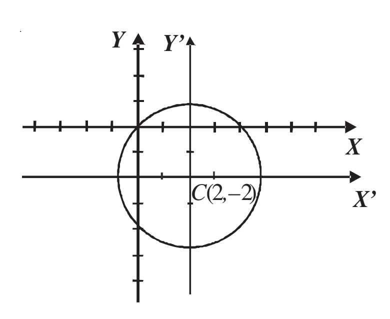
Se desarrollan las operaciones indicadas y se simplifica para obtener:

$$x'^2 + 4x' + 4 + y'^2 - 4y' + 4 - 4x' - 8 + 4y' - 8 = 0$$
$$x'^2 + y'^2 + 4x' - 4x' - 4y' + 4y' + 4 + 4 - 8 - 8 = 0$$
$$x'^2 + y'^2 - 8 = 0$$

Finalmente, la ecuación que resulta es:

$$x'^2 + y'^2 - 8 = 0$$

***Gráfica***




2 Encuentra la nueva ecuación de la curva $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$, si se traslada el origen al punto $(2, -1)$.

**Solución**

Al sustituir $h = 2$ y $k = -1$ en las ecuaciones de traslación $x = x' + h$; $y = y' + k$, se determina que:

$$x = x' + 2,\ y = y' - 1$$

Los valores de $x$ y $y$ se sustituyen en la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$, se desarrollan los binomios y se reducen términos semejantes para obtener la nueva ecuación.

$$2(x' + 2)^2 + 3(y' - 1)^2 - 8(x' + 2) + 6(y' - 1) = 7$$
$$2(x'^2 + 4x' + 4) + 3(y'^2 - 2y' + 1) - 8x' - 16 + 6y' - 6 = 7$$
$$2x'^2 + 8x' + 8 + 3y'^2 - 6y' + 3 - 8x' - 16 + 6y' - 6 = 7$$
$$2x'^2 + 3y'^2 - 18 = 0$$

3 Determina la nueva ecuación de la curva $y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 4y - 3$, si el origen se mueve al punto $(-1, 2)$.

**Solución**

Se sustituyen los valores de $h$ y $k$ en las ecuaciones de traslación.

$$x = x' - 1$$

$$y = y' + 2$$

Las ecuaciones se sustituyen en la ecuación de la curva y se desarrollan las operaciones indicadas.

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 4y - 3$$

$$(y' + 2)^2 = (x' - 1)^3 + 3(x' - 1)^2 + 3(x' - 1) + 4(y' + 2) - 3$$

$$y'^2 + 4y' + 4 = x'^3 - 3x'^2 + 3x' - 1 + 3(x'^2 - 2x' + 1) + 3(x' - 1) + 4(y' + 2) - 3$$

$$y'^2 = x'^3 - 3x'^2 + 3x' - 1 + 3x'^2 - 6x' + 3 + 3x' - 3 + 4y' + 8 - 3 - 4y' - 4$$

Se simplifican términos semejantes para obtener la nueva ecuación.

$$y'^2 = x'^3$$

## EJERCICIO 23

Determina las nuevas coordenadas de los siguientes puntos, de tal manera que se trasladen los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

1. $A(4, -1)$; $O'(2, -3)$
2. $B(5, 2)$; $O'(-4, 1)$
3. $C(0, 5)$; $O'(1, 1)$
4. $D(-6, -4)$; $O'(4, 0)$
5. $E(0, 0)$; $O'(8, -7)$

Transforma las siguientes ecuaciones, trasladando los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

6. $y^2 - 8x - 6y - 7 = 0$; $(-2, 3)$
7. $x^2 + 2x - 4y + 5 = 0$; $(-1, 1)$
8. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$; $(2, 0)$
9. $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$; $(-3, 5)$
10. $4y^2 - 48x - 4y + 49 = 0$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
11. $9x^2 + 16y^2 - 32y - 128 = 0$; $(0, 1)$
12. $4x^2 + 5y^2 - 32x + 10y + 49 = 0$; $(4, -1)$
13. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y = 0$; $(2, 3)$
14. $x^2 - 2y^2 - 2x + 12y - 19 = 0$; $(1, 3)$
15. $4x^2 - 9y^2 - 24x + 108y - 324 = 0$; $(3, 6)$
16. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$; $(2, -3)$
17. $y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x - 2y - 1$; $(-1, -1)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Transformación de una ecuación

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el nuevo origen para que la ecuación de la curva $y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$, al realizar una transformación, no tenga términos lineales.

**Solución**

Se sustituyen las ecuaciones de traslación $x = x' + h$, $y = y' + k$, en la ecuación dada.

$$y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$$
$$(y' + k)^2 + 4(x' + h) - 10(y' + k) + 25 = 0$$

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$y'^2 + 2ky' + k^2 + 4x' + 4h - 10y' - 10k + 25 = 0$$

Se agrupan los términos $x'$ y $y'$ y se factorizan por término común.

$$y'^2 + 2ky' - 10y' + 4x' + k^2 + 4h - 10k + 25 = 0$$
$$y'^2 + (2k - 10)y' + 4x' + (k^2 + 4h - 10k + 25) = 0$$

Para que la ecuación no tenga términos lineales se igualan con cero los coeficientes de éstos, para determinar el valor de las incógnitas.

$$2k - 10 = 0$$
$$2k = 10$$
$$k = 5$$

El coeficiente del término lineal $x'$ es distinto de cero, entonces se igualan con cero los términos independientes, se sustituye el valor encontrado y se resuelve la ecuación.

$$k^2 + 4h - 10k + 25 = 0$$
$$(5)^2 + 4h - 10(5) + 25 = 0$$
$$25 + 4h - 50 + 25 = 0$$
$$4h = 0$$
$$h = 0$$

Finalmente, el nuevo origen es el punto $O'(0, 5)$ y la ecuación transformada es:

$$y'^2 + 4x' = 0$$

2 Elimina los términos lineales mediante una traslación de ejes y determina el nuevo origen de la ecuación:

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$$

**Solución**

Al sustituir las ecuaciones de traslación $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación dada.

$$(x' + h)^2 + 9(y' + k)^2 + 4(x' + h) - 18(y' + k) - 23 = 0$$

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$x'^2 + 2x'h + h^2 + 9(y'^2 + 2y'k + k^2) + 4x' + 4h - 18y' - 18k - 23 = 0$$

$$x'^2 + 2x'h + h^2 + 9y'^2 + 18y'k + 9k^2 + 4x' + 4h - 18y' - 18k - 23 = 0$$

Se agrupan los términos lineales y se factoriza a $x'$ y $y'$ como término común.

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

Para eliminar los términos lineales $x'$ y $y'$, los coeficientes se igualan con cero y se resuelven las ecuaciones que resultan.

$$2h + 4 = 0 \qquad 18k - 18 = 0$$

$$2h = -4 \qquad 18k = 18$$

$$h = -2 \qquad k = 1$$

Entonces, el nuevo origen tiene coordenadas (– 2, 1).

Los valores de $h$ y $k$ se sustituyen en la ecuación:

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

Se obtiene la ecuación referida al nuevo origen.

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 + \left[2(-2)+4\right]x' + \left[18(1)-18\right]y' + \left[(-2)^2+9(1)^2+4(-2)-18(1)-23\right] = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 + (-4 + 4)x' + (18 - 18)y' + (4 + 9 - 8 - 18 - 23) = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

Por tanto, el nuevo origen y la ecuación sin términos lineales son:

$$O'(-2, 1);\ x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

3 Transforma la ecuación $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 135 = 0$ en otra que no tenga términos de primer grado.

**Solución**

Al sustituir $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación:

$$3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 135 = 0$$

$$3(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 24(y' + k) - 135 = 0$$

$$3(x'^2 + 2x'h + h^2) - 4(y'^2 + 2y'k + k^2) + 6x' + 6h + 24y' + 24k - 135 = 0$$

$$3x'^2 + 6x'h + 3h^2 - 4y'^2 - 8y'k - 4k^2 + 6x' + 6h + 24y' + 24k - 135 = 0$$

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' + (-8k + 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k - 135 = 0$$

Donde:

$$6h + 6 = 0 \qquad -8k + 24 = 0$$
$$6h = -6 \qquad -8k = -24$$
$$h = -1 \qquad k = 3$$

Por consiguiente, las coordenadas del nuevo origen son (– 1, 3).

Se sustituyen estos valores en la ecuación:

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' + (-8k + 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k - 135 = 0$$

se obtiene:

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6(-1) + 6)x' + (-8(3) + 24)y' + 3(-1)^2 - 4(3)^2 + 6(-1) + 24(3) - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 + (-6 + 6)x' + (-24 + 24)y' + 3(1) - 4(9) - 6 + 72 - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 + 3 - 36 - 6 + 72 - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 - 102 = 0$$

4 Transforma la ecuación $x^3 + 3x^2 + 3x + y = 0$, mediante una traslación de ejes de coordenadas o una que no tenga términos lineales.

**Solución**

Sustituir $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + y = 0$$
$$(x' + h)^3 + 3(x' + h)^2 + 3(x' + h) + (y' + k) = 0$$

Se desarrollan las operaciones, se agrupan los términos lineales y se factorizan como término común.

$$x'^3 + 3hx'^2 + 3h^2x' + h^3 + 3x'^2 + 6hx' + 3h^2 + 3x' + 3h + y' + k = 0$$
$$x'^3 + 3hx'^2 + 3x'^2 + 3h^2x' + 6hx' + 3x' + y' + h^3 + 3h^2 + 3h + k = 0$$
$$x'^3 + (3h + 3)x'^2 + (3h^2 + 6h + 3)x' + y' + (h^3 + 3h^2 + 3h + k) = 0$$

Se iguala con cero el término de primer grado y se resuelve la ecuación.

$$3h^2 + 6h + 3 = 0$$
$$h^2 + 2h + 1 = 0$$
$$(h + 1)^2 = 0$$
$$h = -1$$

El coeficiente de $y'$ es distinto de cero, se igualan con cero los términos independientes y se sustituye el valor encontrado de $h$ y se resuelve la ecuación.

$$h^3 + 3h^2 + 3h + k = 0$$
$$(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + k = 0$$
$$k = 1$$

Por tanto, las coordenadas del nuevo origen son: (– 1, 1).

Los valores de $h$ y $k$ se sustituyen en la ecuación.

$$x'^3 + (3h + 3)x'^2 + (3h^2 + 6h + 3)x' + y' + (h^3 + 3h^2 + 3h + k) = 0$$

Finalmente, la ecuación transformada es:

$$x'^3 + y' = 0$$

# EJERCICIO 24

Mediante una traslación de ejes reduce las siguientes ecuaciones a otras que carezcan de los términos lineales.

1. $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$
2. $y^2 - 16x + 80 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$
5. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
6. $16x^2 + 16y^2 + 64x - 160y + 455 = 0$
7. $25x^2 - 16y^2 + 96y + 256 = 0$
8. $y^3 + 3y^2 - x + 3y - 3 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 8
## PARÁBOLA

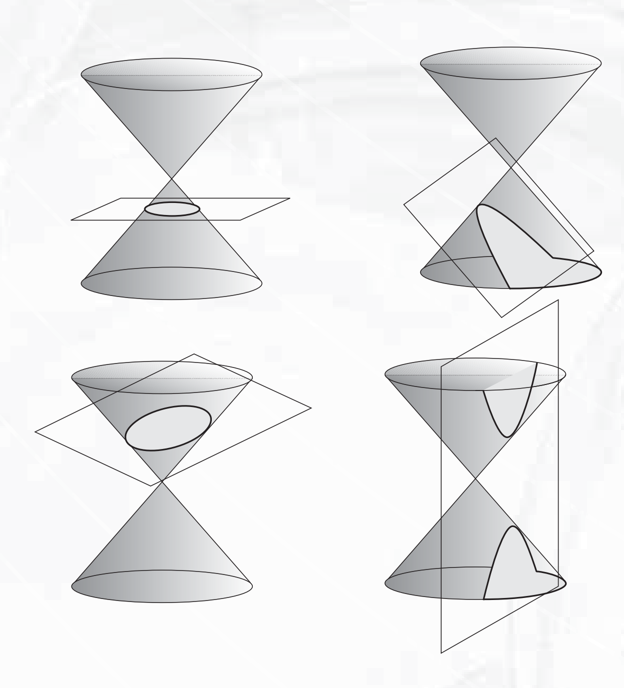
**Reseña HISTÓRICA**

Apolonio de Perga
(262 *a. C.*–190 *a. C.*)

Conocido como "el gran geómetra". Se sabe poco de su vida, pero sus trabajos tuvieron una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, en particular su famoso libro *Las cónicas*, introdujo términos tan familiares hoy en día como parábola, elipse e hipérbola.

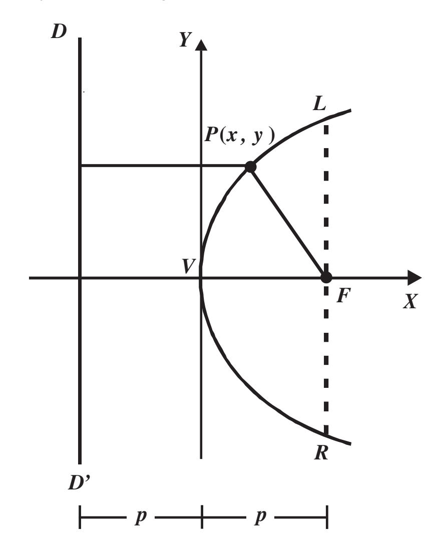
Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas. Quizá las propiedades más interesantes y útiles que descubrió de las cónicas son las propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

La circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son llamadas cónicas porque se pueden obtener haciendo cortes en un cono circular recto doble con un plano.



## Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz.




$\overline{PF} = \overline{PD}$

Elementos:

*V:* Vértice

*F:* Foco

$\overline{DD'}$: Directriz

*LR:* Lado recto, $LR = |4p|$

*p:* parámetro
(distancia del vértice al foco o a la directriz)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto $F(0, 3)$ y de la recta $y + 3 = 0$.

**Solución**

Con las fórmulas de distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a $F$ y a la recta:

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2},\ \overline{PD} = \frac{y+3}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Al igualar:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 3$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (y+3)^2$$

Se desarrolla y se simplifica para obtener la ecuación del lugar geométrico, denominada parábola.

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$
$$x^2 - 12y = 0$$

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, 1) siempre es igual a su distancia a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

**Solución**

Se obtienen las distancias,

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\ ,\ \overline{PD} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

Al igualar,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y reducir términos semejantes, resulta la ecuación que se busca,

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y}{5}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y + 25 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 14x + 2y + 16 = 0$$

## EJERCICIO 25

1. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (– 2, 0) es igual a su distancia a la recta $x - 2 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.
2. Un punto se mueve en el plano de tal manera que equidista del punto (0, – 1) y de la recta $y - 1 = 0$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico que describe.
3. Un punto $P(x, y)$ se mueve de manera que su distancia al punto (3, – 1) es siempre igual a su distancia a la recta $x + 3 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico.
4. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $y + 4 = 0$ y del punto (0, 4).
5. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia del punto (2, 4) y de la recta $y - 6 = 0$.
6. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales su distancia a la recta $x + 1 = 0$ es igual a su distancia al punto (– 7, 2).
7. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto (0, 3) y de la recta $x + y - 4 = 0$.
8. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, – 1) es igual a su distancia a la recta $2x + 3y - 1 = 0$. Obtén la ecuación del lugar geométrico que describe el punto.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Sea una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ donde $p$ es el parámetro y su directriz $x = -p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto $P$ al foco y a la directriz.

La distancia de $P$ al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

La distancia de $P$ a la recta $x + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x + p$$

Ahora se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = x + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se determina que:

$$\left(\sqrt{(x - p)^2 + y^2}\right)^2 = (x + p)^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$$

$$y^2 - 4px = 0$$

Si el foco está sobre el eje $Y$, $F(0, p)$ donde $p$ es el parámetro y su directriz la recta $y = -p$ y vértice en el origen, al aplicar la definición el resultado es el siguiente:

$$\sqrt{(y - p)^2 + x^2} = y + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(y - p)^2 + x^2}\right)^2 = (y + p)^2$$

$$(y - p)^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2$$

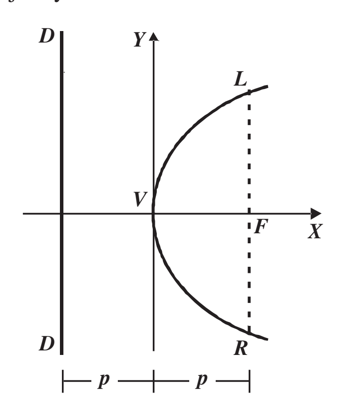
$$y^2 - 2py + p^2 + x^2 - y^2 - 2py - p^2 = 0$$

$$x^2 - 4py = 0$$

### Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen

#### *Parábola horizontal*

Su foco está sobre el eje $X$ y son cóncavas hacia la derecha o a la izquierda.




Ecuación canónica:

$$y^2 = 4px$$

Foco: $F(p, 0)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = -p$

Ecuación del eje: $y = 0$

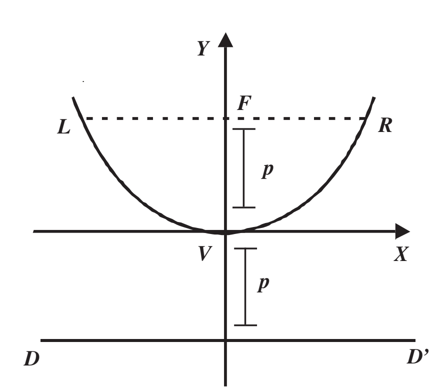
Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

*Cancavidad*

- Si $p > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda.

*Parábola vertical*

Su foco está sobre el eje $Y$, son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.




Ecuación canónica:

$x^2 = 4py$

Foco: $F(0, p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = -p$

Ecuación del eje: $x = 0$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

*Concavidad*

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8x = 0$.

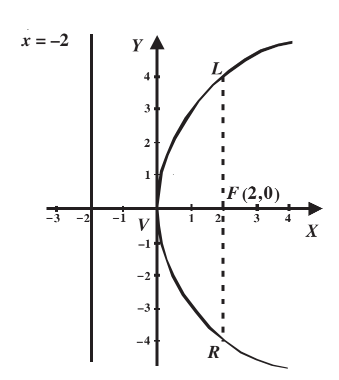
**Solución**

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $y^2 = 4px$

$$y^2 - 8x = 0 \qquad \rightarrow \qquad y^2 = 8x$$

Donde $4p = 8 \quad \rightarrow \quad p = 2$

Es una parábola horizontal y abre hacia la derecha, al sustituir en las fórmulas se obtienen sus elementos y posteriormente su gráfica.




Foco: $F(p, 0) = F(2, 0)$

Directriz: $x = -p \rightarrow x = -2$

Lado recto: $LR = |4(2)| = 8$

Eje: $y = 0$

2 Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es: $3x^2 - 12y = 0$.

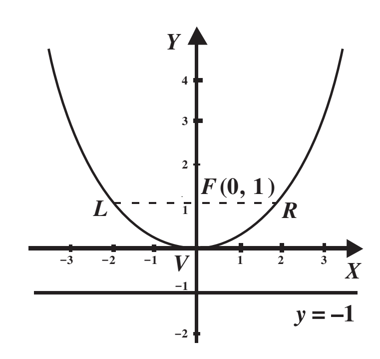
**Solución**

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $x^2 = 4py$

$$3x^2 - 12y = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 12y \quad \rightarrow \quad x^2 = 4y$$

Donde $4p = 4$, entonces $p = 1$.

Es una parábola vertical y abre hacia arriba, al sustituir en las fórmulas se determinan los elementos y posteriormente la gráfica:




Foco: $F(0, p) = F(0, 1)$

Directriz: $y = -p \rightarrow y = -1$

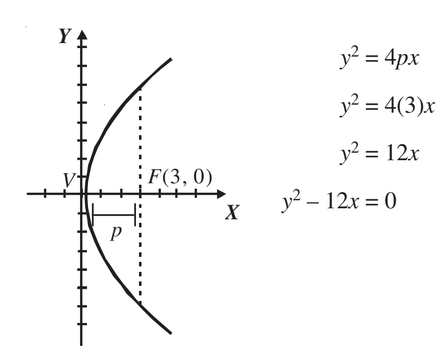
Lado recto: $LR = |4(1)| = 4$

Eje: $x = 0$

3 Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (3, 0).

**Solución**

Se grafican los elementos dados, se deduce que la parábola es cóncava hacia la derecha y el valor del parámetro es $p = 3$, al sustituir en la ecuación $y^2 = 4px$, se obtiene:




$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

$y^2 - 12x = 0$

Otra forma de resolver este problema es igualar el foco de la parábola horizontal con la coordenada del foco dado:

$$F(p, 0) = F(3, 0), \text{ por tanto, } p = 3$$

Al sustituir el valor de $p = 3$ en la ecuación $y^2 = 4px$, se determina que:

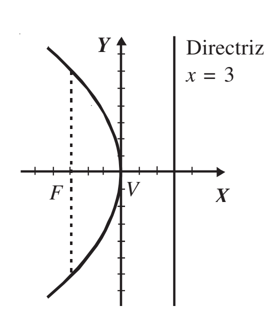
$$y^2 = 12x$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x = 0$.

4 Obtén la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz en la recta $x - 3 = 0$.

**Solución**

Al graficar la directriz $x = 3$ y localizar el vértice se deduce que la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda, por tanto, $p = -3$, al sustituir en la fórmula $y^2 = 4px$, la ecuación resultante es:




$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(-3)x$$
$$y^2 = -12x$$
$$y^2 + 12x = 0$$

Finalmente, la ecuación de la parábola es: $y^2 + 12x = 0$.

5 Una parábola de vértice en el origen pasa por el punto (2, 3) y su eje coincide con el eje $Y$. Determina su ecuación.

**Solución**

El eje coincide con el eje $Y$, entonces la parábola es vertical. Si pasa por el punto (2, 3), dicho punto cumple con la ecuación $x^2 = 4py$; por tanto, se sustituye para despejar $p$.

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad (2)^2 = 4p(3)$$
$$4 = 12p$$
$$p = \frac{1}{3}$$

Al conocer el parámetro se determina la ecuación:

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad x^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)y$$
$$x^2 = \frac{4}{3}y$$
$$3x^2 - 4y = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $3x^2 - 4y = 0$.

6 Calcula la longitud de la cuerda determinada por la parábola $x^2 + 8y = 0$ y la recta de ecuación $x - 2y - 8 = 0$.

**Solución**

La cuerda es un segmento de la recta dada, se encuentran los puntos de intersección con la parábola al despejar $x$ o $y$ de la ecuación de la recta y sustituir en la cuadrática.

Se despeja $y$ de $x - 2y - 8 = 0 \rightarrow y = \frac{8-x}{-2}$

Se sustituye en $x^2 + 8y = 0$, se simplifica y se resuelve la ecuación:

$$x^2 + 8\left(\frac{8-x}{-2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4(8-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x - 32 = 0$$

Al factorizar:

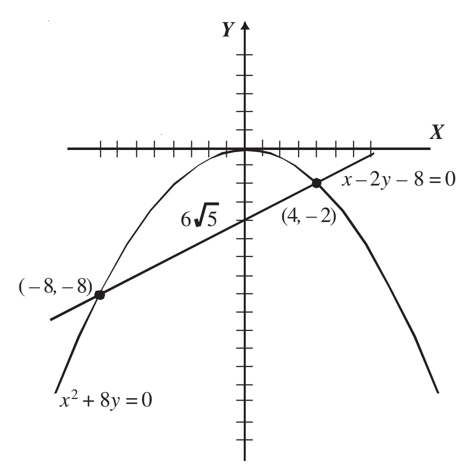
$$(x+8)(x-4) = 0$$
$$x + 8 = 0; \qquad x - 4 = 0$$
$$x = -8 \qquad x = 4$$

Al sustituir estos valores en $y = \frac{8-x}{-2}$, se obtiene:

$$\text{Si } x = -8,\ y = \frac{8-(-8)}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \qquad \text{Si } x = 4,\ y = \frac{8-(4)}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Los puntos de intersección son: $(-8, -8)$ y $(4, -2)$.

***Gráfica:***




Se determina la distancia entre los puntos obtenidos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-(-8))^2 + (-2-(-8))^2}$$

$$d = \sqrt{144 + 36}$$

$$d = \sqrt{180}$$

$$d = 6\sqrt{5}$$

Por tanto, la longitud de la cuerda es $6\sqrt{5}$ unidades.

# EJERCICIO 26

Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de cada una de las siguientes parábolas:

1. $y^2 = -4x$
2. $x^2 = 12y$
3. $y^2 - 20x = 0$
4. $x^2 = 16y$
5. $3y^2 + 48x = 0$
6. $2x^2 + 16y = 0$
7. $x^2 + 6y = 0$
8. $2y^2 - 16x = 0$
9. $24y = 8x^2$
10. $3x^2 + 8y = 0$
11. $y^2 = 5x$
12. $x = -y^2$
13. $y = x^2$

Encuentra las ecuaciones de las parábolas con los datos dados:

14. Vértice en el origen y foco en el punto $(-5, 0)$
15. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, 6)$
16. Vértice en el origen y foco en el punto $(2, 0)$
17. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, -1)$
18. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
19. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$
20. Vértice en el origen y directriz en la recta $y + 2 = 0$
21. Vértice en el origen y directriz en la recta $x - 6 = 0$
22. Vértice en el origen y directriz en la recta $2y - 5 = 0$
23. Vértice en el origen y directriz en la recta $2x - 3 = 0$
24. Foco en el punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ y directriz en la recta $3x + 4 = 0$
25. Foco en el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y directriz en la recta $4y + 1 = 0$
26. Vértice en el origen, su eje coincide con el eje $X$ y pasa por el punto $(-2, 6)$
27. Vértice en el origen, pasa por el punto $(-2, -1)$ y su eje coincide con el eje $Y$
28. Vértice en el origen, foco sobre el eje $X$ y pasa por el punto $(3, 4)$
29. Vértice en el origen, foco sobre el eje $Y$ y pasa por el punto $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$

Resuelve los siguientes problemas:

30. Calcula la longitud de la cuerda de la parábola $x^2 - 12y = 0$, la cual es un segmento de la recta $3x - 2y - 12 = 0$
31. Obtén la longitud de la cuerda de la parábola $x - y^2 = 0$, la cual es un segmento de la recta $x - y - 6 = 0$
32. Una parábola tiene su vértice en el origen e interseca a la recta $x + 4y - 9 = 0$, en el punto donde su abscisa es la mitad de su ordenada. Encuentra la ecuación de la parábola (dos soluciones).
33. Determina la ecuación de la parábola con eje horizontal y vértice en el origen, que pase por los puntos de intersección de la curva $x^2 + y^2 - 18 = 0$, y la recta $x - y = 0$ (dos soluciones).
34. Obtén la ecuación de la parábola de vértice en el origen y cuyo lado recto es el diámetro vertical de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$
35. Determina la ecuación de la parábola de vértice en el origen y que tiene como lado recto el diámetro horizontal de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de la parábola con vértice en el punto (*h*, *k*)

Sea una parábola con vértice fuera del origen en $(h, k)$, coordenadas del foco $F(h + p, k)$ donde $p$ es el parámetro y su directriz $x = h - p$. Toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d=\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, se obtienen las distancias del punto $P$ al foco y a la directriz.

La distancia de $P$ al foco es:

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}$$

La distancia de $P$ a la recta $x - h + p = 0$ es:

$$\overline{PF}=\frac{1(x)+0(y)-h+p}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}}=x-h+p$$

Se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}=x-h+p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(x-h-p)^2+(y-k)^2}\right)^2=(x-h+p)^2$$

$$(x-h-p)^2+(y-k)^2=x^2+h^2+p^2-2hx+2px-2hp$$

$$x^2 + h^2 + p^2 - 2hx - 2px + 2hp + y^2 - 2ky + k^2 - x^2 - h^2 - p^2 + 2hx - 2px + 2hp = 0$$

$$y^2 - 4px - 2ky + 4hp + k^2 = 0$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4hp$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

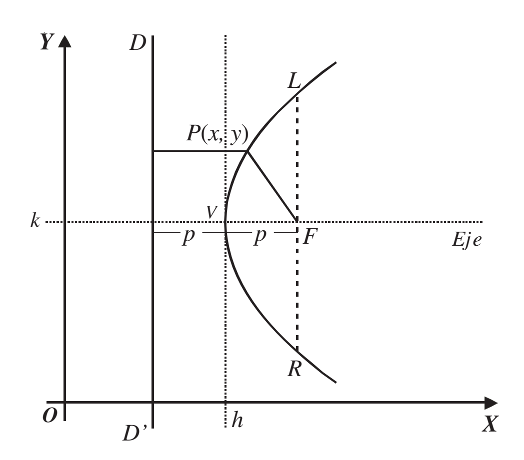
En forma análoga para una parábola con vértice fuera del origen en $(h, k)$, coordenadas del foco en $F(h, k + p)$ y directriz en la recta $y = k - p$, se obtiene:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

## Elementos y ecuación de una parábola con vértice en $(h, k)$

### *Parábola horizontal*

Su eje es paralelo al eje $X$ y es cóncava hacia la derecha o izquierda.




Ecuación ordinaria:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Ecuación general: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h+p, k)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = h - p$

Eje: $y = k$

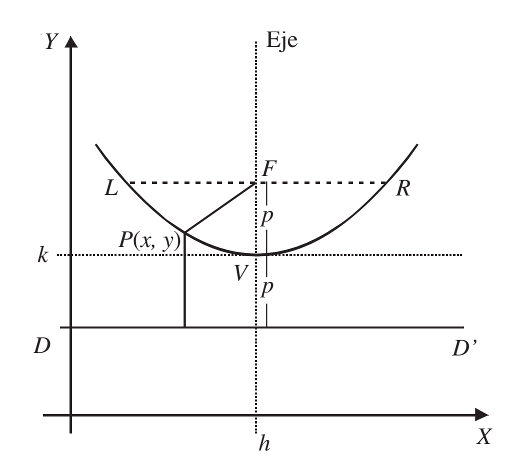
Lado recto: $LR = |4p|$

### *Concavidad*

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la izquierda.

### *Parábola vertical*

Su eje es paralelo al eje $Y$, y es cóncava hacia arriba o abajo.




Ecuación ordinaria:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Ecuación general: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h, k+p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = k - p$

Eje: $x = h$

Lado recto: $LR = |4p|$

### *Concavidad*

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y grafica la parábola $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$.

**Solución**

El término cuadrático es $y$, por tanto, la parábola es horizontal, entonces se agrupan los términos con $y$ en el primer miembro de la igualdad.

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$$

$$y^2 - 6y = 8x - 17$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro y se factoriza.

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$

$$(y - 3)^2 = 8x - 8$$

Se factoriza el segundo miembro de la igualdad, tomando como factor común el coeficiente de la literal:

$$(y - 3)^2 = 8(x - 1)$$

La ecuación que se obtiene es de la forma: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, por consiguiente, el vértice es el punto:

$V(1, 3)$, $4p = 8$, de donde $p = 2$.

Se sustituye en los elementos de la parábola horizontal.

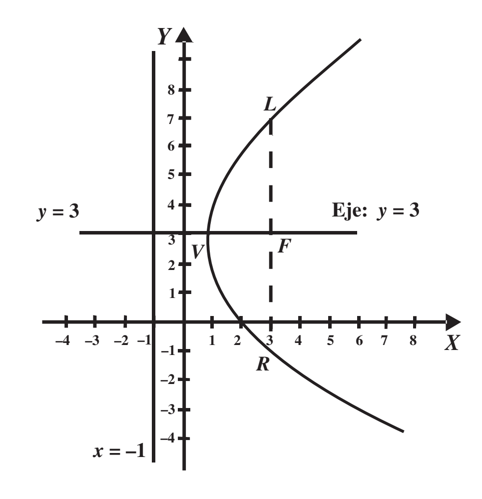
Foco: $F(h + p, k) = F(1 + 2, 3) = F(3, 3)$

Directriz: $x = h - p = 1 - 2 = -1 \rightarrow x + 1 = 0$

Lado recto: $LR = | 4p | = | 4(2) | = | 8 | = 8$

Ecuación del eje: $y = k$; $y = 3$

***Gráfica:***



2 Encuentra las coordenadas del vértice, del foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y del eje de la parábola $4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$.

**Solución**

La parábola es vertical, ya que el término cuadrático es $x$; para transformarla a su forma ordinaria se realiza lo siguiente:

| | |
|---|---|
| $4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$ | Se divide la ecuación entre 4. |
| $x^2 + 12x + 3y + 39 = 0$ | |
| $x^2 + 12x = -3y - 39$ | Se agrupan los términos en $x$. |
| $x^2 + 12x + 36 = -3y - 39 + 36$ | Se completa el trinomio cuadrado perfecto. |
| $x^2 + 12x + 36 = -3y - 3$ | |
| $(x + 6)^2 = -3(y + 1)$ | Se factoriza cada miembro. |

La ecuación obtenida es de la forma: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, por tanto, el vértice tiene como coordenadas $V(-6, -1)$, $4p = -3$ donde $p = -\frac{3}{4}$.

Se sustituye en las fórmulas de los elementos para la parábola vertical:

Foco: $F(h, k + p) = F\left(-6, -1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right) = F\left(-6, -\frac{7}{4}\right)$

Directriz: $y = k - p$

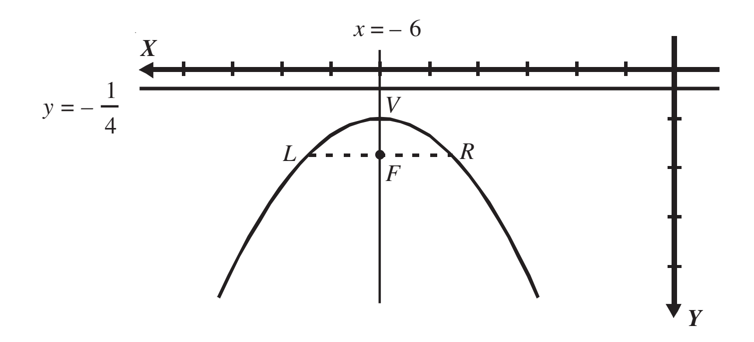
$$y = -1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y + \frac{1}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4y + 1 = 0$$

Lado recto: $|4p| = \left|4\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = |-3| = 3$

Eje: $x = h$

$$x = -6 \rightarrow x + 6 = 0$$

***Gráfica:***



3 Determina la ecuación general de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (– 4, 3) y (– 1, 3), respectivamente.

**Solución**

Se grafican los datos y se observa que la parábola tiene su eje paralelo al eje $x$ y es cóncava hacia la derecha, por consiguiente su ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con $h = -4$, $k = 3$ y $p = 3$.

Al sustituir los valores en la ecuación se obtiene:

$$(y-3)^2 = 4(3)(x-(-4))$$

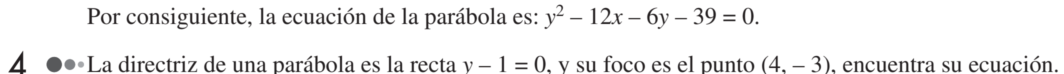
Forma ordinaria: $(y-3)^2 = 12(x+4)$

Se desarrolla y simplifica: $y^2 - 6y + 9 = 12x + 48$

$$y^2 - 6y + 9 - 12x - 48 = 0$$

Forma general: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$

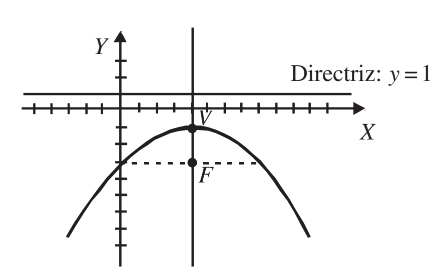
Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$.



4 La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto (4, – 3), encuentra su ecuación.

**Solución**

Se grafican los datos:




Al relacionar las fórmulas de los elementos de la parábola vertical con los datos, se obtienen las coordenadas del vértice y el valor del parámetro.

Foco: $F(h, k+p) = F(4, -3) \rightarrow h = 4$ y $k + p = -3$

Directriz: $y = k - p = 1 \rightarrow k - p = 1$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$k + p = -3$$
$$k - p = 1$$

Los valores que se obtienen son:

$$h = 4,\ k = -1 \text{ y } p = -2$$

Las coordenadas del vértice son $V(4, -1)$ y el parámetro $p = -2$

Se sustituye el vértice y el parámetro en:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$(x-4)^2 = 4(-2)(y+1)$$
$$(x-4)^2 = -8(y+1)$$
$$x^2 - 8x + 16 = -8y - 8$$
$$x^2 - 8x + 8y + 16 + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$.

## EJERCICIO 27

Dadas las ecuaciones de las parábolas, determina sus elementos: vértice, foco, directriz, eje y lado recto.

1. $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$
2. $x^2 - 12x + 16y + 68 = 0$
3. $y^2 + 8y + 20x + 56 = 0$
4. $x^2 + 2x + 4y - 19 = 0$
5. $y^2 - 8x - 16 = 0$
6. $x^2 - 24y + 48 = 0$
7. $x^2 + 8x - 6y + 28 = 0$
8. $y^2 - 5x + 6y + 13 = 0$
9. $4x^2 - 12x - 16y + 41 = 0$
10. $16y^2 + 8y - 24x + 49 = 0$
11. $4x^2 - 4x - 16y - 23 = 0$
12. $3y^2 + 6y - 4x + 15 = 0$
13. $2x^2 - 4y + 1 = 0$
14. $4y^2 - 5x + 5 = 0$

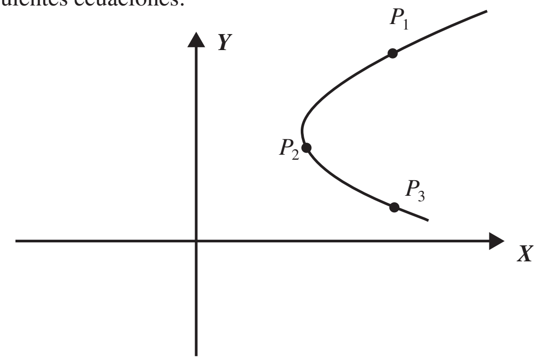
Resuelve los siguientes problemas:

15. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(2, 4)$ y su foco $F(-3, 4)$
16. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3, -1)$ y su foco $F(3, -5)$
17. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (3, 2) y (5, 2), respectivamente.
18. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos ( – 5, 2) y (– 5, 5)
19. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (2, – 4) y $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$
20. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos ( – 3, – 2) y $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$
21. El foco de una parábola es el punto (– 2, 6) y su directriz $x = 10$. Encuentra su ecuación.
22. Obtén la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (4, 5) y su directriz la recta $y + 3 = 0$
23. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (6, – 4) y su directriz la recta $x + 4 = 0$
24. El foco de una parábola es el punto (0, – 6) y su directriz la recta $y - 8 = 0$. Obtén su ecuación.
25. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (– 5, 2) y su directriz $x = 2$
26. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (7, 3) y su directriz la recta $y + 2 = 0$
27. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el punto (1, – 3) y directriz la recta $y + 5 = 0$
28. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (– 3, 5), su lado recto mide 24 unidades y su eje es paralelo al eje $Y$ (dos soluciones).
29. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (5, 2) y su foco es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
30. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (3, – 2) y su vértice es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
31. Encuentra los puntos de intersección de la parábola $y^2 - 8y - 16x + 64 = 0$ con la recta $4x + y - 24 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos

Dados tres puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$, que pertenecen a una parábola horizontal o vertical, su ecuación se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:




**Ecuaciones generales de la parábola**

Parábola horizontal:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Parábola vertical:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

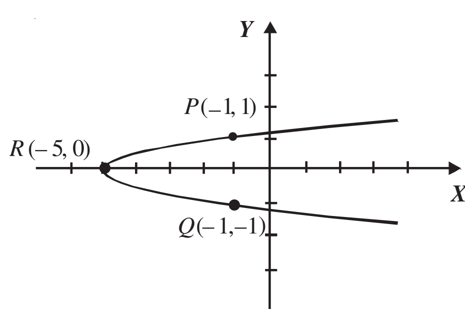
**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la ecuación general de la parábola cuyo eje es paralelo al eje $X$ y que pasa por los puntos: $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$

**Solución**

Al graficar los puntos se obtiene:




El eje de la parábola es paralelo al eje $X$, entonces la parábola es horizontal y la ecuación que se utiliza es:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al sustituir los puntos $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$, se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas:

Para el punto $P(-1, 1)$ $\quad (1)^2 + D(-1) + E(1) + F = 0$

Ecuación 1: $\quad -D + E + F = -1$

Para el punto $Q(-1, -1)$ $\quad (-1)^2 + D(-1) + E(-1) + F = 0$

Ecuación 2: $\quad -D - E + F = -1$

Para el punto $R(-5, 0)$ $\quad (0)^2 + D(-5) + E(0) + F = 0$

Ecuación 3: $\quad -5D + 0E + F = 0$

Se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$-D + E + F = -1$$
$$-D - E + F = -1$$
$$-5D + 0E + F = 0$$

Al resolver el sistema se obtiene: $D = -\frac{1}{4}$, $E = 0$, $F = -\frac{5}{4}$.

Se sustituyen estos valores en $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y se simplifica:

$$y^2 - \frac{1}{4}x + 0y - \frac{5}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4y^2 - x - 5 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $4y^2 - x - 5 = 0$.

## EJERCICIO 28

Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje *X* y pasa por los puntos:

1. (1, 0), (9, 2) y (0, – 1)
2. (0, 0), (1, – 2) y (4, – 4)
3. (19, 2), (10, – 1) y (7, 0)
4. (12, – 4), (21, 5) y (5, 3)

Obtén la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje *Y* y pasa por los puntos:

5. (1, 0), (5, 8) y (– 2, 15)
6. (3, 10), (0, 1) y ( – 2, 5)
7. (0, 1), (– 2, 3) y (1, 6)
8. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, (1, 6) y (– 3, – 2)

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

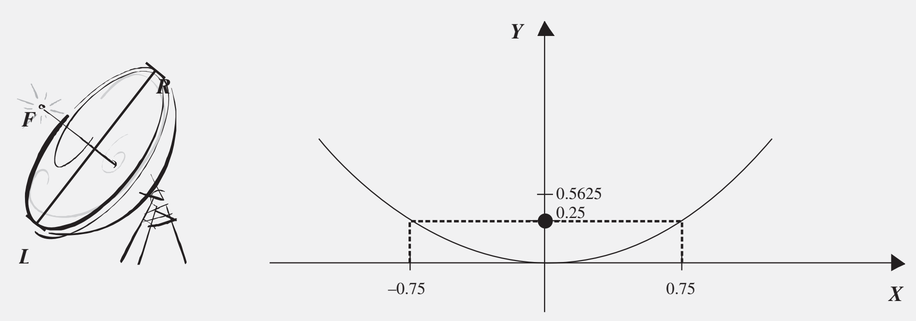
## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

A continuación se dan ejemplos de problemas donde se aplica el concepto de parábola.

1 El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 metros y su profundidad es de 25 centímetros. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?

**Solución**

La reflexión es una de las propiedades importantes de la parábola. Cuando una onda emana del foco y choca con la parábola se produce una reflexión paralela al eje y viceversa si la onda viaja paralela al eje, al chocar con la parábola, se refleja y cruza por el foco. Luego, si se gira una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie en revolución llamada paraboloide, es la forma que tienen precisamente las antenas parabólicas.




Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si el diámetro de la antena es de 1.5 metros y su fondo mide 25 cm, entonces la parábola por ser simétrica, pasa por los puntos (– 0.75, 0.25) y (0.75, 0.25), por tanto sustituimos uno de estos puntos en la ecuación:

$$x^2 = 4py, \text{ para despejar } p.$$

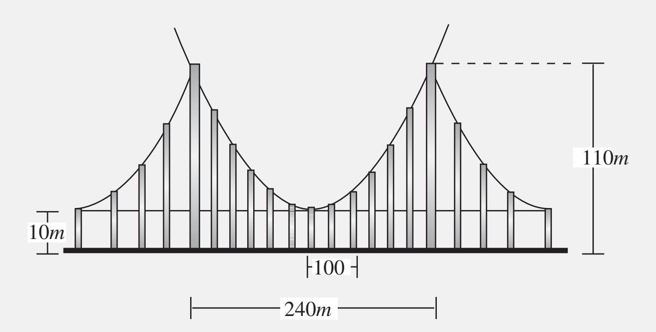
$$x^2 = 4py$$

$$(-0.75)^2 = 4p(0.25)$$

$$p = 0\ .5625$$

Las coordenadas del foco están dadas por $F(0, 0.5625)$, por consiguiente, se debe colocar el receptor a 56.25 centímetros del vértice.

2 Las dos torres de un puente colgante, como se muestra en la figura tienen una separación de 240$m$ y una altura de 110$m$, si el puntal más corto mide 10$m$ determina la altura de un puntal que se encuentra a 100$m$ del centro.

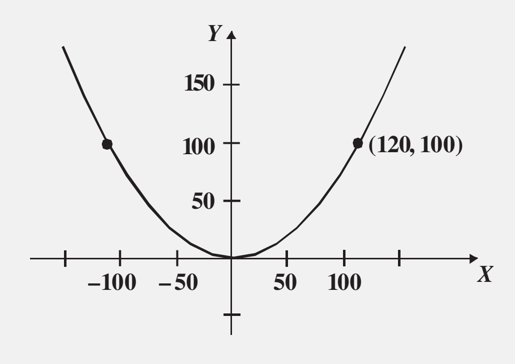



**Solución**

Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si las torres están separadas 240$m$ y su altura con respecto al vértice de la parábola es de 100$m$ (110m – 10$m$ = 100$m$), entonces la parábola pasa por los puntos:

$$(-120, 100) \text{ y } (120, 100)$$

Se sustituye el punto (120, 100) en la ecuación $x^2 = 4py$ para obtener $p$.




$$x^2 = 4py$$

$$(120)^2 = 4p(100)$$

$$p = 36$$

Por tanto, la ecuación es

$$x^2 = 4(36)y \quad \rightarrow \quad x^2 = 144y$$

Para encontrar la ordenada cuya abscisa es $x = 100$, se sustituye en la ecuación obtenida:

$$(100)^2 = 144y$$

$$y = 69.44$$

El puntal que se encuentra a 100 metros del centro mide:

$$69.44m + 10m = 79.4m$$

## Ecuación de una recta tangente a una parábola

Si se tiene una parábola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto $(x_0, y_0)$, la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0)$$

Si se tiene una parábola con vértice $(h, k)$ fuera del origen y una recta tangente en el punto $(x_0, y_0)$, la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0 - k}{2(x_0 - h)}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)$$

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

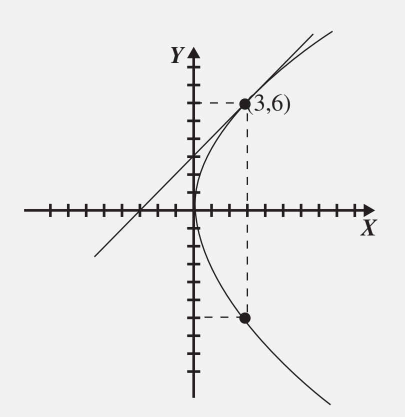
**1** Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x = 0$, en el punto (3, 6).

**Solución**

Se sustituye el punto (3, 6) en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{6}{2(3)}(x - 3)$$



De donde se obtiene la ecuación:

$$x - y + 3 = 0$$

**2** Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $4x^2 + 5y = 0$, en el punto (5, – 20).

**Solución**

Se sustituye el punto (5, – 20) en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-20) = \frac{2(-20)}{5}(x - 5) \quad \rightarrow \quad 8x + y - 20 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la recta es: $8x + y - 20 = 0$.

**3** Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$, en el punto (8, – 3).

**Solución**

Se transforma la ecuación de la parábola a su forma ordinaria.

$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 4)^2 = -8(y + 1)$$

Se sustituye el vértice $V(h, k) = V(4, -1)$ y el punto (8, – 3) en la fórmula y se obtiene:

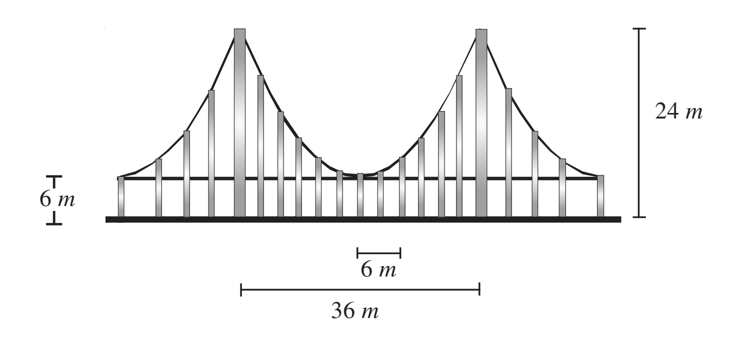
$$y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-3) = \frac{2(-3 - (-1))}{8 - 4}(x - 8) \rightarrow x + y - 5 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la recta es: $x + y - 5 = 0$.

# EJERCICIO 29

Resuelve los siguientes problemas:

1. Dos torres de 24 metros de altura sostienen un puente colgante, como el que se muestra en la figura. Si las torres están separadas 36 metros y el puntal más corto mide 6 metros, ¿cuál es la altura de un puntal que se encuentra a 6 metros del centro?




2. El diámetro de una antena parabólica es de 2 *m* y su profundidad es de 40 *cm*. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?
3. Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 *cm* del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco?
4. Si en el ejercicio anterior se quiere que el faro tenga 2.75 *cm* menos de profundidad, ¿cuánto debe medir el diámetro?
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8y = 0$ en el punto (4, 2)
6. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 6x = 0$ en el punto (24, 12)
7. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x - 8y + 28 = 0$ en el punto (10, 11)
8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x + 6y + 57 = 0$ en el punto (16, 9)
9. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 4x + 4y + 28 = 0$ en el punto $P(15, 4)$
10. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8x - 6y + 4 = 0$ en el punto $\left(6, -\frac{4}{3}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**Reseña HISTÓRICA**

La elipse en el sistema solar

En el universo el movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc., es el descrito mediante trayectorias elípticas. Esto es así porque a grandes distancias y para objetos sin carga eléctrica neta importante, la fuerza principal que gobierna este movimiento es la fuerza gravitatoria.

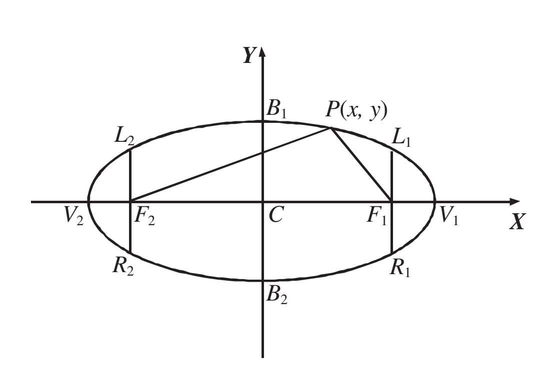
Fue el gran físico y matemático Isaac Newton quien formuló la ley de la gravitación universal, que explica los movimientos de los planetas y satélites en el sistema solar. Esta ley reúne las tres leyes de Kepler en una sola:

$$F = G\frac{Mm}{d^2}$$

## Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$




$C$: Centro

$V_1$ y $V_2$: Vértices

$F_1$ y $F_2$: Focos

$B_1$ y $B_2$: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

$e = \dfrac{c}{a} < 1$ excentricidad

EJEMPLOS

Ejemplos

**1** Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a los puntos fijos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$, son siempre iguales a 10 unidades.

**Solución**

Sea $P(x, y)$ un punto que cumple con la condición dada, mediante la fórmula: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ se encuentra la distancia a los puntos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}\ ,\ \overline{PF_2} = \sqrt{x^2 + (y-(-3))^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 100 + 12y$$

$$5\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 25 + 3y$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros y se obtiene:

$$\left(5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2 = (25 + 3y)^2$$

$$25(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 25y^2 + 150y + 225 = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

Por tanto la ecuación de la curva es: $25x^2 + 16y^2 = 400$, la cual por la definición corresponde a una elipse.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (3, 4) y (9, 4) es siempre igual a 8 unidades.

**Solución**

Al aplicar la definición de elipse se obtiene:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}=8$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=8-\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=64-16\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}+(x-9)^2+(y-4)^2$$

Se desarrollan y se simplifica para determinar la ecuación.

$$(3x-34)^2=\left(-4\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$9x^2-204x+1156=16\left(x^2-18x+81\right)+16\left(y^2-8y+16\right)$$

$$9x^2-204x+1156=16x^2+16y^2-288x-128y+1552$$

$$7x^2+16y^2-84x-128y+396=0$$

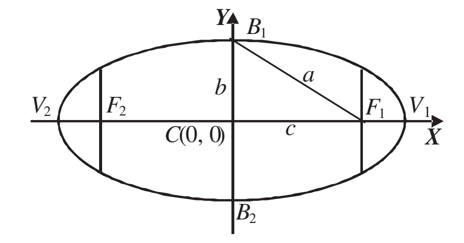
## EJERCICIO 30

Determina la ecuación del lugar geométrico (elipse), según los datos proporcionados:

1. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (4, 0) y (–4, 0) es igual a 12.
2. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (2, 0) y (– 2, 0) es igual a 6.
3. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (0, 5) y (0, – 5) es igual a 14.
4. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (– 2, 1) y (– 2, 7) es siempre igual a 10.
5. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (9, – 2) y (– 7, – 2) siempre es igual a 20.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de una elipse con centro en el origen




En la figura:

$\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$

$\overline{CB_1}=\overline{CB_2}=b$

$\overline{CF_1}=\overline{CF_2}=c$

Como $\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$ , entonces $\overline{V_1V_2}=2a$ y al ser $V_1$ un punto de la elipse $\overline{V_1F_1}+\overline{V_1F_2}=2a$ , por tanto, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$; como $B_1$ es un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{B_1F_1}+\overline{B_1F_2}=2a$, de donde $\overline{B_1F_1}=a$ y por la gráfica $a^2=b^2+c^2$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$, se aplica la fórmula $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ para obtener la distancia de $P$ a los puntos fijos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ se obtiene:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Se despeja un radical: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre – 4:

$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica: $\left(cx+a^2\right)^2=\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2\rightarrow\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

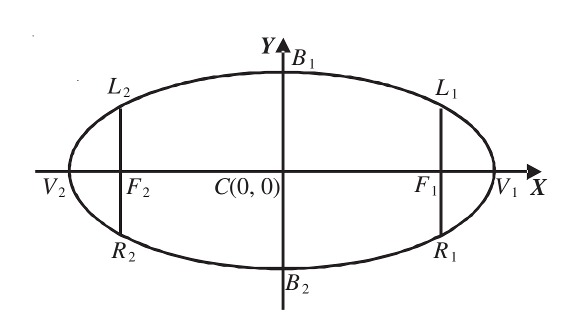
Se divide entre $a^2(a^2-c^2)$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$. Si $a^2=b^2+c^2$, entonces $b^2=a^2-c^2$, se sustituye y se obtiene: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Por tanto, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen; para una elipse vertical con centro en el origen se sigue un procedimiento análogo y se obtiene: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

## Elementos y ecuación

**Elipse horizontal**

El eje mayor coincide con el eje $X$.




Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

**Elementos:**

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje menor: $B(0, \pm b)$

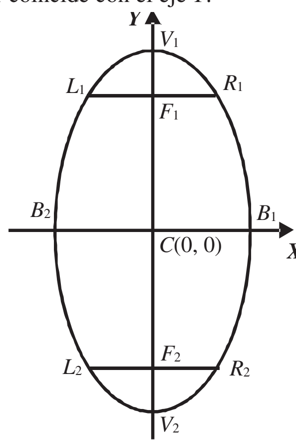
Lado recto: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$ $(e<1)$

Condición: $a^2=b^2+c^2$; $a>b$, $a>c$ donde $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$

**Elipse vertical**

El eje mayor coincide con el eje $Y$.




Ecuación canónica: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

**Elementos:**

Vértices: $V(0,\pm a)$

Focos: $F(0,\pm c)$

Extremos del eje menor: $B(\pm b, 0)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e<1)$

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde $b = \sqrt{a^2-c^2}$, $c = \sqrt{a^2-b^2}$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina los elementos y grafica la elipse, cuya ecuación es: $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

**Solución**

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

Se divide por el término independiente, $\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36}$

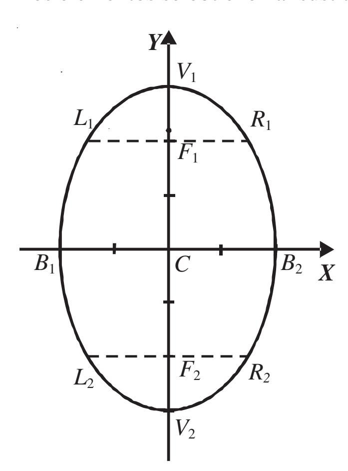
Se simplifica y se obtiene la forma canónica, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, porque $a > b$, de donde $a = 3$ y $b = 2$, entonces tenemos una elipse vertical de ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Para encontrar $c$, se sustituye $a^2$ y $b^2$ en $c = \sqrt{a^2-b^2}$,

$$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

Los elementos se obtienen al sustituir los valores de $a$, $b$ y $c$ en:




**Vértices**

$V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$ → $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$

**Focos**

$F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$ → $F_1(0,\sqrt{5})$ y $F_2(0,-\sqrt{5})$

**Extremos del eje menor**

$B_1(b, 0)$ y $B_2(-b, 0)$ → $B_1(2, 0)$ y $B_2(-2, 0)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3}$ Longitud del lado recto

$\overline{V_1V_2} = 2a = 2(3) = 6$ Longitud del eje mayor

$\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$ Longitud del eje focal

$\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$ Longitud del eje menor

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ Excentricidad

**2** Determina los elementos y grafica la elipse: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

**Solución**

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \rightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

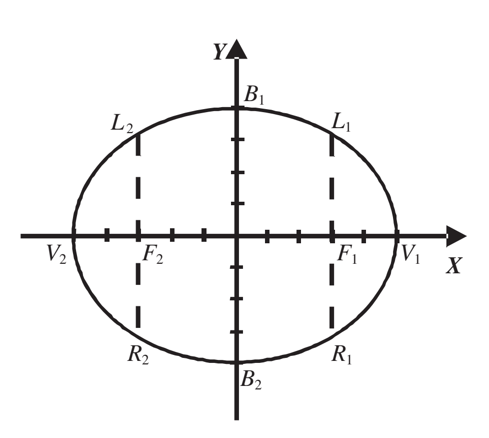
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como el denominador mayor se encuentra bajo la variable $x$ esta ecuación corresponde a una elipse horizontal de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, obteniendo que $a = 5$ y $b = 4$.

Para hallar $c$ se sustituye $a^2$ y $b^2$ en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

La gráfica y los elementos son:




**Vértices**

$V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$

***Focos***

$F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$

**Extremos del eje menor**

$B_1(0, 4)$ y $B_2(0, -4)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{5} = \frac{32}{5}$ Lado recto

$\overline{V_1V_2} = 2a = 2(5) = 10$ Longitud del eje mayor

$\overline{F_1F_2} = 2c = 2(3) = 6$ Longitud del eje focal

$\overline{B_1B_2} = 2b = 2(4) = 8$ Longitud del eje menor

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ Excentricidad

**3** Determina las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación es: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

**Solución**

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$4x^2 + 9y^2 = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{1} + \frac{9y^2}{1} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

De la cual $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{9}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{36}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

La ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es decir, es una elipse horizontal.

Para encontrar los focos se sustituyen los valores:

$$F_1(c, 0) = F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right) \quad \rightarrow \quad F_2(-c, 0) = F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$$

Por consiguiente, las coordenadas de los focos son: $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$ y $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$.

# EJERCICIO 31

Determina los elementos de las siguientes elipses:

1. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$
2. $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
3. $12x^2 + 5y^2 - 60 = 0$
4. $x^2 + 16y^2 - 64 = 0$
5. $9x^2 + 25y^2 = 225$
6. $16x^2 + 4y^2 = 64$
7. $9x^2 + 4y^2 = 25$
8. $4x^2 + y^2 = 1$
9. $3x^2 + 2y^2 = 6$
10. $16x^2 + 9y^2 - 1 = 0$
11. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
12. $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$
13. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$
14. $100x^2 + 25y^2 - 200 = 0$
15. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$
16. $3x^2 + y^2 - 12 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

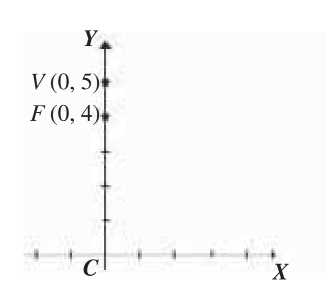
## Dados sus elementos obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen

**EJEMPLOS**

**1** Determina la ecuación de la elipse de centro en el origen, vértice (0, 5) y foco en (0, 4).

**Solución**

Se grafican los datos.



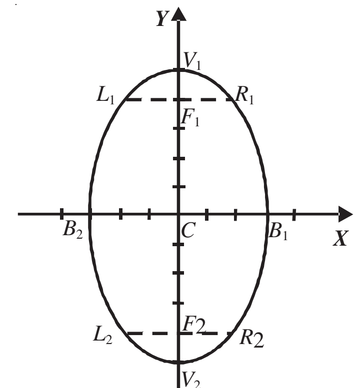

La elipse es vertical y su ecuación es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, de la gráfica se obtiene la distancia del centro al vértice ($a$) y la distancia del centro al foco ($c$), por tanto:

$$a = 5 \text{ y } c = 4$$

Para encontrar $b$ se sustituyen los valores de $a$ y $c$ en $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ :

$$b = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Se sustituyen los valores de $a$ y $b$ y resulta la ecuación:




Forma canónica: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Al multiplicar por 225 e igualar a cero, se obtiene la ecuación en su forma general:

$$25x^2 + 9y^2 = 225 \rightarrow 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$$

**2** Determina la ecuación de la elipse con vértices en (– 6, 0) y (6, 0) y la longitud de uno de sus lados rectos igual a $\frac{20}{3}$.

**Solución**

El eje mayor (2a) es la distancia entre los vértices, utilizando la fórmula:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, se obtiene:

$$2a = \sqrt{(6+6)^2 + (0-0)^2} \rightarrow 2a = 12 \rightarrow a = 6$$

Al sustituir $a = 6$, $\overline{LR} = \frac{20}{3}$ y despejar $b^2$ de la fórmula del lado recto $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, se obtiene:

$$\frac{2b^2}{6} = \frac{20}{3} \rightarrow b^2 = 20$$

La elipse es horizontal y la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

Se multiplica por 180 y tenemos que la ecuación es:

$$5x^2 + 9y^2 = 180 \qquad 5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$$

**3** El eje mayor de una elipse mide 20 unidades, si la excentricidad es $e = \frac{7}{10}$, ¿cuál es la longitud del eje menor?

**Solución**

El eje mayor es la distancia entre los vértices, $\overline{V_1V_2} = 2a = 20$.

$$2a = 20 \text{ por tanto, } a = 10$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{10}$, de donde $\frac{c}{10} = \frac{7}{10}$.

Al despejar se obtiene que $c = 7$.
Si $a = 10$ y $c = 7$, se utiliza la condición $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ,

$$b = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51}$$

Así, la longitud del eje menor es $2b = 2\sqrt{51}$.

## EJERCICIO 32

Determina la ecuación de la elipse, según los datos proporcionados.

1. $V(\pm 6, 0)$ y $F(\pm 4, 0)$
2. $V(\pm 3, 0)$ y $F(\pm\sqrt{2}, 0)$
3. $V(\pm\sqrt{5}, 0)$ y $F(\pm 2, 0)$
4. $V(0, \pm 7)$ y $F(0, \pm 5)$
5. $V(0, \pm\sqrt{3})$ y $F(0, \pm\sqrt{2})$
6. $V(\pm 5, 0)$ y $B(0, \pm 4)$
7. $V(\pm 4, 0)$ y $B(0, \pm\sqrt{7})$
8. $F(\pm 3, 0)$ y $B(0, \pm 2)$
9. $F(\pm\sqrt{5}, 0)$ y $B(0, \pm 3)$
10. $F(0, \pm\sqrt{2})$ y $B(\pm 2, 0)$
11. $V(0, \pm\sqrt{5})$ y $B(\pm 1, 0)$
12. $F(0, \pm 7)$ y $B(\pm 4, 0)$
13. $F(0, \pm 2)$ y lado recto $= \frac{10}{3}$
14. $F(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$
15. $F(0, \pm\ 6)$ y excentricidad $e = \frac{3}{4}$
16. $B\left(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y excentricidad igual a $\frac{1}{2}$
17. Excentricidad $= \frac{1}{3}$, lado recto $= \frac{16}{3}$ (dos soluciones).
18. Eje mayor paralelo al eje $Y$ y pasa por los puntos $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(1, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
19. $V(\pm 4, 0)$ y lado recto igual a 2
20. Focos los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4 = 0$ con el eje $X$, y lado recto $\frac{18\sqrt{13}}{13}$
21. El eje mayor es el doble del eje menor, su semidistancia focal es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, y su eje focal coincide con el eje $X$.
22. La distancia focal equivale al eje menor y su lado recto es $\sqrt{2}$ (dos soluciones).

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de una elipse con centro en el punto (*h, k*)

Para una elipse horizontal con centro fuera del origen en el punto (*h, k*), se hace una traslación de los ejes *XY* al punto *C*(*h, k*).

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la elipse en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

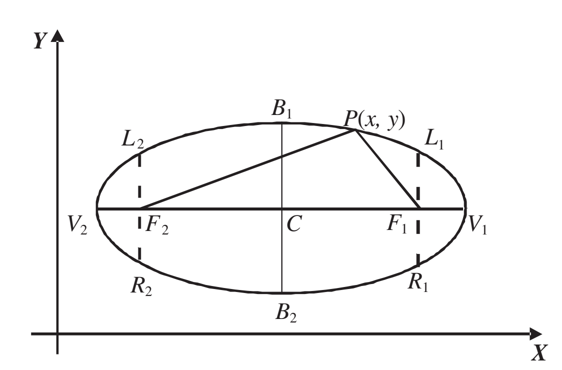
Se sustituyen *x'*, *y'* en la ecuación y se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Del mismo modo se obtiene la ecuación de una elipse vertical con centro (*h, k*) fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

**Gráfica**




**Elementos:**

*C:* Centro

$V_1$ y $V_2$: Vértices

$F_1$ y $F_2$: Focos

$B_1$ y $B_2$: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ (lado recto)

### *Elipse horizontal*

Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

**Elementos:**

Vértices: $V(h \pm a, k)$

Focos: $F(h \pm c, k)$

Extremos del eje menor: $B(h, k \pm b)$

### *Elipse vertical*

Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

**Elementos:**

Vértices: $V(h, k \pm a)$

Focos: $F(h, k \pm c)$

Extremos del eje menor: $B(h \pm b, k)$

**Ecuación general de la elipse:** $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A \neq C$, y ambas cantidades de igual signo.

## Dada la ecuación, obtener sus elementos

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina los elementos de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ y traza su gráfica.

**Solución**

$$9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0 \rightarrow 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y = -144$$

Se agrupan los términos en *xy:*

$$(9x^2 - 72x) + (4y^2 - 24y) = -144$$

Se factoriza:

$$9(x^2 - 8x) + 4(y^2 - 6y) = -144$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos:

$$9\left(x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right) + 4\left(y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) = -144 + 9\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$9(x^2 - 8x + (4)^2) + 4(y^2 - 6y + (3)^2) = -144 + 9(4)^2 + 4(3)^2$$

$$9(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 - 6y + 9) = -144 + 144 + 36$$

Al factorizar y simplificar, se obtiene,

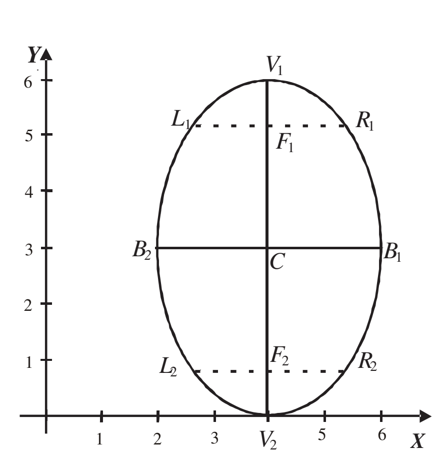
$$9(x - 4)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$$

Se dividien ambos miembros entre 36:

$$\frac{9(x-4)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Es una elipse vertical con centro en $C(4, 3)$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Estos datos se sustituyen para obtener los elementos y trazar la gráfica.




Centro $(h, k) = C(4, 3)$

Vértices $(h, k \pm a)$

$V_1(4, 3 + 3) = V_1(4, 6)$

$V_2(4, 3 - 3) = V_2(4, 0)$

Focos $(h, k \pm c)$

$F_1\left(4, 3 + \sqrt{5}\right) = F_1\left(4, 5.2\right)$

$F_2\left(4, 3 - \sqrt{5}\right) = F_2\left(4, 0.7\right)$

Extremos del eje menor $(h \pm b, k)$

$B_1(4 + 2, 3) = B_1(6, 3)$

$B_2(4 - 2, 3) = B_2(2, 3)$

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Eje mayor $= 2a = 6$

Eje menor $= 2b = 4$

Eje focal $= 2c = 2\sqrt{5}$

2 Determina los elementos de la elipse, cuya ecuación es:

$$x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0$$

**Solución**

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria,

$$x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0 \rightarrow (x^2 + 4x) + (16y^2 - 32y) = 44$$

$$(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 2y) = 44$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto, $(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 2y + 1) = 44 + 4 + 16$

Al factorizar y simplificar se obtiene: $(x + 2)^2 + 16(y - 1)^2 = 64$

Se divide entre 64, $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{16(y-1)^2}{64} = \frac{64}{64}$

Forma ordinaria: $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

La ecuación representa una elipse horizontal de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Se obtienen las coordenadas del centro, el semieje mayor y el semieje menor:

Centro $C(-2, 1)$; $a = 8$ y $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

Por tanto, los elementos y la gráfica son:

Centro: $C(h, k) = C(-2, 1)$

Vértices $V(h \pm a, k)$

$V_1(-2 + 8, 1) = V_1(6, 1)$

$V_2(-2 - 8, 1) = V_2(-10, 1)$

Focos $F(h \pm c, k)$

$F_1\left(-2 + 2\sqrt{15}, 1\right) = (5.7, 1)$

$F_1\left(-2 - 2\sqrt{15}, 1\right) = (-9.7, 1)$

Extremos del eje menor $B(h, k \pm b)$

$B_1(-2, 1 + 2) = B_1(-2, 3)$

$B_2(-2, 1 - 2) = B_2(-2, -1)$

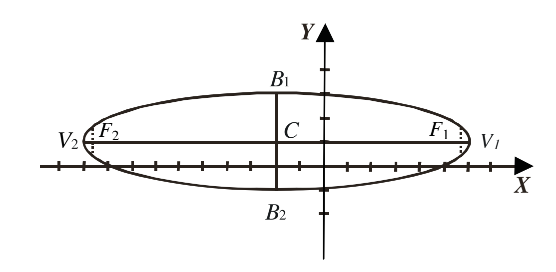
$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{8} = \frac{8}{8} = 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Eje mayor: $2a = 16$

Eje menor: $2b = 4$

Eje focal: $2c = 4\sqrt{15}$



3 Determina las coordenadas de los vértices de la elipse cuya ecuación es:

$$4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$$

**Solución**

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0 \rightarrow (4x^2 - 4x) + (9y^2 - 6y) = -1$$

$$4(x^2 - x) + 9\left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) = -1 \rightarrow 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 9\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -1 + 1 + 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} = 1$$, la ecuación tiene la forma de una elipse horizontal

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, con centro en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{1}{2}$

Se sustituyen el centro y el valor de $a$ para obtener los vértices:

$$V_1(h+a,k) = V_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = V_1\left(1, \frac{1}{3}\right) \quad \rightarrow \quad V_2(h-a,k) = V_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = V_2\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

## EJERCICIO 33

Determina los elementos de las siguientes elipses:

1. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
2. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 4(y-1)^2 = 4$
3. $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$
4. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
5. $x^2 + 16y^2 - 10x + 64y + 73 = 0$
6. $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 11 = 0$
7. $36x^2 + 16y^2 + 180x - 24y + 90 = 0$
8. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$
9. $9x^2 + 16y^2 + 42x - 24y + 57 = 0$
10. $18x^2 + 12y^2 + 60x + 84y + 161 = 0$
11. $5x^2 + 9y^2 + 30x - 36y + 36 = 0$
12. $4x^2 + 9y^2 + 20x - 24y + 5 = 0$
13. $4x^2 + 25y^2 + 4x - 120y + 45 = 0$
14. $x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$
15. $4x^2 + 3y^2 + 16x + 4 = 0$
16. $16x^2 + 9y^2 + 48x - 6y - 107 = 0$
17. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 39 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Dados sus elementos, obtener la ecuación

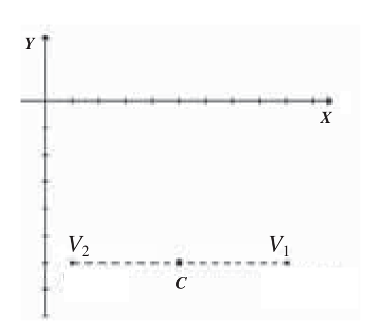
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (1, – 6), (9, – 6) y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$.

**Solución**

Se localizan los vértices en el plano cartesiano:




De la gráfica se deduce que la elipse es horizontal con centro $C(5, -6)$, y $\overline{V_1V_2} = 2a = 8$, donde $a = 4$.

Al sustituir $a = 4$ en la fórmula del lado recto y despejar $b$, se obtiene:

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{2b^2}{4} = \frac{9}{2}$$
$$b^2 = 9$$
$$b = 3$$

Para encontrar la ecuación de la elipse se sustituyen las coordenadas del centro (5, – 6), el semieje mayor $a = 4$ y el semieje menor $b = 3$, en la fórmula:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-5)^2}{(4)^2} + \frac{(y-(-6))^2}{(3)^2} = 1$$

Forma ordinaria: $$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$$

Se desarrolla y simplifica la ecuación para obtener la forma general:

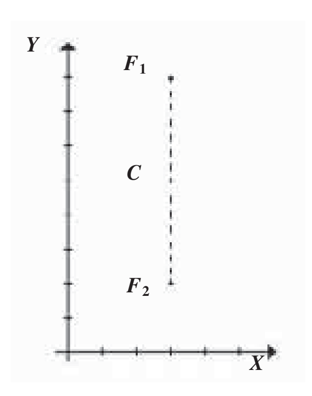
$$9(x-5)^2 + 16(y+6)^2 = 144$$
$$9(x^2 - 10x + 25) + 16(y^2 + 12x + 36) = 144$$
$$9x^2 - 90x + 225 + 16y^2 + 192y + 576 - 144 = 0$$
$$9x^2 + 16y^2 - 90x + 192y + 225 + 576 - 144 = 0$$

Forma general: $$9x^2 + 16y^2 - 90x + 192y + 657 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (3, 8) y (3, 2), la longitud de su eje menor es 8.

**Solución**

Se localizan los focos en el plano cartesiano:




Es una elipse vertical y de la gráfica se obtienen las coordenadas del centro $C(3, 5)$ y el valor de $c = 3$, el eje menor es $2b$, por tanto,

$$2b = 8 \rightarrow b = 4$$

Se utiliza la condición para encontrar el valor de $a$ (semieje mayor):

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Con las coordenadas del centro, el semieje mayor y el semieje menor, se obtiene la ecuación de la elipse.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{(4)^2} + \frac{(y-5)^2}{(5)^2} = 1$$

Forma ordinaria: $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

Se multiplica por 400: $25(x-3)^2 + 16(y-5)^2 = 400$

Se desarrollan los binomios y se simplifica,

$$25(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 10y + 25) - 400 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la elipse en su forma general es:

$$25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$$

# EJERCICIO 34

Determina la ecuación en su forma ordinaria y general de la elipse, según los datos dados:

1. $C(7, -2)$, eje mayor = 8, eje menor = 4 y eje focal paralelo al eje $X$.
2. $V_1(-2, 3)$, $V_2(8, 3)$ y $F_1(-1, 3)$, $F_2(7, 3)$
3. $V_1(-2, -5)$, $V_2(-2, 3)$ y $F_1(-2, -4)$, $F_2(-2, 2)$
4. $V_1(0, 0)$, $V_2(8, 0)$ y $B_1(4, 3)$, $B_2(4, -3)$
5. $B_1(3, 2)$, $B_2(3, 6)$ y su eje mayor igual a 10 unidades.
6. $V_1(-4, 5)$, $V_2(16, 5)$ y su excentricidad es $\frac{4}{5}$
7. Su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$ y las coordenadas de sus focos son los puntos $(0, 0)$ y $(0, -4)$
8. $V_1(3, 4)$, $V_2(3, -8)$ y su excentricidad es $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
9. $V_1(-4, 6)$, $V_2(-4, -4)$ y uno de sus focos es el punto $(-4, -3)$
10. $C(-7, 5)$, $F_1\left(-7+4\sqrt{2}, 5\right)$ y la longitud de su lado recto es $\frac{4}{3}$
11. $F_1(-9, -2)$, $F_2(-3, -2)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$
12. $C\left(\frac{8}{3}, -\frac{11}{2}\right)$, $LR = \frac{16}{3}$, excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y eje mayor paralelo al eje $X$.
13. $C(5, 7)$, $LR = \frac{2}{3}$, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y eje focal paralelo al eje $X$.
14. $C(-4, 0)$, uno de sus focos en $(-1, 0)$ y la longitud de su lado recto igual a $\frac{7}{2}$
15. Es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$, uno de sus focos es el punto $(3, 2)$ y su lado recto es $\frac{18}{5}$
16. El foco y el lado recto coinciden con los de la parábola, cuya ecuación es:
$$y^2 - 12x - 12y + 84 = 0$$
y su centro es el punto $(3, 6)$
17. El centro es el de la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$, su foco el punto de tangencia de la circunferencia con el eje $Y$, y uno de sus vértices es el punto $(1, 3)$
18. El centro es el punto $(2, 1)$, el eje mayor paralelo al eje $Y$, y pasa por el punto $(1, 4)$ y su lado recto mide $\frac{4}{\sqrt{3}}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Casos especiales

Dada la ecuación general de la elipse $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A \neq C$ pero del mismo signo, $N$ es el identificador que permite conocer la representación geométrica de la ecuación, siendo $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$.

- Si $N > 0$ la ecuación representa una elipse.
- Si $N = 0$ la ecuación representa un punto.
- Si $N < 0$ la ecuación representa un conjunto vacío.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1. Determina si la ecuación $8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$ representa una elipse, un punto o un conjunto vacío.

**Solución**

Al aplicar la fórmula se determina que:

$$N = (9)(-16)^2 + (8)(-54)^2 - 4(8)(9)(89) = 2\,304 + 23\,328 - 25\,632 = 0$$

Por tanto, la ecuación representa un punto y al transformar a la forma ordinaria se obtiene:

$$8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$$
$$(8x^2 - 16x) + (9y^2 - 54y) + 89 = 0$$
$$8(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 6y) = -89$$
$$8(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 6y + 9) = -89 + 8 + 81$$
$$8(x - 1)^2 + 9(y - 3)^2 = 0$$

El punto que representa es el (1, 3).

2. Identifica la ecuación $3x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$.

**Solución**

Al utilizar la fórmula del identificador:

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$$
$$N = 2(-6)^2 + 3(4)^2 - 4(3)(2)(-1) = 72 + 48 + 24 = 144$$

Como $N > 0$, entonces dicha ecuación representa una elipse.

3. Identifica la ecuación $8x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 62 = 0$.

**Solución**

Al aplicar la fórmula del identificador:

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF \rightarrow N = (3)(-16)^2 + (8)(6)^2 - 4(8)(3)(62)$$
$$= 768 + 288 - 5\,952$$
$$= -4\,896$$

Como $N < 0$, representa un conjunto vacío.

# EJERCICIO 35

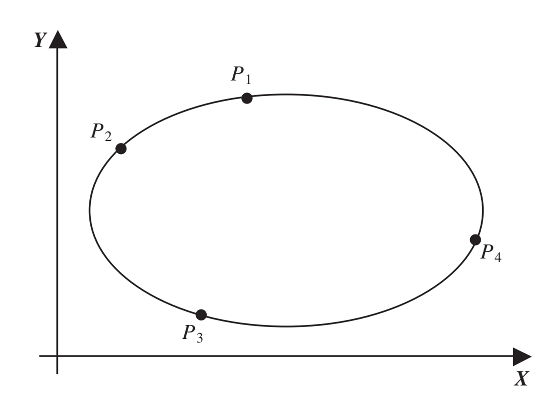
Determina si las siguientes ecuaciones representan una elipse, un punto o un conjunto vacío.

1. $2x^2 + 3y^2 + 6 = 0$
2. $4x^2 + 5y^2 + 8x - 10y + 9 = 0$
3. $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$
4. $3x^2 + 2y^2 - 8y - 4 = 0$
5. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$
6. $2x^2 + 3y^2 + 12x + 30 = 0$
7. $3x^2 + 4y^2 - 30x - 24y + 111 = 0$
8. $2x^2 + 3y^2 + 4x + 42y + 149 = 0$
9. $6x^2 + 5y^2 - 48x + 10y + 131 = 0$
10. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 68 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de la elipse que pasa por cuatro puntos

Para encontrar la ecuación se sustituyen los puntos dados en la ecuación general y así se obtiene un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas, la solución del sistema determina los coeficientes de la ecuación.




Ecuación general de la elipse

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

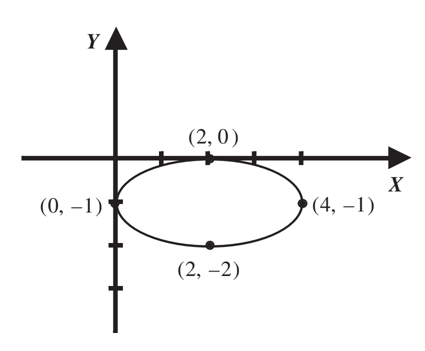
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (0, – 1), (2, 0), (4, – 1) y (2, – 2).

**Solución**

Se localizan los puntos:




Se sustituyen los puntos en la ecuación general de la elipse tomando $A = 1$; es decir se sustituye en $x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Punto (0, – 1)

$$(0)^2 + (-1)^2 C + (0)D + (-1)E + F = 0 \rightarrow C - E + F = 0$$

Punto (2, 0)

$$(2)^2 + (0)^2 C + (2)D + (0)E + F = 0 \rightarrow 2D + F = -4$$

Punto (4, – 1)

$$(4)^2 + (-1)^2 C + (4)D + (-1)E + F = 0 \rightarrow C + 4D - E + F = -16$$

Punto (2, – 2)

$$(2)^2 + (-2)^2 C + (2)D + (-2)E + F = 0 \rightarrow 4C + 2D - 2E + F = -4$$

Se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos resultados son:

$$C = 4,\ D = -4,\ E = 8 \text{ y } F = 4$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general de la elipse:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y, finalmente, se obtiene la ecuación de la elipse:

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (0, 3), (2, 0), $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$.

**Solución**

Se sustituyen los puntos en la ecuación general de la elipse tomando $A = 1$:

Punto (0, 3)

$$(0)^2 + (3)^2 C + (0)D + (3)E + F = 0 \rightarrow 9C + 3E + F = 0$$

Punto (2, 0)

$$(2)^2 + (0)^2 C + (2)D + (0)E + F = 0 \rightarrow 2D + F = -4$$

Punto $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$(1)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 C + (1)D + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)E + F = 0 \rightarrow 27C + 4D + 6\sqrt{3}E + 4F = -4$$

Punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)^2 C + \left(\frac{1}{2}\right)D + \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)E + F = 0 \rightarrow 135C + 8D + 12\sqrt{15}E + 16F = -4$$

Se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos resultados son:

$$C = \frac{4}{9},\ D = 0,\ E = 0 \text{ y } F = -4$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general de la elipse:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad x^2 + \frac{4}{9}y^2 - 4 = 0$$

Finalmente el resultado es la ecuación de la elipse:

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

# EJERCICIO 36

Encuentra la ecuación de la elipse que pasa por los siguientes puntos:

1. $(-7, -1)$, $(-3, 2)$, $(1, -1)$ y $(-3, -3)$
2. $(2, 5)$, $(0, 2)$, $(2, -1)$ y $(4, 2)$
3. $(4, 4)$, $(5, 2)$, $(4, 0)$ y $(3, 2)$
4. $(0, 0)$, $(3, 1)$, $\left(1, \frac{2\sqrt{2}+3}{3}\right)$ y $\left(1, \frac{3-2\sqrt{2}}{3}\right)$
5. $(-3, 0)$, $(2, 2)$, $\left(1, \frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$ y $\left(3, \frac{-4\sqrt{6}}{5}\right)$
6. $(-4, 0)$, $(0, 2)$, $\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ y $\left(-2, \sqrt{3}\right)$
7. $\left(0, -\sqrt{3}\right)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$
8. $\left(1, \frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$, $\left(3, \frac{12}{5}\right)$, $\left(-2, -\frac{3}{5}\sqrt{21}\right)$ y $\left(-4, \frac{9}{5}\right)$
9. $\left(0, \frac{3\sqrt{3}-6}{2}\right)$, $\left(-2, \frac{-3\sqrt{3}-6}{2}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{5}-3}{3}, -1\right)$ y $\left(\frac{-2\sqrt{5}-3}{3}, -5\right)$
10. $\left(1, \frac{-5\sqrt{3}-2}{2}\right)$, $\left(\frac{-2\sqrt{21}+10}{5}, -3\right)$, $\left(3, \frac{5\sqrt{3}-2}{2}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{21}+10}{5}, 1\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1** Una de las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario dice que "Los planetas se mueven en órbitas elípticas, donde el Sol precisamente se ubica en uno de sus focos".

Determina la longitud del semieje menor de la órbita de Mercurio, si su excentricidad es de 0.206 y su semieje mayor mide 0.387 unidades astronómicas (UA).

**Solución**

El semieje mayor es $a = 0.387$ y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = 0.206$ :

$$\frac{c}{0.387} = 0.206 \quad \rightarrow \quad c = 0.079722$$

Al sustituir en $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(0.387)^2 - (0.079722)^2} = 0.3787$ UA

**2** La tercera ley de Kepler dice que "El cuadrado del periodo $p$ de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". Determina el periodo de Saturno, si su distancia media al Sol es de 9.539 UA.

**Solución**

$$p^2 = a^3 \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{a^3} \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{(9.539)^3} = 29.46 \text{ años}$$

## Ecuación de una recta tangente a una elipse

Si se tiene una elipse con centro en el origen y una recta tangente en el punto $(x_0, y_0)$, la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad \text{Vertical: } \frac{x_0x}{b^2}+\frac{y_0y}{a^2}=1$$

Si se tiene una parábola con vértice $(h, k)$ fuera del origen y una recta tangente en el punto $(x_0, y_0)$, la ecuación de la recta está dada por:

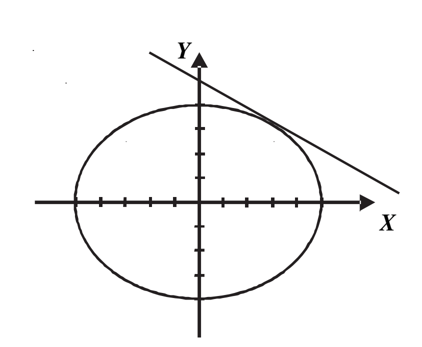
$$\text{Horizontal: } \frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$$

$$\text{Vertical: } \frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2}=1$$

### Ejemplo

Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, en el punto $\left(3,\frac{16}{5}\right)$.

### Solución




Se expresa la ecuación en su forma ordinaria:

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Donde $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$

Al sustituir estos valores y el punto $\left(3,\frac{16}{5}\right)$ en la fórmula $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, se obtiene:

$$\frac{(3)x}{25}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)y}{16}=1$$

Al simplificar se determina que:

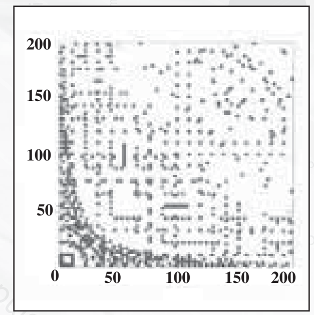
$$\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1 \rightarrow 3x + 5y - 25 = 0$$

## EJERCICIO 37

1. Determina la longitud del semieje menor de la órbita de Neptuno, si su excentricidad es de 0.009 y su semieje mayor mide 30.06 UA.
2. Calcula la longitud del semieje menor de la órbita de Venus, si su excentricidad es de 0.007 y su semieje mayor mide 0.723 UA.
3. Encuentra el periodo de Marte si su distancia media al Sol es de 1.52 UA.
4. Obtén el periodo de Júpiter si su distancia media al Sol es de 5.2 UA.
5. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $9x^2 + y^2 - 9 = 0$, en el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$?
6. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $16x^2 + 25y^2 - 96x - 100y - 156 = 0$, en el punto $\left(6,\frac{26}{5}\right)$?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## PALINDROMÍA




**Palíndromo numérico**
que forma una hipérbola

Palindromía son aquellas frases o cantidades numéricas que pueden ser leídas de derecha a izquierda o viceversa.

**A TI MI AMA IMITA**
**TU MAMA MAMUT**

Un ejemplo de un palíndromo numérico es el gráfico de la izquierda, en el cual se observa que en la zona inferior izquierda se distingue perfectamente una hipérbola. El eje horizontal da los enteros *x* y el vertical indica el factor *a*. Un punto en el gráfico indica que *ax* es palíndromo.

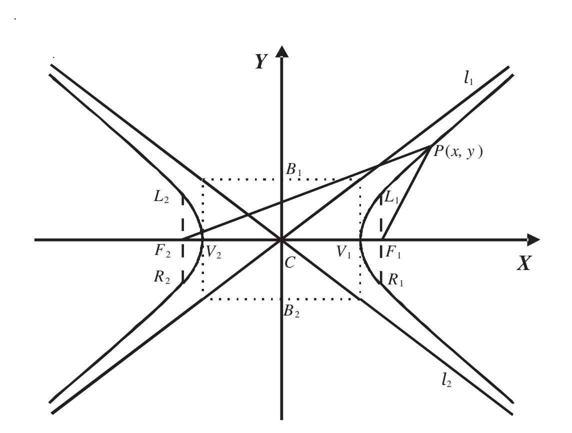
Se observa que la distribución no es uniforme, aunque se aprecian unas interesantes regularidades. Por ejemplo los puntos bastante equidistantes para $x = 45$, $x = 101$, $x = 11$ y otros.

## Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

$$\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a$$

**Gráfica**




**Elementos**

$C$: Centro

$V_1$ y $V_2$: Vértices

$F_1$ y $F_2$: Focos

$B_1$ y $B_2$: Extremos del eje conjugado

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje transverso o real)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje conjugado o imaginario)

Condición: $c^2 = a^2 + b^2; c > b, c > a$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

$l_1$ y $l_2$: Asíntotas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos (5, 0) y (– 5, 0), es siempre igual a 8 unidades.

**Solución**

Se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a los puntos fijos (focos),

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \text{ y } \overline{PF_2} = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Y se aplica la definición de hipérbola,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2} \rightarrow \left(\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 = \left(8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2$$

Al desarrollar se determina que:

$$(x-5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2 \rightarrow -4\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 16$$

Ahora al elevar ambos miembros al cuadrado resulta que,

$$\left(-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2 = (5x+16)^2 \rightarrow 16(x^2 + y^2 + 10x + 25) = 25x^2 + 160x + 256$$

Finalmente, se simplifica y se obtiene la ecuación: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

**2** Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos (–2, 2) y (4, 2), es igual a 4.

**Solución**

Se aplica la definición y se obtiene:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=4$$

Se despeja una raíz y se elevan al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(4+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+(x-4)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+4x+4=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+x^2-8x+16$$

$$12x-28=8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$3x-7=2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$(3x-7)^2=\left(2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$9x^2-42x+49=4x^2-32x+64+4y^2-16y+16$$

$$5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$$

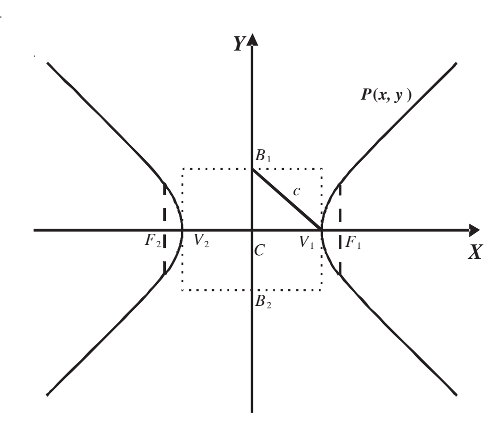
## EJERCICIO **38**

Resuelve lo siguiente:

1. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 0) y (3, 0), es siempre igual a 4
2. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–5, 0) y (5, 0), es siempre igual a 6
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, –7) y (0, 7), es siempre igual a 12
4. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, 4) y (0, –4), es siempre igual a 5
5. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $\left(\sqrt{7},0\right)$ y $\left(-\sqrt{7},0\right)$, es siempre igual a 4
6. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (9, 4) y (1, 4), es siempre igual a 6
7. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 7) y (–3, –3), es siempre igual a 8

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de una hipérbola con centro en el origen




En la figura:

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$

$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = b$

$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$, entonces, $\overline{V_1V_2} = 2a$ al ser $V_1$ un punto de la hipérbola se tiene que: $\overline{V_1F_2} - \overline{V_1F_1} = 2a$, por tanto, la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$.

La distancia de $B_1(0, b)$ a $V_1(a, 0)$ es: $\overline{B_1V_1} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$, de donde $b^2 = c^2 - a^2$, sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola, al hallar la distancia de $P$ a los puntos fijos $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ y al aplicar la definición $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, se obtiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Se despeja una radical: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre $4a$:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \rightarrow \frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica:

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \rightarrow \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

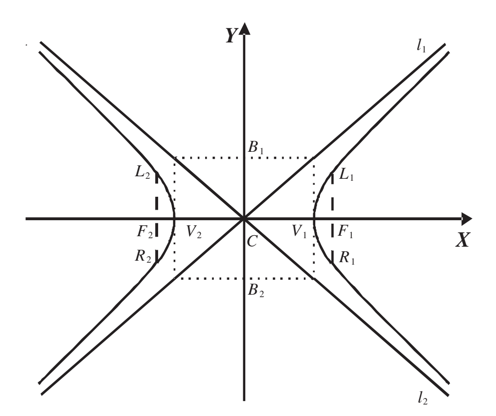
$\dfrac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 + a^2 - c^2 = 0 \rightarrow \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$, se divide entre $c^2 - a^2$:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, pero $b^2 = c^2 - a^2$, se sustituye y se obtiene: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, la cual es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en el origen.

De forma análoga para una hipérbola vertical, resulta la ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

## Elementos y ecuación

### *Hipérbola horizontal*




**Ecuación canónica**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

**Elementos**

Vértices: $V(\pm a, 0)$

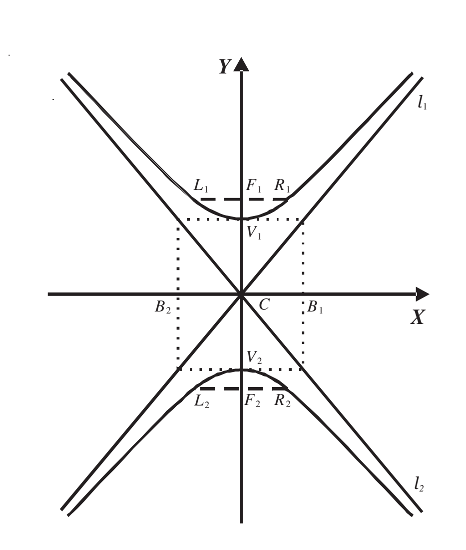
Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y = \frac{b}{a}x \qquad l_2: y = -\frac{b}{a}x$$

### *Hipérbola vertical*




**Ecuación canónica**

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

**Elementos**

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

Extremos del eje conjugado: $B(\pm b, 0)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1: y = \frac{a}{b}x \qquad l_2: y = -\frac{a}{b}x$$

Para hipérbolas horizontales y verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Eje transverso: $2a$, eje conjugado: $2b$, eje focal: $2c$.

## Dada la ecuación, obtener sus elementos

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina los elementos y traza la gráfica de la hipérbola, cuya ecuación es:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

**Solución**

Se transforma la ecuación a la forma canónica:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Se divide entre el término independiente y se simplifica:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ Ecuación en su forma canónica.}$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

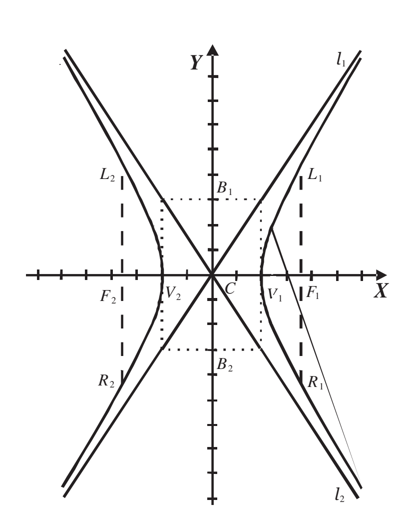
De la cual se obtiene el semieje transverso $a$ y el semieje conjugado $b$:

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \text{ y } b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

Se aplica la condición para encontrar el valor de $c$ (distancia del centro al foco):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Al sustituir: $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$ , se obtiene:




Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0) = F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$

Extremos del eje conjugado:

$$B(0, \pm b) = B(0, \pm 3)$$

Asíntotas:

$$l_1: y = \frac{3}{2}x \rightarrow 3x - 2y = 0$$

$$l_2: y = -\frac{3}{2}x \rightarrow 3x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(2) = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(3) = 6$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

**2** Determina los elementos de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$.

**Solución**

Se transforma la ecuación $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$ a su forma canónica:

$$x^2 - 4y^2 = -4$$

$$\frac{x^2}{-4} - \frac{4y^2}{-4} = \frac{-4}{-4}$$ Se divide entre el término independiente.

$$\frac{x^2}{-4} + \frac{y^2}{1} = 1$$ Se simplifican las fracciones.

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$$ Ecuación en su forma canónica.

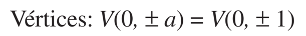
Es una hipérbola vertical de la forma: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

De la cual $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, por tanto, $a = 1$ y $b = 2$.

El valor de $c$ es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Con los valores de $a = 1$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$, se determinan los elementos y la gráfica.

Vértices: $V(0, \pm a) = V(0, \pm 1)$



Focos: $F(0, \pm c) = F(0, \pm \sqrt{5})$

Extremos del eje conjugado:

$$B(\pm b, 0) = B(\pm 2, 0)$$

Asíntotas

$$l_1: y = \frac{1}{2}x \rightarrow x - 2y = 0$$

$$l_2: y = -\frac{1}{2}x \rightarrow x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{1} = 8$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(1) = 2$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

3 Determina los vértices, los focos, los extremos del eje conjugado, la excentricidad, el lado recto y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 8y^2 = 8$.

**Solución**

Al transformar la ecuación a su forma canónica se determina que:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 8$ y $b^2 = 1$, por tanto, $a = 2\sqrt{2}$ y $b = 1$, el valor de $c$ se obtiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

Los elementos son:

Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Focos: $F(\pm c, 0) = F(\pm 3, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm 1)$

Asíntota $l_1$: $y = \frac{b}{a}x$

$$x - 2\sqrt{2}y = 0$$

Asíntota $l_2$: $y = -\frac{b}{a}x$

$$x + 2\sqrt{2}y = 0$$

## EJERCICIO 39

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:

1. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$
2. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
3. $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1$
4. $\frac{y^2}{4a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
5. $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$
6. $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
7. $4y^2 - x^2 - 4 = 0$
8. $5y^2 - 16x^2 + 400 = 0$
9. $4x^2 - 9y^2 + 144 = 0$
10. $x^2 - y^2 + 4 = 0$
11. $5x^2 - 6y^2 + 30 = 0$
12. $12x^2 - 5y^2 - 60 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Dados sus elementos, obtener la ecuación

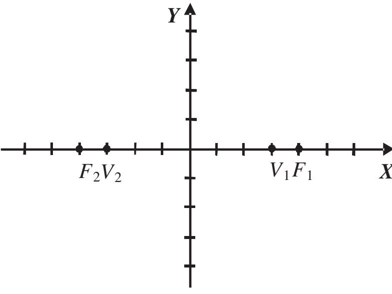
**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola cuyos vértices y focos son los puntos (± 3, 0) y (± 4, 0), respectivamente?

**Solución**

Se localizan los puntos en el plano cartesiano:




Y el resultado es una hipérbola horizontal con centro en el origen, semieje transverso $a = 3$ y semieje focal $c = 4$.

El valor de $b$ es: $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

Los valores de $a = 3$ y $b = \sqrt{7}$ se sustituyen en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Y se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1 \quad \text{o} \quad 7x^2-9y^2-63=0$$

2 Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de sus focos, el punto $\left(2\sqrt{3},\ 0\right)$ y el lado recto $2\sqrt{2}$.

**Solución**

De los elementos que se tienen resulta que:

$$c=2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \frac{2b^2}{a}=2\sqrt{2}$$

Se despeja $b^2$ de la fórmula del lado recto en términos de $a$:

$$b^2=\sqrt{2}a$$

Se sustituyen en la condición los valores de $c$ y $b^2$, se simplifica y resuelve la ecuación.

$$c^2=a^2+b^2 \rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2=a^2+\sqrt{2}a$$

$$12=a^2+\sqrt{2}a$$

$$a^2+\sqrt{2}\,a-12=0$$

$$(a+3\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})=0$$

$$a=-3\sqrt{2} \text{ y } a=2\sqrt{2}$$

$a=2\sqrt{2}$, por tanto,

$$b^2=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right)=4 \rightarrow b=2$$

Se sustituye en la fórmula $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y se obtiene:

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}-\frac{y^2}{(2)^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1 \rightarrow x^2-2y^2-8=0$$

3 Determina la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (0, 3), (0, – 3) y lado recto igual a $\frac{8}{3}$.

**Solución**

Se obtiene la distancia entre los vértices.

$$2a = \sqrt{(0-0)^2+(3+3)^2} = 6$$
$$a = \frac{6}{2}$$
$$a = 3$$

Si el lado recto es $\frac{8}{3}$ y $a = 3$, entonces:

$$\frac{2b^2}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

Los vértices son de la forma (0, – $a$) y (0, $a$), por tanto, la hipérbola es vertical y para determinar la ecuación se utiliza $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Al sustituir se obtiene: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

Y finalmente al transformar a su forma general se determina que:

$$4y^2 - 9x^2 - 36 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$$

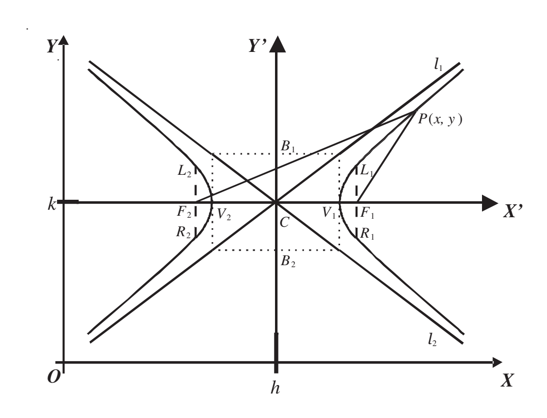
## EJERCICIO 40

Determina la ecuación de la hipérbola que cumpla con las siguientes características:

1. $V(0, \pm 3)$ y $F(0, \pm 4)$
2. $V(\pm 4, 0)$ y $F(\pm 5, 0)$
3. $V(0, \pm\sqrt{6})$ y $F(0, \pm\sqrt{10})$
4. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$
5. $V(\pm 1, 0)$ y $F(\pm\sqrt{5}, 0)$
6. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{7}, 0)$
7. $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$ y lado recto = $\frac{8}{3}$
8. $F_1\left(0, \sqrt{41}\right)$, $F_2\left(0, -\sqrt{41}\right)$ y lado recto = $\frac{25}{2}$
9. $V_1(6, 0)$, $V_2(-6, 0)$, excentricidad = $\frac{\sqrt{5}}{2}$
10. Centro en el origen, vértice y foco en los puntos ($2\sqrt{3}$, 0) y (4, 0) respectivamente y eje conjugado sobre el eje de las ordenadas.
11. Centro en el origen, eje focal sobre el eje de las ordenadas y la longitud de su eje conjugado y lado recto $\sqrt{20}$ y $\frac{5}{3}\sqrt{6}$, respectivamente.
12. Centro en el origen, eje transverso igual a 4 y sobre el eje de las abscisas, y una de sus asíntotas es la ecuación $\sqrt{3}x - 2y = 0$
13. Centro en el origen, eje conjugado sobre el eje de las ordenadas, lado recto $2\sqrt{3}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{6}}{2}$
14. Centro en el origen, eje transverso sobre el eje de las ordenadas, lado recto $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{66}}{6}$
15. Asíntotas las rectas $4x + 3y = 0$ y $4x - 3y = 0$, eje imaginario igual a 8 unidades (dos soluciones).
16. Extremos del eje conjugado $B_1(0, 1)$, $B_2(0, -1)$ y excentricidad $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$
17. Eje focal sobre $X$, eje conjugado $\sqrt{20}$ y la longitud de cada lado recto $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
18. Pasa por los puntos $\left(\frac{10}{3}, 4\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{13}, -2\right)$, eje transverso sobre el eje $X$.
19. Pasa por los puntos $\left(6, 2\sqrt{3}\right)$ y $\left(9, 4\sqrt{2}\right)$, eje conjugado sobre el eje $Y$.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Ecuación de una hipérbola con centro en el punto (*h*, *k*)




Para una hipérbola horizontal con centro fuera del origen en el punto $(h, k)$, se hace una traslación de los ejes $XY$ al punto $C(h, k)$.

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir $x'$, $y'$ en la ecuación se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

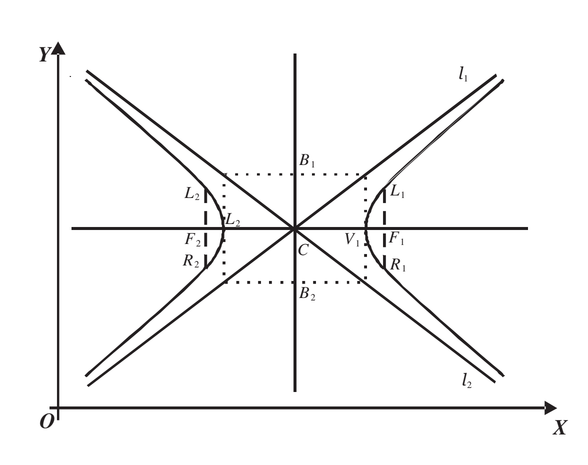
Del mismo modo se obtiene la ecuación de una hipérbola vertical con centro $(h, k)$ fuera del origen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Al simplificar se obtendrá una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $A$ y $C$ varían en signo.

## Elementos y ecuación

### *Hipérbola horizontal*




**Ecuación ordinaria**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

**Elementos**

Vértices: $V(h \pm a, k)$

Focos: $F(h \pm c, k)$

Extremos del eje conjugado:

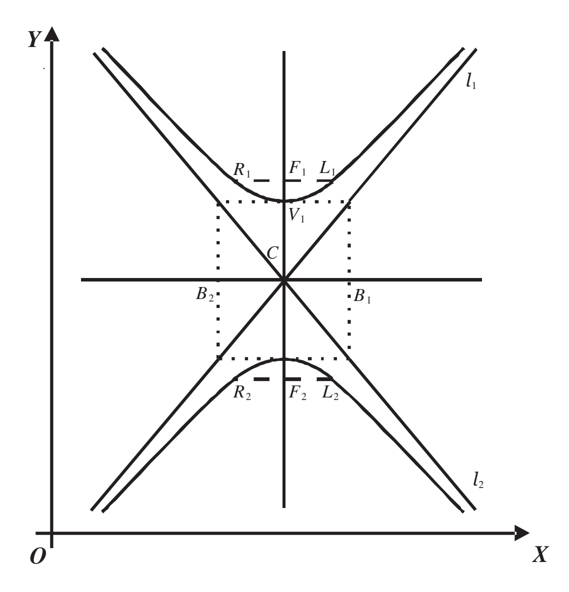
$$B(h, k \pm b)$$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h)$$

$$l_2: y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

*Hipérbola vertical*




**Ecuación ordinaria**

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

**Elementos**

Vértices: $V\ (h,\ k \pm a)$

Focos: $F\ (h,\ k \pm c)$

Extremos del eje conjugado

$B\ (h \pm b,\ k)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1\text{: } y-k=\frac{a}{b}(x-h)$$

$$l_2\text{: } y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$$

Para hipérbolas horizontales o verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Ecuación general de la hipérbola:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con $A$ y $C$ de signo contrario.

Dada la ecuación obtener sus elementos

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina los elementos de la hipérbola cuya ecuación es: $4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x - 113 = 0$.

**Solución**

$4y^2 + 8y - 9x^2 - 54x = 113$

$4(y^2 + 2y) - 9(x^2 + 6x) = 113$ Se factorizan los coeficientes de los términos cuadráticos.

$4(y^2 + 2y + (1)^2) - 9(x^2 + 6x + (3)^2) = 113 + 4(1)^2 - 9(3)^2$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$4(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 6x + 9) = 113 + 4 - 81$

$4(y + 1)^2 - 9(x + 3)^2 = 36$ Se factoriza.

Se dividen ambos miembros entre 36 para obtener la ecuación en su forma ordinaria.

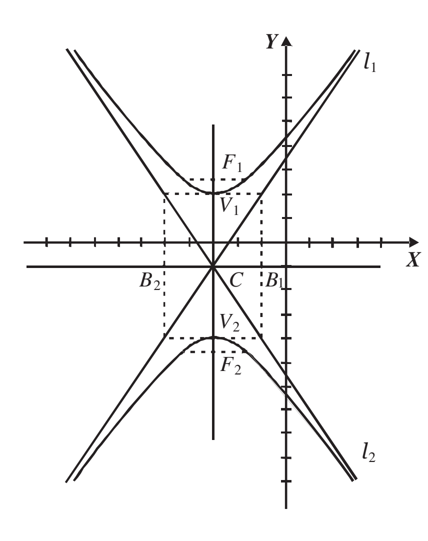
$$\frac{4(y+1)^2}{36} - \frac{9(x+3)^2}{36} = \frac{36}{36}, \quad \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$$

Es una hipérbola vertical de elementos:

$$\text{Centro } (-3, -1);\ a = \sqrt{9} = 3 \ \text{ y } b = \sqrt{4} = 2$$

El valor de $c$ es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Los elementos se obtienen al sustituir:




Vértices: $V\,(h, k \pm a)$

$V_1\,(-3, -1 + 3) = (-3, 2)$

$V_2\,(-3, -1 - 3) = (-3, -4)$

Focos: $F\,(h, k \pm c)$

$F_1\left(-3, -1 + \sqrt{13}\right) = (-3, 2.6)$

$F_2\left(-3, -1 - \sqrt{13}\right) = (-3, -4.6)$

Extremos del eje conjugado: $B\,(h \pm b, k)$

$B_1\left(-3 + 2, -1\right) = (-1, -1)$

$B_2\left(-3 - 2, -1\right) = (-5, -1)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(3) = 6$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Asíntotas

$$l_1: y - k = \frac{a}{b}(x - h) \rightarrow l_1: y + 1 = \frac{3}{2}(x + 3) \rightarrow 3x - 2y + 7 = 0$$

$$l_2: y - k = -\frac{a}{b}(x - h) \rightarrow l_2: y + 1 = -\frac{3}{2}(x + 3) \rightarrow 3x + 2y + 11 = 0$$

**2** Reduce la ecuación de la hipérbola a su forma ordinaria, determina sus elementos y grafica la curva.

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$

**Solución**

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$
$$5(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 6y) = 51$$
$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 51 + 5 - 36$$
$$5(x - 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 20$$

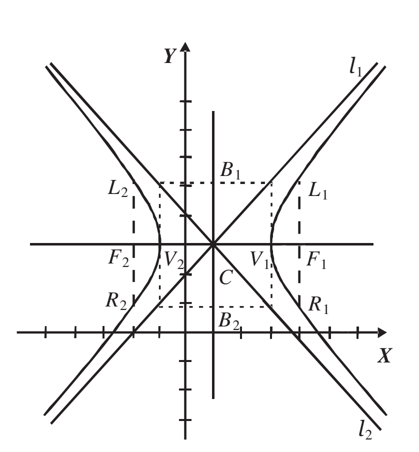
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1 \text{ Ecuación en su forma ordinaria.}$$

El centro, el semieje transverso y el semieje conjugado son:

$$C\ (1, 3);\ a = \sqrt{4} = 2 \text{ y } b = \sqrt{5}$$

El valor de $c$ es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$.

Se obtienen los elementos sustituyendo los valores anteriores y posteriormente se grafica:




Vértices: $V\ (h \pm a, k)$

$V_1\ (3, 3)\ V_2\ (-1, 3)$

Focos: $F\ (h \pm c, k)$

$F_1\ (4, 3)\ F_2\ (-2, 3)$

Extremos del eje conjugado: $B\ (h, k \pm b)$

$B_1\ (1, 5.2)\ B_2\ (1, 0.8)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 6$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2\sqrt{5}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

Asíntotas

$$l_1: y - 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow \sqrt{5}x - 2y + \left(6 - \sqrt{5}\right) = 0$$

$$l_2: y - 3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow \sqrt{5}x + 2y - \left(6 + \sqrt{5}\right) = 0$$

# EJERCICIO 41

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:

1. $\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$
2. $\frac{y^2}{4}-(x+1)^2=1$
3. $\frac{x^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$
4. $x^2-4y^2-2x+16y-7=0$
5. $9x^2-4y^2+18x-24y+9=0$
6. $9x^2-16y^2+36x+32y-124=0$
7. $4x^2-9y^2-4x+18y-44=0$
8. $4x^2-y^2+24x+40=0$
9. $x^2-y^2-x+y+4=0$
10. $4x^2-y^2-4y-40=0$
11. $x^2-y^2-6x-4y+4=0$
12. $9x^2-y^2-36x-4y+41=0$
13. $4x^2-9y^2-4x+6y-36=0$
14. $x^2-2y^2-8x+12y-10=0$
15. $6x^2-5y^2+12x-30y-9=0$
16. $3x^2-4y^2+24x-8y+32=0$
17. $x^2-2y^2-4x+20y-58=0$
18. $x^2-y^2+14x-2y+46=0$
19. $2x^2-y^2+28x-2y+95=0$
20. $4x^2-3y^2+8x+30y-83=0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Dados sus elementos obtener la ecuación

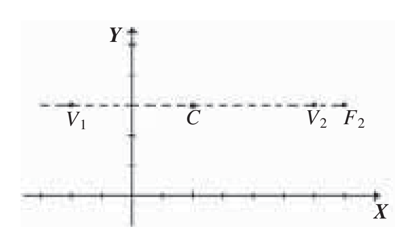
**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la ecuación general de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (–2, 3) y (6, 3), un foco se localiza en el punto (7, 3).

**Solución**

Se localizan los puntos en el plano:




Se obtiene el centro $C(2, 3)$, el valor del semieje transverso $a$ es la distancia de cualquier vértice al centro y el valor del semieje focal $c$ es la distancia del foco al centro, es decir:

$$a = 4 \text{ y } c = 5$$

Para determinar $b$ se sustituyen los valores en la condición:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Es una hipérbola horizontal, por tanto, la ecuación es del tipo: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Se sustituyen $C(2, 3)$, $a = 4$ y $b = 3$:

$$\frac{(x-2)^2}{(4)^2} - \frac{(y-3)^2}{(3)^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \text{ Ecuación en su forma ordinaria.}$$

Se obtiene la ecuación en su forma general:

Se multiplica la ecuación por 144, $144\left[\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right]$

Se desarrollan los binomios, $9(x-2)^2 - 16(y-3)^2 = 144$

Se multiplica y simplifica, $9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = 144$

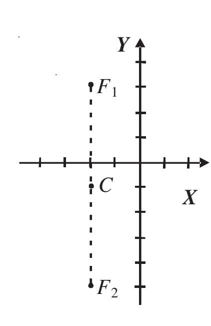
$$9x^2 - 36x + 36 - 16y^2 + 96y - 144 - 144 = 0$$

La ecuación general es: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 252 = 0$

2 Determina la ecuación general de la hipérbola cuyos focos son los puntos (–2, 3), (–2, –5) y su lado recto $\frac{14}{3}$.

**Solución**

Se grafican en el plano cartesiano los elementos conocidos:




Se obtienen las coordenadas del centro y el valor del semieje focal $c$.

$$C(-2,-1) \text{ y } c=4$$

El lado recto es $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}=\frac{14}{3}$, se despeja $b^2$:

$$\frac{2b^2}{a}=\frac{14}{3} \rightarrow b^2=\frac{7}{3}a$$

Se sustituyen $c = 4$ y $b^2=\frac{7}{3}a$ en la condición y se resuelve la ecuación.

$$c^2=a^2+b^2 \rightarrow (4)^2=a^2+\frac{7}{3}a$$

$$16=a^2+\frac{7}{3}a$$

$$0=3a^2+7a-48$$

$$(3a+16)(a-3)=0$$

De la ecuación $a = 3$, el valor del semieje conjugado es:

$$b^2=\frac{7}{3}a \rightarrow b^2=\frac{7}{3}(3)=7 \rightarrow b=\sqrt{7}$$

La hipérbola es vertical, la ecuación se obtiene al sustituir las coordenadas del centro y el valor de $a$ y el valor de $b$ en: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

Forma ordinaria: $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{7}=1$

Forma general: $7y^2 - 9x^2 + 14y - 36x - 92 = 0 \rightarrow 9x^2 - 7y^2 + 36x - 14y + 92 = 0$

# EJERCICIO 42

Determina las ecuaciones de las hipérbolas que cumplan con las siguientes condiciones:

1. $F_1(5, 1)$, $F_2(-5, 1)$, $V_1(3, 1)$, $V_2(-3, 1)$
2. $F_1(-4, 5)$, $F_2(-4, -7)$, $V_1(-4, 4)$, $V_2(-4, -6)$
3. $F_1(7, -2)$, $F_2(-3, -2)$, $V_1(6, -2)$, $V_2(-2, -2)$
4. $F_1(1, 6)$, $F_2(1, 0)$, $V_1(1, 5)$, $V_2(1, 1)$
5. $F_1(8, 2)$, $F_2(-2, 2)$ y excentricidad $e = \frac{5}{4}$
6. $F_1(-3, 3)$, $F_2(-9, 3)$ y $LR = 5$
7. $F_1(-2, 3)$, $F_2(6, 3)$ y $LR = 12$
8. Extremos del eje conjugado, los puntos $(-1+\sqrt{7}, 3)$ y $(-1-\sqrt{7}, 3)$, $e = \frac{4}{3}$
9. Eje transverso paralelo al eje de las abscisas, excentricidad igual a $\frac{\sqrt{6}}{2}$, vértices, los puntos $(4-2\sqrt{2}, 3)$ y $(4+2\sqrt{2}, 3)$
10. Longitud del lado recto igual a $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ y extremos del eje conjugado, los puntos $(-2+\sqrt{5}, -3)$ y $(-2-\sqrt{5}, -3)$
11. Longitud del lado recto 3 y focos en los puntos $(-4+\sqrt{7}, -1)$ y $(-4-\sqrt{7}, -1)$
12. Centro en $(1, 3)$, eje transverso paralelo al eje $X$, excentricidad $e = \frac{5}{4}$ y $LR = \frac{9}{2}$
13. Los extremos de un lado recto son los puntos $\left(-1-\frac{4\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ y $\left(-1+\frac{4\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ las ecuaciones de sus asíntotas, las rectas $\sqrt{5}x+2y+\sqrt{5}-2=0$ y $\sqrt{5}x-2y+\sqrt{5}+2=0$
14. Eje transverso paralelo al eje $X$ es igual a 4, excentricidad $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y pasa por los puntos $(-4, 1)$ y $\left(1, 1+\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Casos especiales

Existen ecuaciones que no precisamente representan una hipérbola y que sólo son un par de rectas concurrentes.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina si la ecuación $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$ representa una hipérbola o dos rectas concurrentes.

**Solución**

Al transformar la ecuación a su forma ordinaria se determina que:

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 4y^2 = -1 \quad \rightarrow \quad (x^2 - 2x + 1) - 4y^2 = -1 + 1$$

$$(x - 1)^2 - 4(y - 0)^2 = 0$$

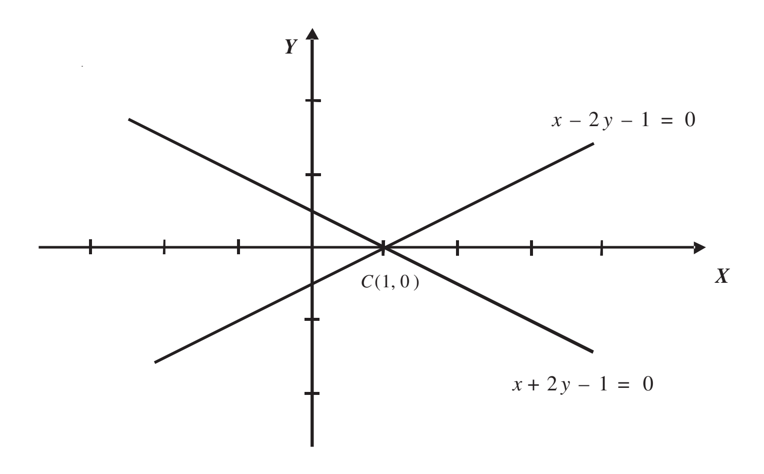
La ecuación es una diferencia de cuadrados, la cual se factoriza,

$$[(x - 1) + 2(y - 0)]\,[(x - 1) - 2(y - 0)] = 0 \quad \rightarrow \quad [x - 1 + 2y]\,[x - 1 - 2y] = 0$$

Se igualan con cero cada uno de los factores y se obtienen las siguientes rectas:

$$x + 2y - 1 = 0, \qquad x - 2y - 1 = 0$$

La representación gráfica es:



2 ¿Cuál es el valor de $K$ para que la ecuación $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + K = 0$ represente un par de rectas concurrentes?

**Solución**

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + K = 0 \rightarrow x^2 - 4y^2 + 4x + 24y = -K$$
$$(x^2 + 4x) - 4(y^2 - 6y) = -K$$
$$(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 - 6y + 9) = -K + 4 - 36$$
$$(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = -K - 32$$

Para que la ecuación represente dos rectas concurrentes, el segundo miembro de la ecuación debe ser cero:

$$-K - 32 = 0$$
$$-K = 32$$
$$K = -32$$

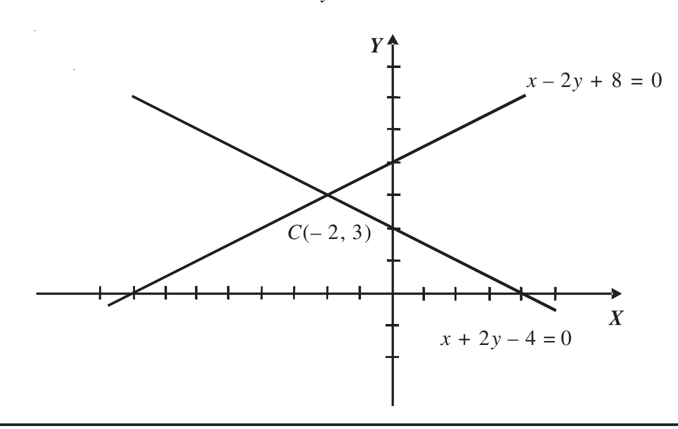
Se sustituye el valor de $K = -32$ en la ecuación $(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = -K - 32$,

$$(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = 0$$
$$[(x + 2) + 2(y - 3)]\,[(x + 2) - 2(y - 3)] = 0$$
$$(x + 2y - 4)\,(x - 2y + 8) = 0$$

Las ecuaciones de las rectas cuando $K = -32$, son:

$$x + 2y - 4 = 0$$
$$x - 2y + 8 = 0$$

***Gráfica:***




# EJERCICIO **43**

Determina el valor de $K$ en las siguientes ecuaciones para que representen un par de rectas concurrentes.

1. $9x^2 - 4y^2 - 18x + 8y + K = 0$
2. $2x^2 - y^2 + 4x + 4y + K = 0$
3. $9x^2 + 54x - y^2 + 4y + K = 0$
4. $3x^2 - 2y^2 - 2x + 2y + K = 0$
5. $x^2 - 12y^2 - 2x + K = 0$
6. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + K = 0$
7. $25x^2 - 4y^2 - 100x + 24y + K = 0$
8. $y^2 - 4x^2 + 24x - 2y + K = 0$
9. $x^2 - y^2 - 2x - 2y + K = 0$
10. $9y^2 - 4x^2 + 16x - 18y + K = 0$
11. $x^2 - 4y^2 - 4x - 24y + K = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación de una recta tangente a una hipérbola en un punto cualquiera

Se tiene una hipérbola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto $(x_0, y_0)$, la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$\text{Vertical: } \frac{y_0 y}{a^2} - \frac{x_0 x}{b^2} = 1$$

Se tiene una hipérbola con centro $(h, k)$ fuera del origen y una recta tangente en el punto $(x_0, y_0)$, la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{(x_0 - h)(x - h)}{a^2} - \frac{(y_0 - k)(y - k)}{b^2} = 1$$

$$\text{Vertical: } \frac{(y_0 - k)(y - k)}{a^2} - \frac{(x_0 - h)(x - h)}{b^2} = 1$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$, en el punto $\left(4, \frac{7}{3}\right)$

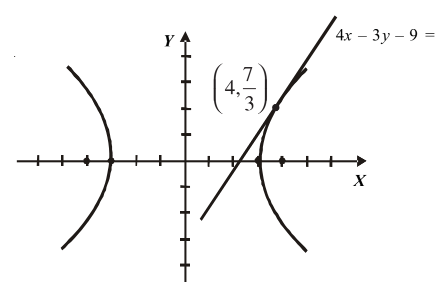
**Solución**

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$7x^2 - 9y^2 - 63 = 0 \rightarrow 7x^2 - 9y^2 = 63 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \text{ Es una hipérbola horizontal.}$$

Entonces $a^2 = 9$, $b^2 = 7$, se sustituyen estos valores y el punto en la fórmula: $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

$$\frac{(4)x}{9} - \frac{\left(\frac{7}{3}\right)y}{7} = 1 \rightarrow \frac{4x}{9} - \frac{7y}{21} - 1 = 0 \rightarrow \frac{4x}{9} - \frac{y}{3} - 1 = 0 \rightarrow 4x - 3y - 9 = 0$$




Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es: $4x - 3y - 9 = 0$.

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, en el punto $\left(7, \frac{21}{4}\right)$.

**Solución**

De la ecuación $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, se obtiene que $C(h, k) = C(2, 3)$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, se sustituyen estos datos y el punto $(x_0, y_0) = \left(7, \frac{21}{4}\right)$ en: $\frac{(x_0 - h)(x - h)}{a^2} - \frac{(y_0 - k)(y - k)}{b^2} = 1$

$$\frac{(7-2)(x-2)}{16} - \frac{\left(\frac{21}{4} - 3\right)(y-3)}{9} = 1 \rightarrow \frac{5(x-2)}{16} - \frac{y-3}{4} = 1 \rightarrow 5x - 4y - 14 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente a la hipérbola es: $5x - 4y - 14 = 0$.

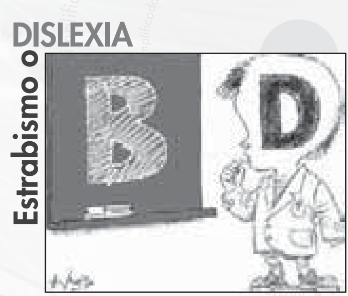
# EJERCICIO 44

Resuelve lo siguiente:

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$, en el punto $\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$
2. Obtén la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$, en el punto $\left(\frac{9}{5}, -\sqrt{34}\right)$
3. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola cuya ecuación es: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 160y - 508 = 0$ en el punto $\left(-3, \frac{11}{4}\right)$
4. Obtén la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $5x^2 - y^2 - 4x - 2y + 24 = 0$, en el punto $(0, -6)$
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola cuya ecuación es: $x^2 - 17y^2 + 4x + 102y - 166 = 0$, en el punto $(-19, 7)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# ECUACIÓN GENERAL DE CÓNICAS




Estrabismo o dislexia
Estudio de los ejes de Fick.

Estrabismo es toda situación en que los ejes visuales no se cruzan sobre el objeto que se mira.

El ojo realiza movimientos de rotación y de traslación, pero para su tratamiento sólo se estudian los de rotación, ya que los de traslación son despreciables, el estudio se basa únicamente en los ejes de Fick (son los ejes de rotación).

Los ejes que pueden pasar por el centro de rotación (uno para cada movimiento), en el que el eje *Y* anteroposterior coincida con el eje visual y los ejes *X* y *Z* estén contenidos en un plano perpendicular al eje *Y* en el centro de rotación.

## Rotación de ejes

En el sistema de ejes coordenados cuando los ejes rotan un ángulo $\alpha$, manteniendo fijo el origen, los puntos $P(x, y)$ se transforman en $P(x', y')$, a esta transformación se le llama *rotación de ejes*. Los puntos están relacionados con las siguientes ecuaciones:

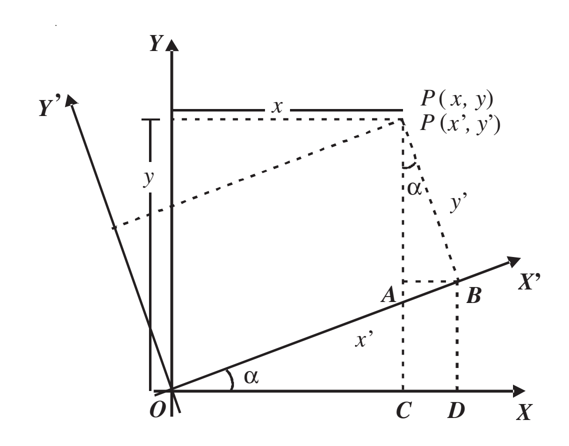
$$x' = x\ cos\ \alpha + y\ sen\ \alpha$$
$$y' = y\ cos\ \alpha - x\ sen\ \alpha$$

En la figura,

$$x = \overline{OD} - \overline{CD}\ ;\ y = \overline{AP} + \overline{AC}$$

Pero $\overline{CD} = \overline{AB}$ y $\overline{AC} = \overline{BD}$, entonces

$$x = \overline{OD} - \overline{AB}\ ;\ y = \overline{AP} + \overline{BD}$$




En el triángulo $PAB$

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{y'}\ ;\ cos\ \alpha = \frac{\overline{AP}}{y'}$$

$$\overline{AB} = y'\ sen\ \alpha,\ \overline{AP} = y'\ cos\ \alpha$$

En el triángulo $ODB$

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BD}}{x'}\ ;\ cos\ \alpha = \frac{\overline{OD}}{x'}$$

$$\overline{BD} = x'\ sen\ \alpha,\ \overline{OD} = x'\ cos\ \alpha$$

Luego, al sustituir en $x = \overline{OD} - \overline{AB}$ ; $y = \overline{AP} + \overline{BD}$

$$x = x'\ cos\ \alpha - y'\ sen\ \alpha;$$

$$y = y'\ cos\ \alpha + x'\ sen\ \alpha$$

Al resolver el sistema se obtiene:

$$x' = x\ cos\ \alpha + y\ sen\ \alpha$$
$$y' = y\ cos\ \alpha - x\ sen\ \alpha$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Un sistema de coordenadas se rota 45°. Determina las coordenadas del punto $A(-1, 2)$ referido al nuevo sistema coordenado $X'Y'$.

**Solución**

Para determinar las nuevas coordenadas $(x', y')$ se utiliza: $x' = x\ cos\ \alpha + y\ sen\ \alpha$; $y' = y\ cos\ \alpha - x\ sen\ \alpha$.

Como el ángulo a rotar es de 45°, se precisa que:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{y}\ cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Al sustituir en las fórmulas, se determina el punto en el nuevo sistema coordenado $X'Y'$.

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

De aquí se deduce que las coordenadas del punto $A(-1, 2)$ en el nuevo sistema de coordenadas son: $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

## Ángulo de rotación

Para determinar el ángulo de rotación, el cual elimina el termino $xy$, se sustituyen las ecuaciones:

$$x = x'\cos\alpha - y'\text{sen }\alpha\ ;\ y = x'\text{sen }\alpha + y'\cos\alpha$$

en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, como a continuación se ejemplifica:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el ángulo de rotación de los ejes necesario para eliminar el término $xy$ de la ecuación.

$$7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 16$$

**Solución**

Se sustituyen las ecuaciones de rotación:

$$x = x'\cos\alpha - y'\text{sen }\alpha;\ y = x'\text{sen }\alpha + y'\cos\alpha$$

$$7(x'\cos\alpha - y'\text{sen }\alpha)^2 - 6\sqrt{3}\,(x'\cos\alpha - y'\text{sen }\alpha)(x'\text{sen }\alpha + y'\cos\alpha) + 13(x'\text{sen }\alpha + y'\cos\alpha)^2 = 16$$

Se desarrollan y se reducen los términos semejantes:

$$(7\cos^2\alpha - 6\sqrt{3}\,\text{sen }\alpha\cos\alpha + 13\,\text{sen}^2\alpha)x'^2 + [12\,\text{sen }\alpha\cos\alpha - 6\sqrt{3}\,(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)]\,x'y'$$

$$+ (7\text{sen}^2\alpha + 6\sqrt{3}\,\text{sen }\alpha\cos\alpha + 13\cos^2\alpha)y'^2 = 16$$

Para eliminar el término en $x'y'$, se iguala con cero el coeficiente de dicho término y se despeja el ángulo $\alpha$.

$$12\,\text{sen }\alpha\cos\alpha - 6\sqrt{3}\,(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) = 0 \rightarrow 6\,\text{sen }2\alpha - 6\sqrt{3}\cos 2\alpha = 0$$

y al dividir entre $\cos 2\alpha$, se obtiene:

$$\tan 2\alpha = \sqrt{3} \rightarrow 2\alpha = 60°$$

Finalmente, el ángulo $\alpha = 30°$.

En el ejemplo anterior se observa que determinar el ángulo de rotación de los ejes es un tanto laborioso, no obstante, una forma práctica es tomar los coeficientes de los términos cuadráticos y el término $xy$ de la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y sustituirlos en la ecuación:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

2 Determina el ángulo de rotación de los ejes necesario para eliminar el término $xy$ de la ecuación.

$$13x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 15y^2 = 36$$

**Solución**

Los valores de $A = 13$, $B = 2\sqrt{3}$ y $C = 15$ se sustituyen en la fórmula:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{15 - 13} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \tan 2\alpha = \sqrt{3} \rightarrow 2\alpha = 60°$$

Por consiguiente, el ángulo $\alpha = 30°$.

## Transformación de la ecuación general de segundo grado

Para transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, a otra que carezca del término $xy$ conociendo el ángulo de rotación $\alpha$, se sustituye dicho ángulo en las fórmulas:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha;\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

y éstas a su vez en la ecuación, desarrollando y simplificando los términos resultantes.

### Ejemplo

Transforma la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$, cuando se giran los ejes un ángulo de 45°.

### Solución

Debido a que el ángulo de rotación es de 45°, se determinan las ecuaciones de rotación.

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}};\ y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación dada, el resultado es:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 3 = 0$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene al final:

$$2y'^2 - \sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y' + 3 = 0$$

## EJERCICIO 45

Rota las siguientes curvas a los ángulos indicados.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0;\ \alpha = 45°$
2. $13x^2 + 2\sqrt{3}xy + 15y^2 - 48 = 0;\ \alpha = 150°$
3. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 8 = 0;\ \alpha = 120°$
4. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0;\ \alpha = 30°$
5. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 6 = 0;\ \alpha = 135°$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Transformación aplicando las identidades trigonométricas

Para transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a otra que carezca de término $xy$ se utilizan las siguientes fórmulas:

$$tan\ 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

Y las identidades trigonométricas

$$cos\ 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{tan^2 2\alpha + 1}};\ sen\ \alpha = \sqrt{\frac{1-cos\ 2\alpha}{2}};\ cos\ \alpha = \sqrt{\frac{1+cos\ 2\alpha}{2}}$$

Como se muestra a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Mediante una rotación de ejes elimina el término $xy$ de la ecuación $3x^2 + 3xy - y^2 = 9$.

**Solución**

Se determinan los valores $A = 3$, $B = 3$ y $C = -1$, para determinar $tan\ 2\alpha$ y el resultado se evalúa en la fórmula de $cos\ 2\alpha$:

$$tan\ 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{3}{3-(-1)} = \frac{3}{4} \rightarrow cos\ 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{tan^2 2\alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} = \frac{4}{5}$$

Luego, con la aplicación de las siguientes fórmulas se encuentran los valores de seno y coseno:

$$sen\ \alpha = \sqrt{\frac{1-cos\ 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}};\ cos\ \alpha = \sqrt{\frac{1+cos\ 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Las ecuaciones de rotación son:

$$x = x'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3x'-y'}{\sqrt{10}};\ y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + y'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$$

Estas ecuaciones se sustituyen en la ecuación de la cónica.

$$3\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)^2 + 3\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right)^2 = 9$$

Se desarrollan las operaciones y se simplifica para obtener finalmente la ecuación.

$$7x'^2 - 3y'^2 = 18$$

**2** Mediante una rotación de ejes elimina el término $xy$, e identifica la naturaleza de la curva de ecuación:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$$

**Solución**

Al comparar con la ecuación general se determina que $A = 3$, $B = -2$ y $C = 3$, como $A = C$, entonces el ángulo de rotación es de 45°; por tanto, las ecuaciones son:

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Se sustituyen en la ecuación $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$,

$$3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

Ahora, al desarrollar y simplificar, se encuentra la ecuación de la curva sin término en $xy$.

$$3\left(\frac{x'^2}{2} - 2\left(\frac{x'y'}{2}\right) + \frac{y'^2}{2}\right) - 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 3\left(\frac{x'^2}{2} + 2\left(\frac{x'y'}{2}\right) + \frac{y'^2}{2}\right) = 8$$

$$3\left(\frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) - 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 3\left(\frac{x'^2}{2} + x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) = 8$$

$$\frac{3x'^2}{2} - 3x'y' + \frac{3y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 + \frac{3x'^2}{2} + 3x'y' + \frac{3y'^2}{2} = 8$$

$$\frac{6x'^2}{2} + \frac{6y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 = 8$$

$$2x'^2 + 4y'^2 = 8$$

Finalmente, la ecuación es: $x'^2 + 2y'^2 = 4$, la cual representa una elipse.

## EJERCICIO 46

Transforma las siguientes ecuaciones a otra que no contenga el término $xy$.

1. $2xy = 1$
2. $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}\,x - 8\sqrt{2}\,y = 0$
3. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 8\sqrt{3}\,x + 16x - 8y - 16\sqrt{3}y + 16 = 0$
4. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 6x - 2\sqrt{3}y = 0$
5. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 4 = 0$
6. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 16x + 16y - 56 = 0$
7. $x^2 + xy + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$
8. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 20x + 10y = 0$
9. $x^2 - 2xy + y^2 - 20x + 10y = 0$
10. $x^2 + 4xy + y^2 - 24x - 24y + 104 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Transformación de la ecuación de una cónica por rotación y traslación de los ejes

Para analizar geométricamente una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sin muchos problemas, ésta se reduce con una rotación y traslación de ejes.

Al realizar la rotación de ejes, ésta orienta los ejes coordenados en la dirección de las cónicas elipse e hipérbola, y la traslación de ejes lleva al nuevo origen al centro de las mismas. En el caso de la parábola, al rotar los ejes, uno de ellos es paralelo al eje focal y la traslación lleva al nuevo origen al vértice.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Mediante una rotación y traslación de ejes, reduce y grafica la ecuación:

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 + 160x + 130y + 25 = 0$$

**Solución**

Se realiza la rotación de ejes.

Se aplican las fórmulas para encontrar el valor de *sen* $\alpha$ y *cos* $\alpha$, entonces,

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{72}{52-73} = \frac{72}{-21} = \frac{24}{-7} = -\frac{24}{7}$$

Luego $2\alpha \in$ II cuadrante

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{24}{7}\right)^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{576}{49}+1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{625}{49}}} = -\frac{1}{\frac{25}{7}} = -\frac{7}{25}$$

Por tanto,

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$$

Luego, con el valor de *cos* $2\alpha$ se determinan los valores de *sen* $\alpha$ y *cos* $\alpha$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{32}{50}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Por consiguiente, las ecuaciones de transformación para rotar son:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = \frac{3x' - 4y'}{5}$$

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = \frac{4x' + 3y'}{5}$$

Luego, al sustituir en la ecuación:

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 + 160x + 130y + 25 = 0$$

Se determina que:

$$52\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)^2+72\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)+73\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)^2+160\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)+130\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)+25=0$$

La cual, al simplificarla resulta:

$$4x'^2 + y'^2 + 8x' - 2y' + 1 = 0$$

Luego se realiza la traslación de ejes.

Se sustituyen,

$$x' = x'' + h,\ y' = y'' + k$$

En la ecuación $4x'^2 + y'^2 + 8x' - 2y' + 1 = 0$

$$4(x'' + h)^2 + (y'' + k)^2 + 8(x'' + h) - 2(y'' + k) + 1 = 0$$

Se desarrollan las operaciones

$$4(x''^2 + 2x''h + h^2) + (y''^2 + 2y''k + k^2) + 8(x'' + h) - 2(y'' + k) + 1 = 0$$

$$4x''^2 + 8x''h + 4h^2 + y''^2 + 2y''k + k^2 + 8x'' + 8h - 2y'' - 2k + 1 = 0$$

$$4x''^2 + y''^2 + 8x''h + 8x'' + 2y''k - 2y'' + 4h^2 + k^2 + 8h - 2k + 1 = 0$$

$$4x''^2 + y''^2 + (8h + 8)x'' + (2k - 2)y'' + (4h^2 + k^2 + 8h - 2k + 1) = 0$$

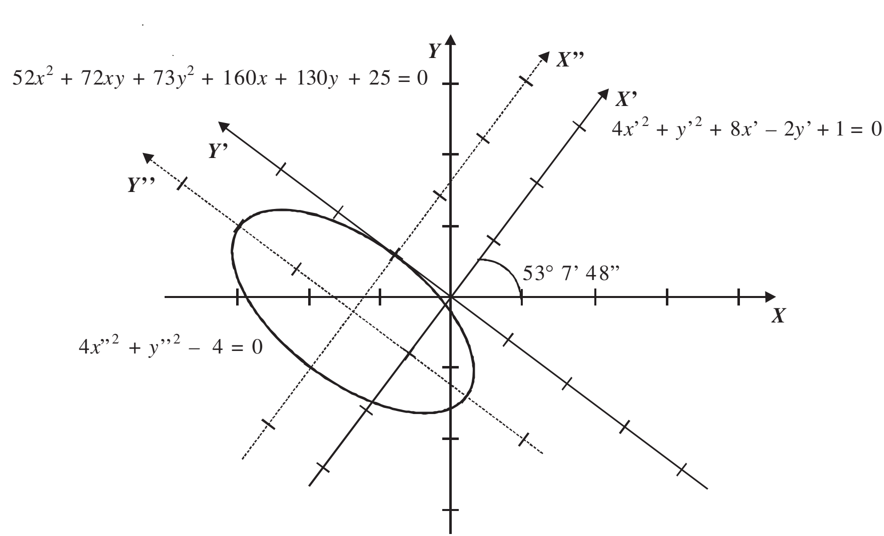
$$8h + 8 = 0 \rightarrow h = -1$$

$$2k - 2 = 0 \rightarrow k = 1$$

Por tanto, el nuevo origen es el punto $O''(-1, 1)$

Al sustituir los valores de $h$ y $k$, la ecuación se reduce a:

$$4x''^2 + y''^2 - 4 = 0$$



# EJERCICIO **47**

Mediante una transformación de coordenadas, simplifica las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x = 0$
2. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16\sqrt{2}x - 32\sqrt{2}y + 96 = 0$
3. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 44\sqrt{2}x - 28\sqrt{2}y + 8 = 0$
4. $5x^2 - 26xy + 5y^2 - 70\sqrt{2}y + 38\sqrt{2}x + 202 = 0$
5. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\left(1+2\sqrt{3}\right)x + 8\left(2-\sqrt{3}\right)y - 112 = 0$
6. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 12\left(1+\sqrt{3}\right)x - 12\left(1-\sqrt{3}\right)y + 12 = 0$
7. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 8\sqrt{3}x + 8y + 50 = 0$
8. $x^2 + 2xy + y^2 + 10\sqrt{2}x - 14\sqrt{2}y + 2 = 0$
9. $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + 4\left(8+\sqrt{3}\right)x + 4\left(8\sqrt{3}-1\right)y + 52 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Identificación de una cónica

Una forma de conocer la naturaleza de la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

es realizar una rotación y traslación de ejes, pero esta transformación es muy laboriosa.

Otra forma de identificar su naturaleza, sin tener que realizar la transformación es sustituir los coeficientes de la ecuación general en la expresión:

$$I = B^2 - 4AC$$

Que recibe el nombre de *invariante o indicador*.

**Caso I***:* si se elige un ángulo $\alpha$ de modo que $B = 0$, entonces:

- Si $A$ o $C = 0$ la ecuación representa una parábola.
- Si $A \neq C$ y de signos iguales la ecuación representa una elipse.
- Si $A$ y $C$ tienen signos contrarios la ecuación representa una hipérbola.

**Caso II***:* si $B \neq 0$ la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una cónica no degenerada si:

- $B^2 - 4AC = 0$ la ecuación representa una parábola.
- $B^2 - 4AC < 0$ la ecuación representa una elipse.
- $B^2 - 4AC > 0$ la ecuación representa una hipérbola.

Una curva degenerada es aquella que representa:

- Dos rectas concurrentes.
- Un punto.
- Dos rectas paralelas.
- Una sola recta.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la naturaleza de la cónica $x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y + 4 = 0$.

**Solución**

De la ecuación se obtiene:

$$A = 1,\ B = -4 \text{ y } C = 3$$

Al sustituir en el indicador:

$$I = B^2 - 4AC$$

$$I = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

De acuerdo con el indicador $I > 0$, por tanto, la curva representa una hipérbola.

2 ¿Qué cónica representa la curva $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + y - 20 = 0$?

**Solución**

De la ecuación se obtiene:

$$A = 1,\ B = 2 \text{ y } C = 1$$

Al sustituir en el indicador

$$I = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

De acuerdo con el indicador $I = 0$, la ecuación representa una parábola.

3 ¿Cuál es la naturaleza de la cónica $2x^2 - 7xy + 8y^2 - 5x - 10 = 0$?

**Solución**

De la ecuación se determina que:

$$A = 2,\ B = -7 \text{ y } C = 8$$

Al sustituir en el indicador,

$$I = (-7)^2 - 4(2)(8) = 49 - 64 = -15$$

De acuerdo con el indicador $I < 0$, la ecuación corresponde a una elipse.

## EJERCICIO **48**

Determina la naturaleza de las siguientes cónicas no degeneradas.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$
2. $13x^2 + 2\sqrt{3}xy + 15y^2 - 48 = 0$
3. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 8 = 0$
4. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0$
5. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 6 = 0$
6. $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}\,y = 0$
7. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 16x + 16y - 56 = 0$
8. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 20x + 10y = 0$
9. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 40x + 20y = 0$
10. $x^2 + 4xy + y^2 - 24x - 24y + 104 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Identificación de cónicas degeneradas

Son aquellas que de acuerdo con el indicador representan una parábola, elipse o hipérbola; sin embargo, al realizar un despeje se obtienen las características para determinar la naturaleza de la ecuación. Las curvas degeneradas representan un punto, dos rectas concurrentes, dos rectas paralelas o sólo una recta.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la naturaleza de la cónica $9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 4 = 0$.

**Solución**

De la ecuación se obtiene:

$$A = 9,\ B = -6 \text{ y } C = 1$$

Al sustituir en el indicador,

$$I = (-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = 0$$

Por tanto, la ecuación representa una parábola.

Sin embargo, al factorizar la ecuación,

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 4 = 0 \rightarrow (3x - y)^2 - 4(3x - y) + 4 = 0$$

$$(3x - y - 2)^2 = 0$$

$$3x - y - 2 = 0$$

Lo que significa que la ecuación representa una línea recta, en este caso se le denomina curva degenerada.

2 Encuentra la naturaleza de la cónica $36x^2 - 24xy + 5y^2 - 12x + 5 = 0$.

**Solución**

Se utiliza el indicador, $I = B^2 - 4AC$, si $A = 36$, $B = -24$ y $C = 5$

$$I = (-24)^2 - 4(36)(5) = 576 - 720 = -144$$

De acuerdo con el resultado $I < 0$ y la curva representa una elipse; sin embargo, al resolver la ecuación de segundo grado con incógnita $x$ se tiene:

$$36x^2 + (-24y - 12)x + (5y^2 + 5) = 0$$

Donde,

$$x = \frac{-(-24y-12) \pm \sqrt{(-24y-12)^2 - 4(36)(5y^2+5)}}{2(36)} = \frac{(2y+1) \pm (y-2)\sqrt{-1}}{6}$$

Se observa que $x$ es imaginario para cualquier valor de $y$ diferente de 2, luego si $y = 2$, entonces la ecuación representa al punto $P\left(\frac{5}{6}, 2\right)$.

3 ¿Cuál es la naturaleza de la cónica $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$?

**Solución**

Para la ecuación $A = 3$, $B = -7$ y $C = -6$, se sustituyen los valores en el indicador y se obtiene:

$$I = (-7)^2 - 4(3)(-6) = 49 + 72 = 121$$

Por lo que se deduce que $I > 0$; esto indica que la curva representa una hipérbola.

No obstante, al despejar $x$ de la ecuación $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-7y-2) \pm \sqrt{(-7y-2)^2 - 4(3)(-6y^2+17y-5)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{7y+2 \pm \sqrt{121y^2 - 176y + 64}}{6}$$

$$x = \frac{7y+2 \pm \sqrt{(11y-8)^2}}{6}$$

$$x = \frac{7y+2 \pm (11y-8)}{6}$$

Por consiguiente,

$$x = 3y - 1 \text{ y } x = \frac{-2y+5}{3}$$

El resultado anterior indica que la ecuación $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$, representa a las rectas concurrentes:

$$x - 3y + 1 = 0;\ 3x + 2y - 5 = 0$$

## EJERCICIO 49

Determina la naturaleza de las siguientes cónicas degeneradas.

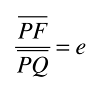
1. $x^2 + xy - 2y^2 + 3x + 6y = 0$
2. $9x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$
3. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
4. $4x^2 + 3xy - y^2 + 19x + 4y + 21 = 0$
5. $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$
6. $x^2 + 10xy + 25y^2 - 4x - 20y + 4 = 0$
7. $4x^2 - 8xy + 5y^2 + 2y + 1 = 0$
8. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 12x - 16y + 4 = 0$
9. $x^2 + xy - 6y^2 + 10y - 4 = 0$
10. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 20x - 30y + 25 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Definición general de cónicas

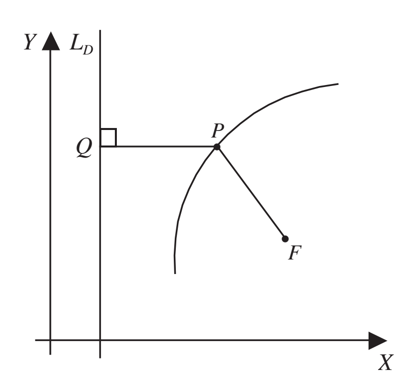
Lugar geométrico que describen un punto del plano de tal forma que la razón de su distancia a un punto fijo y a una recta fija, siempre es constante.

El punto fijo se llama foco, la recta fija directriz y la distancia constante excentricidad ($e$).



$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}}=e$$

**Gráfica**




**Elementos**
$F$: Foco
$P$: $P(x, y)$
$L_D$: Directriz
$Q$: punto sobre la directriz

Condiciones:

- Si $e = 1$ el lugar geométrico representa una parábola.
- Si $e < 1$ el lugar geométrico representa una elipse.
- Si $e > 1$ el lugar geométrico representa una hipérbola.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la cónica cuyo foco es el punto $F(-1, 3)$, ecuación de la directriz $x + 3 = 0$ y excentricidad 1?

**Solución**

Como la excentricidad es igual a 1, la ecuación a encontrar es de una parábola.

Se aplica la definición de cónicas:

$$\frac{Distancia\ del\ punto\ al\ foco}{Distancia\ del\ punto\ a\ la\ directriz}=e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}}{x+3}=1 \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+2x+1+y^2-6y+9}}{x+3}=1$$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=(x+3)^2 \rightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2+6x+9$$

Al simplificar se obtiene la ecuación:

$$y^2-4x-6y+1=0$$

2 Determina la ecuación de la cónica cuyo foco es el punto $F(3, -2)$, ecuación de la directriz $2x - y + 4 = 0$ y excentricidad $\frac{3}{2}$.

**Solución**

Como la excentricidad es mayor que 1, la ecuación a encontrar es de una hipérbola.

Se aplica la definición de las cónicas:

$$\frac{\textit{Distancia del punto al foco}}{\textit{Distancia del punto a la directriz}} = e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}{\frac{2x-y+4}{-\sqrt{5}}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{-\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}{2x-y+4} = \frac{3}{2}$$

Se realiza un producto cruzado,

$$-2\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} = 3(2x-y+4)$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$\left[-2\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}\right]^2 = \left[3(2x-y+4)\right]^2$$

$$20\left[(x-3)^2+(y+2)^2\right] = 9(2x-y+4)^2$$

$$20\left(x^2-6x+9+y^2+4y+4\right) = 9\left(4x^2+y^2+16-4xy+16x-8y\right)$$

$$20x^2 - 120x + 180 + 20y^2 + 80y + 80 = 36x^2 + 9y^2 + 144 - 36xy + 144x - 72y$$

Finalmente, al simplificar los términos semejantes e igualar con cero, se obtiene la ecuación:

$$16x^2 - 36xy - 11y^2 + 264x - 152y - 116 = 0$$

3 Determina la ecuación de la cónica cuya directriz es la recta $x + 3y - 5 = 0$, foco en el punto $F(-1, 3)$ y excentricidad $\frac{2}{5}$.

**Solución**

De acuerdo con el valor de la excentricidad la ecuación de la cónica representa una elipse.

Se aplica la definición de cónicas:

$$\frac{\textit{Distancia del punto al foco}}{\textit{Distancia del punto a la directriz}} = e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}}{\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}}} = \frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad 5\sqrt{10}\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = 2(x+3y-5)$$

Ahora, al elevar ambos miembros al cuadrado y simplificar se obtiene la ecuación:

$$\left[5\sqrt{10}\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right]^2 = \left[2(x+3y-5)\right]^2$$

$$250(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) = 4(x^2 + 9y^2 + 25 + 6xy - 10x - 30y)$$

$$250x^2 + 250y^2 + 500x - 1\,500y + 2\,500 = 4x^2 + 36y^2 + 24xy - 40x - 120y + 100$$

$$246x^2 - 24xy + 214y^2 + 540x - 1\,380y + 2\,400 = 0$$

Por consiguiente la ecuación es:

$$123x^2 - 12xy + 107y^2 + 270x - 690y + 1\,200 = 0$$

# EJERCICIO 50

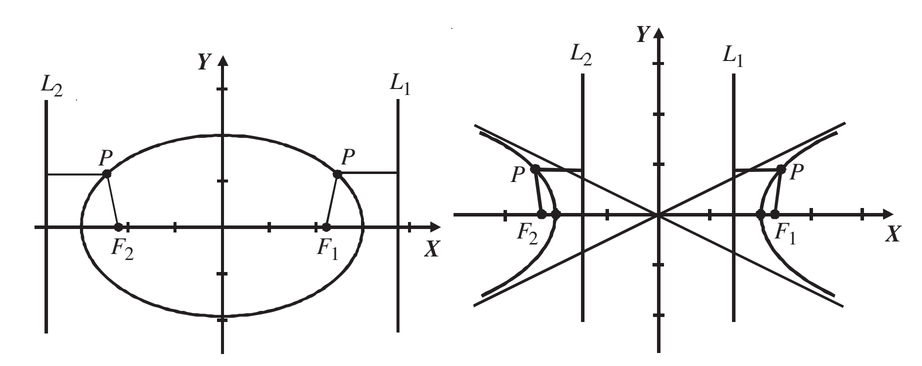
Determina la ecuación de la cónica que satisface las siguientes condiciones:

1. $F(0, 3)$, directriz $x = 6$, excentricidad $= \frac{2}{3}$
2. $F(1, 1)$, directriz $y = -2$, excentricidad $= \frac{1}{2}$
3. $F(-2, 3)$, directriz $x = 5$, excentricidad $= 1$
4. $F(0, 0)$, directriz $y = 4$, excentricidad $= \frac{5}{4}$
5. $F(2, -1)$, directriz $x + y = 0$, excentricidad $= \frac{4}{3}$
6. $F(-3, 2)$, directriz $2x + y = 3$, excentricidad $= \sqrt{5}$
7. $F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, directriz $3x - 2y = 6$, excentricidad $= 1$
8. $F(-a, a)$, directriz $x - y + a = 0$, excentricidad $= \sqrt{2}$
9. $F(4, 5)$, directriz $3x - 4y + 12 = 0$, excentricidad $= \frac{5}{3}$
10. $F(a\sqrt{3}, 0)$, directriz $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, excentricidad $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuaciones de las directrices de la elipse y de la hipérbola

En la elipse y en la hipérbola existen dos directrices, una para cada foco.




**Casos:**

I. Si la elipse o la hipérbola es horizontal con centro en el origen, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: x = \frac{a^2}{c} \; ; L_2: \; x = -\frac{a^2}{c}$$

II. Si la elipse o la hipérbola es vertical con centro en el origen, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: y = \frac{a^2}{c} \; ; L_2: \; y = -\frac{a^2}{c}$$

III. Si la elipse o la hipérbola es horizontal con centro en $(h, k)$, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: x = h + \frac{a^2}{c} \; ; L_2: \; x = h - \frac{a^2}{c}$$

IV. Si la elipse o la hipérbola es vertical con centro en $(h, k)$, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: y = k + \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2:\ y = k - \frac{a^2}{c}$$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las ecuaciones de las directrices de la elipse cuya ecuación es:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

**Solución**

Se transforma a la forma canónica $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Se precisa que la elipse es horizontal con centro en el origen, donde,

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9$$

Luego,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las directrices son:

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4}\ ;\ x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{25}{4}$$

2 Determina las ecuaciones de las directrices de la ecuación:

$$7x^2 - 9y^2 - 42x + 36y - 36 = 0$$

**Solución**

Se transforma a la forma ordinaria: $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$

La hipérbola es horizontal con centro en $(3, 2)$, $a^2 = 9$ y $b^2 = 7$

El valor de $c$ es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$

En consecuencia, las ecuaciones de las directrices son:

$$x = h + \frac{a^2}{c} = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}\ ;\ x = h - \frac{a^2}{c} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

## EJERCICIO 51

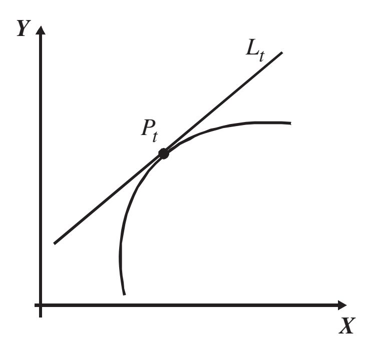
Determina las ecuaciones de las directrices de las siguientes curvas, cuyas ecuaciones son:

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
3. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
4. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$
5. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
6. $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$
7. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$
8. $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$
9. $x^2 - y^2 + 6y - 10 = 0$
10. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Tangente a una cónica

Es aquella recta que sólo toca un punto de la curva.




$L_t$: recta tangente
$P_t$: punto de tangencia

Las cónicas que se analizarán serán de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

**Casos de tangencia:**

I. Dado el punto de tangencia.

II. Dada la pendiente de la recta tangente.

III. Dado un punto exterior a la cónica.

## Dado el punto de tangencia

### Ejemplo

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en el punto de tangencia $P_1(x_1, y_1)$?

### Solución

Sea $y - y_1 = m(x - x_1)$ la ecuación de la recta tangente, como el punto $P_1$ pertenece a la curva y a la recta, se resuelve el sistema.

$$\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx - mx_1 + y_1 \end{cases}$$

Se sustituye la ecuación de la recta en la ecuación de la curva,

$$Ax^2 + C(mx - mx_1 + y_1)^2 + Dx + E(mx - mx_1 + y_1) + F = 0$$

Al desarrollar y acomodar en términos de $x$, se obtiene:

$$(A + Cm^2)x^2 + (D + Em + 2Cmy_1 - 2Cm^2x_1)x + (Cm^2x_1^2 + Cy_1^2 - 2Cmx_1y_1 + Ey_1 - Emx_1 + F) = 0$$

Para que exista solución se debe cumplir que $b^2 - 4ac \geq 0$.

con $a = A + Cm^2$

$b = D + Em + 2Cmy_1 - 2Cm^2x_1$

$c = Cm^2x_1^2 + Cy_1^2 - 2Cmx_1y_1 + Ey_1 - Emx_1 + F$

La expresión $b^2 - 4ac = 0$ es la condición de tangencia. Al sustituir los valores respectivos, resulta una ecuación con incógnita $m$, y la ecuación de segundo grado que se obtiene es un trinomio cuadrado perfecto. Es decir, existe una y sólo una recta de pendiente $m$ que es tangente a la curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x + y + 4 = 0$, en el punto de tangencia $(3, -1)$?

**Solución**

El punto pertenece a la recta tangente, entonces la ecuación de la recta es de la forma:

$$y + 1 = m(x - 3), \text{ donde: } y = mx - 3m - 1$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 4 = 0 \\ y = mx - 3m - 1 \end{cases}$

Se sustituye $y = mx - 3m - 1$ en la ecuación de la curva,

$$x^2 - 4x + (mx - 3m - 1) + 4 = 0$$
$$x^2 + x(m - 4) + (3 - 3m) = 0$$

En la ecuación $a = 1$, $b = m - 4$ y $c = 3 - 3m$, estos valores se sustituyen en la condición de tangencia.

$$(m - 4)^2 - 4(1)(3 - 3m) = 0$$

De la cual, al desarrollar y simplificar, se obtiene la ecuación:

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$(m + 2)^2 = 0$$
$$m = -2$$

Se deduce entonces que la ecuación de la recta es:

$$y = mx - 3m - 1 \rightarrow y = -2x - 3(-2) - 1$$
$$y = -2x + 5$$
$$2x + y - 5 = 0$$

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0$ en el punto de tangencia $(2, 2)$.

**Solución**

Como $(2, 2)$ es el punto de tangencia, entonces la ecuación de la recta es de la forma:

$$y - 2 = m(x - 2), \text{ donde } y = mx - 2m + 2$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0 \\ y = mx - 2m + 2 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx - 2m + 2$ en la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + (mx - 2m + 2)^2 - 2x + 6(mx - 2m + 2) - 16 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + (-4m^2 + 10m - 2)x + (4m^2 - 20m) = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son: $a = 1 + m^2$, $b = -4m^2 + 10m - 2$ y $c = 4m^2 - 20m$, éstos se sustituyen en la condición de tangencia y se obtiene:

$$(-4m^2 + 10m - 2)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 - 20m) = 0$$

De la cual, al desarrollar y simplificar, se obtiene la ecuación:

$$25m^2 + 10m + 1 = 0$$
$$(5m + 1)^2 = 0$$
$$m = -\frac{1}{5}$$

Al final la ecuación de la recta tangente es:

$$y = mx - 2m + 2 \rightarrow y = -\frac{1}{5}x - 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 2$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} + 2$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$$
$$5y = -x + 12$$
$$x + 5y - 12 = 0$$

# EJERCICIO 52

Determina la ecuación de la recta tangente a la cónica dada en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 = 25$, en el punto (3, 4)
2. $3x^2 + 4y^2 = 31$, en el punto (3, 1)
3. $x^2 - 4y^2 = 21$, en el punto (5, 1)
4. $y^2 + 6x - 3y + 32 = 0$, en el punto (– 6, – 1)
5. $x^2 + 4x - 5y - 22 = 0$, en el punto (4, 2)
6. $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$, en el punto (3, 5)
7. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 26 = 0$, en el punto (– 1, 3)
8. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 20 = 0$, en el punto (– 1, 2)
9. $3x^2 + 3y^2 - 9x + 3y - 30 = 0$, en el punto (4, – 3)
10. $16x^2 - 25y^2 - 64x - 200y - 255 = 0$, en el punto (– 1, – 1)

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Dada la pendiente de la recta tangente

Encuentra la ecuación de la recta tangente de pendiente $m$ a la cónica.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

**Solución**

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta tangente, entonces se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ &y = mx + k \end{aligned}$$

Se sustituye $y = mx + b$ en la ecuación de la cónica.

$$Ax^2 + C(mx + k)^2 + Dx + E(mx + k) + F = 0$$

$$(A + Cm^2)x^2 + (2Ckm + D + Em)x + (k^2C + Ek + F) = 0$$

Para que exista solución, $I = b^2 - 4ac \geq 0$, entonces la condición de tangencia es: $b^2 - 4ac = 0$, donde: $a = A + Cm^2$ $b = 2Ckm + D + Em$ $c = k^2C + Ek + F$ y al sustituir los coeficientes de la ecuación en la condición:

$$(2Ckm + D + Em)^2 - 4(A + Cm^2)\,(k^2C + Ek + F) = 0$$

Resulta una ecuación, cuya incógnita es $k$, obteniendo dos resultados, éstos se sustituyen en la ecuación $y = mx + k$, por consiguiente, resultan dos ecuaciones tangentes con la misma pendiente.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$ con pendiente $\frac{5}{2}$.

**Solución**

Si la pendiente de la recta es $\frac{5}{2}$, entonces su ecuación es: $y = \frac{5}{2}x + k$

Se forma el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0 \\ y = \frac{5}{2}x + k \end{cases}$$

Se sustituye la segunda ecuación en la primera,

$$x^2 + \left(\frac{5}{2}x + k\right)^2 + 4x - 2\left(\frac{5}{2}x + k\right) - 24 = 0$$

Se desarrolla y simplifica la ecuación,

$$29x^2 + (20k - 4)x + (4k^2 - 8k - 96) = 0$$

Finalmente, los valores de los coeficientes son: $a = 29$, $b = 20k - 4$ y $c = 4k^2 - 8k - 96$.

Estos valores se sustituyen en la condición de tangencia.

$$(20k - 4)^2 - 4(29)(4k^2 - 8k - 96) = 0$$
$$4k^2 - 48k - 697 = 0$$
$$(2k + 17)(2k - 41) = 0$$
$$k = -\frac{17}{2},\ k = \frac{41}{2}$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $k = -\frac{17}{2}$, entonces

$$y = \frac{5}{2}x + k \rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{2}$$
$$5x - 2y - 17 = 0$$

Si $k = \frac{41}{2}$, entonces

$$y = \frac{5}{2}x + k \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{41}{2}$$
$$5x - 2y + 41 = 0$$

2 ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 - y^2 = 5$ y tiene pendiente $-\frac{3}{2}$?

**Solución**

Sea la ecuación de la recta $y = \frac{3}{2}x + k$, entonces al sustituir en la ecuación de la curva,

$$x^2 - \left(-\frac{3}{2}x + k\right)^2 = 5$$

Al desarrollar y simplificar se determina que:

$$-5x^2 + 12kx - 4k^2 - 20 = 0$$

Por consiguiente, al igualar el discriminante a cero, se determina el valor de $b$,

$$(12k)^2 - 4(-5)(-4k^2 - 20) = 0$$
$$4k^2 - 25 = 0$$
$$k = \frac{5}{2} \text{ o } k = -\frac{5}{2}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$3x + 2y - 5 = 0;\ 3x + 2y + 5 = 0$$

# EJERCICIO 53

Determina la ecuación de la recta tangente que cumpla con las siguientes condiciones:

1. $x^2 + y^2 = 13$, de pendiente $\frac{3}{2}$
2. $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ y es paralela a la recta $2x - 3y - 4 = 0$
3. $y^2 - x + 2y - 10 = 0$ y es paralela a la recta $2x - 12y + 5 = 0$
4. $x^2 - 2x + 8y + 13 = 0$, de pendiente $-\frac{1}{2}$
5. $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$ y es perpendicular a la recta $4x - y - 5 = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Dado un punto exterior a la curva

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y es tangente a la cónica $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se sigue el siguiente proceso:

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Se despeja $y$:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Con esta ecuación y la ecuación de la cónica se forma el sistema:

$$\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx - mx_1 + y_1 \end{cases}$$

El cual tiene la forma del caso I.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (–1, –1) y es tangente a la cónica $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$.

**Solución**

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (–1, –1) tiene la forma:

$$y = mx + m - 1$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 4y + 16 = 0 \\ y = mx + m - 1 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx + m - 1$ en la ecuación de la cónica,

$$x^2 - 4x - 4(mx + m - 1) + 16 = 0$$
$$x^2 + x(-4m - 4) - 4m + 20 = 0$$

Por la condición de tangencia, se tiene la ecuación de segundo grado,

$$(-4m - 4)^2 - 4(1)(-4m + 20) = 0$$
$$16m^2 + 48m - 64 = 0$$
$$m^2 + 3m - 4 = 0$$
$$(m + 4)(m - 1) = 0$$
$$m = -4,\ m = 1$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

| Si $m = -4$ | Si $m = 1$ |
|---|---|
| $y = -4x - 4 - 1$ | $y = x + 1 - 1$ |
| $y = -4x - 5$ | $y = x$ |
| $4x + y + 5 = 0$ | $x - y = 0$ |

2 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$, y que pasa por el punto exterior $(2, -3)$.

**Solución**

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(2, -3)$ tiene la forma:

$$y = mx - 2m - 3$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0 \\ y = mx - 2m - 3 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx - 2m - 3$ en la ecuación de la cónica,

$$x^2 + (mx - 2m - 3)^2 + 8x - 2(mx - 2m - 3) - 9 = 0$$
$$(1 + m^2)\,x^2 + x\,(-4m^2 - 8m + 8) + (4m^2 + 16m + 6) = 0$$

Al sustituir los coeficientes en la condición de tangencia, se obtiene:

$$(-4m^2 - 8m + 8)^2 - 4(1 + m^2)\,(4m^2 + 16m + 6) = 0$$
$$5m^2 + 24m - 5 = 0$$
$$(m + 5)(5m - 1) = 0$$
$$m = -5,\ m = \frac{1}{5}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $m = -5$

$$y = -5x - 2(-5) - 3$$
$$y = -5x + 7$$
$$5x + y - 7 = 0$$

Si $m = \frac{1}{5}$

$$y = \frac{1}{5}x - 2\left(\frac{1}{5}\right) - 3$$
$$5y = x - 17$$
$$x - 5y - 17 = 0$$

# EJERCICIO 54

Determina la ecuación de la recta tangente a la curva:

1. $y^2 = 8x$, pasa por el punto exterior $(-4, -2)$
2. $x^2 = 8y$, pasa por el punto $(-4, 0)$
3. $x^2 + 3y^2 = 6$, pasa por el punto $(0, 2)$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 26 = 0$ y pasa por el punto exterior $(4, 6)$
5. $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y - 9 = 0$, pasa por el punto $(1, 3)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 12

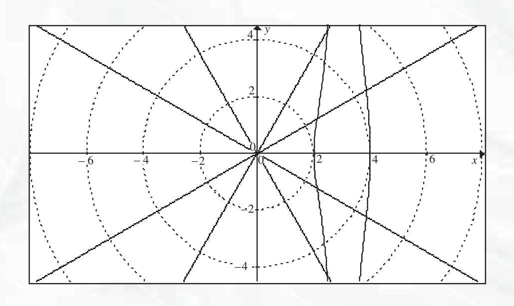
## COORDENADAS POLARES

**Reseña HISTÓRICA**

Nicomedes
(280 *a. C.* – 210 *a. C.*)

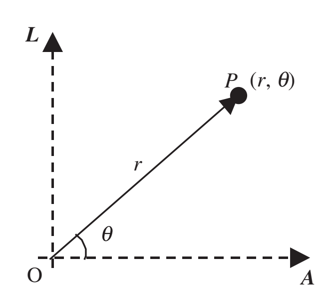
Se sabe muy poco de la vida de Nicomedes, incluso para establecer el periodo en el que vivió hay que hacerlo con referencias indirectas. Se sabe que Nicomedes criticó la duplicación del cubo de Eratóstenes (276 a. C.–194 a. C.) y que Apolonio (262 a. C.–190 a. C.) también habló de Nicomedes.

Es famoso por su tratado *Las líneas de la concoide*, y quiso utilizar la concoide para solucionar los problemas clásicos de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.



## Sistema polar

El sistema polar es similar al cartesiano, su objetivo es la representación gráfica de elementos geométricos utilizando pares coordenados de magnitud y dirección, mediante un segmento y un ángulo, tal segmento recibe el nombre de radio vector y el ángulo argumento.




La recta $\overline{OA}$ y el punto $P$ forman un marco de referencia, como los ejes coordenados en el sistema cartesiano.

$\overline{OP}$ = $r$: radio vector

$\theta$: Argumento

$O$: polo

$\overline{OA}$: Eje polar

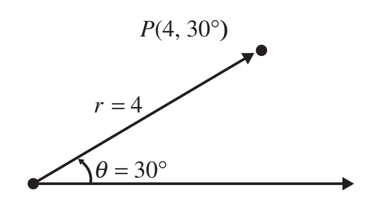
$L$: Eje $\frac{\pi}{2}$

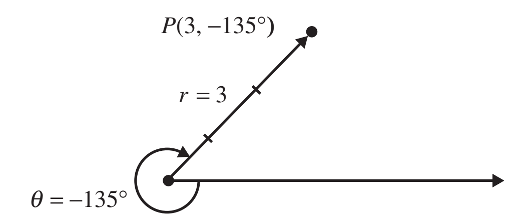
### Gráfica de un punto en coordenadas polares

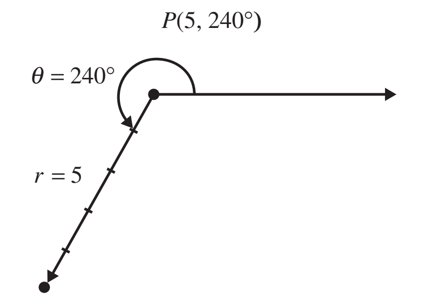
Un punto $P(r, \theta)$ en coordenadas polares se grafica a $r$ unidades del polo sobre un rayo que se llama lado terminal conocido también como radio vector que forma el argumento $\theta$.

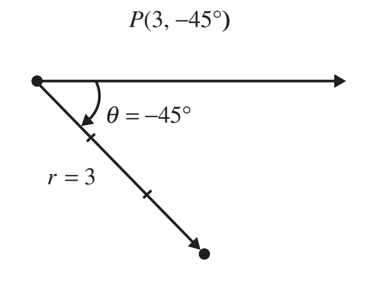
El argumento de un punto cuyas coordenadas son polares, se considera positivo si es en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo si es en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

**Ejemplos**

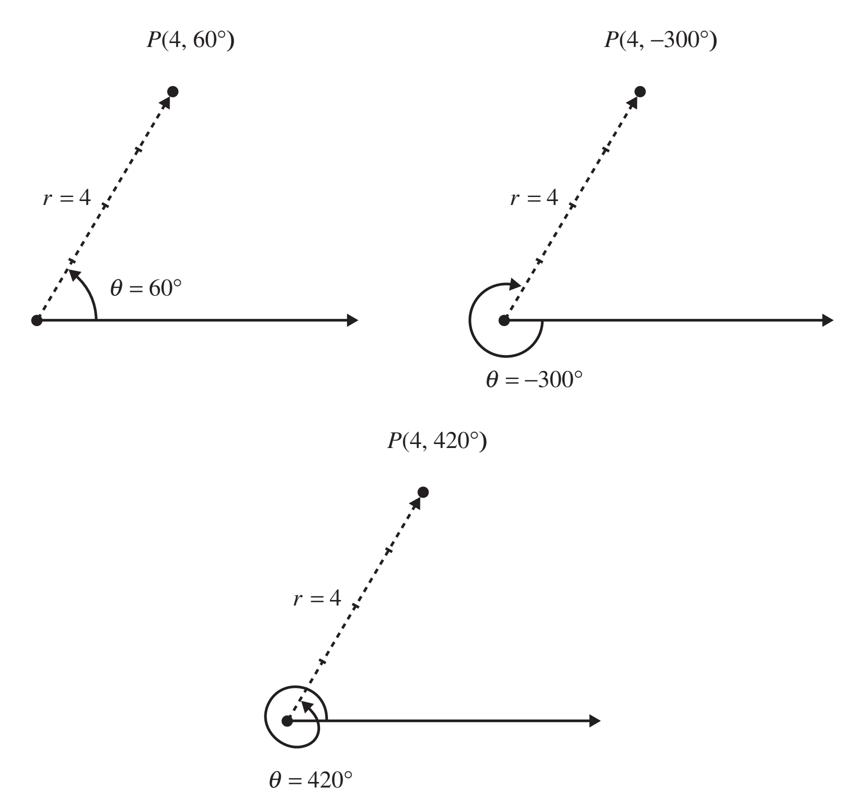


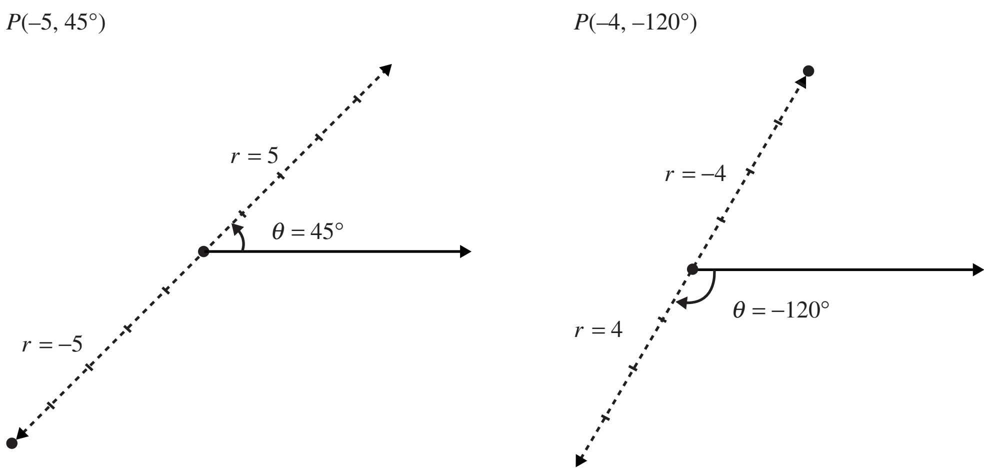
La representación gráfica de un par de coordenadas polares, no son únicas, es decir, hay otros valores coordenados que definen este mismo punto. Como verás a continuación:




Hay puntos cuya coordenada $r$ se extienden en sentido opuesto al lado terminal del ángulo, que se denota como $-r$, entonces las coordenadas del punto tendrán la forma $P(-r, \theta)$, cabe mencionar que esto no significa que $r$ sea negativa, sólo se designa de este modo a la distancia del lado terminal en esta dirección.

## Ejemplos:

$P(-5, 45°)$ $P(-4, -120°)$



## Conversión de un punto en coordenadas polares

**I.** Sea el punto $(r, \theta)$, entonces su equivalente es $(-r, \theta + \pi)$

**II.** Sea el punto $(-r, \theta)$, entonces su equivalente es $(r, \theta - \pi)$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina un punto equivalente a (– 2, 45°), cuyo radio vector sea positivo.

**Solución**

Se aplican las equivalencias,

$$(-2, 45°) = (2, 45° - 180°) = (2, -135°) = (2, 225°)$$

2 Encuentra un punto equivalente a (3, 215°), cuyo radio vector sea negativo.

**Solución**

Se aplican las equivalencias,

$$(3, 215°) = (-3, 215° + 180°) = (-3, 395°) = (-3, 35°)$$

3 Calcula un punto equivalente a (–5, – 60°), cuyo radio vector sea positivo.

**Solución**

Se aplican las equivalencias,

$$(-5, -60°) = (5, -60° - 180°) = (5, -240°) = (5, 120°)$$

## Relación entre las coordenadas rectangulares y polares

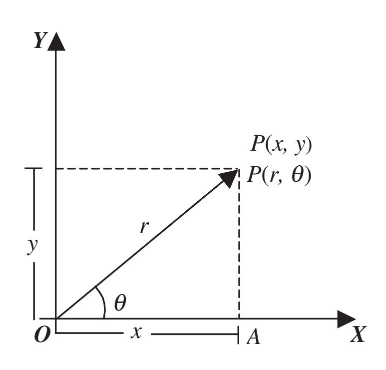
Las coordenadas polares representan a los puntos del plano en función de su distancia al origen y su ángulo de inclinación medido respecto a la horizontal.

$$P(r, \theta)$$

Donde $r$: distancia del punto al origen.

$\theta$: Ángulo de inclinación.

Las coordenadas rectangulares $(x, y)$ y las polares $(r, \theta)$ de un punto $P$ se relacionan como sigue:




Por el teorema de Pitágoras

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

En el triángulo rectángulo $OAP$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

## Transformación de un punto en coordenadas polares a rectangulares

**EJEMPLOS**

Ejemplos

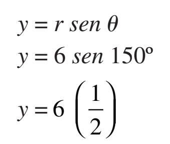
1 Determina las coordenadas rectangulares del punto $P(6, 150º)$.

**Solución**

Las coordenadas polares del punto $P$ son: $r = 6$ y $\theta = 150º$

Se sustituyen los valores de $r$ y $\theta$:

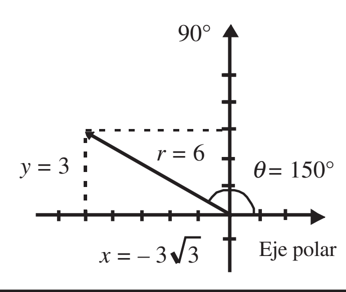
$$x = r\,cos\,\theta \qquad x = 6\,cos\,150º \qquad x = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad x = -3\sqrt{3}$$



$$y = r\,sen\,\theta \qquad y = 6\,sen\,150º \qquad y = 6\left(\frac{1}{2}\right) \qquad y = 3$$

Por tanto, las coordenadas de punto en el sistema de coordenadas rectangulares son: $\left(-3\sqrt{3}, 3\right)$

*Gráfica*




## Transformación de un punto en coordenadas rectangulares a polares

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Transforma a coordenadas polares el punto $A(-4, -7)$.

**Solución**

Las coordenadas rectangulares del punto $A$ son: $x = -4$; $y = -7$

Los valores se sustituyen en las fórmulas que determinan la longitud del radio vector y el argumento.

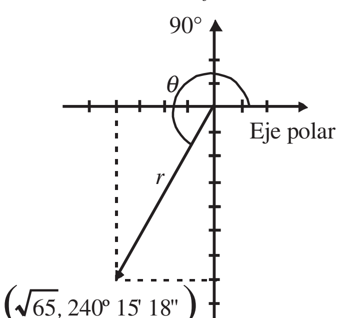
$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} = \pm\sqrt{16 + 49} = \pm\sqrt{65}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-7}{-4}\right) = tan^{-1}(1.75) = 60°\ 15'\ 18''$$

Finalmente, las coordenadas del punto $A$ en coordenadas polares son:

$$\left(\sqrt{65},\ 240°\ 15'\ 18''\right) = \left(-\sqrt{65},\ 60°\ 15'\ 18''\right)$$

*Gráfica*



# EJERCICIO 55

Transforma a coordenadas rectangulares los siguientes puntos:

1. $A(6, 45°)$
2. $R(4, 300°)$
3. $P\left(4\sqrt{2}, 135°\right)$
4. $A\left(8, \frac{\pi}{6}\right)$
5. $B\left(10, \frac{5\pi}{3}\right)$
6. $C\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$
7. $Q(5, 60°)$
8. $M(-7, 315°)$
9. $N(-10, 225°)$
10. $S(15, -210°)$
11. $T(-3, 120°)$
12. $A\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right)$
13. $S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$
14. $C\left(\sqrt{3}, -\frac{11}{6}\pi\right)$
15. $B\left(-\frac{3}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$

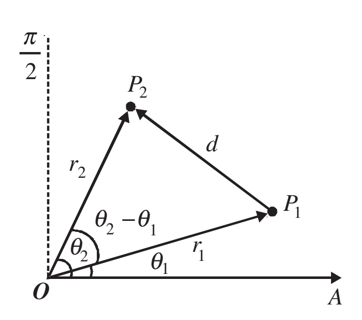
Transforma a coordenadas polares los siguientes puntos:

16. $A(5, 12)$
17. $P(-6, -4)$
18. $C(4, -3)$
19. $B(9, -12)$
20. $C(4, 0)$
21. $W(0, -6)$
22. $M(3, -4)$
23. $Q(-12, 5)$
24. $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
25. $F(24, 7)$
26. $Z\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
27. $Q(5, -3)$
28. $L(-3, 0)$
29. $J\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
30. $K(0, 5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

Dado $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ puntos en el sistema polar:




De la gráfica se tiene el triángulo $OP_1P_2$ del cual se desea determinar la distancia $d$, esto se obtiene aplicando la ley de los cosenos

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\ cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\ cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la distancia entre los puntos $A(3, 90^o)$ y $B(-2, 30^o)$.

**Solución**

Se sustituyen los valores $r_1 = 3$, $\theta_1 = 90^o$, $r_2 = -2$ y $\theta_2 = 30^o$, en la fórmula, para obtener:

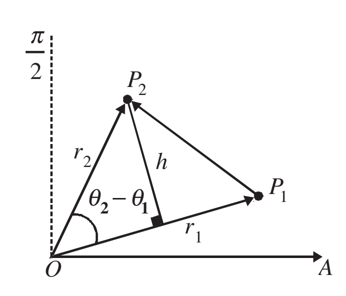
$$d = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 - 2(3)(-2)cos\,(30^o - 90^o)}$$

$$d = \sqrt{9+4+12cos\,(-60°)} = \sqrt{9+4+12cos\,(60°)} = \sqrt{13+12\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{13+6} = \sqrt{19}\,u$$

Por consiguiente, la distancia entre los puntos es de $\sqrt{19}$ unidades.

## Área de un triángulo en coordenadas polares

Sea el triángulo determinado por los puntos $O(0, 0)$, $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$, en el sistema polar:




El área del triángulo $OP_1P_2$ es:

$$A = \frac{1}{2}r_1 \cdot h\text{, pero } h = r_2\,sen\,(\theta_2 - \theta_1)$$

$$A = \frac{1}{2}\left|r_1 \cdot r_2 \cdot sen\,(\theta_2 - \theta_1)\right|$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área del triángulo formado por los puntos $O(0, 0)$ $A(7, 10°)$ y $B(4, 40°)$.

**Solución**

Se sustituyen los valores $r_1 = 7$, $\theta_1 = 10^o$, $r_2 = 4$ y $\theta_2 = 40^o$, en la fórmula, para obtener:

$$A = \frac{1}{2}(7)(4)\,sen\,(40^o - 10^o) = 14\,sen\,(30^o) = 14\left(\frac{1}{2}\right) = 7u^2$$

Finalmente, el área del triángulo es de $7u^2$.

## EJERCICIO 56

Determina la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1. $A(2, 30°)$ y $B(-1, 120°)$
2. $C(-6, 0°)$ y $D(-3, 90°)$
3. $E(12, 150°)$ y $F(5, -30°)$
4. $G(-4, -60°)$ y $H(2, 240°)$
5. $I(5, 45°)$ y $J(8, 15°)$

Obtén el área del triángulo determinado por los puntos:

6. $O(0, 0)$, $A(6, 0°)$ y $B(12, 90°)$
7. $O(0, 0)$, $R(4, 30°)$ y $S(3, 120°)$
8. $O(0, 0)$, $A(-8, 135°)$ y $B(8, 45°)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Transformación de una ecuación rectangular a polar

Para transformar una ecuación en coordenadas rectangulares a una ecuación en coordenadas polares se utilizan las siguientes fórmulas:

$$x = r\cos\theta\ ;\ \ y = r\,sen\,\theta;\ x^2 + y^2 = r^2$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Transforma la ecuación dada a su forma polar.

$$x^2 - y^2 = 16$$

**Solución**

Se sustituyen $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ en la ecuación rectangular.

$$x^2 - y^2 = 16 \rightarrow (r\cos\theta)^2 - (r\,sen\,\theta)^2 = 16$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2 sen^2\theta = 16 \qquad \text{Se factoriza } r^2$$

$$r^2(\cos^2\theta - sen^2\theta) = 16$$

Pero $\cos^2\theta - sen^2\theta = \cos 2\theta$ sustituyendo,

$$r^2\cos 2\theta = 16$$

Se despeja $r^2$

$$r^2 = \frac{16}{\cos 2\theta},\ \text{por identidad recíproca}\ \frac{1}{\cos 2\theta} = \sec 2\theta,\quad \text{entonces}$$

$$r^2 = 16\sec 2\theta$$

Finalmente, la transformación en coordenadas polares de la ecuación $x^2 - y^2 = 16$, es:

$$r^2 = 16\sec 2\theta$$

2 Transforma a su forma polar la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.

**Solución**

Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ en la ecuación rectangular se obtiene:

$$4(r\cos\theta)^2 + 4(r\,sen\,\theta)^2 - 2(r\cos\theta) - 16(r\,sen\,\theta) + 13 = 0$$

$$4r^2\cos^2\theta + 4r^2 sen^2\theta - 2r\cos\theta - 16r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

$$4r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) - 2r\cos\theta - 16r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

Pero $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

$$4r^2 - 2r\cos\theta - 16r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

## EJERCICIO 57

Transforma a ecuaciones polares las siguientes expresiones:

1. $y = -3$
2. $x = 5$
3. $y = \sqrt{3}x$
4. $2x - 3y = 6$
5. $y = -x + 2$
6. $x\cos w + y\,sen\,w - p = 0$
7. $x^2 + y^2 = 16$
8. $x^2 + y^2 + 4x = 0$
9. $x^2 + y^2 - 2y = 0$
10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
11. $y^2 = -8x$
12. $y^2 - 12x - 36 = 0$
13. $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2xy$
14. $x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$
15. $9x^2 + 4y^2 = 36$
16. $16x^2 + 25y^2 = 400$
17. $9x^2 - 72y + 25y^2 - 81 = 0$
18. $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
19. $x^2 - y^2 = 9$
20. $16x^2 - 9y^2 = 144$
21. $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
22. $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$
23. $xy = -4$
24. $\sqrt{4x^2 - 4y^2} = 2x^2 + 2y^2$
25. $\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$
26. $x^2y - 2x^2 - 16y = 0$
27. $y^2 = 12x$
28. $4x - 3y + 12 = 0$
29. $x^2 - 4y^2 = 16$
30. $x^2 + 4y - 8 = 0$
31. $(x^2 + y^2 + 3y)^2 = 4x^2 + 4y^2$
32. $4x^2 + 9y^2 = 36$
33. $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$
34. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$
35. $4y^2 - 5x^2 - 8y - 6 = 0$
36. $x^2 - 5y + 15 = 0$
37. $3y^2 + 4x - 2y = 0$
38. $x^2 + 3xy - y^2 = 4$
39. $y = x^3 - 2x^2$
40. $y = \frac{3x-2}{x-1}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Transformación de una ecuación polar a rectangular

De las fórmulas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ y $x^2 + y^2 = r^2$, se aplican los despejes respectivos:

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ sen\,\theta = \frac{y}{r}\ \text{y}\ r = \sqrt{x^2+y^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación rectangular del lugar geométrico, cuya ecuación es:

$$r = \frac{1}{1-2\,sen\,\theta}$$

**Solución**

Se elimina el denominador.

$$r(1-2\ sen\ \theta)=1\ \rightarrow r - 2r\,sen\,\theta = 1$$

Y al sustituir en la ecuación $y = r\,sen\,\theta$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se obtiene:

$$\sqrt{x^2+y^2} - 2y = 1$$

Al despejar el radical y elevar al cuadrado resulta la ecuación en su forma rectangular.

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (1+2y)^2\ \rightarrow x^2 + y^2 = 1 + 4y + 4y^2$$

$$x^2 + y^2 - 1 - 4y - 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$$

2 Transforma la ecuación $r = \dfrac{4}{1-sen\theta}$ a coordenadas rectangulares.

**Solución**

Se elimina el denominador de la ecuación.

$$r(1-sen\,\theta) = 4\ \rightarrow r - r\,sen\,\theta = 4$$

Y al sustituir $y = r\,sen\,\theta$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se obtiene:

$$r - rsen\,\theta = 4 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - y = 4$$

$$x^2 + y^2 = (4 + y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 16 + 8y + y^2$$

$$x^2 - 8y - 16 = 0$$

3 Convierte la ecuación $r = 5\cos 2\theta$ a coordenadas rectangulares.

**Solución**

Se sabe que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, entonces:

$$r = 5\cos 2\theta = 5(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

Y al sustituir,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{ y } \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Se obtiene finalmente:

$$r = 5(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 5\left(x^2-y^2\right)$$

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5\left(x^2-y^2\right)$$

4 Convierte $r = \dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{2-3\cos\theta}$ a coordenadas rectangulares.

**Solución**

Si $\cos\theta \neq \frac{2}{3}$, entonces la ecuación se puede representar como:

$$2r - 3r\cos\theta = 3\operatorname{sen}\theta$$

Al sustituir $r = \sqrt{x^2+y^2}$ , $x = r\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se obtiene:

$$2r - 3r\cos\theta = 3\operatorname{sen}\theta \rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} - 3x = \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$2\left(x^2+y^2\right) - 3x\sqrt{x^2+y^2} = 3y$$

$$2\left(x^2+y^2\right) = 3y + 3x\sqrt{x^2+y^2}$$

# EJERCICIO 58

Transforma a su forma rectangular las siguientes ecuaciones polares.

1. $r=\frac{5}{sen\ \theta}$
2. $r=-8\ sec\ \theta$
3. $r=\frac{4\ cos\ \theta}{2-cos^2\ \theta}$
4. $r=4\ sen\ \theta$
5. $r=\frac{5}{2\ sen\quad+3}$
6. $r=sen\ 2\theta$
7. $r=\frac{16}{\sqrt{1+sen^2\ \theta}}$
8. $r(1-cos\ \theta)=5$
9. $r=2-cos\ \theta$
10. $r-cos\ \theta=4$
11. $r=4(1-cos\ \theta)$
12. $r^2\ sen\ 2\theta=9$
13. $r(1+sen\ \theta)=-3$
14. $r(2+2\ cos\ \theta)=8$
15. $r=4\ cos\ 2\theta$
16. $r=\sqrt{sen\ \theta}$
17. $r=\frac{6}{3+\ sen\ \theta}$
18. $r=\frac{2}{2-\ cos\ \theta}$
19. $r=\frac{3}{1-2\ cos\ \theta}$
20. $r=\frac{1}{cos\ \theta+2}$
21. $r=\frac{4}{2-cos\theta}$
22. $r=4\sqrt{cos\ 2\theta}$
23. $r=\frac{6\ sec\ \theta}{2\ sec\ \theta+3}$
24. $r=\frac{2\ csc\ \theta}{1-csc\ \theta}$
25. $sen^2\ \theta-4r\ cos^3\ \theta=0$
26. $r^2-5r\ cos\ \theta+3r\ sen\ \theta-8=0$
27. $r^2\ cos^2\ \theta+r(3\ cos\ \theta-2\ sen\ \theta)+4=0$
28. $r=12\ cot\ \theta\ csc\ \theta$
29. $r=\frac{1}{\sqrt{cos\ 2\theta}}$
30. $r\ cos\ (\theta-60°)=-4$
31. $\theta=arc\ tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
32. $r=cos\ 3\theta$
33. $r\ sec\ 3\theta=2$
34. $r=5\ cos\ 4\theta$
35. $r=3\theta$
36. $r=3\ sen\ \frac{\theta}{2}$
37. $r=2\ cos^2\ \frac{\theta}{4}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Identificación de una cónica en su forma polar

Sean las ecuaciones de las cónicas:

$$\text{Horizontales } r = \frac{ke}{1 \pm e\cos\theta}; \text{ Verticales } r = \frac{ke}{1 \pm e\,sen\,\theta}$$

Entonces, la ecuación representa:

- Parábola si $e = 1$
- Elipse si $0 < e < 1$
- Hipérbola si $e > 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r = \frac{4}{1 - \cos\theta}$.

**Solución**

Se compara la ecuación $r = \frac{4}{1 - \cos\theta}$ con la ecuación de la cónica $r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}$, se obtiene que $e = 1$, por consiguiente, la ecuación representa una parábola horizontal.

2 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r = \frac{3}{5 + 2\,sen\,\theta}$.

**Solución**

La ecuación $r = \frac{3}{5 + 2\,sen\,\theta}$ se representa como $r = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{2}{5}sen\,\theta}$, comparando con la ecuación $r = \frac{ke}{1 + e\,sen\,\theta}$, se determina que $e = \frac{2}{5}$; este resultado indica que se trata de una elipse vertical.

3 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r = \frac{4}{2 - 3\cos\theta}$.

**Solución**

La ecuación $r = \frac{4}{2 - 3\cos\theta}$ se representa como $r = \frac{2}{1 - \frac{3}{2}\cos\theta}$, la cual es de la forma $r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}$, donde $e = \frac{3}{2}$; esto indica que se trata de una hipérbola horizontal.

# EJERCICIO 59

Identifica la naturaleza de las siguientes ecuaciones:

1. $r=\dfrac{8}{1+\cos\theta}$
2. $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$
3. $r=\dfrac{8}{2+2\,sen\,\theta}$
4. $r=\dfrac{20}{3-3\,sen\,\theta}$
5. $r=\dfrac{20}{5-4\,sen\,\theta}$
6. $r=\dfrac{16}{4-5\,sen\,\theta}$
7. $r=\dfrac{15}{3+2\cos\theta}$
8. $r=\dfrac{21}{3-\cos\theta}$
9. $r=\dfrac{18}{2-5\cos\theta}$
10. $r=\dfrac{36}{4+9\cos\theta}$
11. $r=\dfrac{4}{3\,sen\,\theta-1}$
12. $r=\dfrac{2}{1-sen\,\theta}$
13. $r=\dfrac{-8}{3-4\cos\theta}$
14. $r=\dfrac{45}{5+4\cos\theta}$
15. $r=\dfrac{4}{1+\cos\theta}$
16. $r=\dfrac{16}{\cos\theta-2}$
17. $r=\dfrac{-12}{7-4\cos\theta}$
18. $r=\dfrac{6}{4-3\,sen\,\theta}$
19. $r=\dfrac{5}{1+sen\,\theta}$
20. $r=\dfrac{-10}{3-2\,sen\,\theta}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Gráfica de una ecuación en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares $(r, \theta)$, es el conjunto de los puntos que tienen por lo menos un par de coordenadas polares $(r, \theta)$ y que satisfacen la ecuación $r = f(\theta)$.

### Análisis de una ecuación en coordenadas polares

1. Una curva es simétrica respecto a la recta $\dfrac{\pi}{2}$, si se cumple que:

$$f(\pi - \theta) = f(\theta)$$

Esto es, se sustituye el punto $(r, \pi - \theta)$ por $(r, \theta)$

2. Una curva es simétrica con el polo si se cumple que:

$$f(\pi + \theta) = f(\theta)$$

Esto es, se sustituye el punto $(r, \pi + \theta)$ por $(r, \theta)$

3. Una curva es simétrica con el eje polar si se cumple que:

$$f(-\theta) = f(\theta)$$

Esto es, se sustituye el punto $(r, -\theta)$ por $(r, \theta)$

Si una curva cumple con dos de los casos anteriores, se deduce que el tercer caso también se cumple.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Traza la gráfica de la ecuación $r = 4\ cos\ 2\theta$.

**Solución**

**Paso I.** Se analizan las simetrías de la ecuación:

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$

   Se sustituye el punto $(r,\ \pi - \theta)$, entonces,

   $$r = 4\ cos\ 2\ (\pi - \theta)$$

   Se aplican las identidades,

   $$\begin{aligned} r = 4\ cos\ 2(\pi - \theta) &= 4\ cos\ (2\pi - 2\theta) \\ &= 4[cos\ 2\pi\ \ cos\ 2\theta + sen\ 2\pi\ \ sen\ 2\theta] \\ &= 4[(1)\ cos\ 2\theta + (0)\ sen\ 2\theta] \\ r &= 4\ cos\ 2\theta \end{aligned}$$

   La ecuación es idéntica a la original, por consiguiente, es simétrica respecto a $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

   Se sustituye el punto $(r,\ \pi + \theta)$, entonces,

   $$r = 4\ cos\ 2(\pi + \theta)$$

   Se aplican las identidades,

   $$\begin{aligned} r = 4\ cos\ 2(\pi + \theta) &= 4\ cos\ (2\pi + 2\theta) \\ &= 4[cos\ 2\pi\ \ cos\ 2\theta - sen\ 2\pi\ \ sen\ 2\theta] \\ &= 4[(1)\ cos\ 2\theta - (0)\ sen\ 2\theta] \\ r &= 4\ cos\ 2\theta \end{aligned}$$

   La ecuación no se alteró, por tanto, es simétrica con el polo.

3. Simetría con el eje polar.

   Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

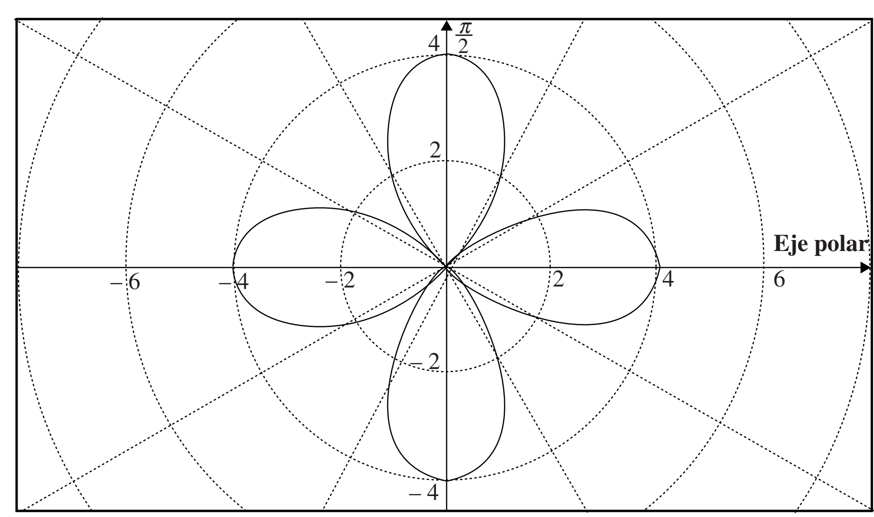
   $$r = 4\ cos\ 2(-\theta) = r = 4\ cos\ (-2\theta) = 4\ cos\ 2\theta$$

   La ecuación no se alteró, por consiguiente, es simétrica con el eje polar.

**Paso II.** Se una tabla de valores.

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r = 4\ cos\ 2\theta$ | 4 | 2 | 0 | – 2 | – 4 | – 2 | 0 | 2 | 4 |

***Gráfica***




Rosa de cuatro pétalos

**2** Construye la gráfica de la ecuación $r = 2 - 2\ cos\ \theta$.

**Solución**

**Paso I.** Se analizan las simetrías de la ecuación:

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$.

Se sustituye el punto $(r, \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 2 - 2\ cos\ (\pi - \theta)$$

Se aplican identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} r = 2 - 2cos\ (\pi - \theta) &= 2 - 2[cos\ \pi\ \ cos\ \theta + sen\ \pi\ sen\ \theta] \\ &= 2 - 2[(-1)\ cos\ \theta + (0)\ sen\ \theta] \\ &= 2 - 2[-\ cos\ \theta] \\ r &= 2 + 2\ cos\ \theta \end{aligned}$$

La curva no es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

Se sustituye el punto $(r, \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 2 - 2\ cos\ (\pi + \theta)$$

Se aplican identidades,

$$\begin{aligned} r = 2 - 2cos\ (\pi + \theta) &= 2 - 2[cos\ \pi\ \ cos\ \theta - sen\ \pi\ \ sen\ \theta] \\ &= 2 - 2[(-1)\ cos\ \theta - (0)\ sen\ \theta] \\ &= 2 - 2[-\ cos\ \theta] \\ r &= 2 + 2cos\ \theta \end{aligned}$$

La curva no es simétrica respecto al polo.

3. Simetría con el eje polar.

Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

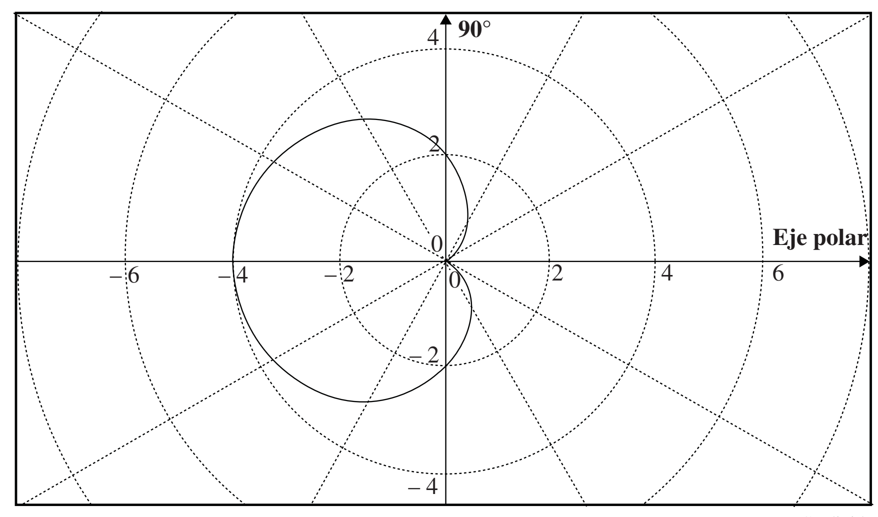
$$r = 2 - 2\ cos\ (-\theta) = 2 - 2\ cos\ \theta$$

Por tanto, la curva es simétrica respecto al eje polar.

**Paso II.** Se construye una tabla de valores.

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r = 2 - 2\ cos\ \theta$ | 0 | 0.26 | 0.58 | 1 | 2 | 3 | 3.41 | 3.73 | 4 |

***Gráfica***




Cardioide

3 Grafica la ecuación $r = 4 + 5\ sen\ \theta$.

**Solución**

**Paso I.** Se analizan las simetrías de la ecuación.

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$.

   Se sustituye el punto $(r,\ \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 4 + 5\ sen\ (\pi - \theta)$$

   Se aplican identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} r = 4 + 5\ sen\ (\pi - \theta) &= 4 + 5[sen\ \pi\ \ cos\ \theta - cos\ \pi\ \ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[(0)\ cos\ \theta - (-1)\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[sen\ \theta] \\ r &= 4 + 5\ sen\ \theta \end{aligned}$$

   De acuerdo con el resultado, la curva es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

   Se sustituye el punto $(r,\ \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 4 + 5\ sen\ (\pi + \theta)$$

   Se aplican identidades,

$$\begin{aligned} r = 4 + 5sen\ (\pi + \theta) &= 4 + 5[sen\ \pi\ \ cos\ \theta + cos\ \pi\ \ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[(0)\ cos\ \theta + (-1)\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[-\ sen\ \theta] \\ r &= 4 - 5\ sen\ \theta \end{aligned}$$

   Por tanto, la curva no es simétrica respecto al polo.

3. Simetría con el eje polar.

   Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

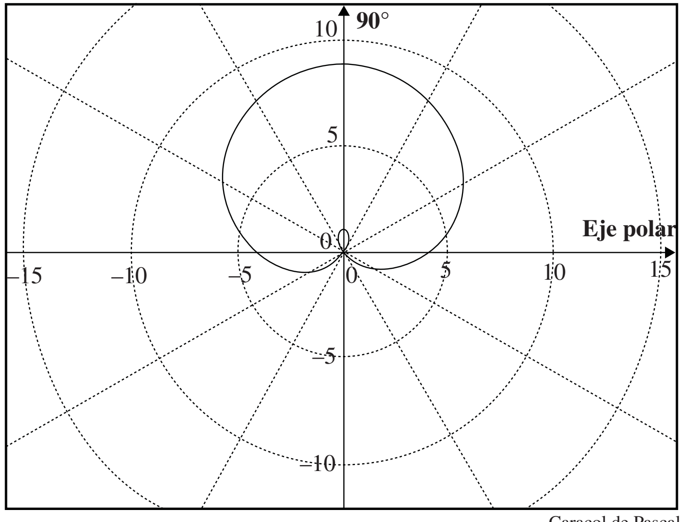
$$r = 4 + 5\ sen\ (-\theta) = 4 - 5\ sen\ \theta$$

   Por consiguiente, la curva no es simétrica respecto al eje polar.

**Paso II.** Se construye una tabla de valores.

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r = 4 + 5\ sen\ \theta$ | 4 | 6.5 | 7.53 | 8.3 | 9 | 8.3 | 7.53 | 6.5 | 4 | 1.5 | – 0.33 | – 1 |

***Gráfica***



Caracol de Pascal

# EJERCICIO 60

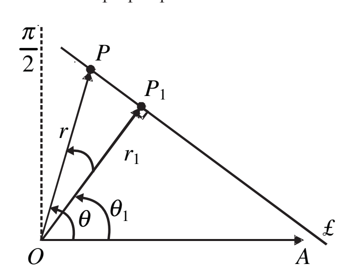
Traza la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $r = 3\,sen\,\theta$ (Circunferencia)
2. $r = \dfrac{3}{1 + sen\,\theta}$ (Parábola)
3. $r = \dfrac{6}{4 - 3\,sen\,\theta}$ (Elipse)
4. $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$ (Hipérbola)
5. $r = \dfrac{2}{sen\,\theta + \cos\theta}$ (Recta)
6. $r = sen\,3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
7. $r = 4\cos 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
8. $r = 2 - 3\cos\theta$ (Caracol con lazo)
9. $r = 3\cos 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
10. $r^2 = 16\cos 2\theta$ (Lemniscata)
11. $r = 2\theta$ (Caracol)
12. $r = 3\,sen\,2\theta$ (Rosa de 4 pétalos)
13. $r = 3(1 + \cos\theta)$ (Cardioide)
14. $r = 2\,sen\,4\theta$ (Rosa de 8 pétalos)
15. $r^2 = -4\cos 2\theta$ (Lemniscata)
16. $r^2 = 25\,sen\,2\theta$ (Lemniscata)
17. $r = 4 - 2\sec\theta$ (Concoide de Nicomedes)
18. $r = 3 + \csc\theta$ (Concoide de Nicomedes)
19. $r = \dfrac{2\pi}{\theta}$ (Espiral recíproca)
20. $r = \theta(1 - \cos\theta)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuación polar de la recta

Dados los puntos $P(r, \theta)$ y $P_1(r_1, \theta_1)$ sobre la recta £ en el sistema polar:




Del triángulo rectángulo $OPP_1$ se tiene que:

$$\cos(\theta - \theta_1) = \frac{r_1}{r}$$

Entonces, la ecuación polar de la recta es:

$$£:\ r \cdot \cos(\theta - \theta_1) = r_1$$

***Casos particulares***

**Caso I.**

Si $\theta_1 = 0°$ entonces $r \cos \theta = r_1$

La recta es perpendicular al eje polar y se encuentra a $r_1$ unidades a la derecha del polo.

**Caso II.**

Si $\theta_1 = 180°$ entonces $r \cos \theta = -r_1$

La recta es perpendicular y está a $r_1$ unidades a la izquierda del polo.

**Caso III.**

Si $\theta_1 = 90°$ entonces $r\ sen\ \theta = r_1$

La recta es paralela al eje polar a $r_1$ unidades por arriba del eje polar.

**Caso IV.**

Si $\theta_1 = 270°$ entonces $r\ sen\ \theta = -r_1$

La recta es paralela al eje polar a $r_1$ unidades por debajo del eje polar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta en su forma polar, que pasa por el punto $P(6, 90°)$ y es paralela al eje polar.

**Solución**

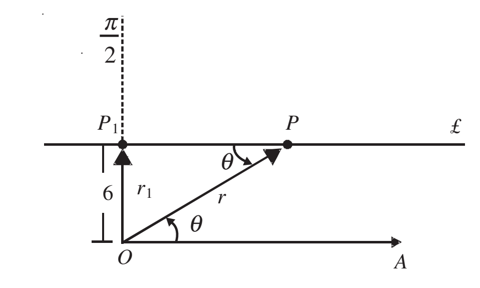
En la gráfica se observa que la recta es paralela al eje polar y está por arriba 6 unidades, entonces se aplica el caso III.

Entonces $r_1 = 6$, al sustituir este valor en la fórmula resulta la ecuación:

$$r\ sen\ \theta = r_1 \rightarrow r\ sen\ \theta = 6$$

Por tanto, la ecuación de la recta en su forma polar es £: $r\ sen\ \theta = 6$.

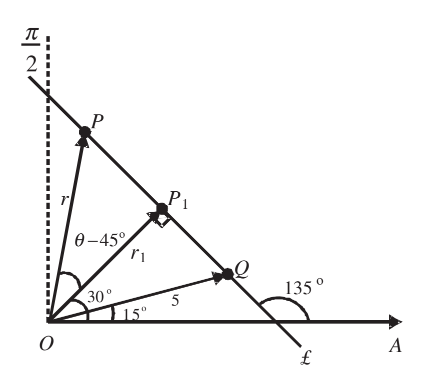
***Gráfica***



2 Determina la ecuación de la recta en su forma polar, que pasa por el punto $Q$ (5, 15°) y forma un ángulo de 135° con el eje polar.

**Solución**

Se realiza una gráfica con los datos.




Luego, de la gráfica se tiene que $\theta_1 = 45°$ y en el triángulo $OQP_1$, $r_1 = 5\cos 30° = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, estos valores se sustituyen en la fórmula $r\cos(\theta - \theta_1) = r_1$ para obtener la ecuación de la recta, por tanto, la ecuación de la recta £ es:

$r\cos(\theta - 45°) = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

## EJERCICIO 61

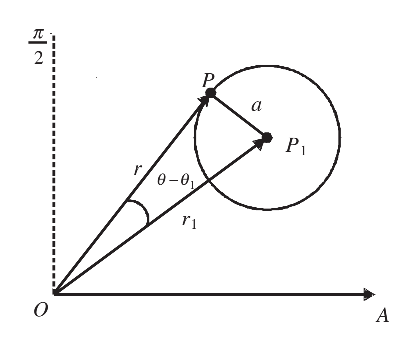
Determina la ecuación polar de las siguientes rectas:

1. Perpendicular al eje polar y se encuentra a 5 unidades a la derecha del polo.
2. Horizontal y está a 7 unidades por debajo del eje polar.
3. Horizontal, pasa por el punto (5, 90°).
4. Vertical, pasa por el punto (–1, 0°).
5. Pasa por el punto (10, 30°) y forma un ángulo de 150° con el eje polar.
6. Pasa por el punto (8, 30°) y forma un ángulo de 165° con el eje polar.
7. Pasa por el punto (2, 150°) y es perpendicular a la recta que une el punto (2, 150°) con el polo.
8. Pasa por el punto (5, 135°) y es perpendicular a la recta que une el punto (2, 135°) con el polo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Ecuación polar de la circunferencia

Sea el punto $P_1$ $(r_1, \theta_1)$ el centro de una circunferencia, $P(r, \theta)$ un punto de la circunferencia y la distancia entre los puntos el radio $a$, su ecuación está determinada por la fórmula:




$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cdot cos\,(\theta - \theta_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación polar de la circunferencia con centro en el punto (4, 30°) y de radio 1 unidad.

**Solución**

Los valores de $a = 1$, $r_1 = 4$ y $\theta - \theta_1 = \theta - 30°$, se sustituyen:

$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cdot cos\left(\theta - \theta_1\right)$$

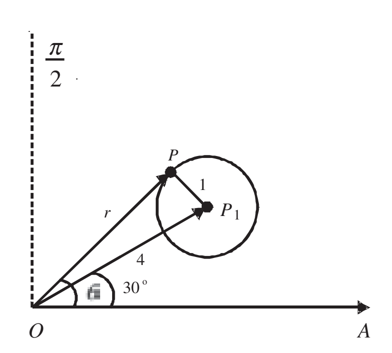
$$(1)^2 = r^2 + (4)^2 - 2r(4) \cdot cos\left(\theta - 30°\right)$$

$$1 = r^2 + 16 - 8r \cdot cos\left(\theta - 30°\right)$$

$$r^2 + 16 - 8r \cdot cos\left(\theta - 30°\right) - 1 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es:

$$r^2 - 8r \cdot cos\left(\theta - 30°\right) + 15 = 0$$




## EJERCICIO 62

Determina la ecuación polar de las siguientes circunferencias.

1. Centro el punto (3, 30°) y radio 9 unidades.
2. Centro el punto (5, 120°) y radio 1 unidad.
3. Centro el punto (10, 45°) y radio 4 unidades.
4. Centro el punto (7, 90°) y radio 7 unidades.
5. Centro el punto (0, 0°) y radio 6 unidades.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Intersección de curvas en coordenadas polares

Al resolver un sistema de ecuaciones en coordenadas rectangulares, se obtienen los puntos de intersección de las curvas. Estos puntos satisfacen recíprocamente el sistema.

En coordenadas polares **no** siempre se cumple la segunda afirmación, ya que un punto en coordenadas polares tiene más de un par de coordenadas polares.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el sistema de ecuaciones y traza la gráfica de $\begin{cases} r = 4\ cos\ \theta \\ r = 4\ sen\ \theta \end{cases}$

**Solución**

Se igualan las ecuaciones.

$$4\ cos\ \theta = 4\ sen\ \theta$$

Se dividen ambos miembros entre $cos\ \theta$, si $cos\ \theta \neq 0$, entonces,

$$\frac{4\ cos\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{4\ sen\ \theta}{cos\ \theta} \rightarrow 4 = 4\ tan\ \theta \rightarrow tan\ \theta = 1$$

$$\theta = arc\ tan\ (1)$$

$$\theta = 45°, 225°$$

Se sustituyen los ángulos encontrados en cualquiera de las ecuaciones para determinar el valor del radio vector $r$.

$$\text{Si } \theta = 45° = \frac{\pi}{4}, \text{ en consecuencia,}$$

$$r = 4\ cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2.8$$

$$\text{Si } \theta = 225° = \frac{5\pi}{4}, \text{ entonces,}$$

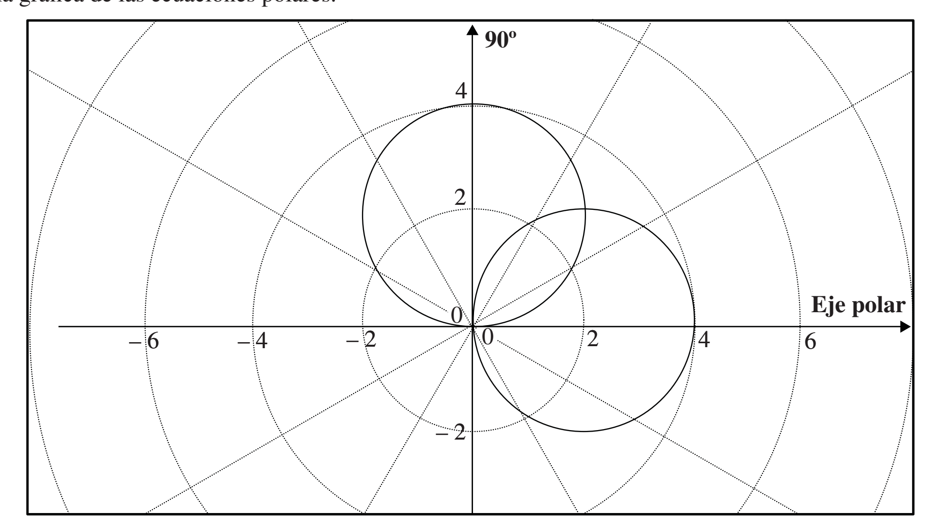
$$r = 4\ cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} \approx -2.8$$

Se generan dos puntos de intersección $(2\sqrt{2}, 45°)$ y $(-2\sqrt{2}, 225°)$.

***Tabulación:***

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 330° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r = 4\ cos\ \theta$ | 4 | 3.4 | 2.8 | 2 | 0 | –2 | –3 | –4 | –3.4 | –2.8 | –2 | 0 | 2 | 3.4 |
| $r = 4\ sen\ \theta$ | 0 | 2 | 2.8 | 3.4 | 4 | 3.4 | 2 | 0 | –2 | –2.8 | –3.4 | –4 | –3.4 | –2 |

Se traza la gráfica de las ecuaciones polares.




En la gráfica se observa que existe un punto de intersección en el polo; sin embargo, para $r = 4\ sen\ \theta$ el punto que determina el polo es (0, 0°), y para la ecuación $r = 4\ cos\ \theta$ el punto que determina el polo es (0, 90°), entonces el origen (polo) no tiene ningún par de coordenadas que satisfagan el sistema.

2 Resuelve el siguiente sistema y traza la gráfica de $\begin{cases} r = 5\,cos\,\theta \\ r = 5\,sen\,2\theta \end{cases}$

**Solución**

Se igualan las ecuaciones.

$$5\,sen\,2\theta = 5\,cos\,\theta$$

Y al sustituir $sen\,2\theta = 2\,sen\,\theta\,cos\,\theta$ y despejar $\theta$, se obtiene:

$$5\,sen\,2\theta = 5\,cos\,\theta \rightarrow 5(2\,sen\,\theta\,cos\,\theta) = 5\,cos\,\theta$$
$$10\,sen\,\theta\,cos\,\theta = 5\,cos\,\theta$$
$$10\,sen\,\theta\,cos\,\theta - 5\,cos\,\theta = 0$$
$$5\,cos\,\theta\,(2\,sen\,\theta - 1) = 0$$
$$cos\,\theta = 0;\ 2\,sen\,\theta - 1 = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\ \text{o}\ \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

Se sustituyen los ángulos encontrados en cualquiera de las ecuaciones para determinar el valor del radio vector $r$.

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ entonces } r = 5\,cos\,\theta = 5\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{3} \approx 4.3$$

$$\text{Si } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ entonces } r = 5\,cos\,\theta = 5\,cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2}\sqrt{3} \approx -4.3$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ entonces } r = 5\,cos\,\theta = 5\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5(0) = 0$$

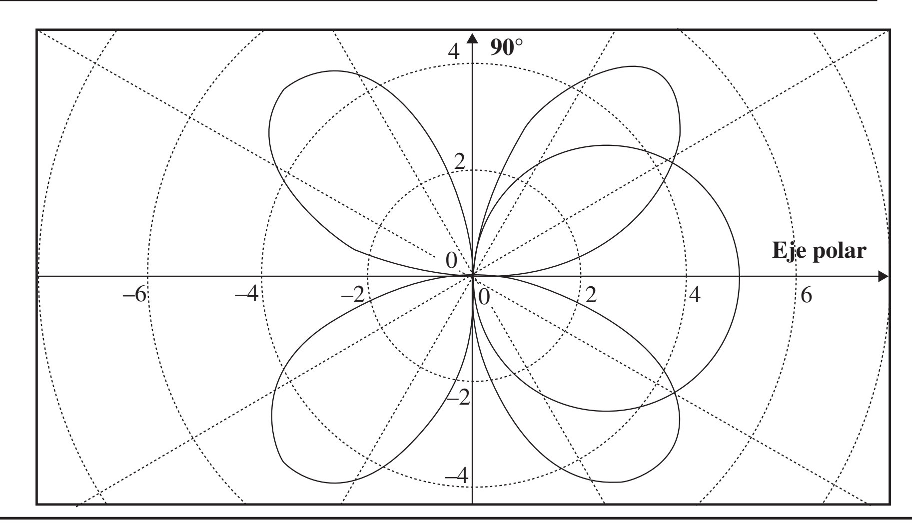
$$\text{Si } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ entonces } r = 5\,cos\,\theta = 5\,cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5(0) = 0$$

Por consiguiente, las curvas se intersecan en los puntos $\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

***Tabulación:***

| $\theta$ | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r = 5\,cos\,\theta$ | 5 | 4.3 | 2.5 | 0 | –2.5 | –4.3 | –5 | –4.3 | –2.5 | 0 | 2.5 | 4.3 |
| $r = 5\,sen\,2\theta$ | 0 | 4.3 | 4.3 | 0 | –4.3 | –4.3 | 0 | 4.3 | 4.3 | 0 | –4.3 | –4.3 |

***Gráfica***



# EJERCICIO 63

Determina los puntos de intersección y traza la gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 2r\ cos\ \theta = -\sqrt{3} \\ r = 2\ cos\ \theta - \left(1+\sqrt{3}\right) \end{cases}$

2. $\begin{cases} r = \dfrac{4}{1+sen\ \theta} \\ r\ sen\ \theta = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} r = 4\ sen\ \theta \\ r\ sen\ \theta = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} r = 2 \\ r = 4\ sen\ \theta \end{cases}$

5. $\begin{cases} r = -2\ sen\ \theta \\ r = -2\ cos\ \theta \end{cases}$

6. $\begin{cases} r = 2\ cos\ 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} r = \dfrac{1}{sen\ \theta} \\ r\ sen\ 2\theta = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} r = 3\left(1+cos\ \theta\right) \\ r = 6\ cos\ \theta \end{cases}$

9. $\begin{cases} r = \dfrac{6}{1+sen\ \theta} \\ r = \dfrac{2}{sen\ \theta} \end{cases}$

10. $\begin{cases} r = 3\ cos\ 2\theta \\ r = 3\ sen\ \theta \end{cases}$

11. $\begin{cases} r = 5\ sen\ \dfrac{1}{2}\theta \\ r = 5\ cos\ \theta \end{cases}$

12. $\begin{cases} r = 1 - sen\ \theta \\ r = 1 - sen\ 2\theta \end{cases}$

13. $\begin{cases} r = 3\left(1+sen\ \theta\right) \\ r = 3\left(1+cos\ \theta\right) \end{cases}$

14. $\begin{cases} r = 6\ cos\ 4\theta \\ r = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} r = 2\left(1+sen\ 2\theta\right) \\ r = 2\left(1+sen\ \theta\right) \end{cases}$

16. $\begin{cases} r = \dfrac{6\theta}{\pi} \\ r = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} r = 1+4\ cos\ 2\theta \\ r = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} r = 4-2\ cos\ \theta \\ r = \dfrac{16}{4+2\ cos\ \theta} \end{cases}$

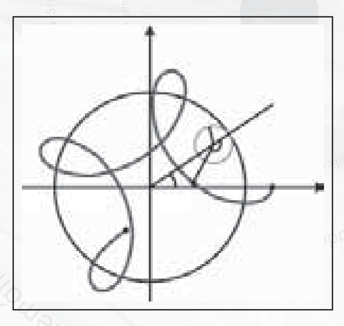
19. $\begin{cases} r = 4-4\ sen\ 2\theta \\ r = 4-4\ sen\ \theta \end{cases}$

20. $\begin{cases} r = 2 - sen\ \theta \\ r = 2 + cos\ 2\theta \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 13

## ECUACIONES PARAMÉTRICAS



Gráfica de la hipotrocoide

### La gran belleza de las curvas

El campo de las curvas paramétricas está lleno de objetos matemáticos fascinantes y las trocoides destacan por su increíble belleza. Un ejemplo de ello es la curva que se conoce con el nombre de hipotrocoide.

La belleza de esta figura proviene sin duda de su simetría muy particular que se expresa en el lenguaje matemático con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos t+c\cdot\cos\left(\dfrac{a-b}{b}t\right) \\ y=(a-b)\,\text{sen}\,t-c\cdot\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes.

## Definición

Si $f(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de una curva plana y las variables $x$ y $y$ están en función de una tercera variable $t$, llamada parámetro, entonces,

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Estas relaciones se conocen como ecuaciones paramétricas.

El objetivo de resolver el sistema es representar en una sola ecuación las variables $x$ y $y$ eliminando el parámetro.

## Transformación de ecuaciones paramétricas a rectangulares

Dada una curva en su forma paramétrica, su transformación a rectangular se obtiene con la eliminación del parámetro. No hay un método general para efectuar la eliminación, depende, en cada caso, de la forma de las ecuaciones paramétricas.

Si éstas contienen funciones trigonométricas, la ecuación rectangular surge al eliminar el parámetro por medio de las identidades trigonométricas fundamentales.

Si las ecuaciones paramétricas son algebraicas, su forma sugerirá alguna operación para eliminar el parámetro.

Si de dos ecuaciones paramétricas una es más complicada que la otra, la ecuación rectangular puede obtenerse despejando el parámetro de la ecuación más sencilla y sustituyendo su valor en la otra ecuación.

### Sistemas paramétricos algebraicos

Si el sistema paramétrico es algebraico, se elimina por procedimientos algebraicos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en su forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja el parámetro $t$ de la ecuación $y = 3t$:

$$y = 3t \rightarrow t = \frac{y}{3}$$

y se sustituye en la ecuación $x = 2t - 1$,

$$x = 2\left(\frac{y}{3}\right) - 1 \rightarrow x = \frac{2y}{3} - 1$$

Resulta que la ecuación en su forma rectangular es: $3x - 2y + 3 = 0$.

2 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -2t^2 + 4t - 3 \\ y = 2t \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja el parámetro $t$ de la ecuación $y = 2t$:

$$y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2}$$

Se sustituye en $x = -2t^2 + 4t - 3$ y resulta que,

$$x = -2t^2 + 4t - 3 \rightarrow x = -2\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{2}\right) - 3$$

$$x = -2\left(\frac{y^2}{4}\right) + 2y - 3$$

$$x = -\frac{y^2}{2} + 2y - 3$$

Al multiplicar por 2 e igualar a cero, se obtiene:

$$y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$$

3 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{t-1}{t} \end{cases}$$

**Solución**

Se despeja la variable $t$ de cualquiera de ambas ecuaciones:

$$x = \sqrt{t-1} \rightarrow x^2 = t - 1 \rightarrow t = x^2 + 1$$

Se sustituye en $y = \frac{t-1}{t}$, entonces la ecuación en su forma rectangular es:

$$y = \frac{t-1}{t} \rightarrow y = \frac{x^2+1-1}{x^2+1}$$

$$\left(x^2+1\right)y = x^2$$

Finalmente, al desarrollar el producto e igualar con cero se obtiene:

$$x^2y - x^2 + y = 0$$

# EJERCICIO 64

Determina la ecuación rectangular de cada una de las siguientes ecuaciones paramétricas.

1. $\begin{cases} x=4t \\ y=t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=at+b \\ y=ct-d \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=a(1+t) \\ y=2bt \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=2-4t \\ y=3t-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} xt-t=1 \\ ty=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t-2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t^2+4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3=t^2+3t-10 \\ y=6t+2t^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y^3=t^3+3t^2+3t+1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+2=(t^2-t)^2 \\ y^2-2y+1=16(t^4-2t^3+t^2) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=t^2-t \\ y=\dfrac{t-1}{t} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t+2} \\ y=\dfrac{t}{2} \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=2t-\dfrac{1}{t} \\ y=\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{t} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=\dfrac{-1}{t^2+4} \\ y=\dfrac{t}{t^2+4} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\dfrac{4t}{t^2-1} \\ y=\dfrac{4t^2}{t^2-1} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=\sqrt{t+1} \\ y=\sqrt{15-t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t+2}{t-1}} \\ y=t-2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t-2}{t+1}} \\ y=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-2}} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-1}{t^2} \\ y=\sqrt{\dfrac{t-2}{3}} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x=\dfrac{t-1}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t^2+3t+2}{t^2-4} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=\dfrac{t^3+1}{t+1} \\ y=(t^2-t)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-7t-15}{t^2-3t-10} \\ y=\dfrac{t^2-4}{2t^2-t-6} \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Sistemas de ecuaciones paramétricas que contienen funciones trigonométricas

Si el parámetro es el argumento de funciones trigonométricas, la ecuación rectangular se obtiene empleando identidades trigonométricas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones son $\begin{cases} x = 3\tan\alpha - 3 \\ y = 2\sec\alpha + 2 \end{cases}$

**Solución**

Se despejan de ambas ecuaciones *tan α* y *sec α* respectivamente, entonces,

$$x = 3\tan\alpha - 3 \qquad y = 2\sec\alpha + 2$$

$$x + 3 = 3\tan\alpha \qquad y - 2 = 2\sec\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{x+3}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{y-2}{2}$$

Se sustituyen los despejes en la identidad,

$$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1 \rightarrow \left[\frac{y-2}{2}\right]^2 - \left[\frac{x+3}{3}\right]^2 = 1$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Por consiguiente, la ecuación es una hipérbola.

2 Transforma las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 + 3\tan\theta \\ y = 1 + 4\sec\theta \end{cases}$ a una ecuación rectangular.

**Solución**

Las ecuaciones paramétricas contienen funciones trigonométricas, entonces se utiliza esta identidad trigonométrica:

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

Al despejar en cada ecuación la función trigonométrica y sustituirla en la identidad se obtiene:

$$x = 2 + 3\tan\theta \qquad y = 1 + 4\sec\theta$$

$$x - 2 = 3\tan\theta \qquad y - 1 = 4\sec\theta$$

$$\frac{x-2}{3} = \tan\theta \qquad \frac{y-1}{4} = \sec\theta$$

Los despejes se sustituyen en la identidad, por tanto, la ecuación en su forma rectangular es:

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

3 ¿Cuál es la ecuación en coordenadas rectangulares de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha \\ y = cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{cases}?$$

**Solución**

Se resuelve un sistema de ecuaciones para hallar el valor de *sen* $\alpha$ y *cos* $\alpha$ en términos de $x$ y $y$.

1. Se elimina la función coseno y se obtiene el valor de *sen* $\alpha$,

$$\begin{array}{c} x = 3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha \\ -3(y) = -3(cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = 3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha \\ -3y = -3\,cos\,\alpha - 15\,sen\,\alpha \end{array}$$

Y resulta,

$$x - 3y = -16\,sen\,\alpha \rightarrow sen\,\alpha = \frac{x-3y}{-16}$$

2. Se elimina la función seno,

$$\begin{array}{c} 5(x) = 5(3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha) \\ y = cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 5x = 15\,cos\,\alpha - 5\,sen\,\alpha \\ y = cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{array}$$

Y resulta,

$$5x + y = 16\,cos\,\alpha \rightarrow cos\,\alpha = \frac{5x+y}{16}$$

Se sustituyen los despejes en la identidad $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$,

$$\left(\frac{x-3y}{-16}\right)^2 + \left(\frac{5x+y}{16}\right)^2 = 1$$

Al resolver y simplificar,

$$\frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{256} + \frac{25x^2 + 10xy + y^2}{256} = 1$$

$$26x^2 + 4xy + 10y^2 = 256$$

Se concluye que la ecuación es:

$$13x^2 + 2xy + 5y^2 - 128 = 0$$

# EJERCICIO 65

Transforma las siguientes ecuaciones paramétricas a coordenadas rectangulares.

1. $\begin{cases} x=4\,cos\,\theta \\ y=7\,sen\,\theta \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=2\,sen\,\theta \\ y=4\,cos\,\theta \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=2\,cos\,\theta \\ y=2\,sen\,\theta \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=a\,cot\,\theta \\ y=b\,csc\,\theta \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=4\,tan\,\theta \\ y=32\,cot\,\theta \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=cot\,\theta \\ y=csc\,\theta \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=tan^2\,\theta \\ y=4\,sec^2\,\theta \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=cos\,2\theta \\ y=sen\,\theta \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=2\,sen\,\theta \\ y=2\,sen\,2\theta \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=sen\,\theta \\ y=sen\,3\theta \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=1+2\,sen\,\theta \\ y=2+3\,cos\,\theta \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=3-cos\,\theta \\ y=3-sen\,\theta \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=2-3\,sen\,\theta \\ y=-1-2\,cos\,\theta \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=4-cos\,\theta \\ y=3-2\,sen\,\theta \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=tan\,2\theta \\ y=tan\,\theta+1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=2\,sec\,\theta+1 \\ y=2\,tan\,\theta \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=2\,cos\,\theta-2\,sen\,\theta \\ y=cos\,\theta+2\,sen\,\theta \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=3\,cos\,\theta-5\,sen\,\theta \\ y=cos\,\theta-sen\,\theta \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=2\,csc\,\theta-3 \\ y\,sen\,\theta=2\,sen^3\,\theta+cos\,\theta\,sen\,2\theta+2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=\dfrac{2}{sen\,\theta} \\ y=2+3\,cot\,\theta \end{cases}$

21. $\begin{cases} x=\dfrac{cos\,2\theta}{\sqrt{1-sen^2\,\theta}} \\ y=4\,cos\,\theta \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Cálculo diferencial

# CAPÍTULO 1

## RELACIONES Y FUNCIONES

**Reseña HISTÓRICA**

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial.

Para el desarrollo de este proceso se contaba con el álgebra; las técnicas de cálculo; introducción a las matemáticas variables; el método de coordenadas; ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes; problemas de cuadraturas y la búsqueda de tangentes. Las causas que motivaron este proceso fueron las exigencias de la mecánica newtoniana y la astronomía.

La última etapa del desarrollo del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales, y a partir de aquí la formación del cálculo diferencial.

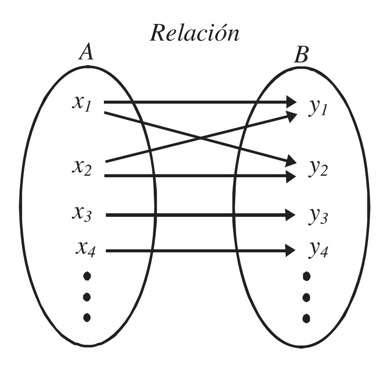
El cálculo diferencial surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de fluxiones de Newton y bajo la forma del cálculo de diferenciales de G. W. Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

## Relación

Regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

### Ejemplo




Esta relación se representa con el siguiente conjunto de pares ordenados

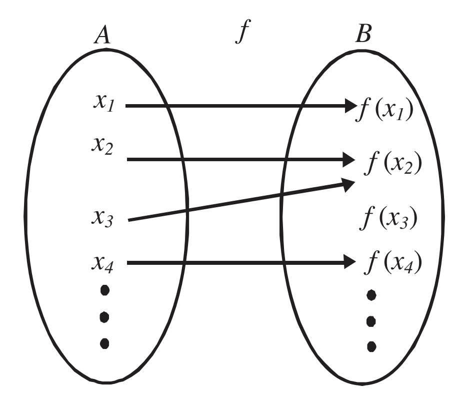
$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\ldots\}$$

## Función

El concepto de función es uno de los más importantes en el mundo de las matemáticas. Las funciones no sólo representan fórmulas, o lugares geométricos, también se utilizan como modelos matemáticos que resuelven problemas de la vida real.

A continuación se dan algunas definiciones de función:

- Es una regla de correspondencia que asocia a los elementos de dos conjuntos. La cual a cada elemento del primer conjunto (dominio) le asocia un solo elemento del segundo conjunto (contradominio).
- Sean $A$ y $B$ dos conjuntos y $f$ una regla que a cada $x \in A$ asigna un único elemento $f(x)$ del conjunto $B$, se dice que $f$ es una función que va del conjunto $A$ al $B$, y se representa de la siguiente forma: $f: A \rightarrow B$, donde al conjunto $A$ se le llama dominio y al $B$ contradominio, que también se representa por medio de un diagrama de flechas:

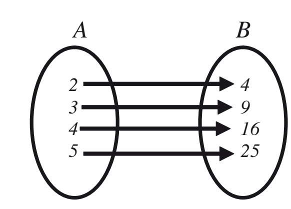


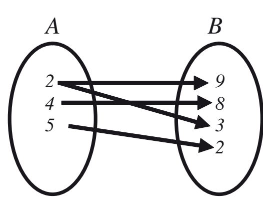

- Una función es una colección de pares ordenados con la siguiente propiedad: Si $(a, b)$ y $(a, c)$ pertenecen a una colección, entonces se cumple que $b = c$; es decir, en una función no puede haber dos pares con el mismo primer elemento.

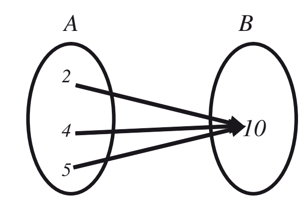
EJEMPLOS

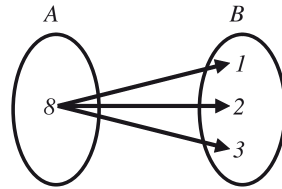
Ejemplos

1 Determina si los siguientes diagramas representan una función o una relación:

1.



2.



3.



4.



**Solución**

El primer y el tercer diagramas corresponden a una función ya que a cada elemento del conjunto $A$ se le asigna un solo elemento del conjunto $B$.

En el segundo diagrama al menos a un elemento del conjunto $A$ se le asignan dos elementos del conjunto $B$, mientras que en el cuarto diagrama el elemento 8 se asocia con tres elementos del conjunto $B$, por tanto, se concluye que estos conjuntos representan una relación.

2 Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función o a una relación:

$$A = \{(-2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$B = \{(3, 2), (3, 6), (5, 7), (5, 8)\}$$

$$C = \{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

$$M = \{(2, 4), (6, 2), (7, 3), (4, 12), (2, 6)\}$$

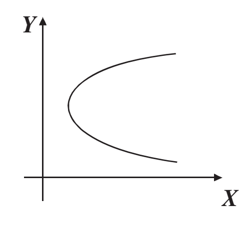
**Solución**

Los conjuntos $A$ y $C$ son funciones ya que el primer elemento de cada par ordenado no se repite. En el conjunto $B$ el 3 y el 5 aparecen dos veces como primer elemento del par ordenado mientras que en el conjunto $M$ al 2 se le están asignando el 4 y el 6 como segundo elemento, por tanto, $B$ y $M$ son relaciones.

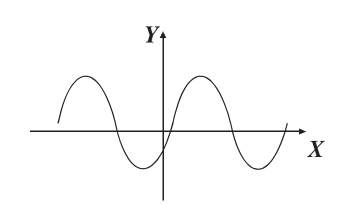
Las funciones y relaciones pueden tener una representación gráfica en el plano cartesiano. Para distinguir si se trata de una función o una relación basta con trazar una recta paralela al eje "Y" sobre la gráfica; si ésta interseca en dos o más puntos es una relación, si sólo interseca un punto será una función.

3 Determina si las siguientes gráficas representan una relación o una función.

1.



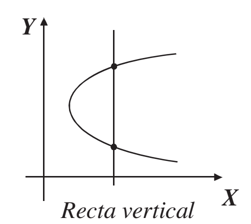

2.



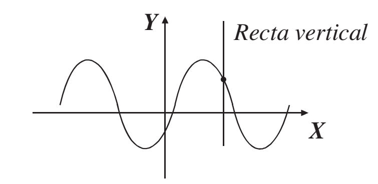

**Solución**

Se traza una recta vertical en ambas gráficas y se observa que en la primera interseca en dos puntos a la gráfica, por tanto, representa una relación y en la segunda, la recta vertical interseca en un punto a la gráfica, por consiguiente representa una función.

1.




2.



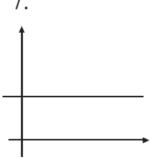

## EJERCICIO 1

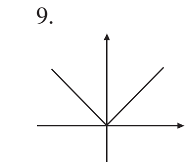
Identifica si los siguientes conjuntos representan funciones o relaciones.

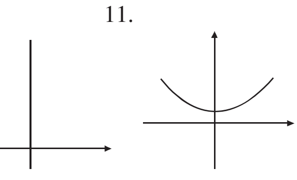
1. $\{(0, 3), (2, 3), (-1, 3)\ldots\}$
2. $\{(-3, 5), (3, 5), (-3, 2)\ldots\}$
3. $\{(4, 7), (-4, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, 5)\ldots\}$
4. $\{(2, 5), (\sqrt{4}, 2), (3, -3)\ldots\}$
5. $\{(a, 2a), (-2a, 3a), (4a, a)\ldots\}$
6. $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{6}{4}, -1\right), \left(1, \frac{5}{2}\right)\ldots\right\}$

Identifica qué representa cada gráfica (función o relación):

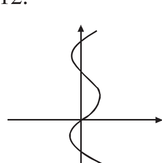
7. 8. 9. 10. 11.

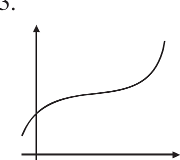


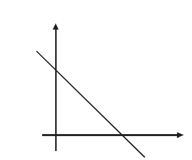


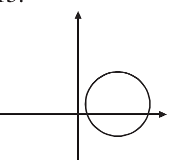


12. 13. 14. 15.









Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Notación

Una función se denota o escribe como $y = f(x)$, donde:

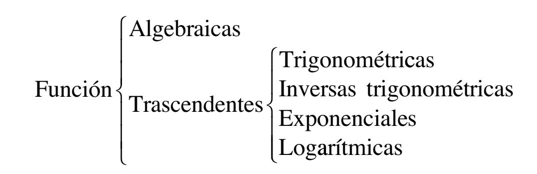
$x$: variable independiente.

$y$: variable dependiente.

$f$: función, regla de asignación o correspondencia.

## Clasificación

Las funciones se clasifican en: *algebraicas* y *trascendentes*




### Ejemplos

**Algebraicas**

$f(x) = x^3 - 4x$ $\qquad f(x) = \sqrt{x-4}$ $\qquad y = |x|$

$y = 3x^2 - 5x - 6$ $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ $\qquad g(x) = |x - 2| - 1$

**Trascendentes**

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(x) = e^{4x}$ $\qquad s(t) = \ln(2t - 4)$

$f(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ $\qquad y = e^{\sqrt{x}} + 2$ $\qquad g(x) = \log(x + 1)$

Las funciones algebraicas y trascendentes pueden ser:

- **Explícitas**
  Es cuando la función está en términos de una variable, por ejemplo:

$y = x^2$ $\qquad f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ $\qquad y = \text{sen } 3x$ $\qquad s(t) = e^t$ $\qquad y = \log x$

$y = x^3 - 1$ $\qquad g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $\qquad f(x) = \cos \dfrac{1}{2} x$ $\qquad g(x) = 2^{x+3}$ $\qquad f(x) = \ln(3x)$

- **Implícitas**
  Es cuando ambas variables forman parte de la ecuación, por ejemplo:

$$x^2 - 8y + 16 = 0 \qquad x^3 + y^2 - 3x = 0 \qquad \text{sen } x + \cos y = 1 \qquad e^y = x + 3$$

Las funciones que se estudiarán en este libro siempre tomarán valores de números reales tanto para la variable independiente como para la dependiente.

## Valor de una función

El valor real $f(x)$ de una función es aquel que toma $y$ cuando se asigna a $x$ un determinado valor real.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén $f(-3)$ para $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

**Solución**

Para obtener $f(-3)$ se sustituye $x = -3$ en la función y se realizan las operaciones indicadas,

$$f(-3) = 3(-3)^2 - 5(-3) - 2 = 27 + 15 - 2 = 40$$

Por tanto $f(-3) = 40$, es decir $y = 40$ cuando $x = -3$ o lo que es lo mismo, la curva pasa por el punto $(-3, 40)$ en el plano cartesiano.

2 Si $f(x) = \frac{3x-1}{5-x}$, encuentra $f\left(\frac{3}{4}\right)$

**Solución**

Se sustituye $x = \frac{3}{4}$ en la función y se realizan las operaciones:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{4}} = \frac{5}{17}$$ , por tanto, cuando $x = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{17}$

3 Si $s(t) = \sqrt{t-5}$, determina $s(4)$, $s(a+5)$

**Solución**

$s(4) = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1}$, la función no está definida para $t = 4$, $\sqrt{-1}$ no tiene solución real

$$s(a+5) = \sqrt{a+5-5} = \sqrt{a}$$

4 Si $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, determina $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**Solución**

Se sustituye $x = \frac{\pi}{3}$, en $f(x)$ y se utiliza la identidad $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cos\alpha$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

5 Determina $\frac{f(a+b)-f(a)}{b}$ si $f(x) = \sqrt{x}$

**Solución**

Se obtiene que $f(a+b) = \sqrt{a+b}$ y $f(a) = \sqrt{a}$

Se sustituyen los valores obtenidos:

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{b} = \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}$$

Un resultado equivalente se obtiene al racionalizar el numerador:

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}=\frac{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{b\cdot\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b}{b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$$

Finalmente, el resultado de $\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$

6 Si $y=\frac{x}{x+2}$, encuentra el valor de $y$ cuando $x=-2$

**Solución**

Al evaluar la función en $x=-2$, se obtiene:

$$y=\frac{-2}{-2+2}=-\frac{2}{0}$$

La función no está definida para $x=-2$, ya que la división entre cero no está determinada.

7 Si $f(x)=x^2-1$, demuestra que $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

**Demostración**

Se sustituye $\frac{1}{x}$ en la función:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{1}{x^2}-1=\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{-\left(-1+x^2\right)}{x^2}=-\frac{x^2-1}{x^2}$$

Pero $x^2-1=f(x)$

Por tanto, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

## EJERCICIO 2

Evalúa las siguientes funciones:

1. Si $f(x)=2x^2-3$, obtén $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(3)$, $f(0)$
2. Si $f(x)=x^2-5x+6$, determina $f(a)$, $f(a+b)$
3. Si $f(x)=3x^2+4x-2$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Si $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$, determina $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(x+h)-f(x)$
5. Si $f(x)=\sqrt{x^2-16}$, determina $f(5)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(3)$
6. Si $f(x)=\sqrt{x^2-3}$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

7. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, determina $\dfrac{f(x+b)-f(x)}{b}$

8. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$, determina $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9. Si $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x+2}$, determina $f(1)$, $f(0)$, $f(x+5)$

10. Si $f(x) = -3x^2 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x}$, determina $f(-1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

11. Si $f(x) = x^2 - 3x$, demuestra que $f(3x) - f(x-1) = 4(x-1)(2x+1)$

12. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

13. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

14. Si $f(x) = \tan x$, demuestra que $f(x) = f(x + 3\pi)$

15. Si $f(x) = \cos 2x$, demuestra que $f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -f(x)$

16. Demuestra que para $f(x) = \sqrt{x-2}$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{f(x+h)+f(x)}$

17. Si $h(x) = \sqrt{x^2-4}$, $r(x) = \sqrt{x^2+4}$, demuestra que $h\left(n+\dfrac{1}{n}\right) + r\left(n-\dfrac{1}{n}\right) = 2n$

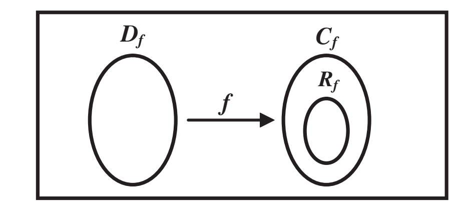
18. Si $f(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, demuestra que $\dfrac{f(m)-f(n)}{1+[f(m)][f(n)]} = \dfrac{m-n}{1+mn}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Dominio, contradominio y rango de una función

Dada una función $f: A \rightarrow B$, se dice que el conjunto $A$ es el **dominio** ($D_f$) y $B$ el **contradominio** ($C_f$) o codominio de $f$. En términos del plano cartesiano, el dominio corresponde al conjunto formado por los valores posibles para $X$ mientras que el contradominio corresponde a los valores posibles para $Y$.

- **Rango ($R_f$)**
  Valores del contradominio para los cuales $y = f(x)$, siendo $f(x)$ la imagen de $x$.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$?

**Solución**

La función es polinomial, $x$ puede tomar cualquier valor, por tanto, el dominio son todos los números reales, es decir $x \in R$ o dicho de otra forma $x \in (-\infty, \infty)$.

2 Determina el dominio de la función $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

**Solución**

La función es racional y el denominador debe ser distinto de cero, ya que la división entre cero no está definida, por tanto, se busca el valor para el cual $x + 5 = 0$ obteniendo $x = -5$, entonces el dominio es: $D_f = \{x \in R \mid x \neq -5\}$ o bien $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

3 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x - 6}$ ?

**Solución**

Al factorizar el denominador se obtiene: $f(x) = \frac{x}{(x-6)(x+1)}$, el denominador se hace cero para

$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = -1, D_f = \{x \in R \mid x \neq -1, x \neq 6\} \quad \text{o bien} \quad \{x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 6) \cup (6, \infty)$$

4 Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-5}$

**Solución**

El radicando debe ser mayor o igual a cero (ya que no hay valor real para raíces cuadradas de números negativos) es decir $x - 5 \geq 0$, de donde $x \geq 5$, por tanto $D_f = \{x \in R \mid x \geq 5\}$ o bien $x \in [5, \infty)$

5 Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

**Solución**

Se plantea la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, al resolverla se obtiene que el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \leq -4 \text{ o } x \geq 4\}$ o bien $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

6 Determina el dominio de la función $f(x) = \log(2x - 3)$

**Solución**

Para determinar el dominio de esta función se debe tomar en cuenta que $\log_b N = a$, para $N > 0$, por tanto, se plantea la desigualdad y se resuelve:

$$2x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad 2x > 3 \quad \rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$

Entonces, el dominio es el conjunto $D_f = \left\{x \in R \mid x > \frac{3}{2}\right\}$, o bien, $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

7 Encuentra el rango de la función $f(x) = \dfrac{6x+1}{1+3x}$

**Solución**

Se despeja $x$:

$$y = \frac{6x+1}{1+3x} \rightarrow y(1+3x) = 6x+1 \rightarrow y + 3xy = 6x + 1$$

$$3xy - 6x = 1 - y \rightarrow 3x(y-2) = 1 - y \rightarrow x = \frac{1-y}{3(y-2)}$$

El denominador se hace cero cuando $y = 2$, por tanto el rango es el conjunto:

$$R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o bien, } y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

8 Determina el rango de la función $y = \sqrt{9 - x^2}$

**Solución**

$y \geq 0$, porque la raíz es positiva o cero, se despeja $x$:

$$y = \sqrt{9-x^2} \rightarrow y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 = 9 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{9-y^2}$$

Se plantea la desigualdad $9 - y^2 \geq 0$, al resolverla se obtiene que $y \in [-3, 3]$, pero $y \geq 0$, por tanto, el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 3\}$, o bien, $y \in [0, 3]$

## EJERCICIO 3

Determina el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = 3x^3 - 2$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$
4. $f(x) = \dfrac{x-4}{5-x}$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-16}$
6. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-7x+10}$
8. $f(x) = \dfrac{x-1}{25-x^2}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x^2+10x}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$
12. $f(x) = \sqrt{x+1}$
13. $f(x) = \sqrt{x-6}$
14. $f(x) = \sqrt{2-x}$
15. $f(x) = \sqrt{12-3x}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2-25}$
17. $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$
18. $f(x) = \sqrt{36-x^2}$

19. $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$

20. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt[4]{x - 5}$

22. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x - 2}}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3 - x}}$

24. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 8}}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 4}{x - 3}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{2x - 3}}$

27. $f(x) = \log(3x + 6)$

28. $f(x) = \ln(5 - 2x)$

29. $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

30. $f(x) = \log(3 + 2x - x^2)$

Determina el rango de las siguientes funciones:

31. $f(x) = x^2 + 1$

32. $f(x) = x^2 - 4$

33. $f(x) = 9 - x^2$

34. $f(x) = 3x - x^2$

35. $f(x) = \dfrac{10x - 1}{3 - 5x}$

36. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4x + 1}$

37. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

38. $y = -\sqrt{2 - x}$

39. $y = \sqrt{4 - x^2}$

40. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 3}}$

42. $y = |x - 4|$

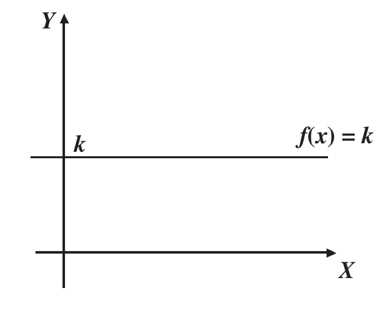
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Algunos tipos de funciones

### Función constante

$f(x) = k$ con $k \in R$ representa una recta paralela al eje "$X$" sobre $k$.

$$\text{Dominio: } D_f = R \text{ o bien } x \in (-\infty, \infty) \qquad \text{Rango: } R_f = \{k\}$$



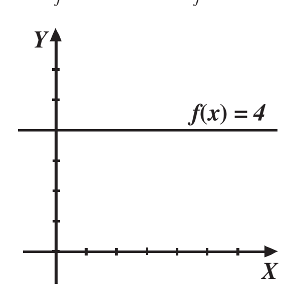
**Ejemplo**

Obtén la gráfica de $f(x) = 4$

**Solución**

Se traza una recta paralela al eje $X$ sobre $y = 4$

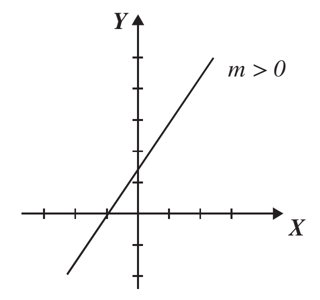
$$D_f = R \qquad R_f = \{4\}$$

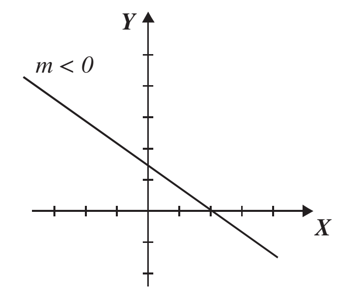



## Función lineal

Esta función tiene la forma $f(x) = mx + b$ y representa una recta en el plano cartesiano, en donde $m$ es la pendiente y $b$ la ordenada al origen.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$, Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$




Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

**I.** Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto $(0, b)$.

**II.** A partir de este punto, se localiza otro, tomando la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica la función $y = \frac{2}{3}x + 4$

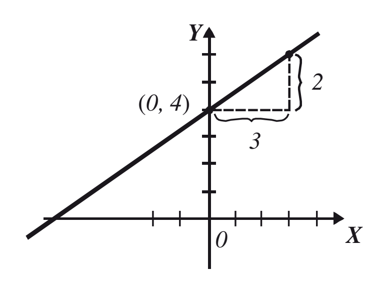
**Solución**

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 4, \text{ representa el punto } (0, 4)$$

Gráfica de la función




2 Traza la gráfica de la función $y = -\frac{4}{5}x + 2$

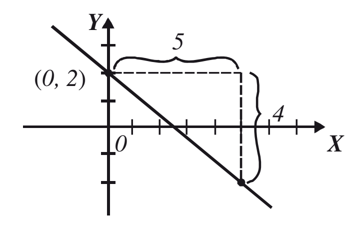
**Solución**

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = -\frac{4}{5}x + 2$$

$$m = -\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 2, \text{ representa el punto } (0, 2)$$

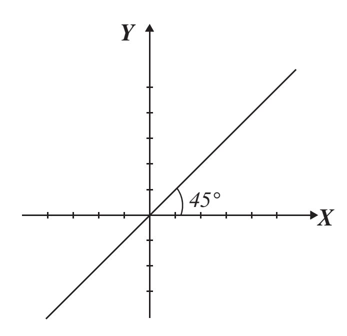
Gráfica de la función



## Función identidad

Es la función lineal $f(x) = mx + b$, con $m = 1$ y $b = 0$, es decir: $f(x) = x$

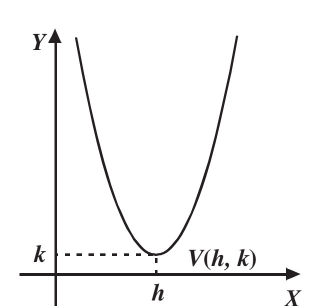
Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$



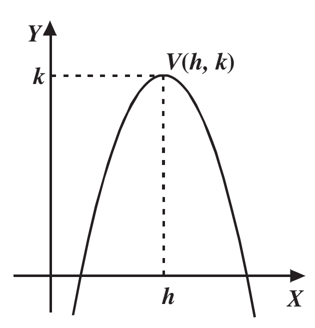

## Función cuadrática

Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y representa una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo

Si $a > 0$




Si $a < 0$




$V(h, k)$: son las coordenadas del vértice.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right)$

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$

Para obtener las coordenadas $(h, k)$ del vértice se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a},\ k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

### Ejemplo

Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

### Solución

Se identifican los valores de los coeficientes de cada término: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$

$a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba

Se calculan los valores de $h$ y $k$:

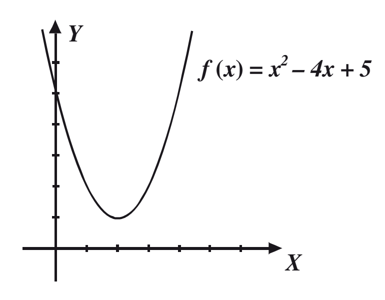
$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2; \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(5) - (-4)^2}{4(1)} = 1$$

El vértice es el punto $V(2, 1)$ y el dominio y rango son:

$$D_f = R \text{ o bien } x \in (-\infty, \infty) \qquad y \in \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right) = [1, \infty)$$

Para graficar, se tabula y se asignan valores de $x$ menores y mayores que 2

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 |




## La función $f(x) = x^n$

Con "n" entero positivo tiene como: Dominio $x \in (-\infty, \infty)$ es decir el conjunto de los reales $R$ y Rango:

$$\begin{cases} y \in [0, \infty) & \text{si } n \text{ es par} \\ y \in (-\infty, \infty) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

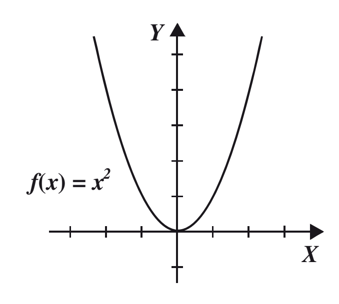
EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$

**Solución**

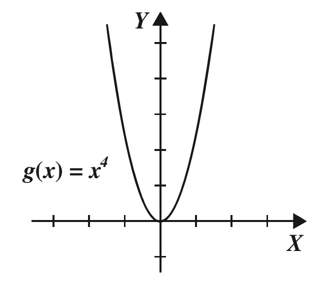
Se tabula con valores arbitrarios de $x$:

| x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |




Al graficar se obtiene:

| x | $-\frac{3}{2}$ | −1 | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = x^4$ | $\frac{81}{16}$ | 1 | 0 | 1 | $\frac{81}{16}$ |

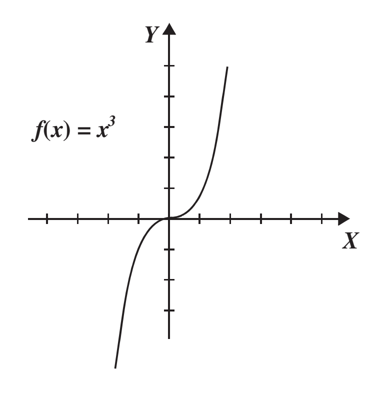


2 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^5$

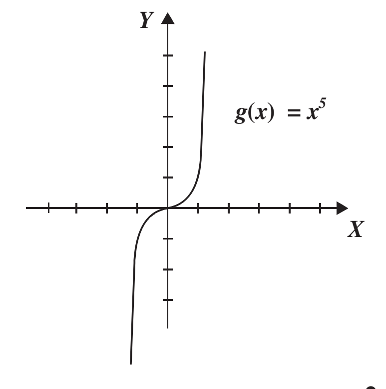
**Solución**

Se tabula para valores arbitrarios de $x$:

| x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^3$ | −8 | −1 | 0 | 1 | 8 |




| x | $-\frac{3}{2}$ | −1 | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = x^5$ | $-\frac{243}{32}$ | −1 | 0 | 1 | $\frac{243}{32}$ |




## Función racional

Se expresa como el cociente de dos funciones polinomiales.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0$$

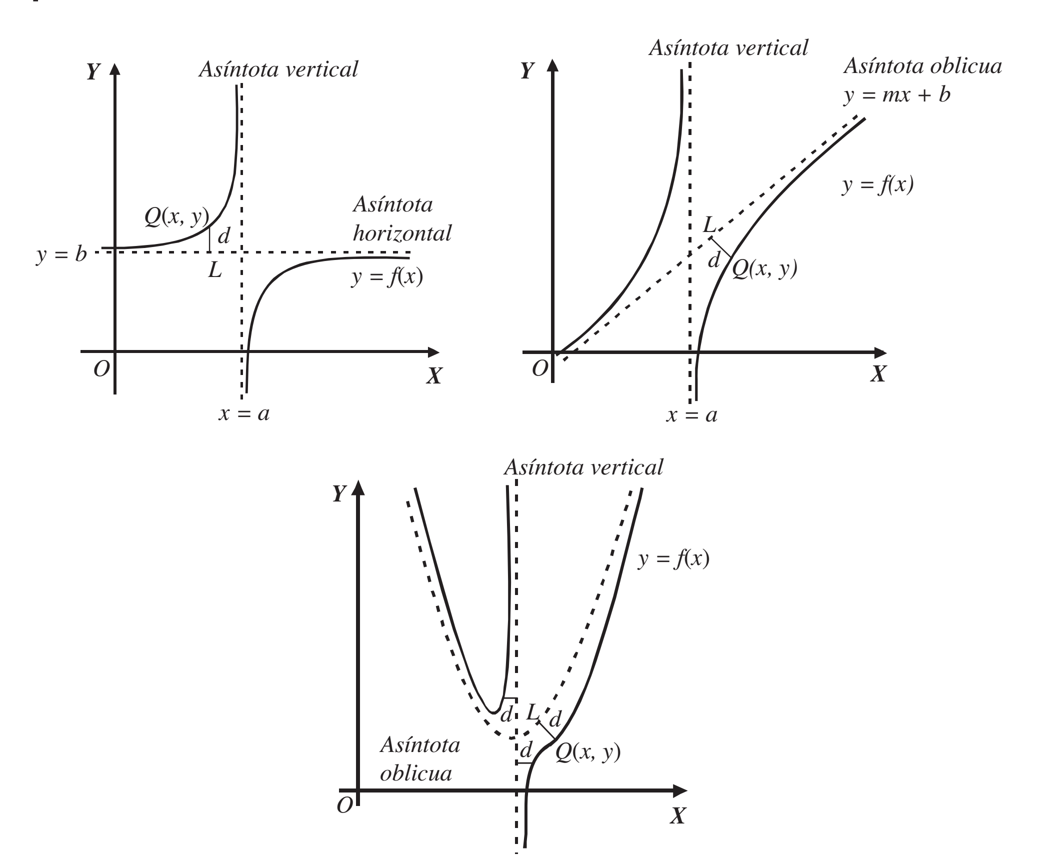
### *Definición de asíntota*

Si la distancia $d$ entre una recta o curva $L$ y el punto móvil $Q(x, y)$ de la función tiende a cero, entonces la recta o curva recibe el nombre de asíntota.

Existen tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Cuando la gráfica de la función $f(x)$ se acerca a la curva o recta $L(x)$ y la distancia $d$ entre un punto de $f(x)$ y la curva o recta $L(x)$ tiende a cero (es decir la gráfica no toca a $L(x)$), entonces $L(x)$ recibe el nombre de asíntota.

## Ejemplos




En este capítulo sólo se estudiarán las asíntotas horizontales y verticales.

- **Asíntotas verticales**

  Una función de la forma $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tiene asíntotas verticales si existen valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ tal que se cumple lo siguiente:

$$Q(x_1) = Q(x_2) = \dots = Q(x_n) = 0$$

- **Asíntotas horizontales**

  Se despeja la variable independiente $x$, si se obtiene una función de la forma $G(y) = \dfrac{R(y)}{S(y)}$, tal que para los valores de $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ se cumpla que:

$$S(y_1) = S(y_2) = \dots = S(y_n) = 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

**Solución**

El dominio de la función está dado por el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$, teniendo una asíntota en $x = 0$, es decir el eje vertical del plano.

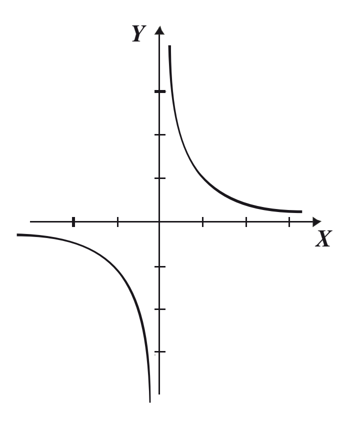
Al despejar $x$ se obtiene $x = \frac{1}{y}$

De la cual se deduce que el rango está dado por $R_f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$ y su asíntota horizontal es $y = 0$, es decir el eje horizontal del plano.

Si tabulas para valores de $x$ diferentes de cero obtienes:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | no existe | 3 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

Se grafican las asíntotas y se localizan los puntos en el plano, se unen y se observa cómo la curva se acerca a las asíntotas sin tocarlas, haciendo la distancia entre la curva y las rectas cada vez más pequeña.




2 Determina el dominio, el rango y la gráfica de la función $y = \frac{2x-3}{x+2}$

**Solución**

El denominador debe ser diferente de cero,

$$x + 2 \neq 0, \text{ entonces } x \neq -2$$

Por tanto, el dominio está dado por:

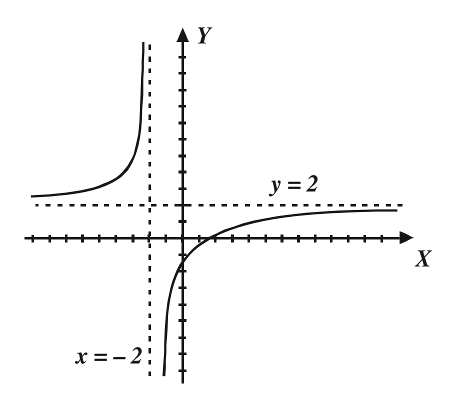
$$D_f = \{x \in R \mid x \neq -2\} \text{ o } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \text{ y la asíntota vertical es } x = -2$$

Al despejar $x$ se obtiene el rango y la asíntota horizontal:

$$y = \frac{2x-3}{x+2}, \text{ entonces } x = \frac{2y+3}{2-y} \text{ donde } 2 - y \neq 0 \rightarrow y \neq 2$$

Por tanto, el $R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\}$ y la asíntota horizontal es $y = 2$

Gráfica: Se trazan las asíntotas y mediante una tabulación se obtienen los pares ordenados, los cuales forman la siguiente curva:




## Función raíz cuadrada

La función está dada por: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ , con $g(x) \geq 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

**Solución**

Para determinar el dominio se resuelve la desigualdad: $x + 2 \geq 0$ donde $x \geq -2$, entonces el dominio es el conjunto: $\{x \in R \mid x \geq -2\}$ o $x \in [-2, \infty)$

El rango se obtiene despejando $x$

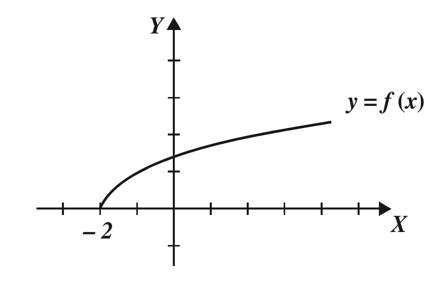
$$y = \sqrt{x+2} \quad \rightarrow \quad y^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x = y^2 - 2$$

La función es una raíz positiva, o cero, es decir $y \in [0, \infty)$ y el despeje da como resultado una expresión polinomial donde $y \in R$, por tanto el rango está definido para $y \in [0, \infty)$

Al tabular dando algunos valores en el intervalo $x \in [-2, \infty)$ se obtiene:

| x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $\sqrt{7}$ |

La gráfica que se obtiene es:



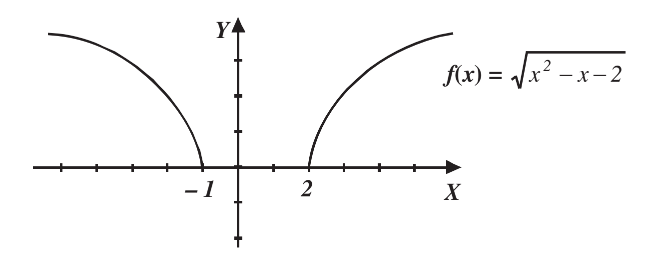
2 Determina la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

**Solución**

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x^2 - x - 2 \geq 0$, obteniendo que

$$x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

Al despejar $x$ se obtiene, $x = \frac{1 \pm \sqrt{4y^2 + 9}}{2}$ donde $y \in (-\infty, \infty)$, $f(x)$ es una raíz positiva, o cero, por tanto el rango es: $y \in (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$




3 Grafica la función $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

**Solución**

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, obteniendo que:

$$x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

Al despejar $x$ para obtener el rango:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y^2 = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow y^2(x+1) = x - 1 \rightarrow y^2x + y^2 = x - 1$$

$$y^2x - x = -1 - y^2$$

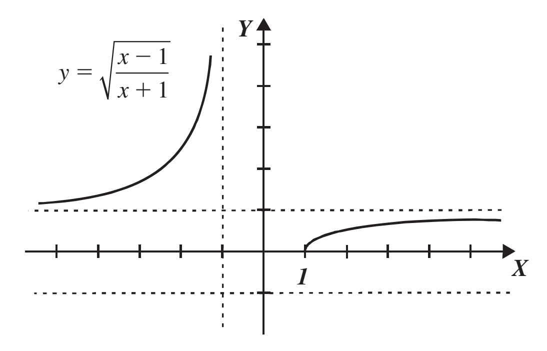
$$x(y^2 - 1) = -1 - y^2$$

$$x = \frac{-1 - y^2}{y^2 - 1}, \text{ donde } y \neq \pm 1.$$

La función es una raíz positiva, por tanto, $y \in [0, \infty)$, entonces el rango corresponde a:

$$y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y dos horizontales en $y = -1$, $y = 1$, al graficar se obtiene:




Nota: Observe que gráficamente $y = -1$ no es asíntota.

## Función valor absoluto

La función es $f(x) = |g(x)|$, donde $x \in D_g$ y $f(x) \geq 0$.

EJEMPLOS

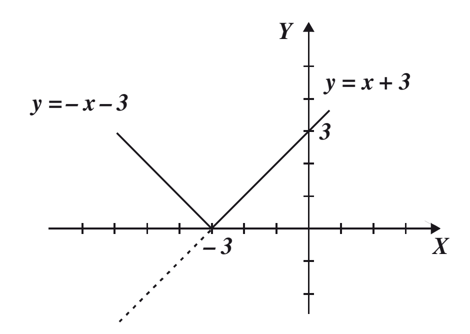
Ejemplos

1 Obtén la gráfica de $f(x) = |x + 3|$.

**Solución**

Se parte de la definición de valor absoluto, en la que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$, se obtienen las siguientes igualdades: $y = x + 3$, $y = -x - 3$, las cuales son dos rectas donde el dominio son los números reales y el rango está dado por $y \in [0, \infty)$

La gráfica que se obtiene es:




2 Obtén la gráfica de $f(x) = \left|\frac{2}{x}\right|$.

**Solución**

$\frac{2}{x}$, está definido para $x \neq 0$, por tanto el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ o bien

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

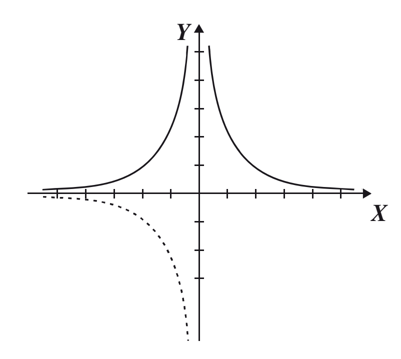
Para el rango se despeja $x$ de las igualdades que se obtienen al aplicar la definición de valor absoluto.

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}\text{, donde } y \neq 0, \qquad y = -\frac{2}{x} \rightarrow x = -\frac{2}{y}\text{, donde } y \neq 0$$

También se toma el hecho de que $f(x) > 0$, ya que $\left|\frac{2}{x}\right| > 0$, por tanto el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid y > 0\}$ o bien $y \in (0, \infty)$.

La asíntota horizontal es $y = 0$, mientras que la vertical es la recta $x = 0$.

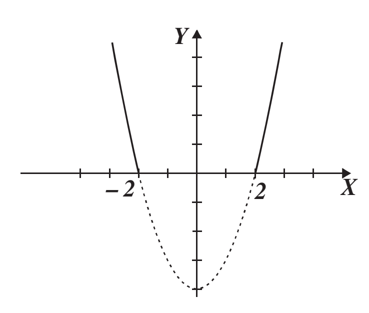
Luego la gráfica que se obtiene es:



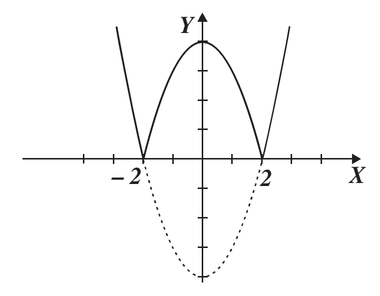
3 Obtén la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$.

**Solución**

$y = x^2 - 4$ es una función cuadrática con dominio $x \in R$ y rango $y \in [-4, \infty)$, teniendo como gráfica:




$f(x) \geq 0$, luego el rango de la función es: $y \in [0, \infty)$, por tanto, al hacer positiva la parte donde $x^2 - 4$ es negativa se obtiene la siguiente gráfica:




4 Obtén el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$

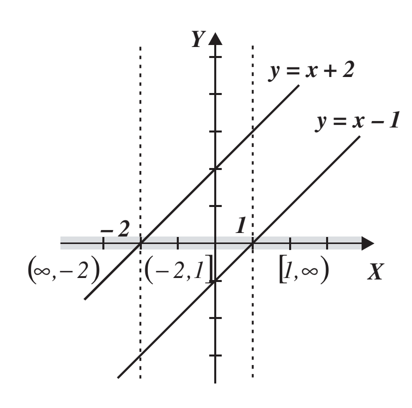
**Solución**

Dominio: Para $y = \frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, por tanto el dominio de la función está dado por:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$$

Rango: $f(x) > 0$, por tanto, el rango está dado por $y \in [0, \infty]$, pero al despejar "x" se obtiene $x = \frac{1-2y}{y-1}$, entonces $y \neq 1$, por tanto $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Gráfica 1

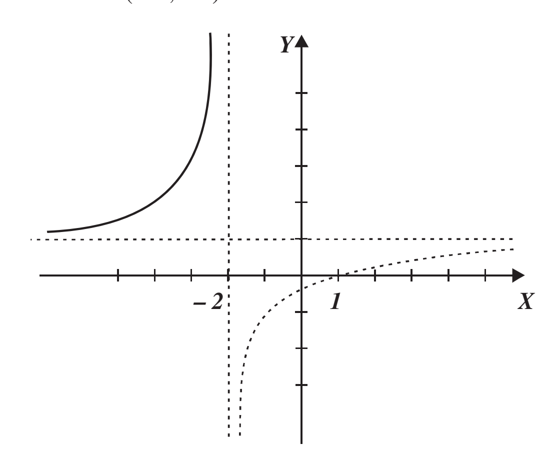


En la gráfica 1 se muestran los intervalos que se analizarán para construir la gráfica que se propone.

i) En el intervalo $(-\infty, -2)$ las rectas $y = x - 1$, $y = x + 2$, toman valores negativos, es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{-(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

La porción de gráfica en el intervalo $(-\infty, -2)$ es:




ii) En el intervalo $(-2, 1]$

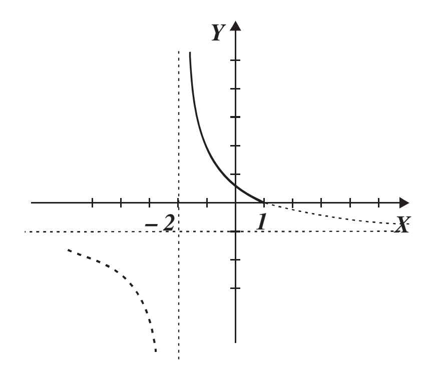
$y = x - 1$ toma valores negativos

$y = x + 2$ los toma positivos

es decir:

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{+(x+2)} = \frac{1-x}{x+2}$$

La porción de gráfica es:



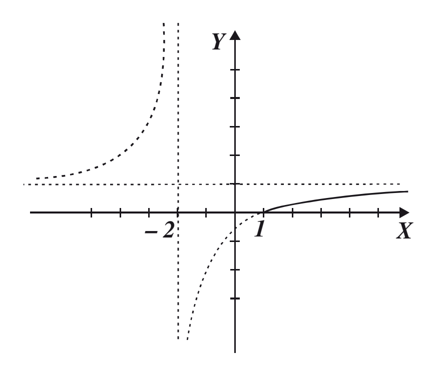

iii) En el intervalo $[-1, \infty)$

$$y = x - 1, y = x + 2$$

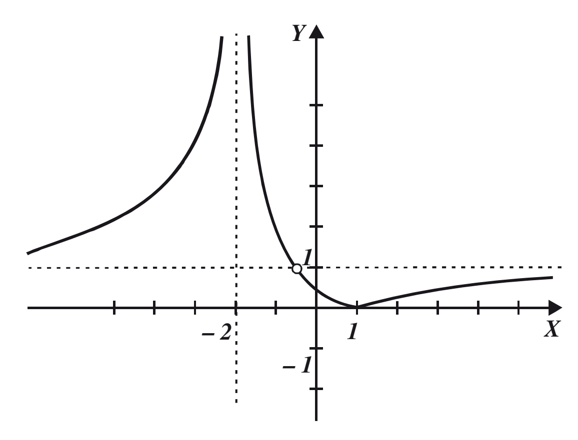
toma valores positivos es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{+(x-1)}{+(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Tiene la misma gráfica que en el caso i)
La porción de gráfica es:




Finalmente, la gráfica es la unión de las porciones de gráfica en cada intervalo.




Nota: En la gráfica aparece un hueco en $y = 1$ ya que el rango es $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

## Función mayor entero

Tiene la forma: $f(x) = [x]$ con la propiedad de que $[x] = n$ para todo $n \leq x < n + 1$, con $n \in Z$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de: $f(x) = [x]$

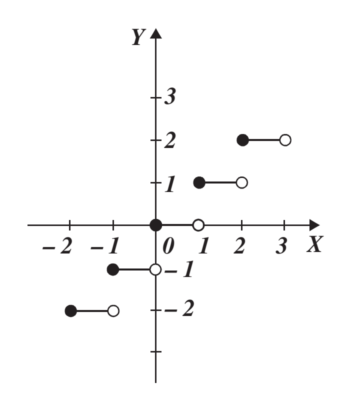
Dominio: $D_f = \{x \mid x \in R\}$

Rango: $R_f = \{y \mid y \in Z\}$

Se toma un subconjunto del dominio por ejemplo $x \in [-2, 3]$ se tiene que:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Gráfica:




También recibe el nombre de función escalón.

2 Traza la gráfica de $f(x) = \left[\frac{2}{3}x\right]$

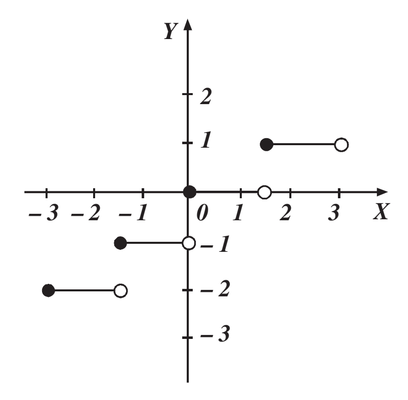
**Solución**

El dominio y el rango de la función se definen:

$$D_f = \{x \mid x \in R\} \text{ y } R_f = \{y \mid y \in Z\}$$

Se elige el subconjunto del dominio $x \in [-2, 2]$ entonces:

| | Longitud del escalón | f(x) |
|---|---|---|
| $-2 \leq \frac{2}{3}x < -1$ | $-3 \leq x < -\frac{3}{2}$ | $-2$ |
| $-1 \leq \frac{2}{3}x < 0$ | $-\frac{3}{2} \leq x < 0$ | $-1$ |
| $0 \leq \frac{2}{3}x < 1$ | $0 \leq x < \frac{3}{2}$ | $0$ |
| $1 \leq \frac{2}{3}x < 2$ | $\frac{3}{2} \leq x < 3$ | $1$ |



# EJERCICIO 4

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = -\frac{2}{5}$
3. $f(x) = \pi$
4. $f(x) = 3x + 5$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
6. $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$
7. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
8. $f(x) = -2x^2 + 12x - 13$
9. $f(x) = 4 - x^2$
10. $y = \frac{3}{x}$
11. $f(x) = -\frac{1}{x}$
12. $f(x) = \frac{x}{x-2}$
13. $y = \frac{x-2}{x+4}$
14. $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$
15. $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$
16. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$
17. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-9}$
18. $f(x) = \sqrt{-x}$
19. $y = \sqrt{x-4}$
20. $y = -\sqrt{9-x}$
21. $y = \sqrt{x^2-36}$
22. $y = \sqrt{16-x^2}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2+x-12}$
24. $f(x) = \sqrt{4x^2-9}$
25. $f(x) = \sqrt{\frac{900-100x^2}{9}}$
26. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
27. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$
28. $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$
29. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$
30. $f(x) = |x|$
31. $f(x) = |x - 2|$
32. $f(x) = |x + 4|$
33. $f(x) = |x^2 - 1|$
34. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
35. $f(x) = |2 - x^2|$
36. $f(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right|$
37. $f(x) = \left|\frac{2}{3-x}\right|$
38. $f(x) = \left|\frac{x+3}{x-3}\right|$
39. $f(x) = \left|\frac{x-3}{x+1}\right|$
40. $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$
41. $f(x) = \left[\frac{5}{3}x\right]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Función característica

Son funciones que están seccionadas por intervalos y en cada intervalo se presenta una función distinta. Para graficarla basta con dibujar la gráfica de cada una de las funciones en el intervalo dado.

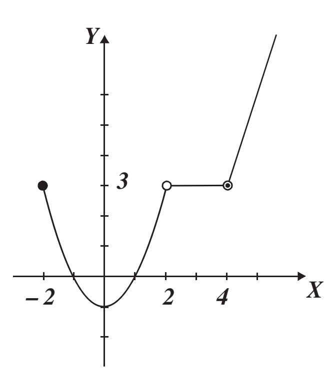
### Ejemplo

Obtén la gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 3x - 9 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

### Solución

Se tabula cada una de las funciones en el intervalo dado, se localizan los puntos y se grafican, observa que hay puntos que no están incluidos, para esos valores se coloca un círculo abierto.




## EJERCICIO 5

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \ge 3 \\ 0 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \le 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$ Recuerda que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

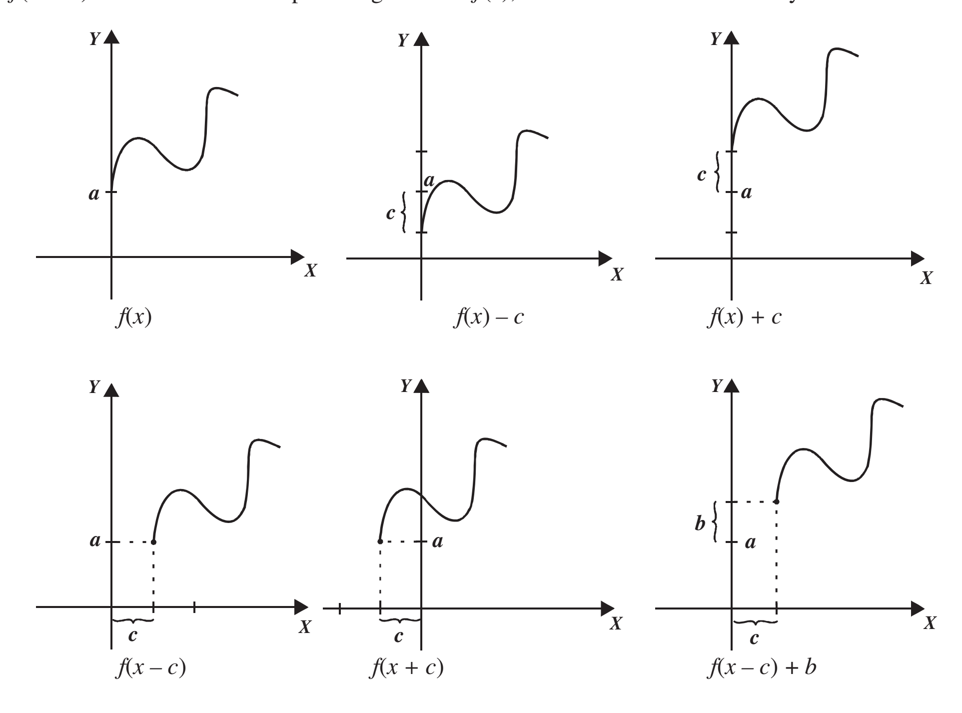
## Gráfica de una función a partir de otra conocida

Algunas funciones se grafican a partir de que se conoce la gráfica de otra, a través de desplazamientos, alargamientos o reflexiones de esta última.

### Desplazamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 0$ y $b > 0$, si:

*a*) $y = f(x) + c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades hacia arriba.
*b*) $y = f(x) - c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades hacia abajo.
*c*) $y = f(x + c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades hacia la izquierda.
*d*) $y = f(x - c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades a la derecha.
*e*) $y = f(x + c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades hacia la izquierda y $b$ unidades hacia arriba.
*f*) $y = f(x + c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades hacia la izquierda y $b$ unidades hacia abajo.
*g*) $y = f(x - c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades hacia la derecha y $b$ unidades hacia arriba.
*h*) $y = f(x - c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, $c$ unidades hacia la derecha y $b$ unidades hacia abajo.




### Alargamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 1$, si:

*a*) $y = cf(x)$, se alarga verticalmente la gráfica de $f(x)$, $c$ veces.

*b*) $y = \frac{1}{c}f(x)$, se comprime verticalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

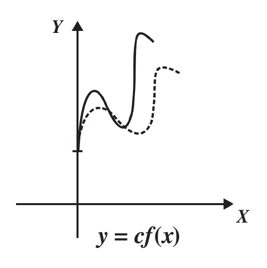
*c*) $y = f(cx)$, se comprime horizontalmente la gráfica de $f(x)$, $c$ veces.

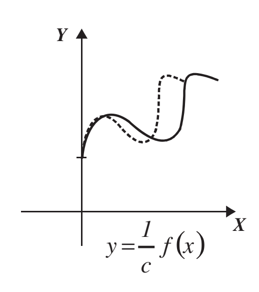
*d*) $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$, se alarga horizontalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

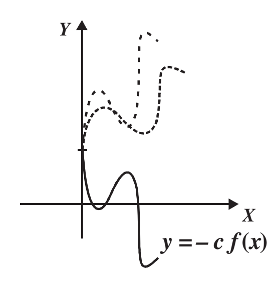
## Reflexiones verticales y horizontales

Sea $f(x)$ una función si:

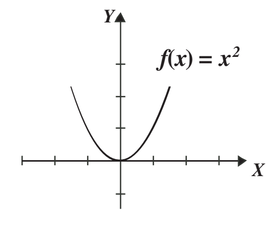
1. $y = -f(x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje $X$.
2. $y = f(-x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje $Y$.

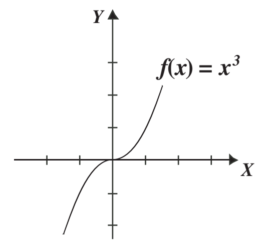


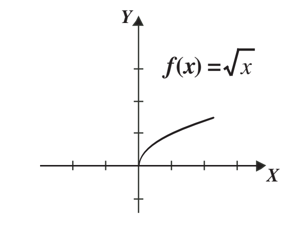



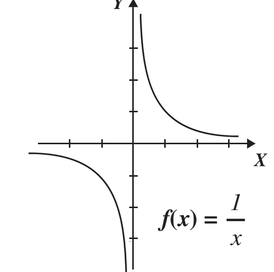



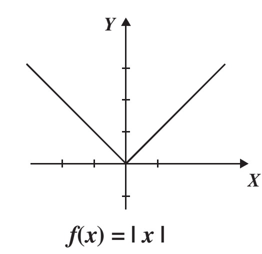

Se tomarán como base las siguientes funciones para graficar otras de la misma forma:



## EJEMPLOS

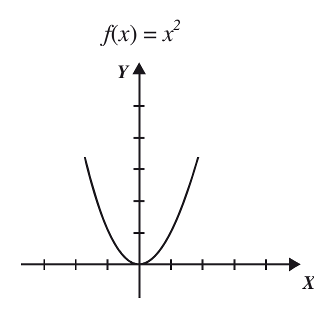
Ejemplos

**1** Con base en la función $f(x) = x^2$, obtén la gráfica de: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$,

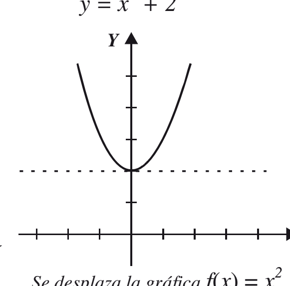
$$y = (x - 2)^2,\ y = (x + 2)^2,\ y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = -x^2,\ y = x^2 - 2x - 3$$

**Solución**

$f(x) = x^2$

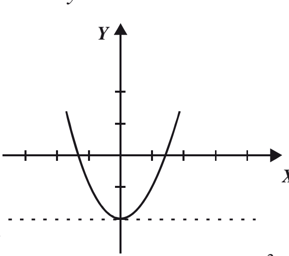



$y = x^2 + 2$




*Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba*

$y = x^2 - 2$

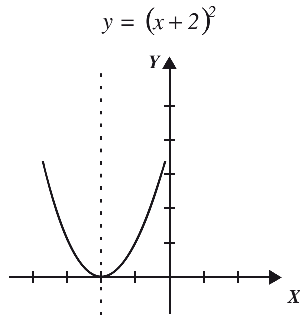



*Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia abajo*

$y = (x - 2)^2$

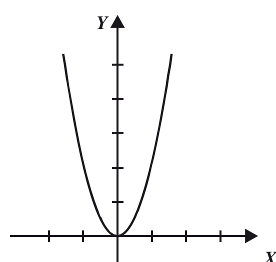
*Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la derecha*

$y = (x + 2)^2$



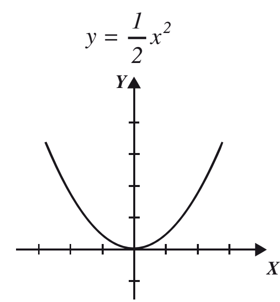

*Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la izquierda*

$y = 2x^2$



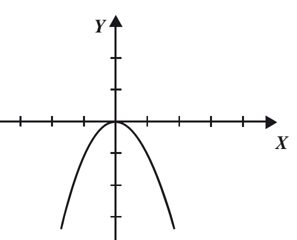

*Se alarga $f(x) = x^2$ verticalmente dos veces*

$y = \frac{1}{2}x^2$



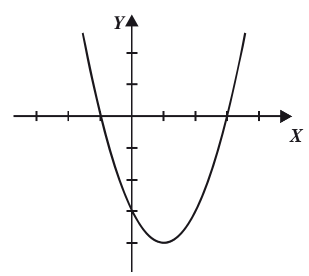

*Se comprime $f(x) = x^2$ a la mitad verticalmente*

$y = -x^2$




*Se refleja $f(x) = x^2$ con respecto al eje X*

$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$

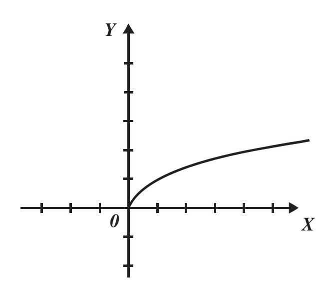



*Se desplaza $f(x) = x^2$ hacia la derecha una unidad y baja cuatro unidades*

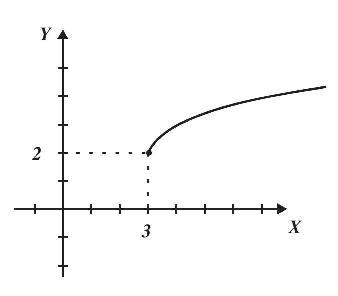
2 Determina la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

**Solución**

La gráfica de $y = \sqrt{x}$ es:




Para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, se toma la gráfica de $y = \sqrt{x}$, ésta se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba




## EJERCICIO 6

Utiliza desplazamientos, alargamientos o reflexiones para obtener la gráfica de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 4$
2. $y = (x + 3)^2$
3. $y = 1 - x^2$
4. $y = x^2 - 6x + 10$
5. $y = 3x^2 + 12x + 11$
6. $y = -x^3$
7. $y = x^3 + 1$
8. $y = (x - 1)^3 + 2$
9. $y = \frac{1}{2}x^3 - 2$
10. $y = \sqrt{x-2} + 2$
11. $y = \sqrt{x-3} - 2$
12. $y = -\sqrt{x+3}$
13. $y = |x - 3| - 2$
14. $y = 3 - |x + 4|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Funciones creciente y decreciente

Una función es **creciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

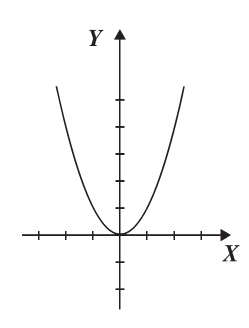
$$f(x_1) < f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

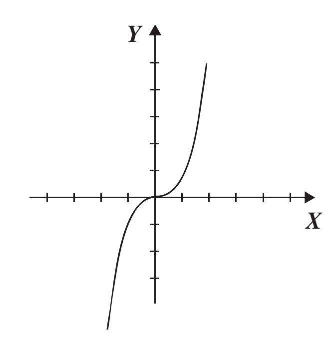
Una función es **decreciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

### Ejemplos

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ son:




La función $f(x) = x^2$, es decreciente en el intervalo de $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$, mientras que $g(x) = x^3$ es creciente para toda $x$ de su dominio.

## EJERCICIO 7

Con las funciones conocidas determina el intervalo donde crecen o decrecen:

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = \sqrt{x-2}$
6. $f(x) = -\sqrt{x+3}$
7. $f(x) = 9 - x^2$
8. $f(x) = |x - 3| - 2$
9. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
10. $f(x) = 6$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva

### Función inyectiva (uno a uno)

Si $x_1, x_2 \in D_f$ y $x_1 \neq x_2$, $f$ es una función inyectiva si y solo si $f(x_1) \neq f(x_2)$, o dicho de otra forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$ si y solo si $x_1 \neq x_2$.

Se determina si la *función es inyectiva* al trazar una recta paralela al eje $X$ sobre la gráfica y si toca un solo punto es inyectiva. También se puede decir que una función inyectiva es aquella que siempre es creciente o siempre decreciente.

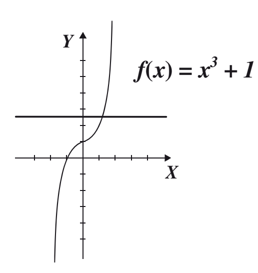
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$, es inyectiva.

**Solución**

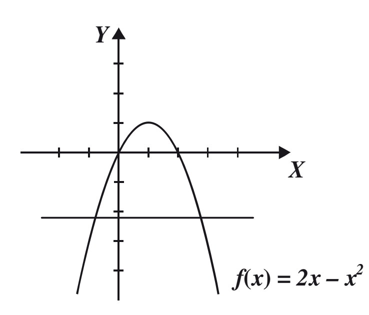
Sean $x_1 \neq x_2$, se tiene que $(x_1)^3 + 1 \neq (x_2)^3 + 1$, ya que no hay números distintos cuyos cubos sean iguales, con este resultado podemos afirmar que la función es inyectiva; por otro lado, si se observa que la gráfica es creciente, por tanto, es inyectiva. Otra forma de saber si la función es inyectiva es trazar cualquier recta paralela al eje $X$, y ésta debe tocar un solo punto de la gráfica.




2 Determina si la función $f(x) = 2x - x^2$ es inyectiva.

**Solución**

No es inyectiva, ya que para $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ se obtiene que $f(x_1) = f(x_2) = -3$, lo que contradice la definición. Luego, si se traza una recta paralela al eje $X$, se observa que ésta toca dos puntos de la gráfica; por otro lado, no es una función que sea creciente ni decreciente siempre.



## Función suprayectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es suprayectiva o sobreyectiva si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; es decir, para todo elemento de $B$ siempre hay uno de $A$ al cual fue asignado.

Otra forma de reconocer una función suprayectiva es si su contradominio es igual a su rango. Al menos que se indique lo contrario el contradominio de las funciones dadas serán los números reales.

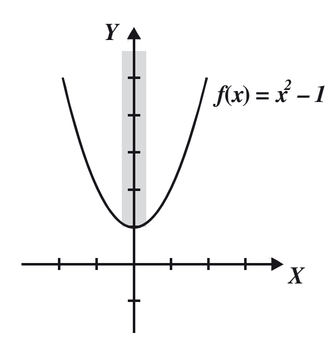
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^2 + 1$ es suprayectiva.

**Solución**

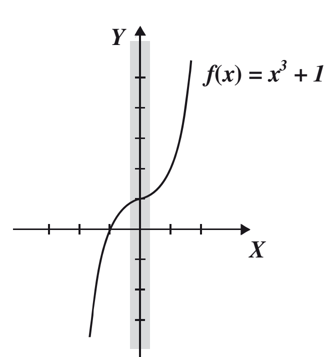
El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $[1, \infty)$, por tanto, la función no es suprayectiva.




2 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$ es suprayectiva

**Solución**

El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $(-\infty, \infty)$, por tanto, la función es suprayectiva.



## Función biyectiva

Una función "$f$" es *biyectiva* si es *inyectiva* y *suprayectiva*.

EJEMPLOS

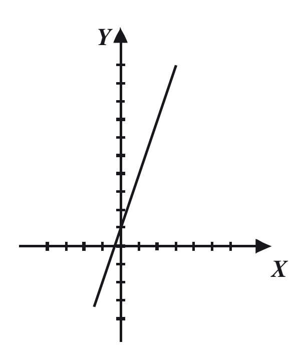
Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = 3x + 1$ es biyectiva.

**Solución**

Es una función siempre creciente, por tanto, es inyectiva. El contradominio de la función es $(-\infty, \infty)$ y su rango $(-\infty, \infty)$ entonces es suprayectiva.

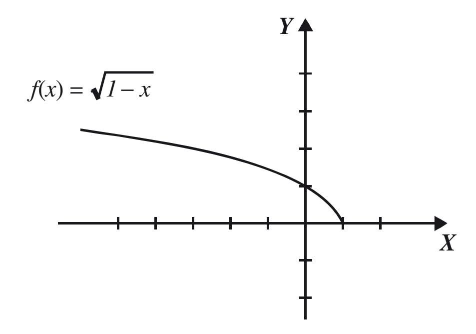
La función es inyectiva y suprayectiva, por tanto, es biyectiva.




2 Determina si la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

**Solución**

Gráfica




Si al trazar una recta paralela al eje $X$ interseca a la curva en un punto es inyectiva; no es suprayectiva, ya que su contradominio son los reales y su rango es el intervalo $[0, \infty)$. Es inyectiva pero no suprayectiva, entonces no es biyectiva.

3 Determina si la función $f: (-\infty, 1] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

**Solución**

La gráfica es la misma de la función del ejemplo anterior, por tanto, la función es inyectiva.

En este caso se especifica el contradominio como el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, entonces, es suprayectiva.

Es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.

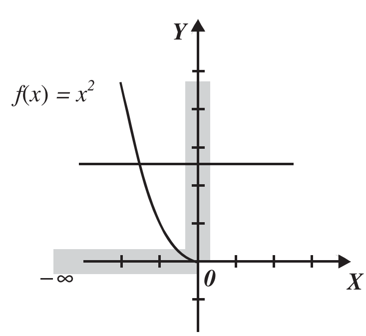
4 Determina si la función $f$: $(-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = x^2$ es biyectiva.

**Solución**

De la gráfica se observa que la función es inyectiva, ya que la recta horizontal sólo toca un punto.

Por otro lado, el contradominio es el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, por tanto, es suprayectiva.

Por último, es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.




# EJERCICIO 8

Indica cuál de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 3$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^2, x \in [0, \infty)$
6. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
7. $f(x) = 2x - 3$
8. $f(x) = \sqrt{x-3}$
9. $f$: $R \rightarrow [-1, \infty)$, tal que $f(x) = x^2 - 1$
10. $f$: $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = |x|$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Operaciones con funciones

Sean $f$ y $g$ dos funciones con dominios $D_f$ y $D_g$ respectivamente

- $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, con dominio: $\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 7x + 10$, y $g(x) = x - 5$

**Determina**

*a*) $f(x) + g(x)$
*b*) $f(x) - g(x)$
*c*) $f(x) \cdot g(x)$
*d*) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

**Solución**

Se obtienen los dominios de $f$ y $g$ para efectuar las operaciones.

$$D_f : (-\infty, \infty), D_g : (-\infty, \infty)$$

*a*) $f(x) + g(x) = (x^2 - 7x + 10) + (x - 5)$
$= x^2 - 6x + 5$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

*b*) $f(x) - g(x) = (x^2 - 7x + 10) - (x - 5)$
$= x^2 - 8x + 15$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

*c*) $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 7x + 10)(x - 5)$
$= x^3 - 7x^2 + 10x - 5x^2 + 35x - 50$
$= x^3 - 12x^2 + 45x - 50$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

*d*) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \dfrac{(x-5)(x-2)}{x-5} = x - 2$ con, $\{x \in D_f \cap D_g \mid x \neq 5\}$

2 Sean las funciones $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = x$ determina: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

**Solución**

Se obtienen los dominios de las funciones: $D_f$: $[-3, 3]$, $D_g$: $(-\infty, \infty)$ y se realizan las operaciones.

$f(x) + g(x) = \sqrt{9 - x^2} + x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) - g(x) = \sqrt{9 - x^2} - x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{9 - x^2} \cdot x = x\sqrt{9 - x^2}$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$, con dominio: $\{x \in [-3, 3] \mid x \neq 0\}$ o bien $x \in [-3, 0) \cap (0, 3]$

3 Sean $f = \{(2, 3), (3, -1), (4, -5), (5, -9)\}$ y $g = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (7, 10)\}$, determina $f + g$

**Solución**

Los dominios son $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$ y $D_g = \{1, 2, 3, 7\}$, entonces $D_{f+g} = \{2, 3\}$, para calcular $f(x) + g(x)$ se sustituyen los valores del dominio de la suma.

$$f(2) + g(2) = 3 + 5 = 8$$
$$f(3) + g(3) = -1 + 8 = 7$$

Por tanto, $f(x) + g(x) = \{(2, 8), (3, 7)\}$

# EJERCICIO 9

Para las siguientes funciones determina:

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x) \text{ y } \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $f(x)=5,\ g(x)=-2$
2. $f(x)=2x-5,\ g(x)=2x+5$
3. $f(x)=x^2-4x-5,\ g(x)=x^2+3x+2$
4. $f(x)=\frac{2x-1}{2},\ g(x)=\frac{x+2}{3}$
5. $f(x)=\sqrt{x-3},\ g(x)=\sqrt{x+4}$
6. $f(x)=x+\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{x}$
7. $f(x)=\text{sen}^2 x,\ g(x)=\cos^2 x$
8. $f=\{(-1,2),(0,3),(1,4),(3,6),(5,7)\},\ g=\{(-3,6),(-2,8),(-1,10),(2,12),(3,14),(5,16),(6,18)\}$
9. $f=\{(-2,-5),(-1,-3),(0,-1),(1,1),(2,3)\},\ g=\{(-5,8),(-4,7),(-3,6),(-2,5),(-1,4),(0,3)\}$
10. $f=\left\{\left(-2,-\frac{1}{2}\right),(-1,-1),(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right)\right\},\ g=\left\{(-1,2),(1,0),\left(2,\frac{1}{2}\right)\right\}$

Dadas las funciones:

$$f(x)=x+3,\ g(x)=x^2+5x+6,\ r(x)=x+2,\ s(x)=x^2-3x-10$$

Determina:

11. $f(x)+r(x)$
12. $f(x)-s(x)$
13. $g(x)\cdot s(x)$
14. $\frac{g(x)}{r(x)}$
15. $\frac{s(x)}{r(x)}$
16. $g(x)-s(x)$
17. $f(x)\cdot r(x)$
18. $\frac{f(x)}{r(x)}$
19. $\frac{g(x)}{s(x)}$
20. $\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{s(x)}{r(x)}$

Dadas las funciones:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2},\ g(x)=\frac{1}{x} \text{ y } h(x)=\frac{1-x}{3-x}, \text{ determina:}$$

21. $f(x)+g(x)$
22. $\frac{f(x)}{g(x)}$
23. $f(x)\cdot g(x)$
24. $f(x)-h(x)$
25. $g(x)\cdot h(x)$
26. $\frac{f(x)}{g(x)}+h(x)$

27. $\frac{h(x)}{f(x)} - g(x)$

28. $\frac{h(2)-f(1)}{g(3)}$

29. $f(x+1)\cdot\frac{1}{h(x+1)}$

30. $h(x) - g(x)$

31. $\frac{h(x)}{g(x)} - \frac{g(x)}{f(x)}$

32. $f(x)\cdot h(x) - g(x)$

33. $\frac{f(x)+h(x)}{g(x)}$

34. $\frac{1}{g(x)+h(x)}$

35. $\frac{1}{1-h(x)}$

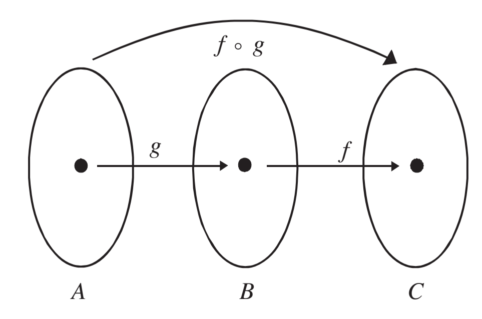
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Función composición (Función de funciones)

Sean $f$ y $g$ funciones cualesquiera que definen una nueva función, la cual recibe el nombre de función composición de $f$ con $g$ y se denota con:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

y es la función cuyo dominio son los elementos del dominio de $g$, tal que $g(x)$ pertenece al dominio de $f$; es decir, $D_{f\circ g}$: $\{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ y $g = \{(3, 1), (-1, 3), (-5, 5), (-9, 2)\}$, determina $f \circ g$.

**Solución**

Se determinan los pares ordenados de la función $g$, de tal manera que el segundo término sea el primer término de los pares ordenados de la función $f$. Los primeros términos, de cada par ordenado encontrado, forman el dominio de la función composición.

Los pares ordenados de $g$ que cumplen con la condición son:

$$(3, 1), (-1, 3), (-5, 5)$$

Por tanto, el dominio de la función composición es:

$$D_{fog} : \{-5, -1, 3\}$$

El dominio se evalúa de la siguiente manera:

Por definición $f \circ g = f(g(x))$, entonces el conjunto solución son todas las parejas ordenadas de la forma: $(x, f(g(x)))$

$$f(g(-5)) = f(5) = 6$$

$$f(g(-1)) = f(3) = 4$$

$$f(g(3)) = f(1) = 2$$

Finalmente el conjunto es:

$$f \circ g = \{(-5, 6), (-1, 4), (3, 2)\}$$

2 Determina $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$; $g \circ g$, para $f(x) = x + 3$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} + 3 = \frac{x + 3(x-1)}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x + 3) = \frac{x+3}{(x+3)-1} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$f \circ f = f(f(x)) = f(x + 3) = (x + 3) + 3 = x + 6$$

$$g \circ g = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{x(x-1)}{1(x-1)} = x$$

Para determinar $f \circ g \circ h$ se aplica primero $h$, después $g$ y, por último, $f$

3 Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ y $h(x) = x - 4$, determina $f \circ g \circ h$.

**Solución**

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-4)) = f(2(x-4)-1) = f(2x-8-1) = f(2x-9)$$
$$= (2x-9)^2 = 4x^2 - 36x + 81$$

4 Si $F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, determina $f$, $g$ y $h$ tal que $F = f \circ g \circ h$

**Solución**

$F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, la función dice suma 4, eleva al cuadrado, resta 5 y obtén la raíz.

Entonces se tiene que:

$$h(x) = x + 4 \qquad g(x) = x^2 - 5 \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

De tal forma que $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+4)) = f((x+4)^2 - 5) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$

## EJERCICIO 10

Determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ para las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ y $g(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$
3. $f(x) = 4$ y $g(x) = 2$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
5. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \log(x - 2)$ y $g(x) = x - 2$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
9. $f(x) = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)\}$ y $g(x) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
10. $f(x) = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ y $g(x) = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
11. $f(x) = \{(0, 1), (1, 3), (-1, -1), (-2, -3)\}$ y $g(x) = \{(3, 0), (-2, -2), (1, -1)\}$

Encuentra $f$ de manera que $(f \circ g)(x) = F(x)$

12. $g(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$ y $F(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$
13. $g(x) = x - 1$ y $F(x) = \sqrt{x - 1}$
14. $g(x) = x^3$ y $F(x) = mx^3 + b$

15. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $F(x) = x^2 - 1$

16. $g(x) = \frac{1}{x}$ y $F(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{x}}$

Determina $f \circ g \circ h$

17. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = 3x - 1$

18. $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - x$ y $h(x) = 4x^2$

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 5$ y $h(x) = x - 2$

20. $f(x) = x^2$, $g(x) = \text{sen}\, x$ y $h(x) = x - 2$

21. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y $h(x) = \cos x$

22. $f(x) = \log x$, $g(x) = 10^x$ y $h(x) = \text{sen}\, x$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Funciones par e impar

- Se dice que una función $f$ es par si: $f(-x) = f(x)$.
- Se dice que una función $f$ es impar si: $f(-x) = -f(x)$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 $f(x) = x^2 - 4$ es función par, ya que

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x).$$

2 $f(x) = 3x^3 + 4x$ es función impar ya que:

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 4(-x) = -3x^3 - 4x = -(3x^3 + 4x) = -f(x)$$

3 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ no es par ni impar, ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 5(-x) + 2 = -x^3 - x^2 + 5x + 2 = -(x^3 + x^2 - 5x - 2)$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{y} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Observaciones:

Si $f$ y $g$ son funciones pares y $h$ y $r$ funciones impares, entonces se cumple:

I. $f \cdot g$ es par

II. $f \cdot h$ es impar

III. $h \cdot r$ es par

# EJERCICIO 11

Indica si $f$ es par, impar o ninguna.

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = -x^2 + 2x - 4$
5. $f(x) = (x - 2)^3$
6. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
8. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
9. $f(x) = (x + 1)^2 + x^3$
10. $f(x) = x^3 - 2x$
11. $f(x) = x^4 - 2x^2$
12. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
13. $f(x) = 3x^5 - 2x$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$
15. $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^3}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Función inversa

Sea $f$ una función inyectiva con dominio $A$ y contradominio $B$; la función $g$ que satisface $f(g(x)) = x$, se llama *función inversa* de $f$ y se denota $f^{-1}(x)$ con dominio $B$ y contradominio $A$.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

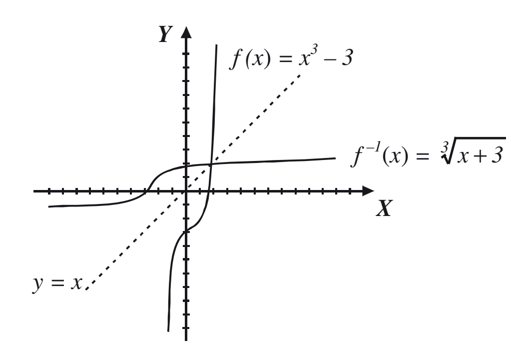
1 Determina la función inversa de $f(x) = x^3 - 3$.

**Solución**

$f(x) = x^3 - 3$

Al emplear la definición

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad (f^{-1}(x))^3 - 3 = x \qquad (f^{-1}(x))^3 = x + 3 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$$




Observa que $f^{-1}(x)$ es un reflejo de $f(x)$ sobre la función identidad $y = x$.

Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x+3}\right) = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3 - 3 = x + 3 - 3 = x$$

Otra forma de obtener la función inversa es resolver la ecuación para $x$ dejándola en términos de $y$, se intercambia $x$ por $f^{-1}(x)$, $y$ por $x$.

2 Determina la función inversa de $f(x) = 3x - 12$

**Solución**

$f(x) = 3x - 12 \rightarrow y = 3x - 12 \rightarrow y + 12 = 3x \rightarrow \frac{y}{3} + 4 = x$

Se intercambia $y$ por $x$, $x$ por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 4$

Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3}+4\right) = 3\left(\frac{x}{3}+4\right) - 12 = x + 12 - 12 = x$$

3 Determina la función inversa de $f(x) = x^2$

**Solución**

La función no es inyectiva, por tanto, no tiene inversa.

## Propiedades

Si $f$ es una función con inversa $f^{-1}$, entonces

- El dominio de $f^{-1}$ es el rango de $f$ y el rango de $f^{-1}$ es el dominio de $f$.
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
- $f^{-1}$ es invertible y su inversa es $f$.
- Si $f$ es una función real entonces la gráfica de $f^{-1}$ es el reflejo de $f$ sobre la función $y = x$

## EJERCICIO 12

Determina la función inversa (si es posible) para las siguientes funciones:

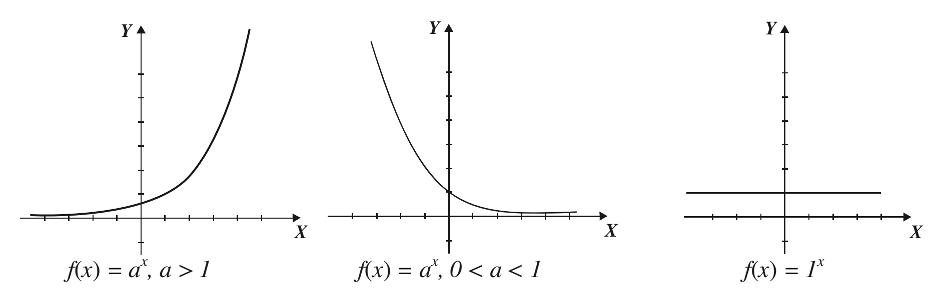
1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 2x - 5$
3. $f(x) = x^2 - 9, x \in [0, \infty)$
4. $f(x) = x^2 + 3x + 2$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^5$
7. $f(x) = x^4, x \in [0, \infty)$
8. $f(x) = \sqrt{3 - x}$
9. $f(x) = (2x - 5)^2$
10. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [0, 2]$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x + 9}$
12. $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, x \in [1, \infty)$
14. $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$
15. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Funciones trascendentes

### Función exponencial

Es una función de la forma $f(x) = a^x$, con dominio $D_f : x \in (-\infty, \infty)$ y rango $y \in (0, \infty)$ (si $a = 1$, entonces el rango es $\{1\}$) y básicamente existen tres tipos:




EJEMPLOS

Ejemplos

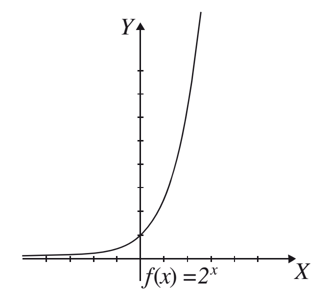
1 Obtén las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$:

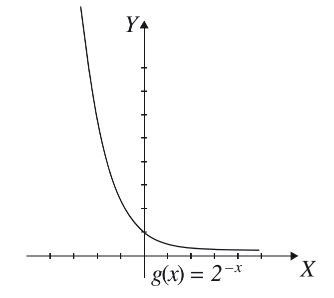
**Solución**

Se hace una tabulación para cada gráfica y se obtiene:

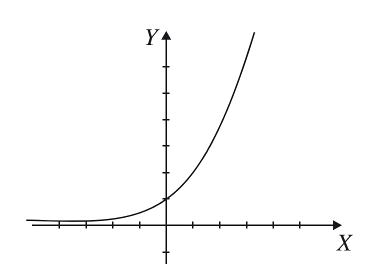
| x | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2^x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

| x | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = 2^{-x}$ | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |



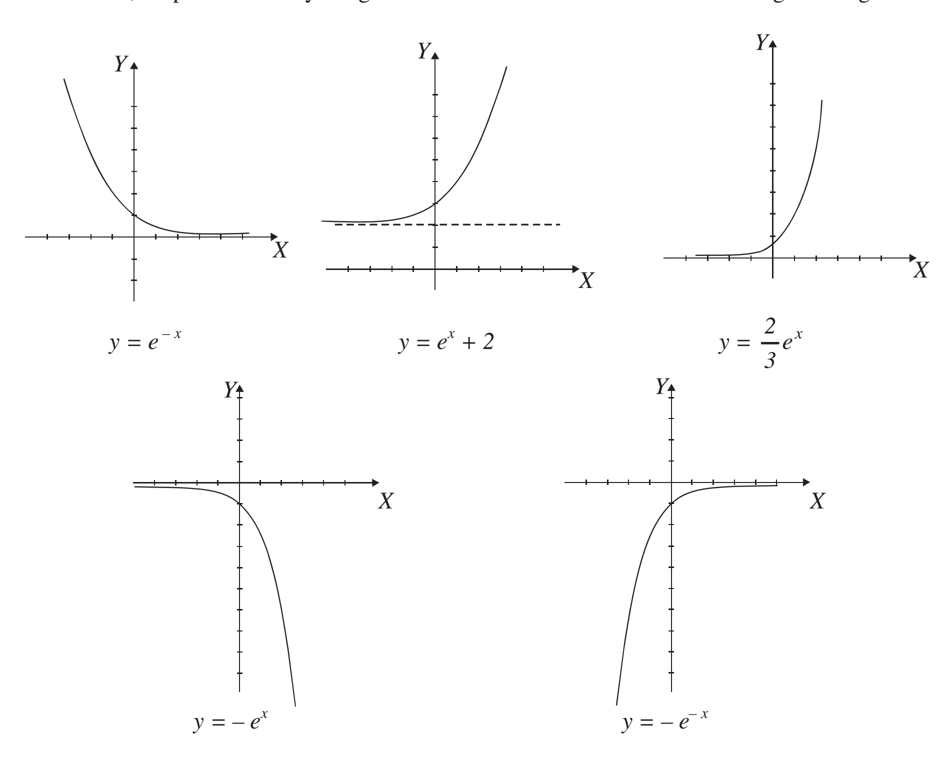

Una de las funciones exponenciales más comunes es: $f(x) = e^x$, con $e \approx 2.71828$



2 Obtén las gráficas de $y = e^{-x}$, $y = e^{x} + 2$, $y = \frac{2}{3}e^{x}$, $y = -e^{x}$, $y = -e^{-x}$

**Solución**

Mediante reflexiones, desplazamientos y alargamientos de una función se obtienen las siguientes gráficas:



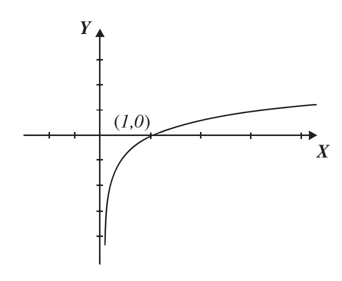

La *función exponencial* $f(x) = a^{x}$ es inyectiva (ya que es creciente), por tanto, debe tener inversa, la cual es el logaritmo con base $a$. Un logaritmo se define como el exponente al que se eleva un número llamado base, para obtener cierto número, de tal forma que aplicado a la función exponencial queda:

$$y = a^{x} \text{ entonces } \log_a y = x,\ y > 0, \text{ por tanto } f^{-1}(x) = \log_a x$$

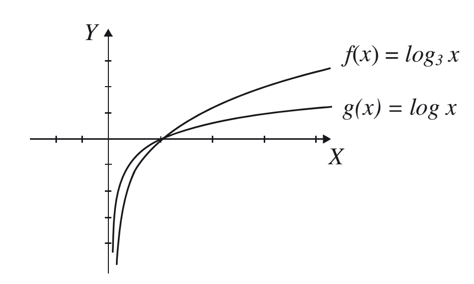
De lo anterior, se define la *función logarítmica* como:

$$g(x) = \log_a x \quad \text{Dominio: } x \in (0, \infty), \text{ Rango: } x \in (-\infty, \infty)$$

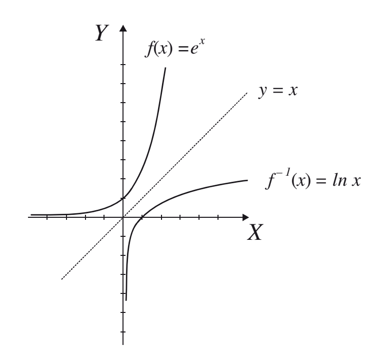
Gráfica:



Pasa por el punto (1, 0), porque $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$, es creciente y tiene una asíntota vertical en $x = 0$
Por ejemplo, las gráficas de las funciones: $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log x$ son:




Por otro lado $\ln x = \log_e x$, por tanto, si $f(x) = e^x$ entonces $f^{-1}(x) = \ln x$




EJEMPLOS

Ejemplos

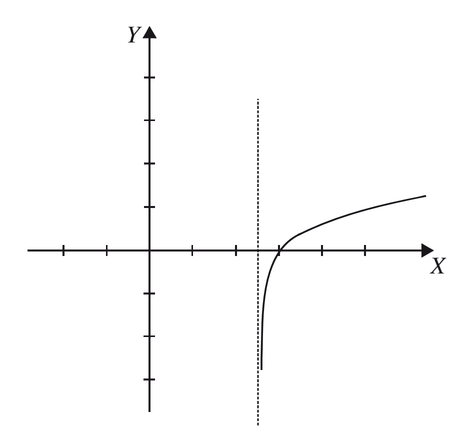
1 Determina la gráfica de $y = \log(2x - 5)$.

**Solución**

Se determina el dominio; recuerda que $\log_b N = a$, entonces $N > 0$:

$$2x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \rightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

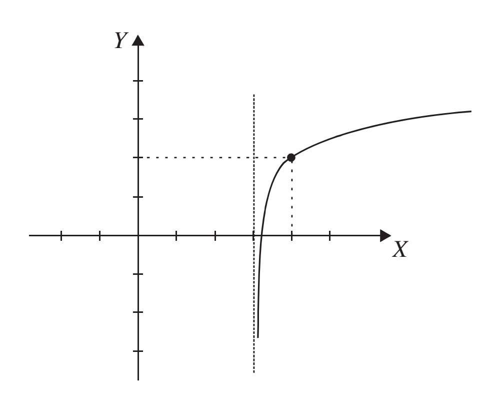
Se traza una asíntota en $x = \dfrac{5}{2}$ y se desplaza la gráfica $y = \log_{10} x$



2 Determina la gráfica de $y = \log(x - 3) + 2$.

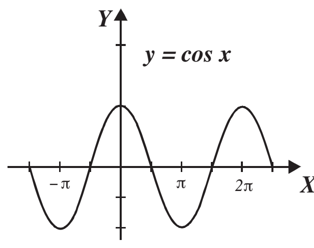
**Solución**

Se desplaza la gráfica de $y = \log x$ dos unidades hacia arriba y tres a la izquierda

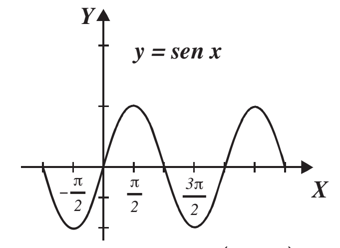



## Funciones trigonométricas

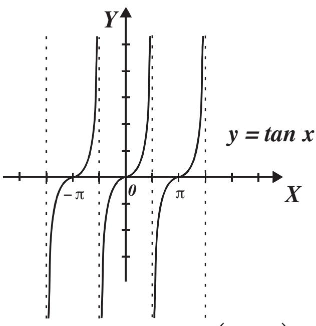
Para la gráfica de las siguientes *funciones trigonométricas* se utilizarán por convención valores en radianes para *x*.



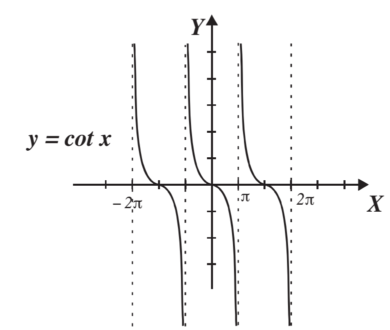

*Dominio:* $x \in (-\infty, \infty)$
*Rango:* $y \in [-1, 1]$




*Dominio:* $x \in (-\infty, \infty)$
*Rango:* $y \in [-1, 1]$

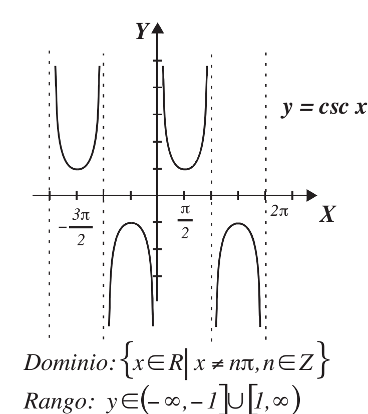



*Dominio:* $\left\{ x \in R \,\middle|\, x \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in Z \right\}$
*Rango:* $y \in (-\infty, \infty)$




*Dominio:* $\left\{ x \in R \,\middle|\, x \neq n\pi, n \in Z \right\}$
*Rango:* $y \in (-\infty, \infty)$

Las relaciones $y = \csc x$, $y = \sec x$




Dominio: $\left\{x \in R | x \neq \frac{1}{2} n\pi, n \in Z\right\}$

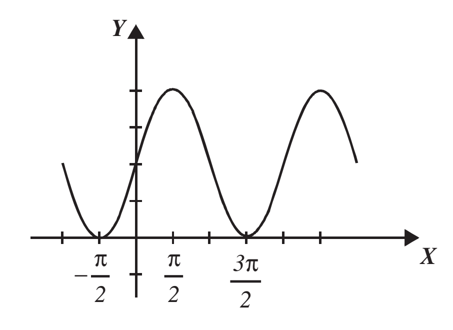
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

## Ejemplo

Determina la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x + 2$

### Solución

La función $f(x) = \text{sen } x$ se alarga 2 unidades verticalmente y se desplaza dos unidades hacia arriba, obteniendo la siguiente gráfica:




# EJERCICIO 13

Obtén la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3^x$
2. $y = 3^{-x}$
3. $y = 3^x - 3$
4. $f(x) = e^x + 1$
5. $f(x) = 1 - e^x$
6. $f(x) = e^{-x} + 2$
7. $f(x) = \ln(x - 2)$
8. $f(x) = 1 + \log x$
9. $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$
10. $f(x) = 3 \cos x - 2$
11. $f(x) = -2 \text{ sen } x + 1$
12. $f(x) = -\tan x$
13. $f(x) = -2 \sec x + 1$
14. $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Las funciones como modelos matemáticos

Como se afirmó al principio del capítulo, las funciones representan modelos para resolver problemas de la vida real.

EJEMPLOS

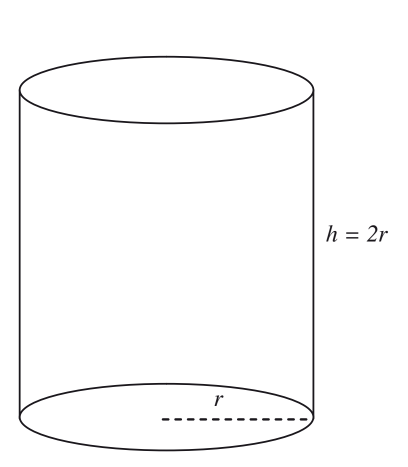
Ejemplos

1 La altura de un recipiente cilíndrico es el doble que el radio de su base, expresa el volumen del cilindro en función de su altura.

**Solución**

El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$




Puesto que la altura es el doble del radio de la base, entonces:

$$h = 2r \rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Al sustituir $r = \frac{h}{2}$ en el volumen se obtiene:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad h = \pi\frac{h^2}{4} \quad h = \frac{\pi h^3}{4}$$

Por consiguiente

$$V(h) = \frac{\pi h^3}{4}$$

2 El perímetro de un rectángulo es de 26 unidades, expresa el área del rectángulo en función de su largo.

**Solución**

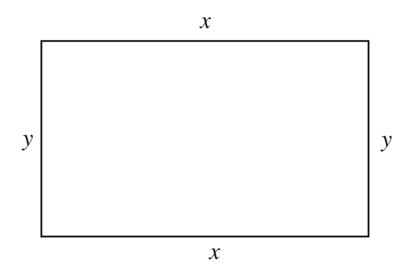
Se establecen las dimensiones del rectángulo:

$x$: largo, $y$: ancho

El perímetro es

$$2x + 2y = 26 \rightarrow x + y = 13$$

$$y = 13 - x$$




El área del rectángulo es

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 13 - x$, se obtiene:

$$A = x(13 - x) = 13x - x^2$$

Por consiguiente,

$$A(x) = 13x - x^2$$

3 Una persona tiene una pared de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. Expresa el área del corral en términos del ancho de éste.

**Solución**

Sean $x$ y $y$ las dimensiones del corral donde,

$x$: ancho del corral, $y$: largo del corral

Entonces,

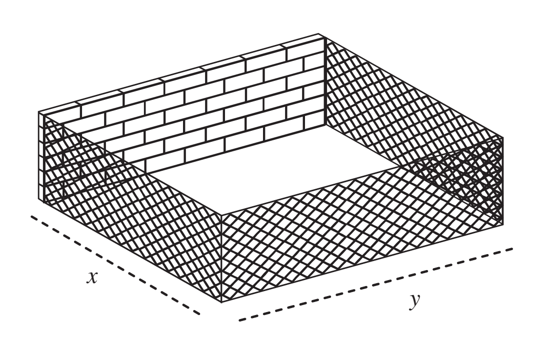
$$2x + y = 1\,600 \rightarrow y = 1\,600 - 2x$$

el área del rectángulo está dada por:

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 1\,600 - 2x$, se obtiene:

$$A(x) = x(1\,600 - 2x) = 1\,600x - 2x^2$$




4 Un globo asciende desde un punto con velocidad constante de $1.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a 30 m del punto del despegue se encuentra una casa. Si $t$ es el tiempo en segundos, expresa la distancia que existe entre la casa y el globo en función del tiempo.

**Solución**

Sea $v = \frac{d}{t}$, entonces $d = vt$, donde, $d$ es la distancia, $v$ la velocidad, $t$ el tiempo.

Al transcurrir $t$ segundos el globo sube 1.5 $t$ en metros; entonces se aplica el teorema de Pitágoras para obtener:

$$d^2 = (1.5\,t)^2 + (30)^2 \rightarrow d^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (30)^2$$

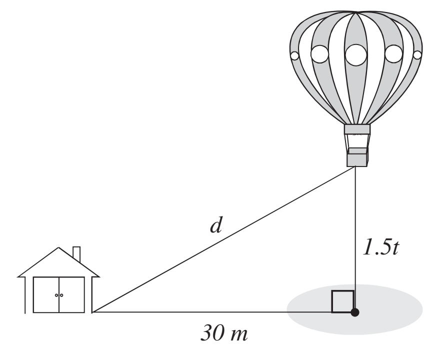
$$d^2 = \frac{9}{4}t^2 + 900$$

$$d = \sqrt{\frac{9t^2 + 3\,600}{4}}$$

$$d = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$

Por tanto:

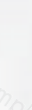
$$d(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$



# EJERCICIO 14

1. El área de la base de un cilindro es de 40 $\pi$ m$^2$. Expresa el volumen en función de la altura.
2. Fluye agua por un tanque cónico de 10 m de radio y 25 m de altura. Cuando el nivel del agua está a una altura de $h$ y radio $r$, expresa el volumen del agua en función de la altura.
3. Si el ancho de un rectángulo es la quinta parte de su largo, determina el perímetro en función de su área.
4. Dada una circunferencia de radio $r$, precisa el área de la circunferencia en función de su diámetro $d$.
5. Se inscribe un cubo de arista $x$ en una esfera de radio $r$. Expresa el volumen de la esfera en función de la arista del cubo.
6. Al graficar la recta, cuya ecuación es $3x - 2y + 6 = 0$, y trazar una línea vertical paralela al eje $Y$ en cualquier punto sobre el eje $X$ se genera un triángulo rectángulo. Expresa el área de dicho triángulo en función de la abscisa $x$.
7. Se desea construir un tanque de gas en forma de cilindro circular recto de 2.5 m de altura y a cada extremo del cilindro van unidas dos semiesferas de radio $r$. Expresa el volumen del tanque en función de $r$.
8. Se inscribe un triángulo equilátero de lado $x$ en una circunferencia de radio $r$. Expresa el área de la circunferencia en función del lado $x$.
9. Se inscribe un rectángulo en una elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Precisa el área del rectángulo en función de la abscisa $x$.
10. Un cartel de base $x$ y altura $y$ tiene un área de 540 cm$^2$ con márgenes de 2 cm a los lados y 1.5 cm en las partes superior e inferior. Expresa el área impresa en función de la base del cartel.
11. Desde cierto puente de la Ciudad de México un peatón observa un automóvil que viaja a 18 m/s en una avenida perpendicular al puente peatonal. Si t es el tiempo en segundos, determina la distancia entre el peatón y el automóvil en función del tiempo, si la altura del puente es de 4.5 m.
12. Una lancha es remolcada con un cable hacia un muelle. El cable es enrollado a razón de 0.5 m/s y la lancha se encuentra a 2 m por debajo del nivel del muelle. Si $t$ es el tiempo en segundos, expresa la distancia que le falta recorrer a la lancha hacia el muelle en función del tiempo.

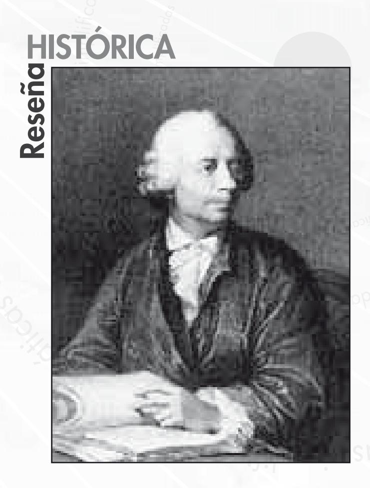
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente



# CAPÍTULO 2

## LÍMITES

**Reseña HISTÓRICA**



### El número *e*

El número *e* llega por primera vez a las matemáticas de forma muy discreta. Sucedió en 1618 cuando, en un apéndice al trabajo de Napier sobre logaritmos, apareció una tabla dando el logaritmo natural de varios números.

Briggs dio una aproximación numérica al logaritmo base diez de *e* sin mencionar a *e* específicamente en su trabajo.

En 1647 Saint-Vincent calculó el área bajo una hipérbola rectangular, pero no encontró la conexión con los logaritmos, en 1661 Huygens comprendió la relación entre la hipérbola rectangular y el logaritmo. Examinó explícitamente la relación entre el área bajo la hipérbola rectangular $yx = 1$ y el logaritmo.

La notación *e* aparece por primera vez en una carta que le escribió Euler a Goldbach en 1731. Euler hizo varios descubrimientos respecto a *e* en los años siguientes pero no fue sino hasta 1748 cuando Euler dio un tratamiento completo a las ideas alrededor de *e*.

Demostró que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Euler dio una aproximación de *e* con 18 decimales,

$$e = 2.718281828459045235$$

Leonhard Euler
(1707-1783)

## Definición intuitiva de límite

Si al aproximar $x$ lo suficientemente cerca de un número $a$ (sin ser $a$) tanto del lado izquierdo como del derecho, $f(x)$ se aproxima a un número $L$, entonces el límite cuando $x$ tiende al número $a$ es $L$. Esto lo escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Donde la notación $x \to a$ se lee "$x$ tiende a $a$", para decir que: "tiende a $a$ por la izquierda" se utiliza $x \to a^-$, para decir que: "$x$ tiende a $a$ por la derecha" utilizamos $x \to a^+$, de tal forma que:

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Es decir, si los límites laterales existen y tienden a un mismo número $L$ entonces el límite cuando tiende al número $a$ es $L$. Para que el límite exista no se necesita que la función esté definida para el número $a$, basta que esté definida para valores muy cercanos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el límite cuando $x$ tiende a 3 de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

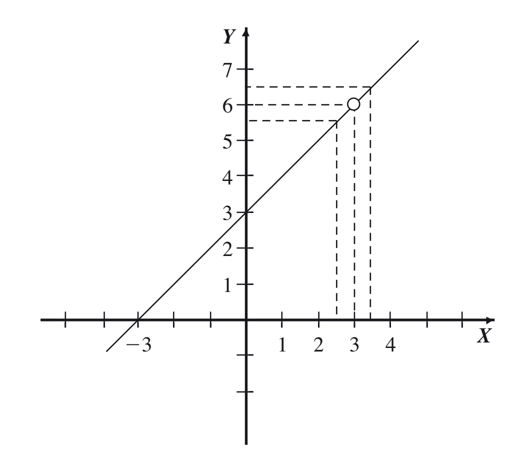
**Solución**

La función no está definida para $x = 3$, sin embargo, podemos evaluar la función en valores muy cercanos por la izquierda y por la derecha. Por otro lado graficaremos la función utilizando la simplificación:

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3$$

es decir, graficamos la recta $f(x) = x + 3$ con la restricción $x \neq 3$ donde se formará un hueco.

| x | f(x) |
|---|---|
| 2.9 | 5.9 |
| 2.99 | 5.99 |
| 2.999 | 5.999 |
| 2.9999 | 5.9999 |
| | |
| 3.0001 | 6.0001 |
| 3.001 | 6.001 |
| 3.01 | 6.01 |
| 3.1 | 6.1 |




Se observa que para valores de $x$ muy cercanos a 3 por la izquierda (2.9, 2.99, 2.999, 2.9999), $f(x)$ tiende a 6, lo mismo pasa para valores cercanos por la derecha (3.0001, 3.001, 3.01, 3.1), es decir:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

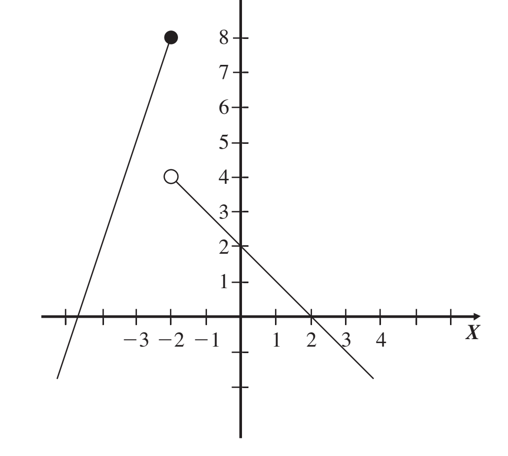
por tanto $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

2 Si $f(x) = \begin{cases} 3x+14 & \text{si } x \leq -2 \\ -x+2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ determina $\lim_{x\to -2} f(x)$

**Solución**

Graficamos la función y evaluamos en valores muy cercanos a 2.

| x | f(x) |
|---|---|
| −2.1 | 7.7 |
| −2.01 | 7.97 |
| −2.001 | 7.997 |
| −1.999 | 3.999 |
| −1.99 | 3.99 |
| −1.9 | 3.9 |




Aquí tenemos que: $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 8$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$

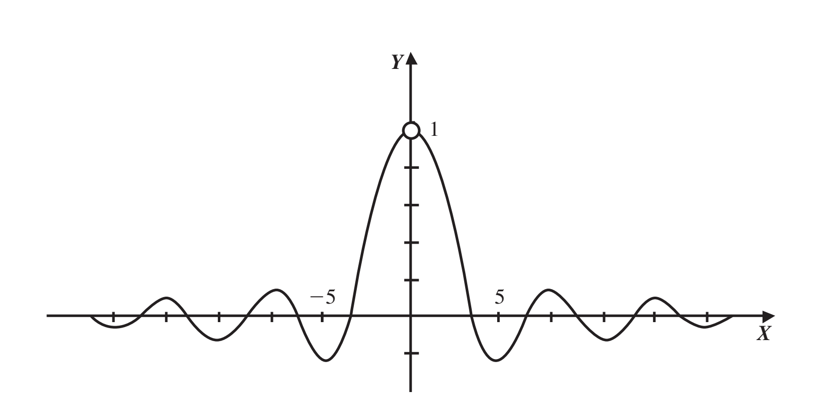
entonces $\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$ por tanto $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe

3 Determina $\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

**Solución**

Evaluamos con valores muy cercanos a 0 por la izquierda y por la derecha. Observe que la función no está definida en $\theta = 0$ y que los valores serán tomados como radianes.

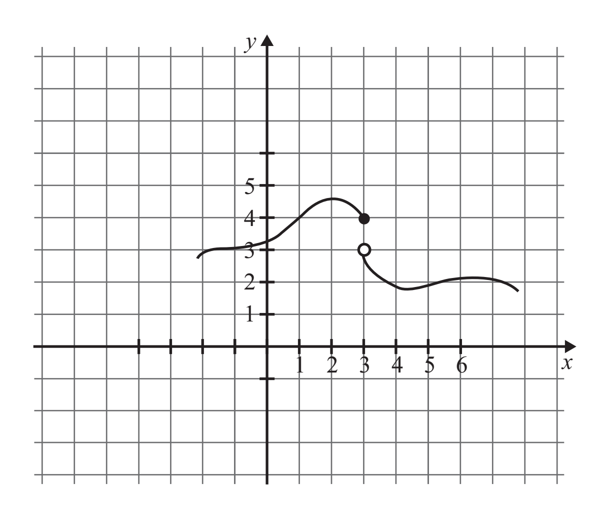
| $\theta$ | f($\theta$) |
|---|---|
| −0.005 | 0.999995833 |
| −0.004 | 0.99999733 |
| −0.003 | 0.9999985 |
| −0.001 | 0.999999833 |
| 0.001 | 0.999999833 |
| 0.003 | 0.9999985 |
| 0.004 | 0.99999733 |
| 0.005 | 0.999995833 |




Tenemos: $\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ y $\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

entonces $\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ por tanto $\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

4 Para la función $f(x)$ mostrada en la figura determina: *a*) $\lim_{x\to 1} f(x)$ y *b*) $\lim_{x\to 3} f(x)$




**Solución**

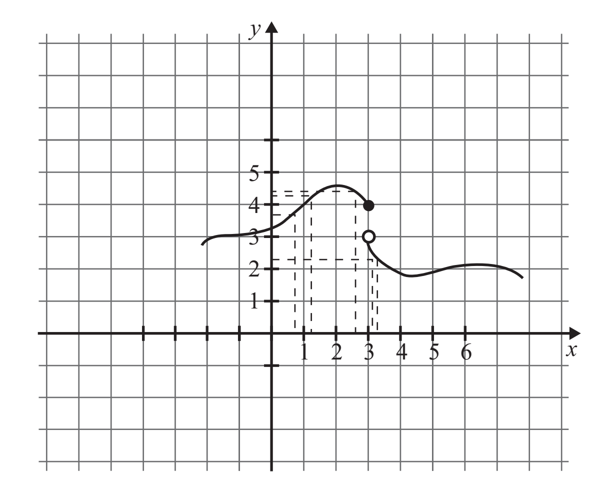
*a*) Calculamos los límites por la izquierda y derecha

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$

los límites laterales son iguales por tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

*b*) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

los límites laterales son diferentes, por tanto $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe



# EJERCICIO 15

Utilizando una tabla con valores muy cercanos al valor que tiende el límite, calcula:

1. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$

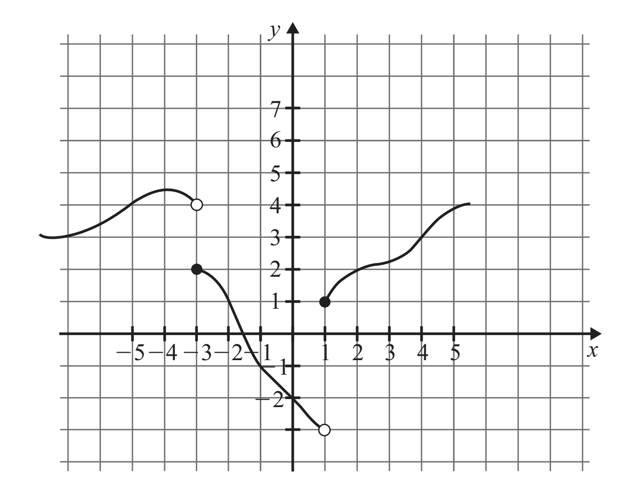
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

La gráfica de una función $f(x)$ es la siguiente:




De acuerdo con ella determina:

6. $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

7. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

8. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

9. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

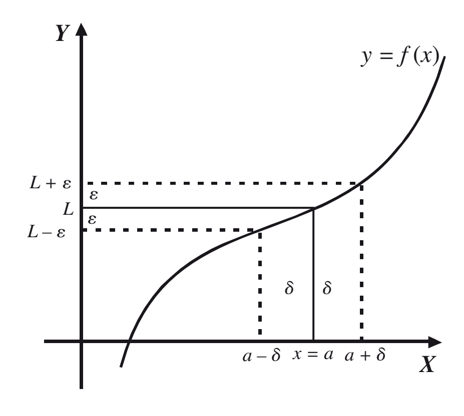
## Definición formal de límite

A continuación se presenta la definición formal de límite, la cual también es conocida como definición $\varepsilon$-$\delta$ (epsilón-delta).

El $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho de otra forma, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para cualquier número positivo elegido $\varepsilon$, por pequeño que sea, existe un número positivo $\delta$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$




La definición nos dice que para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe un número $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para un número $\varepsilon > 0$ dado, tal que todo $x$ en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con excepción posiblemente del mismo $a$, tendrá su imagen $f(x)$ en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Observa que para un $\delta_1 < \delta$ para el mismo $\varepsilon$, la imagen de un valor $x$ en el intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ estará dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lo cual sólo cambia si tomamos un valor de epsilón distinto.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$

**Solución**

Para un $\varepsilon > 0$, se quiere encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - 3| < \delta$ entonces:

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

de donde

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = |2|\,|x - 3| = 2|x - 3| < \varepsilon$$

entonces $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que basta escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para que $0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

**Comprobación**

Para $0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos que

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2|x - 3| < \varepsilon$$

$$|2(x - 3)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

2 Demuestra que $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-5x-6}{x+1} = -7$

**Solución**

Si $0 < |x-(-1)| < \delta$ entonces $\left|\frac{x^2-5x-6}{x+1}-(-7)\right| < \varepsilon$

de donde

$$\left|\frac{x^2-5x-6}{x+1}+7\right| = \left|\frac{x^2-5x-6+7x+7}{x+1}\right| = \left|\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right|$$

$$= \left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right| = |x+1| = |x-(-1)| < \varepsilon$$

por tanto se escoge $\delta = \varepsilon$

3 Si $\lim_{x\to 1}(2-3x) = -1$ y $\varepsilon = 0.06$, determina el valor de $\delta$.

**Solución**

Se aplica la definición y se obtiene:

Si $0 < |x-1| < \delta$, entonces $|(2-3x)-(-1)| < \varepsilon$, donde $|3-3x| < \varepsilon$

$$|3|\,|1-x| < \varepsilon$$

$$|1-x| < \frac{\varepsilon}{|3|}$$

Pero $|1-x| = |x-1|$, por tanto, $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$ y el valor de $\delta$ está determinado por:

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{0.06}{3} \leq 0.02$$

## EJERCICIO 16

Demuestra los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 2}(3x+4) = 10$
2. $\lim_{x\to 1}(2x-5) = -3$
3. $\lim_{x\to -3}(5-x) = 8$
4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{4}x+1\right) = 1$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1} = -3$
6. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(2x-1) = 0$
7. $\lim_{x\to -2}(1-3x) = 7$
8. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7} = 14$
9. $\lim_{x\to -2a}(2a-3x) = 8a$
10. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}-3x\right) = -\frac{11}{2}$

Obtén el valor de $\delta$ o $\varepsilon$ en los siguientes ejercicios:

11. Si $\lim_{x\to -1}(3x-2)=-5$ y $\varepsilon = 0.03$, encuentra el valor de $\delta$

12. Si $\lim_{x\to -\frac{2}{5}}(5x+1)=-1$ y $\varepsilon = 0.4$, determina el valor de $\delta$

13. Si $\lim_{x\to 0}(2x+7)=7$ y $\varepsilon = 0.05$, obtén el valor de $\delta$

14. Si $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(3+2x)=2$ y $\varepsilon = 0.8$, ¿cuál es el valor de $\delta$?

15. Si $\lim_{x\to 2}(3x-7)=-1$ y $\delta = 0.06$, determina el valor de $\varepsilon$

16. Si $\lim_{x\to 1}(2-7x)=-5$ y $\delta = 0.0014$, obtén el valor de $\varepsilon$

17. Si $\lim_{x\to \frac{1}{5}}(5x+2)=3$ y $\delta = 0.05$, encuentra el valor de $\varepsilon$

18. Si $\lim_{x\to \frac{4}{3}}(2x+1)=\frac{11}{3}$ y $\delta = 0.001$, ¿cuál es el valor de $\varepsilon$?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Teoremas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, $c$ una constante y $n$ número real, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

6. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ con $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

7. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

*Límites por evaluación*

El límite se obtiene al aplicar los teoremas anteriores y evaluar el valor al cual tiende la variable en la función propuesta, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Utiliza los teoremas anteriores y comprueba que el $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=6$

**Solución**

Se aplican los respectivos teoremas, se evalúa el valor de $x = 2$, y se demuestra que:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4) = \lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x-\lim_{x\to 2}4 = \left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+3\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}4 = (2)^2+3(2)-4=6$$

2 Si $f(x)=\dfrac{3-2x}{3+2x}$, determina el valor de $\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$

**Solución**

Se aplican los teoremas y se sustituye el valor de $x$ para obtener el valor buscado:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3-2x}{3+2x} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3-2x)}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3+2x)} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3-\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3+\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3-2\lim_{x\to\frac{1}{2}}x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3+2\lim_{x\to\frac{1}{2}}x} = \frac{3-2\left(\frac{1}{2}\right)}{3+2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Estos teoremas nos permiten hacer una sustitución de la variable independiente por el valor al que tiende el límite.

3 Si $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$, encuentra el valor de $\lim_{x\to 2}f(x)$

**Solución**

Se sustituye el valor de la variable independiente y se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to 2}f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(2)^2-4} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0}$$

El límite no existe, ya que la división entre cero no está definida.

4 Obtén el $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1}$

**Solución**

Se sustituye $x = 3$ y se realizan las operaciones:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1} = \frac{\sqrt{9-(3)^2}}{2(3)+1} = \frac{\sqrt{9-9}}{6+1} = \frac{0}{7} = 0$$

# EJERCICIO 17

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 2} (7 - 2x)$
2. $\lim_{x \to 3} \left(4x^2 - 2x - 6\right)$
3. $\lim_{x \to -4} (6 - 3x)$
4. $\lim_{t \to -2} \sqrt{8 + t^3}$
5. $\lim_{z \to 2} \sqrt{7z^2 + 14z - 7}$
6. $\lim_{x \to 4} \left(x^2 - 8\right)\left(4x - 8\right)$
7. $\lim_{x \to -3} (6 - 3x)\left(\frac{3}{5}x^{-1}\right)$
8. $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(x^2 + \frac{1}{9}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
9. $\lim_{r \to 4} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2}\right)\left(r^2 - \frac{4}{r}\right)$
10. $\lim_{y \to 2} \sqrt{4y^2 - 2y}$
11. $\lim_{y \to -5} (3 - y)\sqrt{y^2 - 9}$
12. $\lim_{z \to -1} \frac{4z + 3}{2z + 1}$
13. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 4}{x + 5}$
14. $\lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{3z + 1}{2z - 5}$
15. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{3x + 1}$
16. $\lim_{y \to 1} \frac{2 + \sqrt{y^2 + 3}}{y - 1}$
17. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x + 1}{2}$
18. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2}}$
19. $\lim_{x \to 0} \frac{(x + 1)^2 - x^2}{x + 1}$
20. $\lim_{x \to h} \frac{x^2 + h^2}{x + h}$
21. $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2 x}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Límites indeterminados*

Son aquellos cuyo resultado es de la forma $\frac{0}{0}$.

## Ejemplos

Se sustituye el valor de la variable independiente en cada caso y se realizan las respectivas operaciones, para obtener:

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{(3)^2 - 9}{2(3) - 6} = \frac{9 - 9}{6 - 6} = \frac{0}{0}$

2. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\sqrt{1 - 1}}{(1)^2 - 2(1) + 1} = \frac{\sqrt{0}}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{0}$

3. $\lim_{y \to 0} \frac{3y^2 + 5y^4}{2y^2 - 3y^4} = \frac{3(0)^2 + 5(0)^4}{2(0)^2 - 3(0)^4} = \frac{0}{0}$

4. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \frac{\sqrt{(2)^2 + 5} - 3}{2 - 2} = \frac{\sqrt{9} - 3}{0} = \frac{0}{0}$

Se observa que los resultados son de la forma $\frac{0}{0}$, por consiguiente es necesario eliminar la indeterminación.

Una indeterminación se elimina al factorizar o racionalizar (de ser posible) la función, para después simplificarla y obtener el límite.

Casos de factorización:

*a*) Factor común $ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$

*b*) Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

*c*) Trinomio cuadrado perfecto $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

*d*) Trinomio de la forma $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

*e*) Suma o diferencia de cubos $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

*f*) Factorización de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

*g*) Factorización de $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \dfrac{a+b}{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

*h*) Factorización de $\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}$ $\quad \sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b} = \dfrac{a-b}{a^{4/5} + a^{3/5}b^{1/5} + a^{2/5}b^{2/5} + a^{1/5}b^{3/5} + b^{4/5}}$

*i*) Factorización de $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ $\quad \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \dfrac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}} + b^{\frac{n-1}{n}}}$

## EJEMPLOS

1 Obtén el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8}$

**Solución**

Al sustituir $x$ con 0 en la función, el límite se indetermina:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{3(0)^2 + 5(0)^4}{2(0)^2 + 6(0)^4 - 7(0)^8} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación se factorizan el numerador y el denominador con la aplicación del factor común:

$$\frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{x^2(3 + 5x^2)}{x^2(2 + 6x^2 - 7x^6)}$$

Al simplificar la expresión se obtiene:

$$\frac{3 + 5x^2}{2 + 6x^2 - 7x^6}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + 5x^2}{2 + 6x^2 - 7x^6} = \frac{3 + 5(0)^2}{2 + 6(0)^2 - 7(0)^6} = \frac{3}{2}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{3}{2}$$

2 Determina el $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$

**Solución**

Se sustituye el valor de $x = -2$ en la expresión:

$$\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2} = \frac{4-(-2)^2}{-2+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza el numerador con la aplicación de la diferencia de cuadrados:

$$4-x^2 = (2+x)(2-x)$$

Se simplifica y sustituye para obtener,

$$\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(2+x)(2-x)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(2-x) = 2-(-2) = 4$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2} = 4$$

3 Calcula el valor del $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3}$

**Solución**

Al sustituir $y = 1$ se verifica que existe la indeterminación:

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = \frac{(1)^2-2(1)+1}{(1)^2-4(1)+3} = \frac{1-2+1}{1-4+3} = \frac{0}{0}$$

Al factorizar el numerador (trinomio cuadrado perfecto) y el denominador (trinomio de la forma $x^2 + (a+b)x + ab$), se obtiene:

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)^2}{(y-3)(y-1)} = \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y-3} = \frac{1-1}{1-3} = \frac{0}{-2} = 0$$

Finalmente, el resultado es:

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = 0$$

4 Determina el $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$

**Solución**

Al sustituir $x = 2$ se observa que existe la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2} = \frac{(2)^3-8}{2(2)^2-3(2)-2} = \frac{8-8}{8-6-2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza la diferencia de cubos y el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4), \qquad 2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1)$$

Se simplifica, se sustituye y se obtiene el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2x+1}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2(2)+1}=\frac{12}{5}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\frac{12}{5}$$

5 Calcula el valor del $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$

**Solución**

Se sustituye $x = 2$ en la función:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\frac{(2)^2-4}{3-\sqrt{2+7}}=\frac{4-4}{3-3}=\frac{0}{0}$$

Se racionaliza el denominador de la función, multiplicando por $3+\sqrt{x+7}$, que es el conjugado de la expresión $3-\sqrt{x+7}$:

$$\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}\cdot\frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{9-(x+7)}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se factoriza $x^2 - 4$:

$$\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se simplifica la expresión,

$$\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\left[-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)\right]=-(2+2)\left(3+\sqrt{2+7}\right)=-(4)(3+3)=-24$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=-24$$

6 Determina $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$

**Solución**

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{1/3}\cdot 2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{2/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Por tanto $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

## EJERCICIO 18

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{3x+2x^2}{5x+6x^3}$
2. $\lim_{h\to 0}\frac{2h^3-5h^2+h}{h^4-h^2}$
3. $\lim_{y\to 0}\frac{4y^5+5y^3}{y^4-y^2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx^3}{cx^2+dx^3}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{5x^n-3x^{n-1}+4x^{n-2}}{2x^n-6x^{n-2}}$
6. $\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^2-1}$
7. $\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x-2}$
8. $\lim_{y\to -h}\frac{y+h}{h^2-y^2}$
9. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{4-x^2}$
10. $\lim_{w\to a}\frac{a^2-w^2}{a-w}$
11. $\lim_{z\to 7}\frac{z^2-5z-14}{z-7}$
12. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^2+7x+12}$
13. $\lim_{h\to 1}\frac{h-1}{h^2-4h+3}$
14. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x^2+2x-15}$

15. $\lim_{v\to 4}\frac{v^2-6v+8}{2v^2-8v}$

16. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$

17. $\lim_{h\to \frac{1}{2}}\frac{4h^2+4h-3}{2h-1}$

18. $\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{3x-2}{3x^2-11x+6}$

19. $\lim_{w\to -\frac{4}{3}}\frac{9w^2+9w-4}{3w^2+7w+4}$

20. $\lim_{y\to 6}\frac{2y^2-15y+18}{3y^2-17y-6}$

21. $\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-13x+15}{x^2-x-20}$

22. $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{6x^2+5x+1}$

23. $\lim_{y\to -1}\frac{y+1}{y^3+1}$

24. $\lim_{h\to \frac{1}{2}}\frac{8h^3-1}{1-2h}$

25. $\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{27x^3-8}{9x^2-4}$

26. $\lim_{w\to -2}\frac{w^2+5w+6}{w^3+8}$

27. $\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{64x^3-1}{4x^3-x^2}$

28. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

29. $\lim_{y\to -2}\frac{y+2}{\sqrt{y+3}-1}$

30. $\lim_{w\to 0}\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}}$

31. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\sqrt{4x^2+3}-2}{2x-1}$

32. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

33. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$

34. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x+5}-3}$

35. $\lim_{w\to 0}\frac{a-\sqrt{w^2+a^2}}{b-\sqrt{w^2+b^2}}$

36. $\lim_{y\to p}\frac{\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{p}}{y-p}$

37. $\lim_{v\to 0}\frac{\sqrt{4-2v+v^2}-2}{v}$

38. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^3+x^2-4x-4}$

39. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+4x+3}$

40. $\lim_{x\to 2}\frac{x^4+2x^3-11x^2-12x+36}{x^3-2x^2-x+2}$

41. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+6x^2+5x-12}$

42. $\lim_{y\to 2}\frac{y^3-6y^2+12y-8}{y^4-4y^3+16y-16}$

43. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$

44. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x^2-a^2}$

45. $\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{\sqrt[3]{9x^2+4}-2}{3x-2}$

46. $\lim_{y\to 2}\frac{\sqrt[4]{y^3+8}-\sqrt{2+y}}{y-2}$

47. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

48. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{4x+19}}{x-2}$

49. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt[3]{x-1}-1}$

50. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{2x+3}-1}{x^5+1}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Límites cuando x tiende al infinito

Sea una función $f$ definida en el intervalo $(a, \infty)$. Si se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

entonces significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a $L$ tanto como se quiera para una $x$ lo suficientemente grande, sabemos que $\infty$ no es un número, sin embargo, se acostumbra decir "el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende al infinito, es $L$".

Cuando en una función $x \to \infty$, se busca la base de mayor exponente y ésta divide a cada uno de los términos de la función, después, para obtener el valor del límite, se aplica el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ , con } c \text{ constante}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1}$

**Solución**

La base del término con mayor exponente es $x^2$, por consiguiente, todos los términos del numerador y del denominador se dividen entre esta base:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

Se simplifica y aplica el teorema para obtener el límite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{6 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 6 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{6 + 0 - 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \frac{1}{3}$

2 Determina el $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3}$

**Solución**

La base del término con mayor exponente es $x$, por tanto, se dividen los términos entre esta base y se simplifica la expresión para obtener el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{x}}{\frac{2x + 3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2 - 5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 9 - \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 0}}{2 + 0} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

3 Determina el resultado de $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2}$

**Solución**

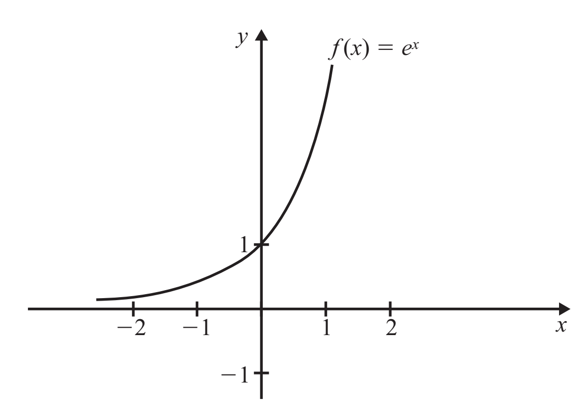
Se dividen todos los términos entre $x^3$, se simplifica y se obtiene el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}} = \frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2} = 0$$

Si observamos la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$, tenemos que cuando $x \to -\infty$, $f(x)$ tiende a cero.

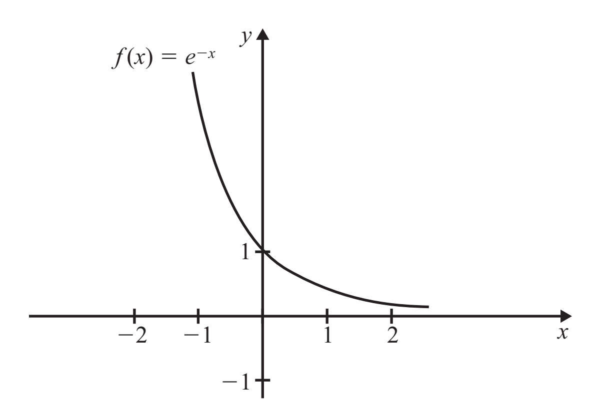



entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

esto cumple también cuando tenemos la función $g(x) = a^x$ para $a > 0$, es decir

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ para } a > 0$$

Por otro lado, si tenemos $f(x) = e^{-x}$, tenemos que cuando $x \to \infty$, $f(x)$ se aproxima a cero.




entonces $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

También se cumple $\lim_{x\to\infty} a^{-x} = 0$ para $a > 0$

# EJERCICIO 19

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x+8}{4x+3}$

2. $\lim_{y\to\infty}\frac{2y^2-3y+5}{y^2-5y+2}$

3. $\lim_{w\to\infty}\frac{3w^2+5w-2}{5w^3+4w^2+1}$

4. $\lim_{h\to\infty}\frac{5h^4-2h^2+3}{3h^3+2h^2+h}$

5. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{18x^2-3x+2}{2x^2+5}}$

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2+3}}{2x+1}$

7. $\lim_{y\to\infty}\frac{3+\frac{2}{y^3}-3y^4}{9y^4-\frac{5}{y^2}-3}$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{-1}+3x^{-2}}{x^{-2}+4}$

9. $\lim_{v\to\infty}\frac{\sqrt{v^2+1}}{\sqrt[3]{v^3-3}}$

10. $\lim_{h\to\infty}\frac{\sqrt{h^2+4}-\sqrt{h^2-4}}{h}$

11. $\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+6}{4-6x}$

12. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

13. $\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x-2)(3x+1)}{(2x+7)(x-2)}$

14. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

15. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$

16. $\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+...+a_1x+b_0}$

17. $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^m}{cx^n-dx^m}$ con $n>m$

18. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[n]{ax^n+1}}{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Asíntotas horizontales

Sea la función $y = f(x)$, si la curva tiene una asíntota horizontal en $y = c$, entonces la ecuación de la asíntota es:

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{o} \quad y = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Encuentra la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \frac{3x+1}{2x+3}$

**Solución**

Al aplicar $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$, se obtiene:

$$y = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x+1}{x}}{\frac{2x+3}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la curva tiene una asíntota horizontal en $y = \frac{3}{2}$ o $2y - 3 = 0$

2 Determina la ecuación de la asíntota horizontal de $y = \frac{x}{x^2+1}$

**Solución**

Se aplica $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces la asíntota horizontal tiene por ecuación:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

El resultado $y = 0$ indica que la asíntota horizontal es el eje $X$.

3 Obtén la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$

**Solución**

Se aplica la definición $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$ y se obtiene:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x-3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{0}$$

El límite no existe ya que la división entre cero no está definida.

El resultado indica que la curva no tiene asíntotas horizontales.

## EJERCICIO 20

Encuentra las ecuaciones de las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

1. $y = \frac{2x+3}{4x-5}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = \frac{x^2-4}{5}$
4. $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$
5. $f(x) = \frac{2x^3+3x^2+3x+1}{x^3-1}$
6. $y = \frac{ax+b}{cx-d}$
7. $f(x) = \frac{2}{x+2}$
8. $xy + 2x - 1 = 0$
9. $f(x) = 2x + 5$
10. $f(x) = \frac{ax^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{bx^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Asíntotas oblicuas

Se le denomina asíntota oblicua a aquella recta cuyo ángulo de inclinación $\theta$ es diferente de 0° y 90°.

### Caso I

Sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el grado de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$ siendo $f(x) = ax + b + \dfrac{R(x)}{P(x)}$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$

**Solución**

La función no tiene asíntotas horizontales, pero sí posee una asíntota vertical en $x = -1$

El grado del numerador es un grado mayor que el grado del denominador y éste no es factor del numerador, entonces:

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+1}$$

Para obtener la asíntota oblicua se aplica cualquiera de las dos condiciones:

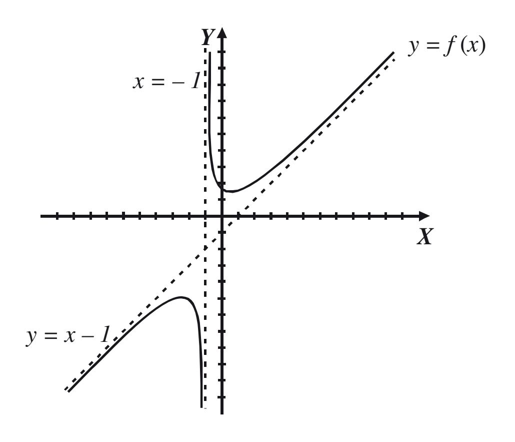
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$$

Pero $f(x) - (x-1) = \dfrac{3}{x+1}$, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

La función tiene una asíntota oblicua en la recta $y = x - 1$



2 Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

**Solución**

La función carece de asíntotas verticales y horizontales, para obtener las asíntotas oblicuas la función se representa de la siguiente forma:

$$f(x) = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

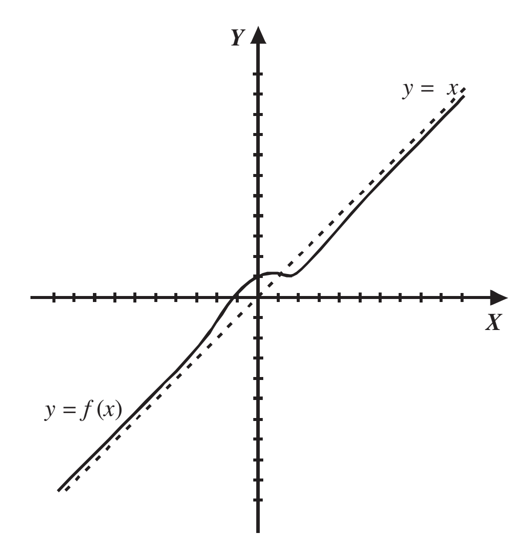
Para comprobar que $y = x$ es la ecuación de la asíntota oblicua, se aplica la definición:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2+1}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right)$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $y = x$




Analicemos otro método; sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$, cuyos valores de $a$ y $b$ están dados por:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

**Ejemplo**

Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x}$

**Solución**

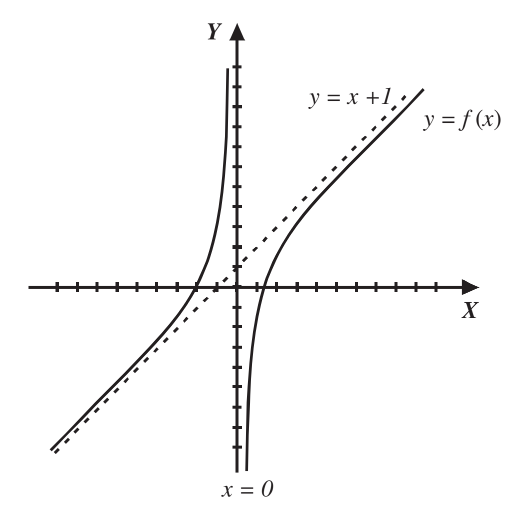
La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y no tiene asíntota horizontal, para obtener la ecuación de la asíntota oblicua se aplican los límites anteriores:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + x - 3}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + x - 3}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + x - 3 - x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$$

Se sustituyen $a$ y $b$ en la ecuación $y = ax + b$, por tanto, la asíntota es: $y = x + 1$

Gráfica




*Caso II*

Sea una función $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es mayor que uno y mayor al grado de $P(x)$, la función tiene una asíntota oblicua no lineal.

**Ejemplo**

Determina las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

**Solución**

Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

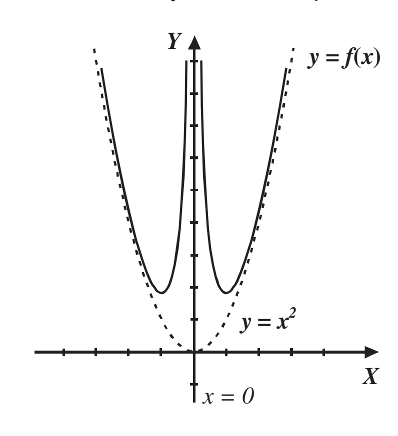
Se realiza el cociente y el resultado es:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Por consiguiente, la función tiene una asíntota cuya ecuación es $y = x^2$




# EJERCICIO 21

De las siguientes funciones determina las ecuaciones de las asíntotas y traza sus gráficas:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$
3. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 3x^2)^{-\frac{1}{3}}}$
9. $f(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x^2 - 1}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Límites laterales

### *Límite por la derecha*

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo abierto $(x_o, b)$, el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $x_o$ por la derecha es $L$ y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a $L$ cuando $x$ tiende a aproximarse con valores mayores que $x_o$

### *Límite por la izquierda*

Sea una función definida en el intervalo abierto $(a, x_o)$, el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $x_o$, por la izquierda es $L$ y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a $L$ cuando $x$ tiende a aproximarse con valores menores que $x_o$

### *Teorema*

El límite cuando $x \to x_o$ de una función $f(x)$, existe y es igual a $L$, si y solo si los límites laterales son iguales a $L$, es decir

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ 5-x^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

**Solución**

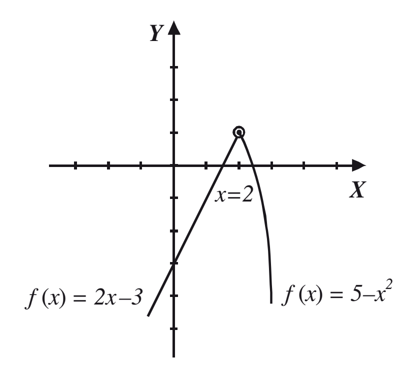
Se calculan los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-3) = 2(2)-3 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (5-x^2) = 5-(2)^2 = 5-4 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

Por consiguiente el $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$




2 Calcula el $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si } x\geq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

**Solución**

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(0)^2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 2(0)+1 = 1$$

Dado que, $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, entonces el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

La existencia de un límite lateral no implica la existencia del otro (ejemplo anterior). Cuando $f(x)$ está definida de un solo lado, entonces el $\lim_{x\to x_o} f(x)$ es igual al límite lateral de dicho lado.

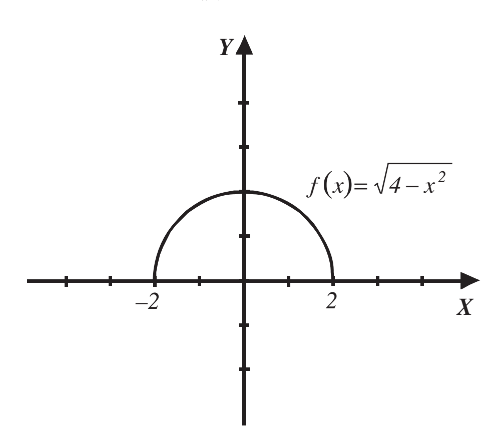
3 ¿Cuál es el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ?

**Solución**

Esta función está definida en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$, por tanto, los valores de $x$ tienden únicamente a 2 por la izquierda, entonces el valor del límite es:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$




# EJERCICIO 22

Para las siguientes funciones, determina el valor de los límites indicados:

1. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 2x+5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

   *a)* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 3} f(x)$

2. Si $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -2 \\ x^2-5 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   *a)* $\lim_{x\to -2^+} g(x)$, *b)* $\lim_{x\to -2^-} g(x)$, *c)* $\lim_{x\to -2} g(x)$,

   *d)* $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, *e)* $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, *f)* $\lim_{x\to 1} g(x)$

3. Si $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}-1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x^2-11}{3} & \text{si } 3 < x \end{cases}$

   *a)* $\lim_{x\to 1^+} h(x)$, *b)* $\lim_{x\to 1^-} h(x)$, *c)* $\lim_{x\to 1} h(x)$,

   *d)* $\lim_{x\to 3^+} h(x)$, *e)* $\lim_{x\to 3^-} h(x)$, *f)* $\lim_{x\to 3} h(x)$

4. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$

   *a)* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$,

   *d)* $\lim_{x\to 2} f(x)$, *e)* $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

5. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \leq 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x < 4 \\ \sqrt{x+5} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

   *a)* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 2} f(x)$,

   *d)* $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, *e)* $\lim_{x\to 4^+} f(x)$, *f)* $\lim_{x\to 4} f(x)$

6. Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-10}{x+2} & \text{si } x\leq -2\\ \dfrac{3-2x}{x^2-5} & \text{si } x>-2\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

7. Si $h(\theta)=\begin{cases}\text{sen}\,\theta & \text{si } \theta<\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos 2\theta & \text{si } \theta\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} h(\theta)$

8. Si $g(x)=\begin{cases}3e^x & \text{si } x\leq 0\\ 3+7\log(x+1) & \text{si } x>0\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

9. Si $w(x)=\begin{cases}\sqrt{4-3\,\text{sen}\,x} & \text{si } x<\pi\\ \dfrac{3\cos x+5}{1-\log\left(\text{sen}\,\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si } x\geq\pi\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pi} w(x)$

10. Si $f(x)=\begin{cases}\text{sen}\,x+\cos x & \text{si } x\leq 0\\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } x>0\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Límites de funciones trigonométricas

A continuación se muestra la tabla de valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables, así como los ángulos de 0, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$ y $2\pi$

| **Ángulos en radianes** | **0** | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seno | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | −1 | 0 |
| Coseno | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | −1 | 0 | 1 |
| Tangente | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | No existe | 0 | No existe | 0 |
| Cotangente | No existe | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | No existe | 0 | No existe |
| Secante | 1 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | No existe | −1 | No existe | 1 |
| Cosecante | No existe | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 1 | No existe | −1 | No existe |

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor del $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x$

**Solución**

Se sustituye el valor de $x = \frac{\pi}{4}$ en la función:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

2 ¿Cuál es el valor del $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x}$ ?

**Solución**

Al sustituir $x = 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = \frac{\operatorname{sen}\ 2(0) - 3\cos 2(0)}{1+0} = \frac{\operatorname{sen} 0 - 3\cos 0}{1} = \frac{0-3(1)}{1} = -3$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = -3$

3 Obtén $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1}$

**Solución**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1} = \frac{\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \cos\pi}{1+1} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

## EJERCICIO **23**

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 3x}{x+3}\right)$
2. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$
3. $\lim_{\alpha\to\pi}\left(2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)$
4. $\lim_{w\to 0}\frac{\tan^2 w - 1}{\tan^2 w + 1}$
5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
6. $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{4\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$
7. $\lim_{h\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan h}{\operatorname{sen}^2 h - 1}$
8. $\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
9. $\lim_{w\to\pi}\frac{\sec^2 w}{1 - \operatorname{sen}^2 w}$
10. $\lim_{\beta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\beta - \cos\beta}{\tan\beta - \sqrt{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Límites trigonométricos indeterminados*

Para evitar la indeterminación en un límite de funciones trigonométricas, se transforma la función utilizando identidades trigonométricas, en ocasiones con esto es suficiente, también se puede simplificar hasta obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\text{sen } x}{x}, \quad \frac{1-\cos x}{x} \quad \text{o} \quad \frac{\cos x - 1}{x}$$

y utilizar los siguientes teoremas:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\text{sen } v}{v} = 1; \quad \lim_{v\to 0}\frac{1-\cos v}{v} = \lim_{v\to 0}\frac{\cos v - 1}{v} = 0$$

A continuación se da una lista de las identidades que se pueden utilizar.

| Identidades trigonométricas fundamentales | Funciones del ángulo doble |
|---|---|
| $\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ | $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$ |
| $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$ | $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$ |
| $\text{sen } \alpha \csc \alpha = 1 \begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{1}{\csc \alpha} \\ \csc \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \end{cases}$ | $\cos 2\alpha = 2 \text{ sen}^2 \alpha - 1$<br>$\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$ |
| $\cos \alpha \sec \alpha = 1 \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} \\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \end{cases}$ | $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}$<br>**Funciones de suma o diferencia de ángulos** |
| $\tan \alpha \cot \alpha = 1 \begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \end{cases}$ | $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta \pm \text{sen } \beta \cos \alpha$<br>$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$ |
| $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \begin{cases} \text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha \end{cases}$ | **Transformaciones de sumas o restas de funciones trigonométricas a producto**<br>$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ |
| $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ | $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ |
| $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ | $\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ |
| | $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ |

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

**Solución**

Se sustituye $\theta = \frac{\pi}{4}$ , resultando:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{1 - \tan\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación, se aplican las identidades trigonométricas con el fin de obtener una expresión equivalente que no se indetermine:

$$\frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{-\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)} = -\frac{1}{\cos\theta}$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Por consiguiente, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = -\sqrt{2}$

2 Calcula el $\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w}$

**Solución**

Al evaluar el límite:

$$\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \frac{\cos 0 - \cos 2(0)}{\operatorname{sen}^2(0)} = \frac{1-1}{(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Se indetermina la función, por consiguiente, se transforma mediante identidades trigonométricas, como se ilustra:

$$\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w \to 0} \frac{\cos w - (\cos^2 w - \operatorname{sen}^2 w)}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}$$

$$= \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w) + \operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right] = \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{\operatorname{sen}^2 w} + \frac{\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right] \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{1 - \cos^2 w} + 1\right]$$

$$= \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{(1 + \cos w)(1 - \cos w)} + 1\right] = \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w}{1 + \cos w} + 1\right]$$

Se aplica el límite:

$$= \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w}{1 + \cos w} + 1\right] = \frac{\cos 0}{1 + \cos 0} + 1 = \frac{1}{1+1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Finalmente, el valor del límite es $\frac{3}{2}$

3 Obtén el $\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}$

**Solución**

Para que $\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}$ adopte la forma $\lim_{v\to 0}\frac{\text{sen }v}{v}$, se multiplica por 3 tanto el numerador como el denominador

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}\cdot\frac{3}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{6\text{ sen }3x}{3x}=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{3x}=6(1)=6$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}=6$

4 ¿Cuál es el valor del $\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}$?

**Solución**

Se sustituye $y=0$ en la función:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{\cos a(0)-\cos b(0)}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la diferencia de cosenos en producto,

$$\cos ay-\cos by=-2\text{ sen}\left(\frac{ay+by}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{ay-by}{2}\right)=-2\text{ sen}\frac{(a+b)y}{2}\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-2\text{ sen}\frac{(a+b)y}{2}\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\left[\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\right]$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a+b)}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a-b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{\frac{(a+b)y}{2}}\cdot\frac{(a-b)}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{\frac{(a-b)y}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}(1)\cdot\frac{(a-b)}{2}(1)$$

$$=\frac{-2(a^2-b^2)}{4}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

Por tanto, $\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{b^2-a^2}{2}$

5 Determina el valor de $\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}$

**Solución**

Se evalúa la función para $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+(0-1)\cos(0)}{4(0)}=\frac{1+(-1)(1)}{4(0)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la expresión de la siguiente forma

$$\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+x\cos x-\cos x}{4x}=\frac{1-\cos x+x\cos x}{4x}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\frac{x\cos x}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]$$

entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\cos x\right]$$

$$= \frac{1}{4}[0+1]$$

$$= \frac{1}{4}(1)$$

$$= \frac{1}{4}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1}{4}$$

# EJERCICIO 24

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{w\to 0}\dfrac{w^2}{\cos w-1}$

2. $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\text{sen } 3\theta}{\tan 4\theta}$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\text{sen}^2 x}$

4. $\lim_{\alpha\to 0}\dfrac{2\text{ sen }\alpha-\tan 2\alpha}{\alpha}$

5. $\lim_{v\to 0}\dfrac{1-\sec v}{v^2\sec v}$

6. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\tan^3\theta}$

7. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(\cos x-1)^2}}{\tan x}$

8. $\lim_{w\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2w}{\cos w-\text{sen } w}$

9. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1-\text{sen } x}-\sqrt{1+\text{sen } x}}$

10. $\lim_{\alpha\to 0}\dfrac{\tan(3+\alpha)-\tan(3-\alpha)}{\text{sen}(3-\alpha)-\text{sen}(3+\alpha)}$

11. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2(a^2-b^2)}{\cos ax-\cos bx}$

12. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\text{sen } x)^m}{(\text{sen } 2x)^m}$

13. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\theta$

14. $\lim_{w\to 0}\left(\dfrac{1}{\tan w}-\dfrac{1}{\text{sen } w}\right)$

15. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2\tan x-\text{sen } 2x}$

16. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^3\csc^2 x}$

17. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2 3x}{x^2}$

18. $\lim_{w\to 0}\dfrac{\sec 2w-1}{w\sec 2w}$

19. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{2x^2}$

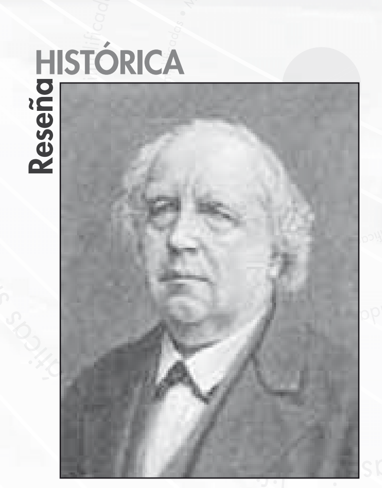
20. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^2 2x}{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# Capítulo 3

## Continuidad

**Reseña HISTÓRICA**



En el siglo XIX la matemática se apoyaba en la geometría y el álgebra para buscar sustento a sus afirmaciones.

En el cálculo infinitesimal se siguieron las líneas que le eran posibles con el sustento conceptual, como la existencia de funciones continuas.

Es cuando Weierstrass publica en 1872, gracias a su discípulo Paul Du Bois Reymond, su teorema sobre la existencia de funciones continuas que en algunos puntos no tenían derivada; las consecuencias de este teorema fueron de gran interés, en su época se decía que una función era continua si su gráfica se podía trazar sin despegar el lápiz del papel, aún en nuestra época esto da una idea informal de la continuidad de una función.

Pero el resultado de Weierstrass mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje totalmente analítico, sin necesidad de recurrir a imágenes geométricas. Este lenguaje proporcionó la advertencia sobre lo peligroso que resultaba confiar demasiado en las conclusiones extraídas de un dibujo.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

## Continuidad puntual

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x_o \in R$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ está definida.
2. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $x_o = 2$

**Solución**

Se deben verificar las tres condiciones:

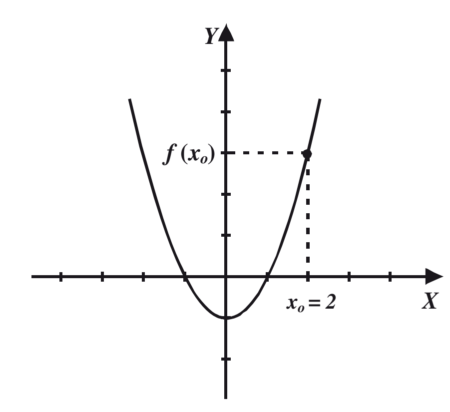
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$, por tanto $f(x)$ está definida para $x_o = 2$
2. Se calcula el valor de cada límite lateral:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ sí existe y $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

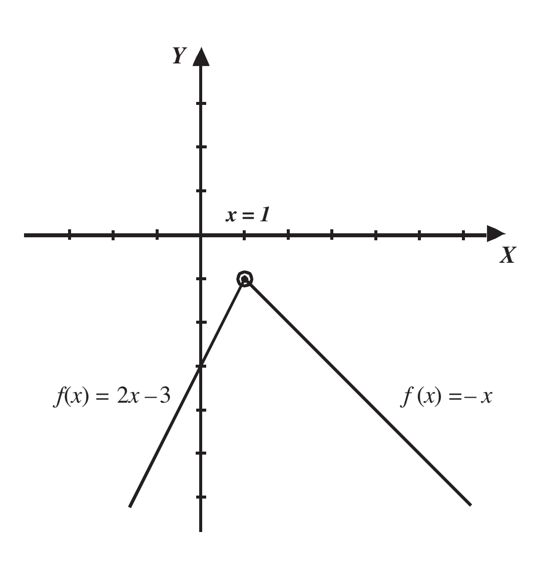
3. Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ y $f(2) = 3$, entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 2$



**2** Determina si la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x_o = 1$

**Solución**

Se verifican las condiciones:




1. $f(1) = -(1)$

   $f(1) = -1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. Se determinan los límites laterales:

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$

   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x) = -(1) = -1$

   Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

3. Probar que el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$

   Finalmente, es continua en $x_o = 1$

**3** Determina si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$

**Solución**

Se verifican las condiciones para los puntos $x = 1$ y $x = 3$:

1. $f(1) = (1)^2 = 1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$;

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

   Debido a que el $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

   Por tanto, $f(x)$ no es continua en $x_o = 1$

   Se verifica la continuidad en $x_o = 3$

1. $f(3) = 2(3) - 3 = 3$, la función está definida en $x_o = 3$

2. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 2(3) - 3 = 3$

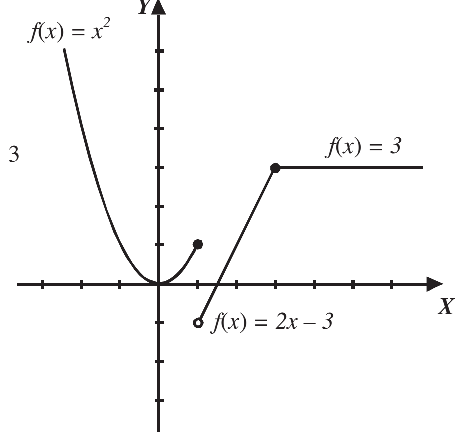
   Se concluye que,

   $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   Entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$

3. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$ y $f(x) = 3$ entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

   Por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 3$



4 Es continua $g(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } \quad x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

**Solución**

Si se verifican los pasos se obtiene:

1. $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

## Discontinuidad evitable o removible

Sea $f(x)$ una función racional no continua en $x = x_0$, si mediante una simplificación algebraica, $f(x)$ se vuelve continua en $x = x_o$, entonces recibe el nombre de discontinuidad evitable o removible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si es continua la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

**Solución**

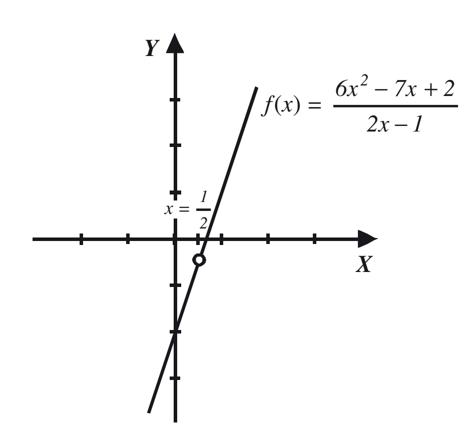
1. Se evalúa la función en $x = \dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{6\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

La función se indetermina o no está definida para el valor de $x = \dfrac{1}{2}$, lo cual implica que es discontinua en este punto; sin embargo, se elimina la indeterminación mediante una simplificación algebraica.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1} = \frac{(3x - 2)(2x - 1)}{2x - 1} = 3x - 2; \text{ si } x \neq \frac{1}{2}$$

Esta simplificación indica que la gráfica es una línea recta con discontinuidad evitable o removible en $x = \dfrac{1}{2}$



2 Determina si la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ es continua en $x=3$ y traza su gráfica.

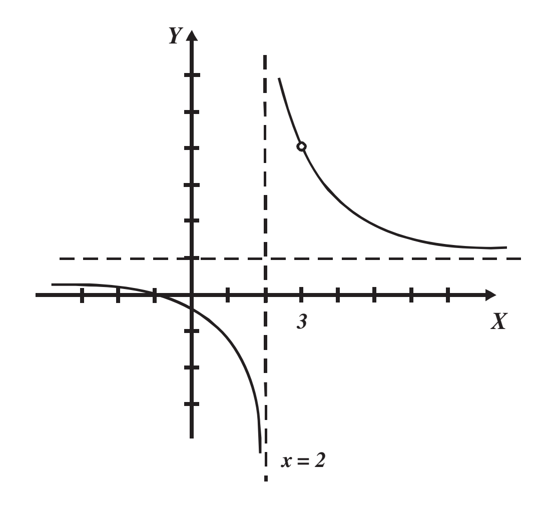
1. Se evalúa la función en $x=3$,

$$f(3)=\frac{(3)^2-2(3)-3}{(3)^2-5(3)+6}=\frac{9-6-3}{9-15+6}=\frac{0}{0}$$

La función no está definida en $x=3$, sin embargo, mediante una simplificación se puede eliminar la discontinuidad,

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}\text{, si } x\neq 3$$

La gráfica de esta función es una hipérbola con discontinuidad evitable o removible en $x=3$




3 Determina el valor de $k$ para que la función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}3x-k, & x<1\\ 2kx-3, & x\geq 1\end{cases}$$

**Solución**

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x-k)=3(1)-k=3-k$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2kx-3)=2\text{k}(1)-3=2k-3$$

Para que el límite exista:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

entonces:

$$3-k=2k-3$$
$$-k-2k=-3-3$$
$$-3k=-6$$
$$k=\frac{-6}{-3}$$
$$k=2$$

por tanto, para que la función sea continua $k = 2$, es decir la función se debe escribir:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 1 \\ 4x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

**Comprobación**

Probemos que la función es continua en $x = 1$

i) $f(1) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4x - 3) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^{-1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

por tanto $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

iii) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$.

4 Determina los valores de $a$ y $b$ para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x \leq -2 \\ x^2 - 1 & -2 < x < 3 \\ bx + 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

**Solución**

Se obtienen los límites laterales en $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (ax - 3) = a(-2) - 3 = -2a - 3$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Para que el límite exista se debe cumplir:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$$

Entonces:

$$-2a - 3 = 3$$
$$-2a = 3 + 3$$
$$-2a = 6$$
$$a = \frac{6}{-2}$$
$$a = -3$$

Por tanto $a = -3$
Se obtienen los límites laterales en $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (bx + 1) = b(3) + 1 = 3b + 1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 1) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$$

entonces

$$3b + 1 = 8$$
$$3b = 8 - 1$$
$$3b = 7$$
$$b = \frac{7}{3}$$

Por lo tanto $b = \frac{7}{3}$

## EJERCICIO 25

Verifica si las funciones propuestas son continuas en los puntos indicados:

1. $f(x) = 2x^2 - x$, en $x = 0$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, en $x = 2$

3. $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$, en $x = -\frac{3}{2}$

4. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x+1}}$, en $x = 3$

5. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, en $x = 2$

6. $f(x) = \frac{1}{\text{sen } x}$, en $x = 2\pi$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 2$

8. $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $x = 1$

9. $h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x = 0$

10. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = -2$ y $x = 2$

11. $q(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x < 1 \\ -3x + 5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{2x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 1$ y $x = 2$

12. $h(x) = \begin{cases} \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \leq \pi \\ \cos x & \text{si } \pi < x \leq \frac{3}{2}\pi \\ \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x > \frac{3}{2}\pi \end{cases}$, en $x = \pi$ y $x = \frac{3}{2}\pi$

13. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 2 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ \log(x+7)^7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, en $x = -3$ y $x = 3$

14. $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$, en $x = 3$

15. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, en $x = 1$

16. $g(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$, en $x = -2$

17. $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^2 + x - 72}$, en $x = 8$

18. $w(x) = \dfrac{6x^2 - x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$, en $x = \dfrac{1}{2}$

Determina el valor de *k* para que las siguientes funciones sean continuas:

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + k & \text{si } x < 2 \\ 3kx - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} k^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ 2k + 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

21. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x + k} & \text{si } x < 3 \\ kx - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Obtén el valor de las constantes para que las siguientes funciones sean continuas:

22. $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 - 4 & \text{si } -4 < x < 1 \\ bx + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ 3xb - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2a - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + bx & \text{si } 1 < x < 4 \\ ax - 2b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Continuidad de una función en un intervalo

### Continuidad por la derecha

Una función $f(x)$ es continua a la derecha de $x_o$ si y solo si para $x \in R$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

### Continuidad por la izquierda

Una función $f(x)$ es continua a la izquierda de $x_o$ si y solo si para $x \in R$:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim_{x \to x_o^-} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$

### Continuidad de una función en un intervalo abierto

Se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(a, b)$ si y solo si es continua en todos los puntos del intervalo.

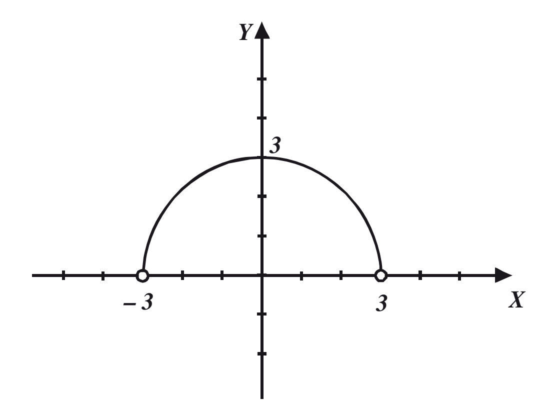
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo $(-3, 3)$

**Solución**

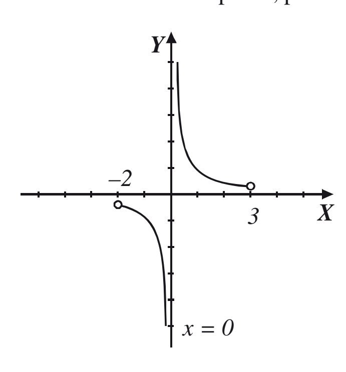
La función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ está definida en todos los puntos del intervalo $(-3, 3)$, como se ilustra en la gráfica, por consiguiente, $f(x)$ es continua en dicho intervalo.



2 ¿$f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(-2, 3)$?

**Solución**

$f(x)$ no está definida en $x = 0$; entonces no es continua en este punto, por tanto, no es continua en el intervalo $(-2, 3)$




## Continuidad en un intervalo cerrado

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto $(a, b)$ y además

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ y } \ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

EJEMPLOS

1 Demuestra que $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

**Demostración**

La función $f(x)$ es polinomial, lo cual implica que está definida en el intervalo abierto $(-1, 2)$, por tanto, es continua en el intervalo, ahora se prueba la continuidad en los extremos del intervalo.

Para $x = -1$

*a*) $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$

*b*) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 2x) = 3$

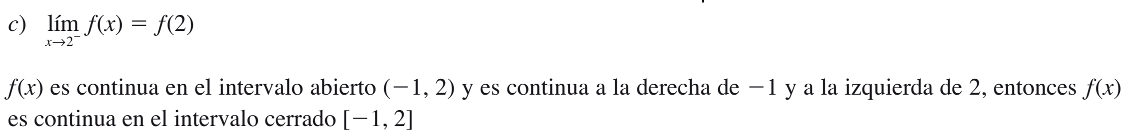
*c*) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Para $x = 2$

*a*) $f(2) = (2)^2 - 2(2) = 0$

*b*) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 2x) = 0$

*c*) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$



$f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(-1, 2)$ y es continua a la derecha de $-1$ y a la izquierda de 2, entonces $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

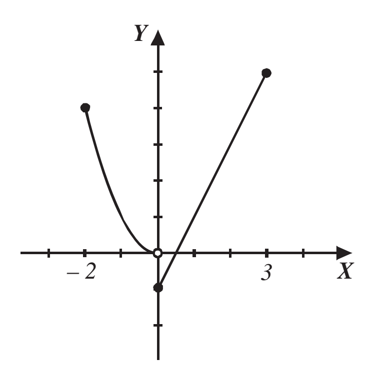
2 ¿La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-2, 3]$?

**Solución**

Del intervalo $(-2, 3)$ la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$




Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Si $f(x)$ no es continua en el intervalo abierto

$$(-2, 3)$$

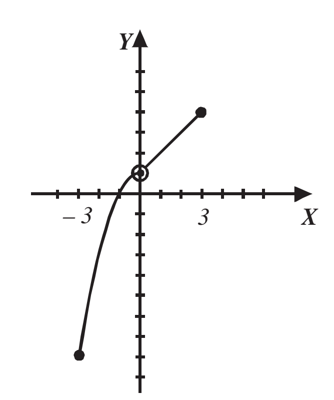
Entonces, no es continua en el intervalo cerrado

$$[-2, 3]$$

3 ¿La función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$?

**Solución**

Se prueba la continuidad de la función en $x = 0$




1. $f(0) = 1 - (0)^2 = 1$
2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 + (0) = 1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 - (0)^2 = 1$
3. $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

La función es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Ahora se prueba la continuidad en los extremos:

Para $x = -3$

1. $f(-3) = 1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8$
2. $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1 - (3)^2 = 1 - 9 = -8$
3. $f(-3) = \lim_{x\to -3^+} f(x)$

Para $x = 3$

1. $f(3) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
2. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
3. $f(3) = \lim_{x\to -3^-} f(x)$

La función es continua en $(-3, 3)$ y además es continua a la derecha de $-3$ y a la izquierda de 3, por tanto, es continua en el intervalo $[-3, 3]$

## Continuidad en un intervalo semiabierto

Para intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se tiene que:

1. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(a, b]$ si es continua en el intervalo abierto $(a, b)$, y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
2. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $[a, b)$ si es continua en el intervalo abierto $(a, b)$, y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$

**Demostración**

El dominio de la función se define $D_f = \{x \in R \mid x \neq 3\}$, por tanto $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(3, 6)$

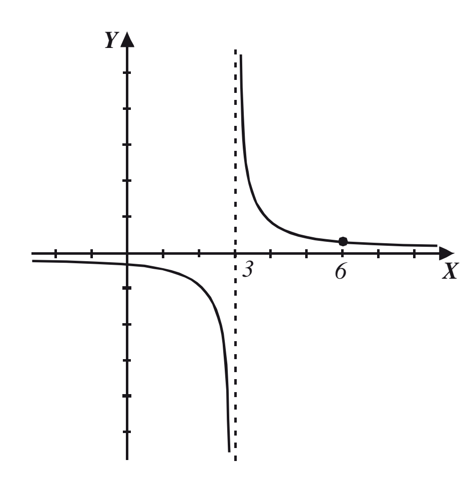
Se verifica la continuidad por la izquierda en 6

*a*) $f(6) = \dfrac{2}{6-3} = \dfrac{2}{3}$

*b*) $\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^-}\left(\dfrac{2}{x-3}\right) = \dfrac{2}{3}$

*c*) $\lim_{x \to 6^-} f(x) = f(6)$

Entonces, $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$



**2** ¿La función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$ es continua en el intervalo semiabierto $(-1, 3]$?

**Solución**

Se verifica la continuidad en $x = 2$

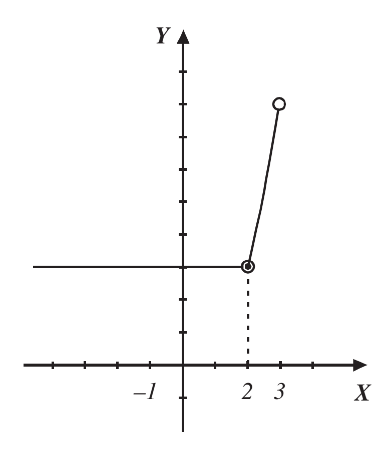
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
2. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$,

Por tanto, $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

3. $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$, la función es continua en $(-1, 3)$

Se prueba la continuidad por la izquierda en $x = 3$

1. $f(3)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en el intervalo $(-1, 3]$




**3** Verifica la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$ en $[-2, 4)$

**Solución**

Se verifica la continuidad en $x = 0$

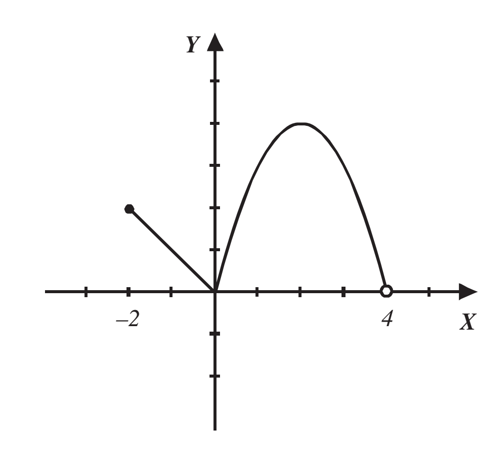
1. $f(0) = -(0) = 0$
2. $\lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} (-x^2 + 4x) = 0$
3. Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

La función es continua en el intervalo $(-2, 4)$

Se prueba la continuidad por la derecha para $x = -2$

1. $f(-2) = -(-2) = 2$
2. $\lim_{x\to -2^+} (-x) = -(-2) = 2$
3. $f(-2) = \lim_{x\to -2^+} (-x)$

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 4)$



# EJERCICIO 26

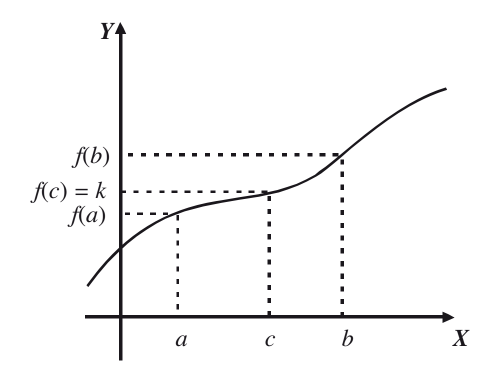
Verifica si son continuas las siguientes funciones en los intervalos indicados:

1. $f(x) = 3x + 2$ en $[0, 3)$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ en $(-1, 3)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ en $[-3, 3]$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ en $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$
5. $f(x) = x^2 - x^3$ en $[-2, 0]$
6. $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $[-3, 1]$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $[-2, 4]$
8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $[-3, 4]$
9. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $(0, 3)$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en $(-2, 5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Teorema del valor intermedio

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, y $k$ un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.




### EJEMPLOS

1 Si $f(x) = 3x - 2$ es una función definida en el intervalo $[-2, 3]$, obtén el valor de $c$ que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $k = 1$

**Solución**

Al aplicar el teorema se obtiene:

$$f(c) = k \rightarrow 3c - 2 = 1 \rightarrow 3c = 3 \rightarrow c = 1$$

Por consiguiente, $c = 1$ cuando $k = 1$

2 Dada la función $g(x) = x^2 - 3x - 2$, definida en el intervalo $[1, 4]$, determina el valor de $k$ que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $c = 3$

**Solución**

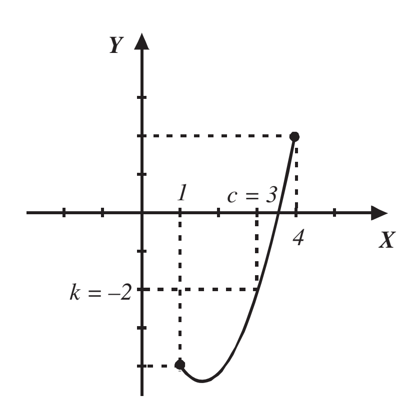
Se aplica el teorema:

$$f(c) = k \rightarrow c^2 - 3c - 2 = \text{k}$$

Pero, $c = 3$ y al sustituir se obtiene el valor de $k$

$$(3)^2 - 3(3) - 2 = k \rightarrow k = -2$$

entonces, $k = -2$




## EJERCICIO 27

Aplica el teorema del valor intermedio y encuentra el valor de $c$ en los siguientes ejercicios:

1. $f(x) = 3x - 5$; $[-2, 4]$ con $k = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ ; $[-3, 3]$ con $k = 2$
3. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$ ; $[0, 5]$ con $k = 2$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ ; $[-2, 4]$ con $k = 0$
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - x} & \text{si } x \leq 5 \\ x^2 - 25 & \text{si } x > 5 \end{cases}$ ; $[0, 8]$ con $k = 0$

Aplica el teorema del valor intermedio y determina el valor de $k$ en los siguientes ejercicios:

6. $f(x) = 3x^3 - 2x^2$; $[-2, 0]$, $c = -1$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ ; $[-6, 0]$, $c = -4$
8. $f(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$ ; $[1, 5]$, $c = 2$
9. $f(x) = \cos x$; $[0, 2\pi]$, $c = \dfrac{\pi}{4}$
10. $f(x) = \log(3 + x)$; $[1, 12]$, $c = 7$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 4

## La derivada

**Reseña HISTÓRICA**

En un periodo de menos de dos años, cuando Newton tenía menos de 25 años, comenzó con avances revolucionarios en matemática, óptica, física y astronomía.

Mientras Newton estaba en casa (debido a una peste que cerró la Universidad de Cambridge) estableció las bases del cálculo diferencial e integral. El método de las fluxiones, como él lo llamó, estaba basado en su crucial visión de que la integración de una función era el procedimiento inverso de su derivación.

Al considerar a la derivación como la operación básica, Newton produjo sencillos métodos analíticos que unificaban muchas técnicas diferentes desarrolladas previamente para resolver problemas, en apariencia no relacionados, como calcular áreas, tangentes, longitud de curvas y los máximos y mínimos de funciones. El *De Methodis Serierum et Fluxionum* de Newton fue escrito en 1671, pero Newton no pudo publicarlo y no apareció impreso hasta que John Colson produjo una traducción al inglés en 1736.

Sir Isaac Newton
(1643-1727)

## Definición

Sea $f(x)$ una función, se define a su derivada $f'(x)$, como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

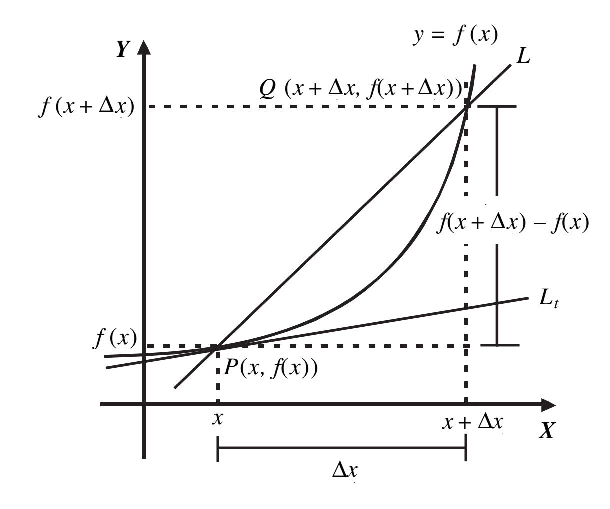
Para toda $x$, siempre que el límite exista y se representa por:

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx} \text{ o } D_x y$$

### Interpretación geométrica

El valor de la derivada en cualquier punto de la curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Donde:

$\Delta x$: incremento en $x$
$\Delta y$: incremento en $y$




En la gráfica se observa que la pendiente de la recta $L$ es:

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si $\Delta x$ tiende a cero, la recta $L$ coincide con $L_t$, entonces la pendiente de $L_t$ será el límite de $m_t$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por definición, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

## Regla de los cuatro pasos

Sea una función $y = f(x)$, entonces:

1. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (razón de cambio)

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (derivada de la función)

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$

**Solución**

Se aplica la regla de los cuatro pasos y se obtiene:

1. $y + \Delta y = 5(x + \Delta x) - 6$

2. $\Delta y = (5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)}{\Delta x} = \dfrac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \dfrac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$ (derivada de la función)

Este resultado se obtiene también cuando se utiliza la definición, como sigue:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x + \Delta x) - 6] - (5x - 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (5) = 5$$

Por tanto, la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$ es: $f'(x) = 5$

2 Aplica la definición y determina la derivada de $y = 7x^2 - 5x + 9$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 9] - (7x^2 - 5x + 9)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7x^2 + 14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14x + 7\Delta x - 5) = 14x - 5$$

Por consiguiente, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 14x - 5$$

3 Encuentra la derivada de la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$, aplica la definición.

**Solución**

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+5}-\dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2x+2\Delta x-1}{x+\Delta x+5}-\dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(x+5)(2x+2\Delta x-1)-(2x-1)(x+\Delta x+5)}{(x+\Delta x+5)(x+5)}}{\Delta x}$$ al simplificar,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{11\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x+5)(x+5)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{11}{(x+\Delta x+5)(x+5)}$$ se resuelve el límite

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{11}{(x+5)^2}$$

4 ¿Cuál es la derivada de la función $y=\sqrt{x+2}$ ?

**Solución**

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x}$$ se racionaliza la expresión

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x+2-x-2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

De tal manera que, al resolver el límite se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

# EJERCICIO 28

Deriva las siguientes funciones, utiliza la definición.

1. $y = 3x + 2$
2. $y = 2a - bx$
3. $y = x^2$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x$
5. $y = ax^2 + bx + c$
6. $y = x^3$
7. $y = x^3 - x^2$
8. $y = \dfrac{4x^2 - 16}{x - 2}$
9. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$
10. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
13. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
15. $y = \sqrt[3]{2x + 1}$
16. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
17. $y = \sqrt[3]{x}$
18. $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x - 1}}$
19. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 3}}$
20. $y = \sqrt[n]{x}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Fórmulas para determinar la derivada de una función algebraica

La forma directa de obtener la derivada de una función algebraica es la aplicación de las siguientes fórmulas:

1. $\dfrac{d}{dx}c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx}x = 1$
3. $\dfrac{d}{dx}cv = c\dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d(u + v - w)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dw}{dx}$
5. $\dfrac{d\,(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$
6. $\dfrac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}\sqrt[n]{v} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}\dfrac{dv}{dx}$
8. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{v} = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}\dfrac{dv}{dx}$
9. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
10. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
11. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{v}\right) = -\dfrac{c}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$
12. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\dfrac{dv}{dx}$

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada de la función $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$?

**Solución**

Al aplicar las fórmulas respectivas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 4x + 5) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^3) + 2\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 3x^2 + 2(2x) - 4(1) = 3x^2 + 4x - 4$$

2 Deriva la función $y = \sqrt[3]{x^2}$

**Solución**

Aplicamos el hecho de que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ y posteriormente $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

3 Calcula la derivada de la función $s = \frac{1}{\sqrt[5]{t}}$

**Solución**

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{1}{5}t^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}t^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5t^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{t^6}}$$

pero $\sqrt[5]{t^6} = \sqrt[5]{t^5 \cdot t} = t\sqrt[5]{t}$, por tanto $\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{5t\sqrt[5]{t}}$

4 Obtén la derivada de la función $y = \frac{4}{x}$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{d}{dx}(4x^{-1}) = 4\frac{d}{dx}(x^{-1}) = 4(-1x^{-1-1}) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

5 Determina la derivada de la función $y = 2\sqrt[3]{x} - \frac{7}{\sqrt{x}}$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}} - 7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{d}{dx}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 7\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right) - 7\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{2x\sqrt{x}}$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = (3x^2 - x)^7$ ?

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d(v^n)}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - x) = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \left(\frac{d3x^2}{dx} - \frac{dx}{dx}\right) = 7(3x^2 - x)^6(6x - 1)$$

$$= (42x - 7)(3x^2 - x)^6$$

7 Encuentra la derivada de la función $s = \sqrt[3]{8 + 4t - t^3}$

**Solución**

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3) = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4 - 3t^2)$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3(8 + 4t - t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3\sqrt[3]{(8 + 4t - t^3)^2}}$$

8 Deriva la función $y = -\frac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}\right] = \frac{d}{dx}\left[-5\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}\right] = -5\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}$$

$$= -5\left[-3\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)\right]$$

$$= 15\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x} - \frac{d}{dx}x\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{15\left(1 - 2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - x\right)^4}$$

9 Calcula la derivada de la función $y = x\sqrt{x+1}$

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x+1}\right) = x\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}\,\frac{dx}{dx} = x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) + \sqrt{x+1} = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}$$

$$= \frac{x+2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x+2x+2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Por consiguiente, $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

10 Obtén la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2-5}{1-3x^2}$

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ y se obtiene:

$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)(2x)-(x^2-5)(-6x)}{(1-3x^2)^2} = \frac{2x-6x^3+6x^3-30x}{(1-3x^2)^2} = -\frac{28x}{(1-3x^2)^2}$$

## EJERCICIO 29

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = -10$
2. $y = 5$
3. $f(x) = a^2$
4. $s(t) = b^2$
5. $y = 6x$
6. $y = \frac{3}{4}x$
7. $f(x) = ax$
8. $s(t) = b^2t$
9. $f(x) = 5x\sqrt{2}$
10. $y = ax\sqrt{b}$
11. $f(x) = x^5$
12. $f(x) = 4x^3$
13. $s(t) = \frac{1}{5}t^4$
14. $y = x^{\frac{9}{2}}$
15. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$
16. $y = 6x^{\frac{3}{2}}$
17. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$
18. $f(x) = 4x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = \sqrt{x}$
20. $s(t) = \sqrt[4]{t}$
21. $f(x) = 5\sqrt[5]{x}$
22. $f(x) = \frac{x^5}{7}$

23. $f(x) = \frac{x^4}{9}$

24. $s(t) = \frac{t^3}{a}$

25. $f(x) = \frac{5}{x^4}$

26. $f(x) = \frac{2}{x^6}$

27. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

28. $s(t) = \frac{\sqrt[3]{t}}{5}$

29. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

30. $s(t) = \frac{5}{\sqrt[4]{t}}$

31. $f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

32. $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 3x - 12$

33. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - x - 6$

34. $f(x) = 5x^2 + 4x + 4mn - 2$

35. $f(x) = 3ax^4 - 4ax^3 - 5bx^2 + 7cx$

36. $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{5} - \frac{4x}{9} - \frac{1}{5}$

37. $s(t) = \frac{t^5}{6} - \frac{t^4}{5} + \frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{7} + \frac{t}{9} - \frac{2}{3}$

38. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{x}{a} + \frac{c}{b}$

39. $s(t) = \frac{4}{t^2} - \frac{5}{t} - \frac{9}{5}$

40. $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^3} - \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{5}$

41. $s(t) = \frac{t^3}{5} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t} - \frac{3}{5}$

42. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{5} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

43. $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x + 2}{x}$

44. $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

45. $f(x) = 8\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[2]{x^3}$

46. $f(x) = ax^n + bx^{n-1}$

47. $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{7} - \frac{8}{5}$

48. $f(x) = a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[3]{x}$

49. $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[4]{x^5}}{3}$

50. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^{-1}}$

51. $f(x) = \frac{7}{x^{-2}} + \frac{5}{x^{-3}}$

52. $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$

53. $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{\sqrt[3]{x}}$

54. $y = \sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

55. $y = (3x - 4)^5$

56. $y = (2 - 4x)^3$

57. $y = (3x^6 - 2x^4)^4$

58. $y = \left(4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^3$

59. $y = \sqrt{5 - 3x^2}$

60. $y = \sqrt[3]{x^3 + 2}$

61. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1}$

62. $y = \frac{2}{3}\sqrt{2x^2 + 6x}$

63. $y = \left(\frac{x}{3} + 6\sqrt{x}\right)^3$

64. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2}$

65. $f(x) = (x^2 + 5x - 3)^3$

66. $y = \sqrt[3]{(2x-3)^2}$

67. $y = \sqrt{\sqrt{4x+3}}$

68. $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3$

69. $y = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

70. $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$

71. $y = \sqrt[3]{x^6 + 3x}$

72. $y = \left(4x^2 - \frac{1}{2}x\right)(9x + 8)$

73. $y = (5x - 3)\left(4x - \frac{3}{x}\right)$

74. $y = x^3(3x + 1)$

75. $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

76. $y = \frac{x}{3}(2x + 1)^3$

77. $y = x^2\sqrt{x-1}$

78. $f(x) = (3x^2 - 5)^4(2x^2 + 1)^3$

79. $f(\theta) = (\theta^2 + 1)^3(\theta^3 - 2)^2$

80. $s = \frac{\sqrt{4-3t}}{t^{-1}}$

81. $s(t) = t^3\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}\right)^2$

82. $f(x) = \frac{6}{2 - 4x}$

83. $f(t) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}$

84. $f(r) = \frac{r^2 - 3}{\sqrt{r^2 - 4}}$

85. $f(t) = \frac{6t - 3}{5t + 8}$

86. $f(z) = \frac{6 - 3z}{5 - 6z}$

87. $f(x) = \frac{ax + b}{ax - b}$

88. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{3x}}{3}$

89. $f(t) = \sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}$

90. $f(w) = \left(\frac{w-3}{w+2}\right)^2$

91. $f(\theta) = \frac{6(2 - \theta^3)}{3 - 2\theta}$

92. $f(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 - 6s}$

93. $f(x) = \frac{5x^2}{2\sqrt{b^2 + x^2}}$

94. $f(t) = \frac{(9t - 6)^3}{(27 - 3t)^2}$

95. $f(x) = \frac{4xb}{2a - 6x}$

96. $f(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$

97. $y = \frac{2}{\sqrt{x^4 - a^4}}$

98. $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + 3}}$

99. $y = (2x + 3)\sqrt{x^2 + 3x}$

100. $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1}$

101. $y=\frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$

102. $y=\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3-1}}$

103. $y=\frac{\sqrt{x^n+1}}{\sqrt{x^n-1}}$

104. $y=\frac{\sqrt[m]{x^n}}{\sqrt[m]{x^n}-1}$

105. $y=\frac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{4-5x}}$

106. $y=2x\sqrt[3]{\frac{2x^3+1}{2x^3-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Regla de la cadena*

Sea $y = g(u)$, $u = f(x)$, entonces la derivada de $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, se define:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(g\circ f)(x)=\frac{d}{dx}g(f(x))=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\frac{dy}{dx}$ si $y = u^2 - 9$; $u = x^2 + 1$

**Solución**

Por definición $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, entonces $\frac{dy}{du}=2u$ y $\frac{du}{dx}=2x$, por tanto:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(2u)(2x)=4ux=4(x^2+1)x=4x(x^2+1)$$

2 Obtén $\frac{d}{dx}(y\circ u\circ v)$, si $y=u^3$, $u=\frac{v-1}{v+1}$, $v=\sqrt{x^2-1}$

**Solución**

Cuando hay más de dos funciones, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Luego:

$$\frac{dy}{du}=3u^2,\ \frac{du}{dv}=\frac{2}{(v+1)^2}\ \text{ y }\ \frac{dv}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\frac{d}{dx}(y\circ u\circ v)=\left[3u^2\right]\left[\frac{2}{(v+1)^2}\right]\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right]=\frac{6u^2x}{(v+1)^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{6\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^4\sqrt{x^2-1}}$$

3 Deriva la función $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+8}$, utilizando la regla de la cadena.

**Solución**

Al tomar $u=x^3-2x^2+8$, entonces $y=\sqrt[3]{u}$, luego:

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}=3x^2-4x$$

Al utilizar la regla de la cadena, se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\right]\left[3x^2-4x\right]=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{u^2}}=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2+8)^2}}$$

## EJERCICIO 30

Determina $\frac{dy}{dx}$, para las siguientes funciones:

1. $y=u^2-u,\ u=\frac{1}{x}$
2. $y=\sqrt{\frac{u-1}{u+1}},\ u=\sqrt{x}$
3. $y=\sqrt{2u^3-3u},\ u=x^2-1$
4. $y=\frac{3}{u^3}-\frac{2}{u^2},\ u=x+1$
5. $y=\frac{u}{u^2-1},\ u=x^3-6x^2-8x$
6. $y=\sqrt{(2x-1)^5+(2x-1)^3}$
7. $y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$
8. $y=\frac{u+1}{u-1},\ u=\frac{v+2}{v-2},\ v=\sqrt{x^2-1}$
9. $y=\sqrt{u-1},\ u=\frac{v^2}{v^2-1},\ v=\sqrt{x}$
10. $y=\frac{1}{\sqrt{u}},\ u=\sqrt{\frac{v-1}{v+1}},\ v=(x^2+3)^2$
11. $y=u^2+1,\ u=\sqrt{v},\ v=\frac{x+1}{x-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Derivadas de funciones trascendentes

Se clasifican en funciones trigonométricas directas e inversas, logarítmicas y exponenciales, por ejemplo:

$y=\text{sen}\ 3\sqrt{x}$

$y=\ln\sqrt{2x-1}$

$y=e^{\cos x}$

$y=\tan(e^x-\ln x)$

$y=3^{x-x2}$

$y=\text{arc sen}(x-2)$

### Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\text{sen}\ v=\cos v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos v=-\text{sen}\ v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan v=\sec^2 v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot v=-\csc^2 v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sec v=\sec v\tan v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\csc v=-\csc v\cot v\frac{dv}{dx}$$

**Inversas trigonométricas**

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen} v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} v = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tan} v = \frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cot} v = -\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec} v = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,csc} v = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

**Logarítmicas**

$$\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_b v = \frac{\log_b e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

**Exponenciales**

$$\frac{d}{dx}e^v = e^v\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}a^v = a^v\ln a\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}u^v = v\cdot u^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u\cdot u^v\frac{dv}{dx}$$

*Derivadas de funciones trigonométricas*

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \operatorname{sen} 5x^2,\ y = \tan 6x,\ y = \csc 4x^3$$

**Solución**

Se aplican las fórmulas $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} v = \cos v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\csc v = -\csc v \cot v\frac{dv}{dx}$ a cada una de las funciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x^2 = \cos 5x^2\left(\frac{d}{dx}5x^2\right) = \cos 5x^2(10x) = 10x\cos 5x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan 6x = \sec^2 6x\left(\frac{d}{dx}6x\right)\sec^2 6x(6) = 6\sec^2 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\csc 4x^3 = -\csc 4x^3\cot 4x^3\left(\frac{d}{dx}4x^3\right) = -\csc 4x^3\cot 4x^3(12x^2) = -12x^2\csc 4x^3\cot 4x^3$$

2 Deriva la función $y = 4\cos(x^2-1)$

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\cos v = -\operatorname{sen} v\frac{dv}{dx}$, con $v = x^2-1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}4\cos(x^2-1) = 4\frac{d\cos(x^2-1)}{dx} = 4\left[-\operatorname{sen}(x^2-1)\frac{d(x^2-1)}{dx}\right] = -4\operatorname{sen}(x^2-1)\cdot 2x$$

por tanto, $\frac{dy}{dx} = -8x\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)$

3 Encuentra la derivada de la función $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

**Solución**

Primero se aplica la fórmula del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)\dfrac{d(\operatorname{sen} x - \cos x)}{dx} - (\operatorname{sen} x - \cos x)\dfrac{d(\operatorname{sen} x + \cos x)}{dx}}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

Se derivan las funciones con las fórmulas para la función seno y coseno:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)\left[\dfrac{d \operatorname{sen} x}{dx} - \dfrac{d \cos x}{dx}\right] - (\operatorname{sen} x - \cos x)\left[\dfrac{d \operatorname{sen} x}{dx} + \dfrac{d \cos x}{dx}\right]}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{2(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

Se aplica la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

4 Determina la derivada de la función $r = \tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$

**Solución**

Se expresa $\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) = \left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3$ y se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d \tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta} = \frac{d\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3}{d\theta} = 3\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^2 \cdot \frac{d \tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

Se deriva la tangente con la fórmula $\dfrac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v \dfrac{dv}{dx}$ y se simplifican los resultados:

$$\frac{dr}{d\theta} = 3 \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \frac{d\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}} - 1\right) = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\left(\frac{1 - 2\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{3 - 6\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right) \cdot \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$$

5 Deriva la función $s = \cos 2t \cdot \text{sen } 4t$

**Solución**

Se aplica la fórmula para derivar un producto $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(\cos 2t \text{ sen } 4t)}{dt} = \cos 2t \cdot \frac{d \text{ sen } 4t}{dt} + \text{sen } 4t \cdot \frac{d \cos 2t}{dt}$$

Se deriva el seno y coseno con sus respectivas fórmulas y se obtiene el resultado:

$$\frac{ds}{dt} = \cos 2t \cdot \left[\cos 4t \frac{d(4t)}{dt}\right] + \text{sen } 4t \cdot \left[-\text{sen } 2t \frac{d(2t)}{dt}\right] = \cos 2t \left[4\cos 4t\right] + \text{sen } 4t \left[-2 \text{ sen } 2t\right]$$

$$\frac{ds}{dt} = 4 \cos 2t \cos 4t - 2 \text{ sen } 2t \text{ sen } 4t$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \frac{1}{\sqrt{\text{sen } x}}$?

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\text{sen } x}} = \frac{\sqrt{\text{sen } x}\frac{d(1)}{dx} - 1\frac{d\sqrt{\text{sen } x}}{dx}}{\left(\sqrt{\text{sen } x}\right)^2}$$

Se realizan las respectivas derivadas:

$$\frac{d(1)}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\sqrt{\text{sen } x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\text{sen } x}}\frac{d \text{ sen } x}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\text{sen } x}}(\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}$$

Se sustituyen y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\text{sen } x}\,(0) - 1\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}\right)}{\text{sen } x} = \frac{\frac{-\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}}{\frac{\text{sen } x}{1}} = -\frac{\cos x}{2 \text{ sen } x\sqrt{\text{sen } x}}$$

## EJERCICIO 31

Deriva las siguientes funciones trigonométricas:

1. $y = \text{sen } 8x$
2. $f(x) = \cos 3x^2$
3. $f(x) = \tan x^3$
4. $s(t) = \sec 6t$
5. $f(x) = \cot 4x^3$
6. $f(x) = \csc 9x$
7. $f(x) = \cos ax$
8. $s(t) = \tan bt^2$

9. $f(x) = 6 \sec x^2$
10. $f(x) = \frac{1}{2} \csc \frac{x}{4}$
11. $f(x) = a \cos 3x$
12. $f(x) = \cot(3x - 5)$
13. $f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$
14. $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$
15. $s(t) = \tan(at + \pi)$
16. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
17. $s(t) = \operatorname{sen} \sqrt{t}$
18. $f(x) = \cot \sqrt[3]{x}$
19. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
20. $s(t) = \cos \frac{1}{t^3}$
21. $f(x) = \sec \frac{1}{\sqrt{x}}$
22. $f(x) = \tan 3x - 3x$
23. $f(x) = ax + \cot ax$
24. $f(x) = \operatorname{sen}(x - 1)^2$
25. $s(t) = \cos(3t^2 + 2)^3$
26. $f(x) = 4 \cot \sqrt{x-1}$
27. $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
28. $f(x) = \sec\left(\frac{ax+b}{ax-b}\right)$
29. $f(x) = \operatorname{sen}^2 5x$
30. $f(x) = \cos^3 bx$
31. $f(x) = \tan^4 3x^2$
32. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 4x}$
33. $f(x) = \sqrt{\sec 5x^2}$
34. $f(x) = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$
35. $f(x) = x \operatorname{sen} x$
36. $f(x) = x^2 \cos x^2$
37. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$
38. $f(t) = \frac{\cos 5t^2}{t^2}$
39. $y = \operatorname{sen}(ax^2)$
40. $y = a \cos (3x)$
41. $y = \tan \sqrt{x}$
42. $y = \frac{1}{6} \sec\ 3x^2$
43. $y = \frac{1}{2} \csc \frac{2x}{3}$
44. $y = x^2 + 3x - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
45. $y = -3 \cot\ (1 - x^2)$
46. $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
47. $y = \operatorname{sen}^2(2\ bx)$
48. $y = \tan^4(2x - 1)^3$
49. $y = \sqrt{\sec 2x}$
50. $y = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$
51. $y = x \cdot \cos^3 4x$
52. $y = \frac{x^2}{\operatorname{sen} ax}$

53. $y = x\sqrt{\csc 2x}$

54. $y = \dfrac{\cos(mx)}{\operatorname{sen}(nx)}$

55. $y = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$

56. $y = x\cos x - \operatorname{sen} x$

57. $y = \sqrt{\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}}$

58. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x - 4x\cos 2x - \operatorname{sen} 2x$

59. $y = \cos(2x - 1)\cdot\tan(1 - 2x)$

60. $y = x^2\sec(\pi - x)$

61. $y = \left(\dfrac{3x\operatorname{sen} x}{3x+1}\right)^3$

62. $y = \cos\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

63. $y = \dfrac{1+\tan^2 x}{x\sec x}$

64. $y = \dfrac{x\,(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$

65. $y = 2\operatorname{sen} x\cos x$

66. $y = \dfrac{\csc x\cdot\tan x}{\cos x}$

67. $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

68. $y = \cos^2(3x + 1) - \operatorname{sen}^2(3x + 1)$

69. $y = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{x^2}$

70. $y = \dfrac{(1+\tan x)^2}{\sec x}$

71. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x + 1$

72. $y = 2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - x^2\cos x$

73. $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \dfrac{1}{64}\operatorname{sen} 8x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Derivadas de funciones inversas trigonométricas*

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Deriva la función $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$

**Solución**

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d\,(x^2)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

2 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right)$?

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(\text{arc}\tan v) = \frac{1}{v^2+1}\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{d\left(\sqrt{x}-1\right)}{dx} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[x-2\sqrt{x}+2\right]}$$

3 Obtén la derivada de la función $r = \theta^2 \text{ arc sec } \theta$

**Solución**

$$\frac{dr}{d\theta} = \theta^2\frac{d}{d\theta}\text{ arc sec }\theta + \text{arc sec }\theta\frac{d\theta^2}{d\theta} = \theta^2\left[\frac{1}{\theta\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{d\theta}\right] + \text{arc sec }\theta(2\theta)$$

$$= \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2-1}} + 2\theta\,\text{arc sec}\,\theta$$

4 Determina la derivada de la función $y = \frac{\text{arc sen } x}{x}$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\text{arc sen }x)-(\text{arc sen }x)\frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dx}\right)-\text{arc sen }x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\text{arc sen }x}{x^2} = \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen }x}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen }x}{x^2}$$

## EJERCICIO 32

Determina la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \text{arc sen } 5x$
2. $f(x) = \text{arc cos } 4x^2$
3. $f(x) = \text{arc tan } 3x$
4. $y = \text{arc cot } x^3$
5. $f(x) = \text{arc sec } x^2$
6. $f(x) = \text{arc csc } 3x^2$
7. $f(x) = \text{arc cos } \frac{x}{b}$
8. $f(x) = \text{arc sen } \frac{x}{4}$

9. $f(x) = \text{arc tan } \dfrac{x}{a}$

10. $f(x) = 2 \text{ arc sec } \sqrt{x}$

11. $y = \text{arc sen}(3 - x^2)$

12. $y = \text{arc cos}\sqrt{1-x^2}$

13. $y = x^2 \text{ arc tan } x$

14. $y = x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2}$

15. $y = 8 \text{ arc cot}\left(\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}\right) - \dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$

16. $y = x \text{ arc csc}(x^{-1}) + \text{arc tan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

17. $y = \left(\dfrac{x^2+1}{2}\right) \text{arc tan } x - \dfrac{x}{2}$

18. $\varphi = \text{arc csc}\sqrt{\theta^2 - 1}$

19. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-4x^2} + \dfrac{1}{4}\text{arc sen } 2x$

20. $y = \dfrac{x^3}{3}\text{arc sen } x + \left(\dfrac{x^2+2}{9}\right)\sqrt{1-x^2}$

21. $f(r) = \sqrt{b^2 - r^2} + b \cdot \text{arc sen}\dfrac{r}{b}$

22. $y = x - \text{arc tan } x$

23. $y = \text{arc tan }(2x) + \text{arc sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

24. $y = \text{arc sen } \sqrt{x}$

25. $y = x \text{ arc cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

26. $y = \text{arc sen}(4ax - 4x^2)$

27. $f(r) = \text{arc sen}(r - 2)$

28. $y = \dfrac{1}{4}\text{arc tan}\left(\dfrac{2x+1}{2}\right)$

29. $y = 4 \text{ arc sen}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4x - x^2}$

30. $y = 6 \text{ arc csc}\left(\dfrac{2}{x-2}\right) - \dfrac{(x+6)\sqrt{4x-x^2}}{2}$

31. $y = \dfrac{x-1}{2}\sqrt{2x - x^2} + \dfrac{1}{2}\text{ arc sen }(x-1)$

32. $s(t) = 3\sqrt{9-t^2} + 2 \text{ arc sen } \dfrac{t}{3}$

33. $6y = 25 \text{ arc sen } \dfrac{3x}{5} + 3x\sqrt{25 - 9x^2}$

34. $w = 2\sqrt{\theta+2} + \sqrt{2} \text{ arc tan}\sqrt{\dfrac{\theta+2}{2}}$

35. $y = \dfrac{2}{3}\text{arc tan}\left(\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{x}{2}\right)$

36. $y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{6}\text{arc tan}\left(2 \tan\dfrac{x}{2}\right)$

37. $y = \text{arc sen}\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)$

38. $y = x \text{ arc cot}(\tan x)$

39. $y = \dfrac{\text{arc sec }(2x)}{\sqrt{4x^2-1}}$

40. $y = \text{arc sec}\left(2 \sec\dfrac{x}{2}\right)$

41. $y = 4 \text{ arc sen}\left(\dfrac{2x-4}{3x+2}\right)$

42. $s = t^2 \text{ arc cos}(1 - t) + 2t$

43. $y = \text{arc cos}(a + x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales*

A continuación se enlistan las propiedades de los logaritmos, las cuales, al aplicarlas, simplifican la función al momento de obtener su derivada.

1. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_a A$
5. $\log^n{}_a A = (\log_a A)^n$

Las propiedades anteriores también se aplican a los logaritmos naturales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $y = \ln x^2$

**Solución**

Al aplicar la fórmula $\frac{d\ \ln\ v}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ \ln\ x^2}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{dx^2}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

2 ¿Cuál es la derivada de $y = \ln^2(x^2 - x)$?

**Solución**

Se expresa la función como: $\ln^2(x^2 - x) = [\ln(x^2 - x)]^2$ y se aplica $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\left(\frac{d}{dx}v\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(x^2 - x)]^2 = 2\ \ln(x^2 - x)\frac{d\ln\ (x^2 - x)}{dx} = 2\ \ln\,(x^2 - x)\cdot\frac{1}{x^2 - x}\,\frac{d(x^2 - x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ \ln\ (x^2 - x)\,\frac{1}{x^2 - x}\cdot(2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ \ln\ (x^2 - x)\,\frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\ (2x - 1)\cdot\ln\ (x^2 - x)}{x^2 - x} = \frac{4x - 2}{x^2 - x}\cdot\ln\ (x^2 - x)$$

3 Obtén la derivada de $y = x^2 \ln(mx)^2$

**Solución**

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2\ln(mx)^2) = x^2\frac{d}{dx}\ln(mx)^2 + \ln(mx)^2\frac{d}{dx}x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2}\frac{d}{dx}(mx)^2 + \ln(mx)^2 \cdot (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2} \cdot 2(mx)m + 2x\ \ln(mx)^2 = 2x + 2x\ln(mx)^2$$

Utilizando $\log_a A^n = n \log_a A$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2x(2\ln(mx)) = 2x + 4x\ln(mx) = 2x[1 + 2\ln(mx)]$$

4 Determina la derivada de la función $y = \ln(\text{sen } x)$

**Solución**

Se deriva la función y mediante identidades trigonométricas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \cot x$$

5 Deriva $y = \ln\left(\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right)$

**Solución**

Al aplicar las propiedades de los logaritmos se obtiene: $y = \ln(1 + \text{sen } x) - \ln(1 - \text{sen } x)$
Se deriva la función:

$$y' = \frac{d}{dx}\ln(1+\text{sen } x) - \frac{d}{dx}\ln(1-\text{sen } x) = \left(\frac{1}{1+\text{sen } x}\right)\frac{d}{dx}(1+\text{sen } x) - \left(\frac{1}{1-\text{sen } x}\right)\frac{d}{dx}(1-\text{sen } x)$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+\text{sen } x}\right)(\cos x) - \left(\frac{1}{1-\text{sen } x}\right)(-\cos x) = \frac{\cos x}{1+\text{sen } x} + \frac{\cos x}{1-\text{sen } x}$$

$$y' = \frac{\cos x\,(1+\text{sen } x) + \cos x(1-\text{sen } x)}{(1+\text{sen } x)(1-\text{sen } x)} = \frac{\cos x + \cos x\,\text{sen } x + \cos x - \cos x\,\text{sen } x}{(1+\text{sen } x)(1-\text{sen } x)}$$

$$y' = \frac{2\cos x}{1-\text{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} = 2\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 2\sec x$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = e^{2x-1}$?

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}e^v = e^v\frac{dv}{dx}$ y se obtiene: $\frac{dy}{dx} = e^{2x-1}\cdot\frac{d}{dx}(2x-1) = e^{2x-1}\cdot 2 = 2e^{2x-1}$

pero $y = e^{2x-1}$ por tanto $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x-1} = 2y$

7 Determina la derivada de la función $y = 3\sqrt{e^{\cos x}}$

**Solución**

La función se puede expresar como $y = 3(e^{\cos x})^{\frac{1}{2}} = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}$, se deriva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3e^{\frac{1}{2}\cos x}\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos x\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\left(\frac{1}{2}(-\text{sen } x)\right) = -\frac{3}{2}\text{sen } x\cdot e^{\frac{1}{2}\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\text{sen } x\cdot\sqrt{e^{\cos x}}$$

8 Obtén la derivada de $y = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}$

**Solución**

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\right) = x^3\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}x^3 = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}\cdot(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+6\right)$$

9 ¿Cuál es la derivada de $y = 5^{x^2+5x-7}$?

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}a^v = a^v\cdot\ln a\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5^{x^2+5x-7}) = 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot\frac{d}{dx}(x^2+5x-7)$$

$$= 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot(2x+5)$$

$$= (2x+5)\cdot 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5$$

10 Encuentra la derivada de la función $y = (\text{sen } x)^{e^x}$

**Solución**

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}u^v = v\cdot u^{v-1}\cdot\frac{du}{dx} + \ln u\cdot u^v\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x-1}\frac{d}{dx}(\text{sen } x) + \ln(\text{sen } x)\cdot(\text{sen } x)^{e^x}\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x}(\text{sen } x)^{-1}(\cos x) + \ln(\text{sen } x)\cdot(\text{sen } x)^{e^x}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x}\left(\frac{\cos x}{\text{sen } x}\right) + \ln(\text{sen } x)\cdot(\text{sen } x)^{e^x}(e^x) = e^x(\text{sen } x)^{e^x}\cot x + e^x(\text{sen } x)e^x\ln(\text{sen } x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\text{sen } x)^{e^x}[\cot x + \ln(\text{sen } x)]$$

# EJERCICIO 33

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \ln x^3$
2. $f(x) = \ln 4x^2$
3. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 2)$
4. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
5. $f(x) = \log x^6$
6. $f(x) = \log 5x^3$
7. $f(x) = \log_3 x$
8. $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$
9. $f(x) = \ln^4 x$
10. $f(x) = \ln^3 5x$
11. $y = x^2 \ln x$
12. $y = x \ln x^2$
13. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
14. $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$
15. $y = \ln\sqrt{b - ax}$
16. $f(x) = \ln x^2\sqrt{3x^2 - 1}$
17. $f(x) = \ln ax\sqrt{ax^2 - b}$
18. $y = \ln\left(\dfrac{3x - 5}{2x + 1}\right)$
19. $y = \ln\sqrt{\dfrac{cx - b}{cx + b}}$
20. $y = \ln \operatorname{sen} x$
21. $y = \ln \cos 5x$
22. $y = \ln(x^2 - 4)$
23. $y = \ln\sqrt{3x + 4}$
24. $y = \ln\left(\dfrac{2x - 3}{2x + 3}\right)$
25. $y = \ln\sqrt[3]{x^3 + 8}$
26. $y = \ln^2(\sqrt{x})$
27. $y = \ln[(6x + 4)(3x^2 + 2)]$
28. $y = \log_3\sqrt{\dfrac{1 - 2x}{1 + 2x}}$
29. $y = \log\,(5bx^3 - 3\sqrt{x})$
30. $y = x - \ln(e^x \cos x)$
31. $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
32. $y = x \ln x$
33. $y = \ln(\sec^2 2x \cdot \cos^3 2x)$
34. $y = \sqrt{\ln x}$
35. $y = \ln(\sec x + \tan x)$
36. $y = \ln\sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}$
37. $y = \ln(x \operatorname{sen} x)$
38. $y = x^3 \ln x^2$
39. $y = \ln\left(\tan\sqrt{x}\right)^3$
40. $y = \log\sqrt{x}$
41. $y = 2^{x^2 + 5x}$
42. $f(x) = b^{\sqrt{x}}$
43. $y = 3^{\ln x}$
44. $y = 5^{x \operatorname{sen} x}$
45. $y = x \cdot 2^{\ln x}$
46. $y = x \cdot 5^x$
47. $y = e^{x^2}$
48. $y = e^{3x^2 - 2x + 1}$

49. $y = e^{\sqrt{3x^2-1}}$
50. $y = e^{x \tan x}$
51. $y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{2x}{b}} - e^{-\frac{2x}{b}}\right)$
52. $y = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$
53. $f(x) = e^{4x}$
54. $f(x) = e^{5x^2}$
55. $f(x) = e^{3x-1}$
56. $f(x) = e^{\frac{x}{5}}$
57. $f(t) = \sqrt[3]{e^t}$
58. $f(x) = \sqrt[4]{e^x}$
59. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$
60. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
61. $f(\theta) = e^{\text{sen}^2 \theta}$
62. $f(x) = e^{\cos 2x}$
63. $y = e^{x \,\text{sen}\, x}$
64. $f(x) = 5^{3x}$
65. $f(x) = 7^{2x}$
66. $f(x) = 5^{x^2}$
67. $y = x^{2x}$
68. $y = x^{\cos x}$
69. $y = \sqrt[x]{x}$
70. $y = e^{\text{arc} \tan x}$
71. $y = \ln\left(\sqrt{xe^{2x}}\right)$
72. $y = xe^{\ln x^2}$
73. $y = \frac{e^x}{x+1}$
74. $y = \frac{xe^x}{\ln x^2}$
75. $y = \sqrt{\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}}$
76. $y = \sqrt{\frac{e^{\text{sen}\, x} + 1}{e^{\text{sen}\, x} - 1}}$
77. $y = \ln(\ln \text{sen}^2 ax)$
78. $y = e^{\ln \sqrt{e^x \text{sen}\, x}}$
79. $y = x^2 e^{\text{sen}\, x}$
80. $y = \frac{\ln \text{sen}^x x}{x}$
81. $y = \ln\left(3ax^2 \sqrt{x^2 - 4}\right)$
82. $y = \sqrt{x^2 + 9} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)$
83. $y = \frac{1}{4}\sec 2x \tan 2x + \frac{1}{4}\ln(\sec 2x + \tan 2x)$
84. $y = x \,\text{arc} \tan x - \ln\sqrt{1 + x^2}$
85. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)$
86. $y = x \,\text{arc} \sec x - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
87. $y = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)$
88. $y = x \,\text{arc} \cot x + \ln\sqrt{1 + x^2}$
89. $y = x \,\text{arc} \csc\frac{x}{2} + 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Derivadas de funciones implícitas

Una función implícita es una relación que se expresa en términos de $x$ y $y$, por ejemplo:

$$3x^3 - y + 5x = x^2; \qquad \text{sen } x = \cos(x - y); \qquad e^{x+y} = x; \qquad \ln(x + y) = \sqrt{x - y}$$

En una función implícita se derivan término a término los elementos de la igualdad respecto a la variable que se indica y al final se despeja la derivada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $3x^2 - 6xy + y^2 = 2x - y$?

**Solución**

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 6xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2x - y)$$

$$\frac{d3x^2}{dx} - \frac{d6xy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = \frac{d2x}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dx^2}{dx} - 6\frac{dxy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 2\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3(2x) - 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{dy}{dx}$$

$$6x - 6x\frac{dy}{dx} - 6y + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

Se agrupan los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$, y se despeja:

$$-6x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx}(-6x + 2y + 1) = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 6x + 6y}{1 - 6x + 2y}$$

Por lo regular, el resultado de la derivada de una función implícita se expresa en términos tanto de $x$ como de $y$.

Es común que en algunos casos la expresión $\frac{dy}{dx}$ se represente como $y'$.

2 Determina la derivada $y'$ de la función $\sqrt{x+y} = x - y$

**Solución**

Al derivar ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+y} = \frac{d}{dx}(x-y) \rightarrow \frac{\frac{d}{dx}(x+y)}{2\sqrt{x+y}} = \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x+y}} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

Se despeja $y'$ de la igualdad $\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} = 1 - y'$, y el resultado es:

$$1 + y' = 2\sqrt{x+y} - 2y'\sqrt{x+y} \rightarrow y' + 2y'\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y'\left(1+2\sqrt{x+y}\right) = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x+y}-1}{1+2\sqrt{x+y}}$$

3 Obtén la derivada $y'$ de la función $y = e^{x+y}$

**Solución**

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{x+y} \rightarrow y' = e^{x+y}\cdot\frac{d}{dx}(x+y) \rightarrow y' = e^{x+y}(1+y')$$

Se despeja $y'$ de la igualdad:

$$y' = e^{x+y} + y'e^{x+y} \rightarrow y' - y'e^{x+y} = e^{x+y} \rightarrow y'(1 - e^{x+y}) = e^{x+y}$$

Donde:

$$y' = \frac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}} \quad \text{o} \quad y' = \frac{y}{1-y}$$

4 Encuentra la derivada $y'$ de la función implícita $\text{sen}(x+y) = x$

**Solución**

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x+y) = \frac{dx}{dx} \rightarrow \cos(x+y)(1+y') = 1 \rightarrow \cos(x+y) + y'\cos(x+y) = 1$$

$$y'\cos(x+y) = 1 - \cos(x+y)$$

Donde, la derivada

$$y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{1}{\cos(x+y)} - \frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \sec(x+y) - 1$$

5 Obtén la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $x - \ln y = \ln x$

**Solución**

$$\frac{d}{dx}(x - \ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dx} - \frac{d \ln y}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x}$$

Se despeja la derivada de la igualdad:

$$-\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} - 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1-x}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{xy - y}{x}$$

6 Determina la derivada respecto a $x$ de la función $\cos(x + y) = \operatorname{sen}(x - y)$

**Solución**

$$\frac{d}{dx}\cos(x + y) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x - y)$$

$$-\operatorname{sen}(x + y)\frac{d}{dx}(x + y) = \cos(x - y)\frac{d}{dx}(x - y)$$

$$-\operatorname{sen}(x + y) \cdot (1 + y') = \cos(x - y) \cdot (1 - y')$$

$$-\operatorname{sen}(x + y) - y'\operatorname{sen}(x + y) = \cos(x - y) - y'\cos(x - y)$$

Se despeja la derivada:

$$y'\cos(x - y) - y'\operatorname{sen}(x + y) = \cos(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$$

$$y'[\cos(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)] = \cos(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$$

$$y' = \frac{\cos(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)}$$

7 Encuentra la derivada de la siguiente función implícita $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2a$

**Solución**

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(2a) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

## EJERCICIO 34

Deriva las siguientes funciones implícitas respecto a $x$:

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $2xy = 1$
3. $y^2 - 8x = 0$
4. $x^2 + 2y^2 + 5x - 2y - 1 = 0$
5. $3x^2 + 2xy - 6y^2 = 1$
6. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
7. $\frac{x + y}{x - y} = x$
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

9. $\sqrt[3]{xy}=2$
10. $y^3-2xy^2=x^3y+5x^2y^2-y$
11. $3x^3-2x^2y+5xy=y-3x$
12. $y\sqrt{x+y}=x$
13. $\sqrt{x+y}=xy$
14. $x=\dfrac{2x-3y}{2x+3y}$
15. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2x$
16. $y=\ln\sqrt{x\,y}$
17. $x^2y^2=e^{\ln(xy)}$
18. $\ln(\text{sen}(e^y))=x$
19. $\dfrac{e^y}{e^x+1}=3$
20. $\ln\dfrac{y}{x^2+1}=1$
21. $x+y=\ln(x-y)$
22. $\dfrac{e^{x^2}+e^{y^2}}{x^2+y^2}=1$
23. $3^{x^2+2y}=1$
24. $x^y=2$
25. $y=\text{arc tan}\,\dfrac{x}{y}$
26. $y\ \ln\ x-x\ \ln\ y-2=0$
27. $y^2=\ln(\ln x)^y$
28. $\ln(1+e^y)=e^x$
29. $\ln x^{\ln y}-x=0$
30. $xe^y-y=0$
31. $e^{\ln y}-xy=2$
32. $\text{sen}(e^{x+y})-e^{x+y}=x$
33. $e^{x\cos y}=3x$
34. $\text{sen}(x+a)-\cos(y-b)=ab$
35. $y-\cos x=\text{sen}\,y$
36. $\text{sen}^2(4x)+\cos^2(4y)=8$
37. $e^{\cos x}-e^{\text{sen}\,y}=\text{sen}\,y$
38. $\text{sen}(xy)-2x=3$
39. $\text{sen}\,x-\cos y-3=0$
40. $e^{\cos y}=\cos x$
41. $\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,y}=x$
42. $x\,\text{arc tan}\,y-y=0$
43. $y=\ln[\text{sen}(x+y)]$
44. $2^y-x-3=0$
45. $e^{\text{sen}\,y}+xy-2y=0$
46. $x^y-y^x=0$
47. $2+\text{sen}(x+y)=y+\cos(x+y)$
48. $\dfrac{y}{\tan xy}-x=2$
49. $y\,\text{arc cot}\,x-x-2=0$
50. $y\,\text{arc cos}(e^x)=\cos y$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior se obtienen al derivar una función $y = f(x)$, tantas veces como lo indique el orden requerido.

La derivada de una función se llama primera derivada y se denota con $y' = \frac{dy}{dx}$

La derivada de la derivada se llama segunda derivada y se denota con $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

El proceso de hallar derivadas, una tras otra, se llama derivadas sucesivas.

La enésima derivada de una función se denota con $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

### EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la función $y = \cos^3 x$

**Solución**

Se obtiene la primera derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos^3 x}{dx} = -3\cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Finalmente, se deriva el resultado anterior para obtener la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3\cos^2 x \operatorname{sen} x) = -3\cos^3 x + 6\operatorname{sen}^2 x\cos x$$

2 Determina $\frac{d^3y}{dx^3}$ de la función $y = \ln x$

**Solución**

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Se encuentran la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

Finalmente, el resultado es: $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$

3 Encuentra $\frac{d^4y}{dx^4}$ de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$

**Solución**

Se deriva sucesivamente la función, hasta llegar a la cuarta derivada:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x \qquad f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad f''(x) = 6x + 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^4(x) = 0$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - 3xy + y = 1$?

**Solución**

Se obtiene la primera derivada implícita: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3xy + y) = \frac{d}{dx}(1) \rightarrow 2x - 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + \frac{dy}{dx} = 0$

$$2x - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 3x) = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{1 - 3x}$$

La segunda derivada es: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y - 2x}{1 - 3x}\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left(3\frac{dy}{dx} - 2\right) - (3y - 2x)(-3)}{(1 - 3x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left[3\left(\frac{3y - 2x}{1 - 3x}\right) - 2\right] - (3y - 2x)(-3)}{(1 - 3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3y - 2x) - 2(1 - 3x) - (3y - 2x)(-3)}{(1 - 3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y - 6x - 2 + 6x + 9y - 6x}{(1 - 3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18y - 6x - 2}{(1 - 3x)^2}$$

5 Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - xy + y^2 = 2$

**Solución**

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2) \rightarrow 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Se obtiene la segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y - 2x}{2y - x}\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y - x)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right) - (y - 2x)\left(2\frac{dy}{dx} - 1\right)}{(2y - x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y - x)\left(\frac{-3y}{2y - x}\right) - (y - 2x)\left(\frac{-3x}{2y - x}\right)}{(2y - x)^2}$$

al simplificar se obtiene: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(2y - x)^3}$

pero $x^2 - xy + y^2 = 2$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(2)}{(2y - x)^3} = -\frac{12}{(2y - x)^3}$

# EJERCICIO 35

Realiza lo que se te indica:

1. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$ , si $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
2. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = 4x^2 - 6x + 2$
3. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{4x-1}{5x+3}$
4. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{ax+b}{ax-b}$
5. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = (ax + b)^4$
6. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = \text{sen } x + \cos x$
7. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \ln(\text{sen } x)$
8. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = \frac{3}{(x-1)^2}$
9. Encuentra $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \tan e^x$
10. ¿Cuál es la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x - 3xy + 2y = 0$?
11. Obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \sqrt{9-x^2}$
12. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x^2 + y^2 = 16$
13. Obtén $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = x \ln x$
14. Calcula la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $\text{sen } x + \cos y = 0$
15. Si $y = x^2 \text{ sen } x$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$
16. Si $y = \frac{x-1}{x+1}$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$ ; $\frac{d^ny}{dx^n}$
17. Encuentra $y''$ de $xy + y - 1 = 0$
18. Si $y = \ln(\cos x)$, determina $\frac{d^3y}{dx^3}$
19. Si $f(x) = \frac{1}{1+\text{sen } x}$, obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$
20. Determina $y''$ y $y'''$ de $x^2 + xy + y^2 = 2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Derivadas de ecuaciones polares

Sea $\rho = f(\theta)$ una función en coordenadas polares. La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(r, \theta)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina $\frac{dy}{dx}$, para la ecuación polar $\rho = 4\cos 3\theta$

**Solución**

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\operatorname{sen}\theta + [4\cos 3\theta]\cos\theta}{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\cos\theta - [4\cos 3\theta]\operatorname{sen}\theta} = \frac{-12\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos 3\theta\cos\theta}{-12\operatorname{sen}3\theta\cos\theta - 4\cos 3\theta\operatorname{sen}\theta} = \frac{3\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta - \cos 3\theta\cos\theta}{3\operatorname{sen}3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta}$$

2 Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$

**Solución**

Al utilizar el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2\theta + \cos\theta}{\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

Se evalúa $\rho'$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$m = \frac{\operatorname{sen}2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{0 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} - 1$$

# EJERCICIO 36

Determina la derivada de las siguientes ecuaciones polares:

1. $\rho = 2 \text{ sen } \theta + 3 \cos \theta$
2. $\rho = 4 \csc \theta$
3. $\rho = a \text{ sen } 5\theta$
4. $\rho = \sqrt{\text{sen } 2\theta}$
5. $\rho = 1 + \cos \theta$
6. $\rho = \dfrac{a}{1 - \cos \theta}$
7. $\rho = e^{a\theta}$
8. $\rho = 4 \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$
9. $\rho = 3 - 2 \cos \theta$
10. $\rho = 4\sqrt{\theta}$

En las siguientes ecuaciones polares, encuentra la pendiente en el punto indicado:

11. $\rho = 2 \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{8}$
12. $\rho = \text{sen } \theta - \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{3}$
13. $\rho = \tan \theta, \theta = \dfrac{\pi}{4}$
14. $\rho = \dfrac{2}{a - \text{sen } \theta}, \theta = \pi$
15. $\rho = 2\sqrt{\cos \frac{\theta}{2}}, \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Derivada de ecuaciones paramétricas

La curva $y = f(x)$ se define por las ecuaciones paramétricas $x = h(t)$ y $y = g(t)$; entonces, la pendiente de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}g(t)}{\frac{d}{dt}h(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ con } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Calcula $\dfrac{dy}{dx}$ para la función cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2 + 3t, y = \dfrac{1}{t+1}$

**Solución**

Se determinan las derivadas respecto a $t$:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{(t+1)^2}}{2t+3} = -\frac{1}{(2t+3)(t+1)^2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente en el punto $(x, y)$ a la curva, si sus ecuaciones paramétricas son $x = t - 2$, $y = \frac{1}{8}t^2 + 1$ en el intervalo $-3 \leq t \leq 3$, para el punto correspondiente a $t = 2$

**Solución**

Para aplicar el teorema se obtienen las derivadas: $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8}(t^2)+1\right] = \frac{1}{8}(2t) = \frac{2t}{8} = \frac{t}{4} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-2) = 1$$

Al sustituir los resultados, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{4}}{1} = \frac{t}{4}$$

Se evalúa la derivada en $t = 2$, para obtener el valor de la pendiente:

$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

## EJERCICIO 37

Deriva las siguientes funciones paramétricas:

1. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$, $\quad t \in R$

2. $\begin{cases} x = 3t^3 - 5 \\ y = \dfrac{t+2}{4} \end{cases}$, $\quad 1 \leq t \leq 3$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - t} \\ y = t \end{cases}$, $\quad t \in R$

4. $\begin{cases} x = b \sec \theta \\ y = a \tan \theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t\sqrt{t-1} \end{cases}$, $\quad t \in R$

6. $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \\ y = \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t^2 + 1}{t + 1} \end{cases}$, $\quad t \in R$

8. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{\theta}{2} \\ y = \text{sen } 2\theta \end{cases}$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$

9. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = \dfrac{4}{t^2} \end{cases}$, $\quad -3 < t < 3$

10. $\begin{cases} x = 3 + 2\tan\theta \\ y = 4 + \csc\theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En las siguientes ecuaciones paramétricas obtén el valor de la pendiente en el punto indicado:

11. $\begin{cases} x = 1 + \text{sen } t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi,$ $\quad t = \dfrac{\pi}{3}$

12. $\begin{cases} x = mt^2 + b \\ y = nt + a \end{cases}$ $\quad m \leq t \leq n,$ $\quad t = 2mn$

13. $\begin{cases} x = b(2 - 3t) \\ y = at^2 \end{cases}$ $\quad 3a < t < 2b,$ $\quad t = \dfrac{b}{2a}$

14. $\begin{cases} x = 3t - \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq \pi,$ $\quad t = \pi$

15. $\begin{cases} x = 2\cot^2\theta \\ y = 4\cot\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

16. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = t - t^2 \end{cases}$ $\quad -3 < t < 3,$ $\quad t = 1$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# CAPÍTULO 5

## APLICACIONES DE LA DERIVADA

**Reseña HISTÓRICA**

L'Hôpital escribió el primer libro de cálculo en 1696, en el cual eran obvias las influencias de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz.

L'Hôpital sirvió como oficial de caballería, pero tuvo que retirarse a causa de ser corto de vista. Desde ese tiempo dirigió su atención hacia las matemáticas. L'Hôpital aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli en 1691.

L'Hôpital era un excelente matemático, en 1692 su fama está basada en su libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.*

En este libro publicó la regla que ahora se conoce como regla de L'Hôpital, para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero.

Guillaume François Antoine marqués de L`Hôpital
(1661-1704)

## Rectas tangente y normal a una curva

Analicemos primero algunas definiciones:

### Tangente

Recta que toca a una curva en un punto.

### Normal

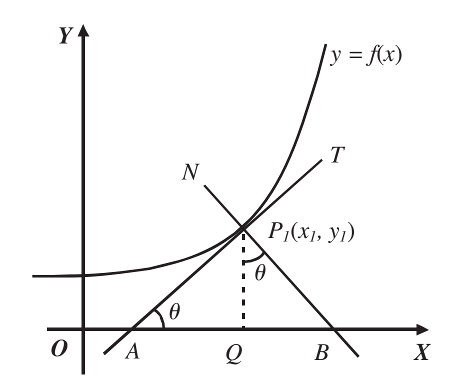
Recta perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia.
$T$: recta tangente
$N$: recta normal

$\overline{AP_1}$ : longitud de la tangente

$\overline{P_1B}$ : longitud de la normal

$\overline{AQ}$ : longitud de la subtangente

$\overline{QB}$ : longitud de la subnormal




- ***Longitud de la subtangente***. En el triángulo $AQP_1$ la $\tan\theta = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\overline{AQ}}$, pero $\overline{P_1Q} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, al despejar $\overline{AQ}$ se obtiene, $\overline{AQ} = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\tan\theta}$, por consiguiente:

$$\overline{AQ} = \frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}$$

- ***Longitud de la subnormal***. En el triángulo $BQP_1$ la $\tan\theta = \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QP_1}}$, pero $\overline{QP_1} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, por tanto, al despejar $\overline{QB}$ se obtiene, $\overline{QB} = \overline{QP_1} \cdot \tan\theta$, por consiguiente:

$$\overline{QB} = y_1\frac{dy}{dx}$$

- ***Longitud de la tangente***. Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta tangente con el eje $X$.
  En el triángulo $AQP_1$ por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{AP_1})^2 = (\overline{AQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero, $\overline{AQ} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}$ y $\overline{QP_1} = y_1$, por consiguiente:

$$\overline{AP_1}^2 = \left(\frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\right)^2 + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{AP_1}$ se obtiene, $\overline{AP_1} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, por tanto,

$$\overline{AP_1} = \frac{y_1}{y'}\sqrt{1+y'^2}$$

- ***Longitud de la normal***. Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta normal con el eje $X$.
  En el triángulo $BQP_1$ por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{BP_1})^2 = (\overline{BQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero $\overline{BQ} = y_1 \cdot \dfrac{dy}{dx}$ y $\overline{QP_1} = y_1$

$$(\overline{BP_1})^2 = \left(y_1 \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2 + (y_1)^2 = (y_1)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{BP_1}$, se obtiene, $\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, por consiguiente:

$$\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+y'^2}$$

## Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$ está dada por:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

## Ecuación de la recta normal

La ecuación de la recta normal a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ está determinada por:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + y = x - 4$ en el punto $(1, -2)$?

**Solución**

Se derivan ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d(x^2+xy+y)}{dx}=\frac{d(x-4)}{dx} \quad \rightarrow \quad 2x+\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+\frac{dy}{dx}=1 \quad \rightarrow \quad 2x+x\frac{dy}{dx}+y+\frac{dy}{dx}=1$$

Se despeja $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x-y}{1+x}\text{, por definición } m_T=\frac{1-2x-y}{1+x}$$

Al sustituir las coordenadas del punto de tangencia en la pendiente, se obtiene:

$$m=\frac{1-2(1)-(-2)}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente a la curva $\delta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

**Solución**

Al derivar la ecuación de la curva:

$$\frac{d\delta}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

se obtiene que: $m_T=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Se sustituye el punto en la pendiente:

$$m=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 Encuentra la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal a la curva $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ en el punto $P(1, 1)$.

**Solución**

Se deriva la función y se evalúa en el punto para encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto.

$$f'(x) = -2x + 6$$

Si $x = 1$, entonces,

$$f'(1) = -2(1) + 6 = -2 + 6 = 4$$

Por tanto,

subtangente: $\dfrac{y_1}{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{4}$ subnormal: $y_1\dfrac{dy}{dx} = (1)(4) = 4$

tangente: $\dfrac{y_1}{\dfrac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{17}$ normal: $y_1\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{17}$

4 ●●● Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $xy + y - 1 = 0$ en el punto $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$

**Solución**

Al derivar la función se obtiene $y' = -\dfrac{y}{x+1}$, por definición $m_T = -\dfrac{y}{x+1}$

Se evalúa en el punto $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$, $m_T = -\dfrac{\dfrac{1}{4}}{3+1} = -\dfrac{1}{16}$

Ecuación de la tangente:

Se obtiene con $P\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$ y $m_T = -\dfrac{1}{16}$, se sustituye en $y - y_1 = \dfrac{dy}{dx}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x-3) \rightarrow 16y - 4 = -x + 3 \rightarrow x + 16y - 7 = 0$$

Ecuación de la normal:

Se obtiene con $P\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$ y $m_N = -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = 16$, se sustituye en $y - y_1 = -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = 16(x-3) \rightarrow 4y - 1 = 64x - 192 \rightarrow 64x - 4y - 191 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas tangente y normal son: $x + 16y - 7 = 0$ y $64x - 4y - 191 = 0$

## EJERCICIO 38

Calcula la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal de las curvas dadas en el punto indicado.

1. $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$
2. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ en $x = -2$
3. $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto $(-1, 12)$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ en el punto $(2, 7)$
5. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el punto $(2, 3)$
6. $f(x) = \sqrt{-x}$ en el punto $(-9, 3)$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}$ en el punto $(1, 2)$
8. $y = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$

9. $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 3$

10. $x^2y - y - 2 = 0$ en el punto $\left(2, \frac{2}{3}\right)$

Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva en el punto indicado:

11. $y = x^2 + 5$ en el punto $(-2, 9)$

12. $y = x^2 - x + 1$ en el punto $(0, 1)$

13. $y = 4x^2 - 4x + 1$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

14. $y = x^3 - x^2$ en el punto $(2, 4)$

15. $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 9$ en el punto $(-1, -4)$

16. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el punto $\left(\sqrt{5}, 2\right)$

17. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto $(3, 2)$

18. $f(x) = \frac{2}{x+1}$ en el punto $(0, 2)$

19. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

20. $y = \cos x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

21. $y = \tan x + 2$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$

22. $x^2 - y^2 - 12 = 0$ en el punto $(4, 2)$

23. $xy = 1$ en el punto $(1, 1)$

24. $x^3 + 2xy - 4 = 0$ en el punto de abscisa $x = 1$

25. $x^2y^2 - 4y + 1 = 0$ en el punto de abscisa $x = 2$

26. $\sqrt{x + y} = x + 1$ en el punto de abscisa $x = 3$

27. $f(x) = \ln x$ en el punto de abscisa $x = e$

28. $xy + x - 2 = 0$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

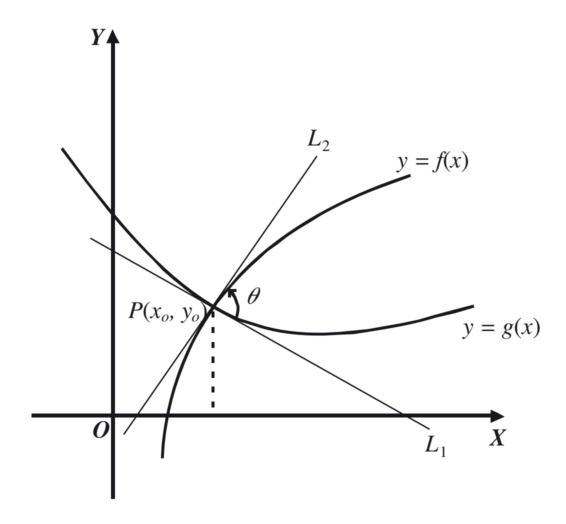
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ángulo entre dos curvas

Sea $P(x_o, y_o)$ el punto de intersección entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, entonces el ángulo $\theta$ entre las curvas se obtiene con:

$$\tan\theta = \frac{f'(x_o) - g'(x_o)}{1 + f'(x_o)\cdot g'(x_o)}$$

Donde $f'(x_o)$ es la pendiente de la recta $L_2$ y $g'(x_o)$ es la pendiente de la recta $L_1$




EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el ángulo agudo formado por las curvas $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x^2$ en el punto de intersección, cuya abscisa es $x = \sqrt{2}$

**Solución**

Se obtienen las derivadas de las funciones:

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = x^2$$

$$f'(x) = -2x \qquad g'(x) = 2x$$

Se evalúa la abscisa $x = \sqrt{2}$ en las pendientes (derivadas)

$$f'(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \qquad g'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Se aplica la fórmula, entonces;

$$\tan\theta = \frac{f'\left(\sqrt{2}\right) - g'\left(\sqrt{2}\right)}{1 + f'\left(\sqrt{2}\right)g'\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{1 + \left(-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)} = -\frac{4\sqrt{2}}{1-8} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Al despejar $\theta$

$$\theta = \text{arc}\tan\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

Por tanto:

$$\theta = 38°\ 56'\ 32''$$

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos formados por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$ en los puntos $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$?

**Solución**

Paso I:
Se obtienen las pendientes de las curvas al derivar las ecuaciones y evaluar los puntos dados:

De la curva $x^2 + y^2 = 4$, $y' = -\frac{x}{y}$ y de la curva $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$, $y' = \frac{x+3}{y}$

En el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

En el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

Paso II:
Se obtiene el ángulo al sustituir el valor de las pendientes en la fórmula.

Para el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Por consiguiente: $\theta = 19° \, 6'$

Para el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Finalmente: $\theta = 160° \, 54'$

3 Encuentra la medida del ángulo agudo formado por las curvas $x^2 + y^2 - 8 = 0$ y $y^2 - 2x = 0$

**Solución**

Se obtienen las intersecciones de las curvas mediante un sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0;\ y^2 = 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x + 4)(x - 2) = 0$$
$$x = -4,\ x = 2$$

Luego, si $x = 2$ entonces $y = \pm 2$ que resultan en los puntos (2, 2) y (2, −2)
Se obtienen las derivadas de cada una de las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0 \qquad y^2 - 2x = 0$$
$$2x + 2yy' = 0 \qquad 2yy' - 2 = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y} \qquad y' = \frac{1}{y}$$

Se realiza la evaluación en los puntos (2, 2) y (2, −2)

Para el punto (2, 2) $\rightarrow$ $y_1' = -\frac{2}{2} = -1;\ y_2' = \frac{1}{2}$

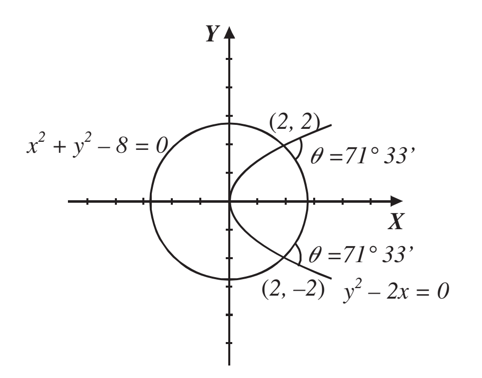
Luego:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1+\frac{1}{2}(-1)} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3;\ \text{donde } \theta = \text{arc tan}(3) = 71°\ 33'$$

Para el punto (2, −2) $\rightarrow$ $y_2' = -\frac{2}{-2} = 1;\ y_1' = -\frac{1}{2}$

Luego,

$$\tan\theta = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+(1)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3;\ \text{donde } \theta = \text{arc tan}(3) = 71°\ 33'$$




## EJERCICIO 39

Determina la medida del ángulo agudo y obtuso que forman las curvas dadas en el punto indicado:

1. $y = x^2 + 1$ ; $y = \sqrt{x+1}$ en el punto $(0, 1)$
2. $y = \frac{4}{9}x^2$ ; $y = \sqrt{25 - x^2}$ en el punto $(3, 4)$
3. $y = \sqrt{13 - x^2}$ ; $y = \sqrt{18 - (x+5)^2}$ en el punto $(-2, 3)$
4. $x^2 - y^2 - 2 = 0$ ; $y^2 - x = 0$ en el punto $\left(2, \sqrt{2}\right)$
5. $3x^2 + 5y = 0$ ; $2x + 5y + 1 = 0$ en el punto $\left(1, -\frac{3}{5}\right)$
6. $xy = 1$ ; $y = \frac{x-1}{x}$ en el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$
7. $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ; $y^2 - 4x = 0$ en el punto de abscisa 1
8. Determina la medida del ángulo obtuso que forma $x^2 + 3y^2 - 13 = 0$ y $y^2 - 4x = 0$

Calcula la medida del ángulo agudo que forman las curvas dadas:

9. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ ; $4y^2 - 9x = 0$

10. $xy - x - 2 = 0$ ; $xy - 1 = 0$

11. $x = \sqrt{2y}$ ; $y = 2(x+2)^2$

12. $y = x^2 + x$ ; $y = -x^2 + 5x$

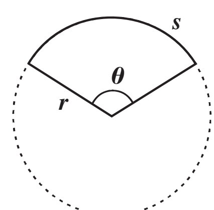
13. $y^2 = x + 1$ ; $y^2 + 2x - 4 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Curvatura

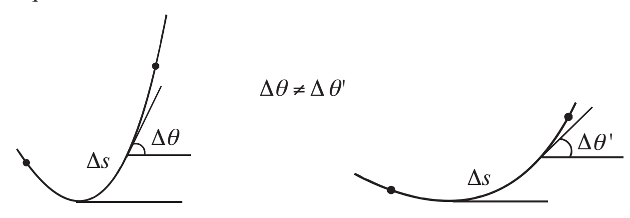
### Radio de curvatura

En geometría plana la longitud de un segmento circular está dada por la fórmula: $s = r \cdot \theta \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{s}{\theta}$




En la figura se observa que $s$ cambia cuando $\theta$ cambia.

En una curva cualquiera, al tomar un segmento muy pequeño formado por dos puntos de la curva y al relacionar la fórmula anterior se tiene que:




De la fórmula anterior se define $\Delta r$ como:

$$\Delta r = \frac{\Delta s}{\Delta \theta}$$

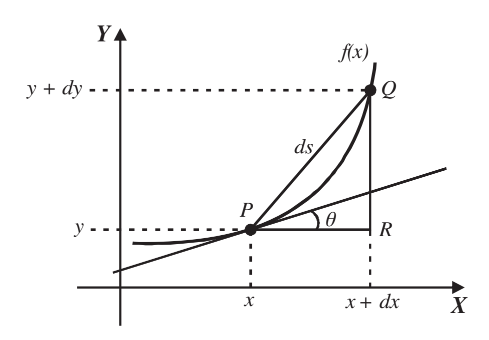
Luego, si la longitud $\Delta s$ es cada vez más pequeña, es decir, tiende a cero, el *radio de curvatura* se define como el siguiente límite:

$$r = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \theta} = \frac{ds}{d\theta} \quad \rightarrow \quad r = \frac{ds}{d\theta}$$

En la figura se tienen dos puntos, $P$ y $Q$, de la curva, muy próximos entre sí, en cada punto se traza una recta tangente y su normal. Al punto de intersección entre las normales se le llama *centro de curvatura* y a la distancia del centro a cualquiera de los puntos $P$ y $Q$ se le llama *radio de curvatura*.

La expresión $\frac{1}{r}=\frac{d\theta}{ds}$ recibe el nombre de *curvatura*.

Para determinar la fórmula que permita calcular el radio de curvatura se tiene la siguiente figura.




En la función $f(x)$ se tienen los puntos $P$ y $Q$ infinitamente muy próximos, de manera que la longitud del segmento circular $ds$ sea igual a la longitud del segmento $PQ$; entonces, de la representación geométrica de la derivada se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta \;\rightarrow\; \theta=\text{arc}\tan\frac{dy}{dx}$$

Del triángulo $PQR$ y el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\left[1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$$

Luego,

$$ds=r\cdot d\theta \;\rightarrow\; r=\frac{ds}{d\theta}$$

$$r=\frac{ds}{d\theta}\;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{d\,\text{arc}\tan\frac{dy}{dx}}\;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\;\rightarrow\; r=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

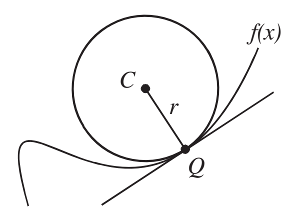
Finalmente, la fórmula para determinar el radio de curvatura es:

$$r=\frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}\quad \text{o}\quad r=\frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|}$$

La longitud del radio de curvatura es una cantidad positiva.

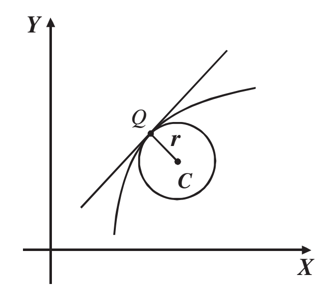
## Círculo de curvatura

Es una curva dada en un punto de tangencia a la circunferencia, que tiene de centro el centro de curvatura y de radio el radio de curvatura y que pasa por un punto de tangencia, también se le conoce como circunferencia osculatriz o círculo osculador.




## Centro de curvatura

Para determinar la fórmula que permita calcular el centro de curvatura se tiene la siguiente figura.




Donde:

$C(\alpha, \beta)$: centro de curvatura

$Q(x, y)$: punto de la curva

$r$: radio de curvatura

Se obtiene la ecuación de la recta normal de la recta tangente en el punto $Q$.

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x)$$

Se obtiene la ecuación de la circunferencia de centro el punto $C(\alpha, \beta)$, radio $r$ y que pasa por el punto $Q(x, y)$.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right), \ \beta = y + \left(\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)$$

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}\right), \ \beta = y + \left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el radio de curvatura y la curvatura de la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, 4)

**Solución**

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la función dada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

El punto se evalúa en cada derivada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{3^2 + 4^2}{4^3} = -\frac{25}{64}$$

Los valores que se obtienen se sustituyen en la fórmula de radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1 + (y')^2\right]^3}}{|y''|} \rightarrow r = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^3}}{\left|-\frac{25}{64}\right|} \rightarrow r = \frac{\frac{125}{64}}{\frac{25}{64}} \rightarrow r = 5$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 5$$

Luego, el valor de la curvatura se obtiene con la expresión:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

Finalmente, el valor de la curvatura es:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{5}$$

2 Determina el radio y el centro de curvatura de curva $y^2 = -8x$, en el punto $(-2, 4)$

**Solución**

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la curva y se evalúa el punto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{y^3} = -\frac{16}{(4)^3} = -\frac{1}{4}$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1+(-1)^2\right]^3}}{\left|-\frac{1}{4}\right|} \rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{4}} \rightarrow r = 8\sqrt{2}$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 8\sqrt{2}$$

Luego, el punto $(-2, 4)$ y los valores de las derivadas, se sustituyen en las fórmulas que determinan las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}\right) \rightarrow \alpha = -2 - \left(\frac{-1\left[1+(-1)^2\right]}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \alpha = -2 - 8 = -10$$

$$\beta = y + \left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right) \rightarrow \beta = 4 + \left(\frac{1+(-1)^2}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \beta = 4 - 8 = -4$$

Por tanto, las coordenadas del centro de curvatura son el punto $(-10, -4)$

## Radio de curvatura en coordenadas paramétricas

Dadas las ecuaciones de una curva en coordenadas paramétricas.

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\right]^3}{\left|\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right|} \rightarrow r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right]^3}{\left|x'\cdot y'' - y'\cdot x''\right|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

3 Determina el radio de curvatura de la elipse $x = 2 \cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$ en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$

**Solución**

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de cada ecuación y se evalúa $t = \frac{\pi}{2}$ en cada una de ellas.

$$x = 2\cos t \;\rightarrow\; x' = -2 \operatorname{sen} t \;\rightarrow\; x' = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(1) = 2$$

$$x'' = -2 \cos t \;\rightarrow\; x'' = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(0) = 0$$

$$y = 3 \operatorname{sen} t \;\rightarrow\; y' = 3\cos t \;\rightarrow\; y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3(0) = 0$$

$$y'' = -3 \operatorname{sen} t \;\rightarrow\; y'' = -3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3(1) = -3$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura:

$$r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right]^3}{\left|x' \cdot y'' - y' \cdot x''\right|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{(2)^2 + (0)^2}\right]^3}{\left|(2)(-3) - (0)(0)\right|} \;\rightarrow\; r = \frac{8}{|-6|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Por consiguiente, el radio de curvatura de la elipse en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$ es:

$$r = \frac{4}{3}$$

## Radio de curvatura en coordenadas polares

Dada la curva con ecuación de la forma:

$$\rho = f(\theta)$$

Se tiene que:

$$x = \rho \cos \theta \;,\; y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Si se sustituye $\rho = f(\theta)$ en estas últimas ecuaciones, se obtiene:

$$x = f(\theta) \cos \theta \;,\; y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\right]^3}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho \cdot \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{\rho + (\rho')^2}\right]^3}{\left|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''\right|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

4 Determina el radio de curvatura de la curva $\rho = \cos 2\theta$, en el punto correspondiente a $\theta = \pi$

**Solución**

Se determinan la primera y la segunda derivadas de la función dada y se evalúa $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\rho = \cos 2\theta \rightarrow \rho = \cos 2(\pi) \rightarrow \rho = 1$$

$$\rho' = -2 \text{ sen } 2\theta \rightarrow \rho' = -2 \text{ sen } 2(\pi) \rightarrow \rho' = 0$$

$$\rho'' = -4 \cos 2\pi \rightarrow \rho'' = -4 \cos 2(\pi) \rightarrow \rho'' = -4$$

Los valores se sustituyen en la fórmula y se simplifican las operaciones.

$$r = \frac{\left[\sqrt{1+(0)^2}\right]^3}{\left|(1)^2 + 2(0)^2 - (1)(-4)\right|} = \frac{\left[\sqrt{1}\right]^3}{\left|1+0+4\right|} = \frac{1}{|5|} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, el valor del radio de curvatura es:

$$r = \frac{1}{5}$$

## EJERCICIO 40

Determina el radio de curvatura y la curvatura de las curvas en el punto dado:

1. $x^2 - y^2 = -3$ $(1, 2)$
2. $xy + y + 4 = 0$ $(3, -1)$
3. $x^2 + 4y = 0$ $(2, -1)$
4. $y = x^3$ $(1, 1)$
5. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}$ $t = \pi$
6. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t^2 \end{cases}$ $t = 2$
7. $\rho = \cos \theta$ $\theta = \frac{\pi}{2}$
8. $\rho = \text{sen} \frac{\theta}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$

Determina el centro de curvatura de las curvas en el punto dado:

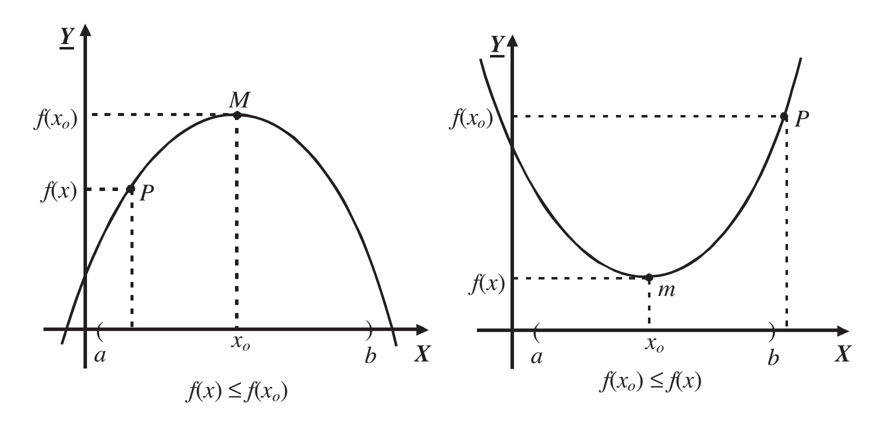
9. $x^2 - 4y = 0$ $(2, 1)$
10. $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ $(-2, 1)$
11. $y = \text{sen } x$ $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
12. $y - e^x = 0$ $(0, 1)$
13. $y = \sqrt{x+1}$ $(3, 2)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

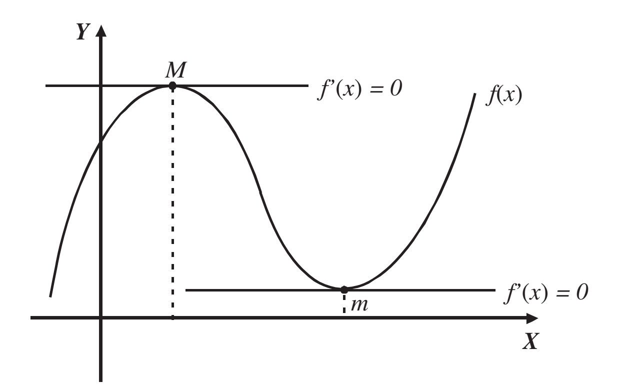
## Máximos y mínimos de una función

**Definición**

1. Se dice que una función $f(x)$ tiene un máximo local $M$ en $x = x_o$, si $f(x_o) \geq f(x)$ para toda $x$ en un intervalo $(a, b)$ tal que $x_o$, pertenezca a dicho intervalo.
2. Se dice que una función $f(x)$ tiene un mínimo local $m$ en $x = x_o$, si $f(x_o) \leq f(x)$ para toda $x$ en un intervalo $(a, b)$ tal que $x_o$, pertenezca a dicho intervalo.




Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo local en $x_o$, entonces la pendiente de la recta tangente (derivada) en dicho punto es igual a cero.




Donde:

$M$ = punto máximo

$m$ = punto mínimo

### Criterio de la primera derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

*a*) Si $f'(x) > 0$, para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) < 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores positivos a negativos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor máximo local.

*b*) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) > 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores negativos a positivos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor mínimo local.

*c*) Si para toda $x \in (a, b)$ y $f'(x)$ tiene el mismo signo, entonces $f(x)$ no tiene valor máximo ni mínimo local.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$, utiliza el criterio de la primera derivada.

**Solución**

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x - 12$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = 6x - 12; \qquad 6x - 12 = 0 \qquad \text{donde} \qquad x = 2$$

Este resultado recibe el nombre de valor o punto crítico.

Paso III
Se da un valor menor y uno mayor próximo al valor crítico y se evalúan en la derivada.
Para $x = 2$ se toman los valores 1 y 3

$$f'(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$$

El cambio de signo es de negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$.

Paso IV
El valor crítico se evalúa en la función:

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 15$$
$$f(2) = 3$$

Por consiguiente, el punto mínimo es (2, 3)

2 Obtén los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$

**Solución**

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 6x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

Los valores críticos son:

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Paso III
Se dan valores menores y mayores próximos a los valores críticos y se evalúan en la derivada.

Para $x = -1$, se toman los valores $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-3}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0 \quad \text{y} \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-1}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0$$

La derivada cambia de signo positivo a negativo, entonces la función tiene un valor máximo en $x = -1$

Para $x = 2$ se toman los valores $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{5}{2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0 \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{5}{2}\right) = 6\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{5}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0$$

La derivada cambia de signo negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$

Paso IV
Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -1$, $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 15 = 22$

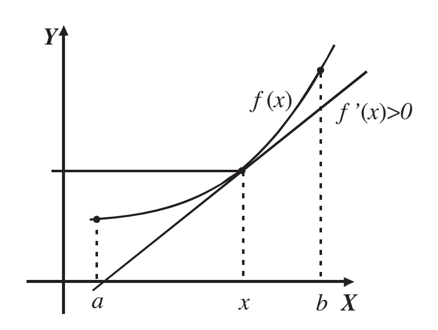
Para $x = 2$, $f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 15 = -5$

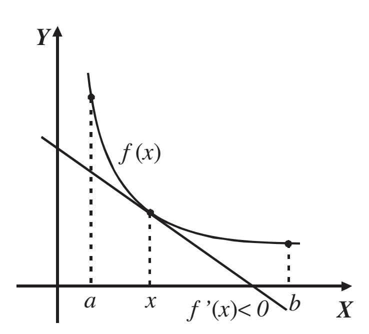
Por tanto, el punto máximo es $(-1, 22)$ y el punto mínimo es $(2, -5)$

*Intervalos donde crece o decrece una función*

**Definición**

1. Una función es creciente en el intervalo $(a, b)$, si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$
2. Una función es decreciente en el intervalo $(a, b)$, si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$




Observación 1. Existen funciones siempre crecientes, pero su derivada se anula para algún valor de $x$.

## Ejemplo

La función $f(x) = 1 + (x - 2)^3$ es siempre creciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = 3(x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad f(2) = 3(2 - 2)^2 = 3(0) = 0$$

Observación 2. Existen funciones siempre decrecientes, pero su derivada se anula para algún valor de $x$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función $f(x) = 1 - (x - 2)^3$ es siempre decreciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = -3(x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad f(2) = -3(2 - 2)^2 = -3(0) = 0$$

2 Indica los intervalos donde la función $f(x)= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ es creciente y decreciente.

**Solución**

*a*) Intervalo donde $f(x)$ es creciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función: $f'(x) = x^2 - x - 6$

Paso II
Por definición $f'(x) > 0$

$$x^2 - x - 6 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtienen los intervalos:

$$(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Donde la función es creciente.

*b*) Intervalo donde $f(x)$ es decreciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

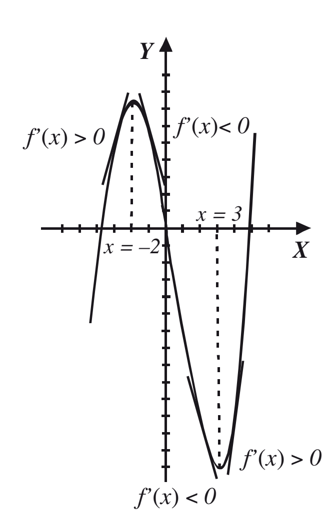
Paso II
Por definición $f'(x) < 0$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene el intervalo:

$$(-2, 3)$$

Donde la función es decreciente.
Gráfica:



# EJERCICIO 41

Encuentra los máximos, los mínimos y los intervalos para los que la función es creciente o decreciente.

1. $f(x)=x^2-6x+5$
2. $f(x)=-3x^2+5x-4$
3. $f(x)=x^3-3x$
4. $f(x)=x^3-6x^2$
5. $f(x)=4x^3+3x^2-6x$
6. $f(x)=4x^3-x^2-4x+3$
7. $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-5$
8. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$
9. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+4$
10. $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+1$
11. $y=\frac{3}{x^2-2x}$
12. $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$
13. $f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$
14. $y=\frac{x^2-1}{4-x^2}$
15. $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Criterio de la segunda derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

*a*) Dada $y=f(x)$ con $f'(x_o)=0$, si $f''(x_o)>0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto mínimo.
*b*) Dada $y=f(x)$ con $f'(x_o)=0$, si $f''(x_o)<0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto máximo.

### Ejemplo

Determina con el criterio de la segunda derivada los puntos máximos y mínimos de la función

$$f(x)=x^3-3x^2-24x-10$$

### Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x)=3x^2-6x-24$$

Paso II
Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación:

$$3x^2-6x-24=0$$
$$x^2-2x-8=0$$
$$(x-4)(x+2)=0$$

Los valores críticos son:

$$x=4 \quad \text{y} \quad x=-2$$

Paso III

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa con los valores críticos:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Para $x = -2$

$$f''(-2) = 6(-2) - 6 = -18 < 0$$

Por tanto, la función tiene un valor máximo en $x = -2$

Para $x = 4$

$$f''(4) = 6(4) - 6 = 18 > 0$$

Por tanto, la función tiene un valor mínimo en $x = 4$

Paso IV

Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -2$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 10 = 18$$

Para $x = 4$

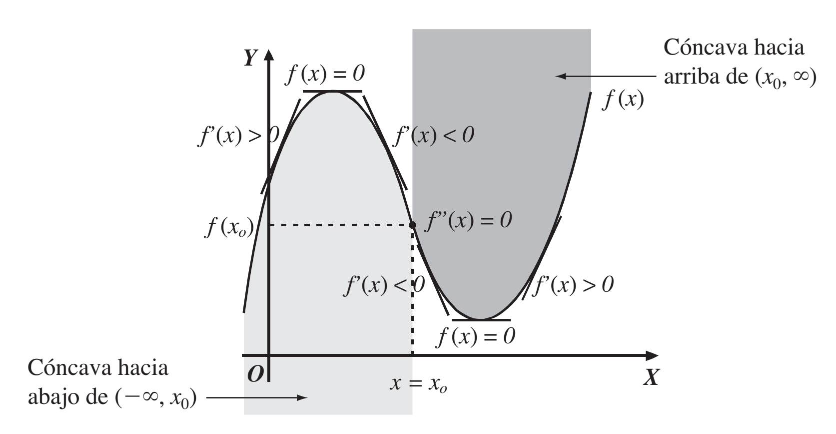
$$f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 10 = -90$$

Entonces, la función tiene un punto máximo en $(-2, 18)$ y un punto mínimo en $(4, -90)$

### *Concavidad y punto de inflexión de una función*

La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba cuando las rectas tangentes a dicha función están por debajo de la curva.

La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo cuando las rectas tangentes a dicha función están por arriba de la curva.




Donde $(x_o, f(x_o))$ es el punto de inflexión.

Prueba de concavidad:

1. Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo $(a, b)$ si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$
2. Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo $(a, b)$ si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$
3. Una función tiene un punto de inflexión en $(x_o, f(x_o))$ si $f''(x_o) = 0$

## Ejemplo

Determina las coordenadas del punto de inflexión y los intervalos de concavidad para la función:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 60x$$

**Solución**

Punto de inflexión

Paso I
Se obtiene la segunda derivada:

$$f'(x) = -6x^2 + 18x + 60 \quad \rightarrow \quad f''(x) = -12x + 18$$

Paso II
La segunda derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$-12x + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Paso III
Se evalúa la función con $x = \frac{3}{2}$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 60\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{207}{2}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto de inflexión son $\left(\frac{3}{2}, \frac{207}{2}\right)$

*Intervalos de concavidad*

Intervalo donde la función es cóncava hacia arriba.
Por definición $f''(x) > 0$, entonces:

$$-12x + 18 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x < \frac{3}{2}$, por tanto, el intervalo donde la función es cóncava hacia arriba es: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo.
Por definición $f''(x) < 0$

$$-12x + 18 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x > \frac{3}{2}$, entonces, el intervalo donde la función es cóncava hacia abajo es: $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

# EJERCICIO 42

Dadas las siguientes funciones, determina:

*a*) Puntos máximos y mínimos.
*b*) Intervalos donde la función crece y decrece.
*c*) Intervalos de concavidad.
*d*) Puntos de inflexión.
*e*) Gráfica.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$
2. $f(x) = -x^2 + 4x + 6$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 24$
5. $f(x) = x^4 - 4x^3$
6. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$
8. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 36}$
10. $f(x) = x^3(x + 2)$
11. $f(x) = \text{sen}(2x)$ en $[0, \pi]$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Optimización

Los métodos para obtener puntos máximos y mínimos de una función son una herramienta que se emplea para solucionar problemas prácticos donde se va a optimizar una variable.

Hay una gran variedad de problemas, por lo que resulta difícil dar reglas específicas para resolverlos. No obstante se dan algunas sugerencias:

- Leer cuidadosamente el problema y pensar en los hechos que se presentan y las variables desconocidas.
- Hacer un diagrama o dibujo geométrico que incluya los datos.
- Relacionar los datos con las variables desconocidas, hallando la función a maximizar o minimizar.
- Encontrar los valores críticos y determinar cuál corresponde a un máximo o a un mínimo.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, sea un valor máximo.

**Solución**

Sean $x$ y $y$ los números buscados, entonces:

La suma de los números es 20: $x + y = 20$

El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, es máximo: $P = x^2y^3$

Se despeja $y$ de la primera igualdad y se sustituye en el producto:

$$x + y = 20 \quad \rightarrow \quad y = 20 - x$$

Por tanto: $P = x^2y^3 = x^2(20 - x)^3$ será la función a maximizar.

Se obtiene la derivada: $P'(x) = x(20 - x)^2(40 - 5x)$

La derivada se iguala con cero: $P'(x) = 0$, $x(20 - x)^2(40 - 5x) = 0$

Al resolver esta última ecuación se obtienen los valores críticos: $x = 0$, $x = 20$, $x = 8$

Se obtiene la segunda derivada: $P''(x) = -20x^3 + 720x^2 - 7\,200x + 16\,000$

Se analizan los valores críticos:

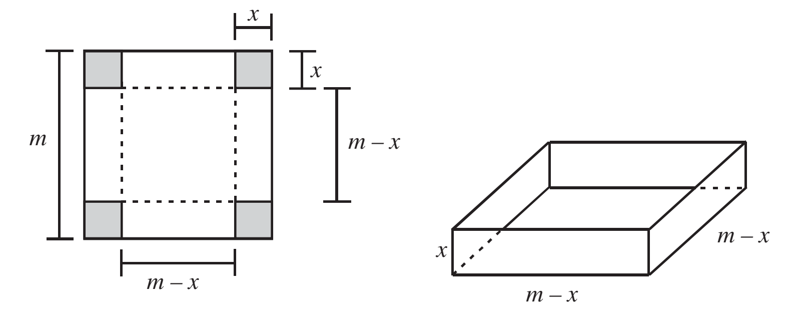
Para $x = 0$, $P''(0) = 16\,000 > 0$, entonces en $x = 0$ existe un valor mínimo
Para $x = 20$, $P''(20) = 0$, entonces en $x = 20$ no existe valor máximo ni mínimo
Para $x = 8$, $P''(8) = -5\,760 < 0$, entonces en $x = 8$ existe un valor máximo

Por tanto, uno de los valores es $x = 8$ y al sustituir en $y = 20 - x$, se obtiene $y = 12$, entonces los números que se buscan son:

$$x = 8,\ y = 12$$

2 De las cuatro esquinas de una lámina cuadrada de lado $m$, se suprimen cuadrados iguales de lado $x$. Se doblan los bordes de la lámina recortada para formar una caja sin tapa. Determina la longitud de $x$, para que el volumen de la caja sea máximo.

**Solución**




El volumen de la caja en términos de la variable $x$ está dado por la función:

$$V(x) = (m - 2x)(m - 2x)(x) \qquad V(x) = (m - 2x)^2(x)$$

$$V(x) = (x)(m - 2x)^2$$

$$V(x) = (x)(m^2 - 4mx + 4x^2)$$

$$V(x) = m^2x - 4mx^2 + 4x^3 \text{ función a maximizar.}$$

Se encuentra la derivada respecto a la variable $x$ de la función:

$$V'(x) = m^2 - 8mx + 12x^2$$

Se iguala a cero la derivada:

$$V'(x) = 0; \quad m^2 - 8mx + 12x^2 = 0$$

Al resolver se obtienen los valores críticos:

$$x = \frac{m}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{m}{6}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúan los valores de $x$:

$$V''\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 12m = 4m > 0 \text{ mínimo}$$

$$V''\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 4m = -4m < 0 \text{ máximo}$$

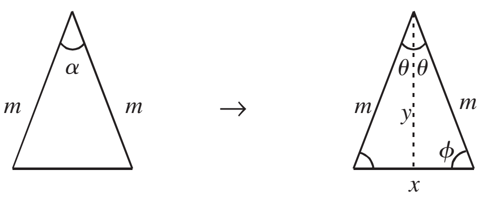
Por consiguiente, el valor de $x$ para que la caja tenga un volumen máximo es:

$$x = \frac{m}{6}$$

3 Determina el ángulo que deben formar los lados iguales de un triángulo isósceles para que su área sea máxima.

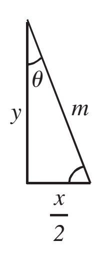
**Solución**

Se construye una figura con los datos:




Sea $x$ la base y $y$ la altura, entonces su área es $A = \frac{1}{2}xy$

Se toma la mitad del triángulo:




Se aplican identidades trigonométricas en el triángulo para el ángulo $\theta$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\frac{x}{2}}{m} = \frac{x}{2m} \quad \text{donde,} \quad x = 2m\,\text{sen}\,\theta \qquad\qquad \cos\theta = \frac{y}{m} \quad \text{donde,} \quad y = m\cos\theta$$

Al sustituir los valores de $x$ y $y$ se obtiene:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(2m\,\text{sen}\,\theta)(m\cos\theta) \quad \rightarrow \quad A(\theta) = \frac{1}{2}m^2[2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta]$$

Pero $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta$, entonces $A = \frac{1}{2}m^2\,\text{sen}\,2\theta$, ésta es la función a maximizar.

Se obtiene la derivada y se iguala a cero:

$$A'(\theta) = m^2\cos 2\theta \quad \rightarrow \quad A'(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad m^2\cos 2\theta = 0$$

$m \neq 0$; entonces $\cos 2\theta = \frac{0}{m^2} = 0$, despejando el ángulo:

$$\cos 2\theta = 0 \qquad 2\theta = \cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$A''(\theta) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\theta \quad \rightarrow \quad A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2(1)$$

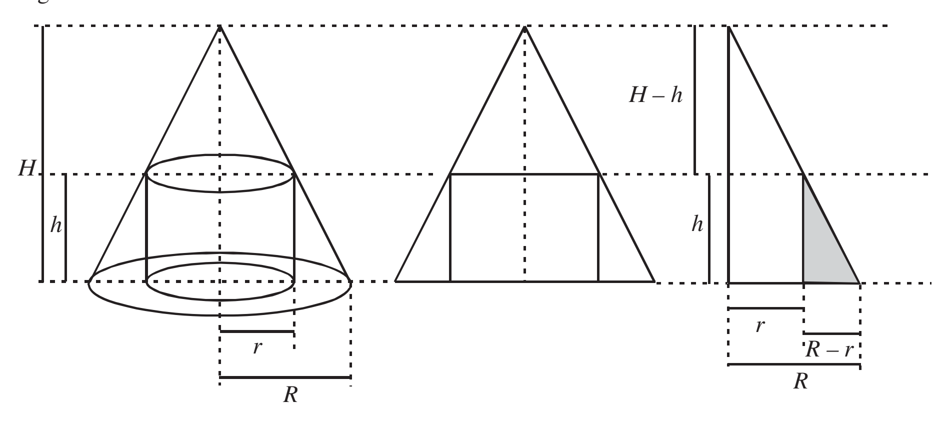
$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 < 0$$

El área es máxima para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y el ángulo que deben formar los lados iguales es de 90°

4 Calcula el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de $H$ cm de altura y $R$ cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan.

**Solución**

Observa la figura.




De acuerdo con ella se hace un corte transversal y se obtiene el triángulo que se muestra; por construcción se tienen triángulos semejantes que cumplen con la siguiente proporción:

$$\frac{R}{R-r} = \frac{H}{h}$$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Despejando $h$ de la proporción y sustituyéndola en la fórmula del volumen se obtiene:

$$h = \frac{HR - Hr}{R} = H - \frac{H}{R}r \quad \rightarrow \quad V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(H - \frac{H}{R}r\right) = \pi H r^2 - \frac{\pi H r^3}{R}$$

La cual es la función a maximizar.

Se deriva la función:

$$V'(r) = 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R}$$

La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación para $r$:

$$V'(r) = 0, \qquad 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R} = 0$$

Si $R \neq 0$, entonces $2\pi HRr - 3\pi Hr^2 = 0 \rightarrow \pi Hr(2R - 3r) = 0 \rightarrow r(2R - 3r) = 0$
Valores críticos:

$$r = 0, r = \frac{2}{3}R$$

Se analizan los valores críticos en la segunda derivada:

$$V''(r) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}r$$

Para $r = 0$ ; $V''(0) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}(0) = 2\pi H > 0$, entonces, el volumen es mínimo.

Para $r = \frac{2}{3}R$ ; $V''\left(\frac{2}{3}R\right) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = -2\pi H < 0$, entonces, el volumen es máximo.

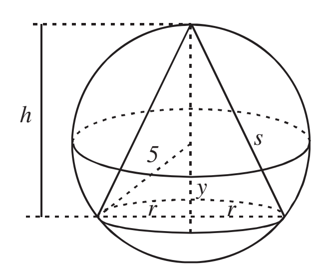
Entonces, las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en el cono son:

$$r = \frac{2}{3}R \text{ y } h = H - \frac{H}{R}r = H - \frac{H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{1}{3}H$$

5 Determina las dimensiones del cono circular recto de área máxima, que puede inscribirse en una esfera de radio $R = 5$u

**Solución**

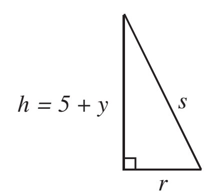
Figura




El área del cono de radio $r$, altura $h$ y generatriz $s$, está dada por:

$$A = \pi rs$$

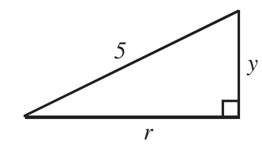
De la figura se toma el triángulo rectángulo



Mediante el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$s^2 = (5 + y)^2 + r^2 \qquad s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$$

De la figura se toma el triángulo rectángulo,




Por el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = r^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = 25 - y^2$$

Este resultado se sustituye en: $s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$

$$s = \sqrt{(5+y)^2 + (25 - y^2)}$$

y a su vez en $A = \pi r s$

$$A = \pi\ r\ \sqrt{(5+y)^2 + 25 - y^2}$$

Maximizar $A$ equivale a maximizar $A^2$, y el problema se reduce a términos simples, es decir:

$$A^2 = \pi^2 r^2 \left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right], \text{ pero } r^2 = 25 - y^2, \text{ entonces:}$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right] \quad \rightarrow \quad A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[25 + 10y + y^2 + 25 - y^2\right]$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(50 + 10y)$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(10)(5 + y)$$

$$A^2 = 10\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$$

Si $A^2 = f(y)$, entonces, $f(y) = 10\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$ es la función a maximizar.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(y) = 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2)$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se determinan los valores críticos:

$$f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -5,\ y = \frac{5}{3}$$

Paso III
Se evalúan los valores críticos en la segunda derivada para determinar los máximos o mínimos de la función:

$$f''(y) = 10\pi^2(-10 - 6y)$$

Para $y = -5$

$$f''(-5) = 10\pi^2(-10 - 6(-5)) = 200\pi^2 > 0, \text{ mínimo.}$$

Para $y = \dfrac{5}{3}$,

$$f''\left(\frac{5}{3}\right) = 10\pi^2\left(-10 - 6\left(\frac{5}{3}\right)\right) = -200\pi^2 < 0, \text{ máximo.}$$

Entonces, para $y = \dfrac{5}{3}$ el área del cono es máxima, sustituyendo en las fórmulas: $r^2 = 25 - y^2$ y $h = 5 + y$, se obtienen las dimensiones del radio y la altura del cono inscrito en la esfera:

$$r^2 = 25 - y^2 \qquad\qquad h = 5 + y$$

$$r = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \qquad\qquad h = 5 + \frac{5}{3}$$

$$r = \sqrt{25 - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}\,\text{u} \qquad\qquad h = \frac{20}{3}\,\text{u}$$

Finalmente, el radio y la altura miden respectivamente:

$$r = \frac{10}{3}\sqrt{2}\,\text{u} \qquad h = \frac{20}{3}\,\text{u}$$

## EJERCICIO 43

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra dos números cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
2. Encuentra dos números cuya diferencia sea 50 y su producto mínimo.
3. Con una lámina cuadrada de aluminio de 12 pulgadas por lado, se quiere construir una caja sin tapa, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los bordes. ¿Cuánto deben medir por lado los cuadrados recortados para obtener un volumen máximo?, ¿Cuánto mide dicho volumen?
4. Calcula el volumen máximo de un cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 72 cm de altura y 24 cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan?
5. En la construcción de un recipiente cilíndrico de hojalata se emplean 100 $\text{pulg}^2$, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuál es el mayor volumen que podría tener la lata?
6. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un cono de volumen máximo cuya área lateral es de 10 $\pi u^2$?
7. Un cartel tiene una superficie de 150 $\text{cm}^2$ con márgenes de 3 cm en las partes superior e inferior y 2 cm a los lados. Calcula el área máxima impresa en el cartel.
8. Considera un triángulo rectángulo con sus catetos sobre los ejes de coordenadas y la hipotenusa pasa por el punto (4, 3). Determina el área mínima que puede encerrar tal triángulo.
9. ¿Qué número positivo minimiza la suma entre él y su recíproco?
10. Determina las dimensiones del triángulo isósceles de superficie máxima que podría inscribirse en un círculo de radio $r$.
11. ¿Cuáles son los dos puntos sobre la curva $y = x^3$ cuyas abscisas difieren en dos unidades, de tal forma que la recta que los une tiene una pendiente mínima?
12. ¿Cuál es el área máxima posible de un rectángulo, cuya base coincide con el eje $X$ y sus vértices superiores están en la curva $y = 4 - x^2$?
13. Encuentra las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio igual a 2 unidades.
14. La resistencia de una viga rectangular varía según sus dimensiones. Si la resistencia es proporcional al cuadrado del ancho de la viga por la altura, ¿cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que podrá cortarse de un tronco cilíndrico con radio de 3 pies?

15. ¿Cuál es la distancia mínima que existe entre el punto (5, 1) y la parábola $y = -x^2$?
16. La suma de dos números es 16. Encuentra los números si la suma de sus cubos es un valor mínimo.
17. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro que se puede inscribir en un semicírculo con radio de 5 unidades?
18. Se inscribe un rectángulo en un triángulo isósceles, cuyos lados tienen longitudes 5, 5 y 6. Uno de los lados del rectángulo está sobre la base del triángulo (lado desigual), ¿cuál es el área mayor que puede abarcar el rectángulo?
19. Se desea inscribir un cono dentro de otro. El cono exterior tiene una altura de 6 cm y un radio de 4 cm. El cono interior se inscribe de modo que su cúspide reposa sobre la base del cono exterior. La base del cono interior es paralela a la base del cono exterior. Los ejes de los conos son colineales. ¿Cuál deberá ser la altura del cono interior, a fin de que contenga el mayor volumen posible?
20. Calcula las dimensiones de un triángulo isósceles con un perímetro de 6 unidades que tenga área máxima.
21. Determina dos números reales positivos, cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
22. Encuentra las dimensiones del cono recto circular de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio 6 unidades.
23. Obtén las coordenadas del punto de la recta $3x + y - 5 = 0$ más cercano al origen.
24. ¿Cuál es el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 cm?
25. Calcula el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en la elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
26. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 4) y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
27. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto de máxima área lateral que puede inscribirse en una esfera de radio de ocho pulgadas?
28. Para la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, considera el punto $(0, k)$ sobre su eje conjugado y determina el punto más cercano a éste.
29. Determina dos números positivos cuyo producto es 16 y tienen suma mínima.
30. En la construcción de una casa se van a emplear ventanas en forma de rectángulos curvados por semicírculos. Si el perímetro total de cada ventana es $P$, ¿cuáles son las dimensiones más convenientes para que las ventanas proporcionen máxima iluminación?
31. Una persona tiene una pared de piedra en el costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados, ¿qué dimensiones debe tener el corral para tener la mayor área posible?
32. Un alambre de 100 cm de largo se va a partir en dos trozos, una de las partes se va a doblar para formar una circunferencia, y la otra un triángulo equilátero. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo sea máxima?
33. Se desea construir un cono con una generatriz de 10 cm. ¿Cuál es el mayor volumen posible para dicho cono?
34. Encuentra las dimensiones del rectángulo inscrito en un círculo con radio de 25 cm que proporcione el área máxima.
35. Para construir un recipiente cilíndrico de hojalata se emplearán 150 $\text{pulg}^2$, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro para que contenga el volumen máximo?
36. Un anuncio de 20 metros de altura está colocado sobre una base que se encuentra 5 metros sobre el nivel de los ojos de una persona, ¿qué tan alejada debe estar la persona para que su ángulo de visión sea máximo?
37. Un silo consta de un cilindro con una parte superior semiesférica. Determina la longitud del radio del silo con un volumen $V$, que tiene la menor área de superficie, incluye la tapa inferior.
38. ¿Cuáles son los puntos sobre la curva $y = x^2 - 4$, que están más cerca del punto $(-2, 1)$?

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Movimiento rectilíneo uniforme

Si un punto se mueve sobre una recta una distancia $s$, en un tiempo $t$ con velocidad uniforme $v$, entonces:

$$v = \frac{s}{t}\text{, de aquí } s = v \cdot t$$

Sean $(s_1, t_1)$ y $(s_2, t_2)$ dos pares de valores de $s$ y $t$, tal que:

$$s_1 = vt_1 \text{ y } s_2 = vt_2$$

Entonces:

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$$

Donde:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \text{velocidad uniforme}$$

El concepto de velocidad media es más general que el de velocidad uniforme para cualquier tipo de movimiento rectilíneo.

La distancia dirigida $s$, de un punto $P$, desde un origen en un tiempo $t$, está dada por:

$$s = s(t)$$

Entonces, a la función $s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$ se le denomina "función de posición" del punto $P$ y la velocidad media de $P$ durante el intervalo $[t_1, t_2]$ se define como:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Si $t_2 - t_1 = h$, entonces $t_2 = t_1 + h$ con $h \neq 0$, luego $s(t_2) = s(t_1 + h)$ y la velocidad media de $P$ durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + h]$ es:

$$\frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Este límite se llama *velocidad instantánea*, rapidez o simplemente velocidad de $P$ en el tiempo $t$. Un físico interpretaría esto como el valor límite de las velocidades medias, medidas sobre las porciones de tiempo cada vez menores alrededor de $t$.

Al generalizar:

Si la función de posición de un punto $P$ es:

$$s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$$

La velocidad de $P$ en el tiempo $t$ será:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

La cual se denomina función velocidad del punto $P$.

Puesto que $s = s(t)$, $v = v(t)$ y $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, entonces $v = \frac{ds(t)}{dt}$

## Aceleración media

$v = \{(t, v) \mid v = v(t)\}$ la razón $\dfrac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h}$, se llama velocidad media de $P$, durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + h]$

Si existe $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h}$, entonces se le denomina aceleración de $P$ en el tiempo $t_1$ y se denota mediante $a(t_1)$, entonces:

$$a(t_1) = \left.\frac{dv(t_1)}{dt}\right|_{t_1} = v'(t_1) = s''(t_1)$$

Por tanto:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

### Ejemplo

Una partícula se mueve conforme a la expresión $s(t) = 2t^2 - 3t + 3$, donde $s$ se expresa en metros y $t$ en segundos.

Determina:

*a*) Su posición inicial.
*b*) Su velocidad al inicio de su movimiento.
*c*) La velocidad que alcanza al transcurrir 3 segundos.
*d*) La velocidad final a los 5 segundos.
*e*) Su aceleración.

### Solución

*a*) Su posición inicial se determina cuando $t = 0$, entonces,

$$s(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 3 = 3 \text{ m}$$

*b*) La velocidad al inicio de su movimiento se obtiene mediante la primera derivada evaluada en $t = 0$

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad\rightarrow\quad v(t) = 4t - 3$$
$$v(0) = 4(0) - 3 = -3\ \frac{m}{s}$$

*c*) La velocidad cuando $t = 3$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad\rightarrow\quad v(3) = 4(3) - 3 = 9\ \frac{m}{s}$$

*d*) La velocidad cuando $t = 5$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad\rightarrow\quad v(5) = 4(5) - 3 = 17\ \frac{m}{s}$$

*e*) Su aceleración se obtiene mediante la segunda derivada:

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad\rightarrow\quad s'(t) = 4t - 3 \quad\rightarrow\quad a = s''(t) = 4\ \frac{m}{s^2}$$

# EJERCICIO 44

Resuelve los siguientes problemas:

1. La posición de una partícula se expresa mediante la función $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 10t$, con $s$ en metros y $t$ en segundos. ¿Cuál es su rapidez para $t = 1, \frac{3}{2}, 0$ segundos?
2. La distancia recorrida por un automóvil sobre una carretera en el instante $t$ está dada por $s(t) = 9t^4 - 120t^3 + 432t^2$, ¿en qué intervalos su velocidad media es positiva?
3. La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo está dada por la función:

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$$

Encuentra:

*a*) $s$ y $a$ cuando $v = 0$
*b*) $s$ y $v$ cuando $a = 0$
*c*) Cuando $s$ aumenta
*d*) Cuando $v$ aumenta

4. Un proyectil es lanzado con una trayectoria que obedece a la función $s(t) = -3t^2 + 54t$. *a*) Calcula en qué tiempo hace contacto con su objetivo que se encuentra sobre la superficie terrestre y la velocidad que lleva en ese instante. *b*) En qué instante logra su altura máxima y cuál es el valor de esta.
5. Un proyectil es lanzado en dirección a una torre de 36 m de altura. El proyectil sigue la trayectoria de acuerdo con la función $s = -t^2 + 12t$, después de siete segundos. Indica la velocidad y la altura en la que hace contacto el proyectil con la torre.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Razón de cambio

Si una cantidad $x$ está en función del tiempo $t$, la razón de cambio de $x$ con respecto a $t$ está dada por $\frac{dx}{dt}$. Si dos o más cantidades se relacionan con una ecuación, la razón de cambio de cada cantidad se obtiene derivando la ecuación.

Pasos para resolver problemas de razón de cambio:

- Se traza un dibujo que contemple todas las variables y constantes que intervengan en el problema.
- Se elabora un modelo matemático que relacione las variables.
- Se deriva el modelo matemático respecto al tiempo, se despeja la incógnita a conocer y se sustituyen los datos dados.

EJEMPLOS

Ejemplos

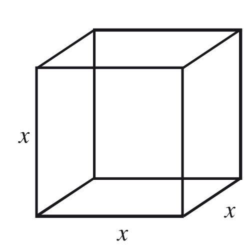
1 Un cubo de hielo de 10 cm³ de volumen, comienza a derretirse a razón de $6\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$, ¿cuál es la razón de cambio de la superficie del cubo en ese instante?

**Solución**

Se construye un cubo de arista $x$ cuyo volumen es $V = 10$ cm³ y la razón con la que se derrite es

$$\frac{dV}{dt} = -6\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

(El signo indica que el volumen del cubo está decreciendo.)



Se deriva el volumen $V = x^3$ respecto al tiempo: $\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$

$$-6 = 3x^2\frac{dx}{dt} \text{ se despeja } \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{6}{3x^2} = \frac{dx}{dt}$$

La razón con que disminuye la arista es: $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$

El área total del cubo es $A = 6x^2$ y la razón con que cambia el área es:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$$

Pero $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt} = 12x\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{24}{x}$$

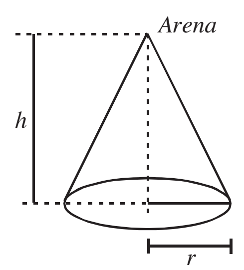
Si el volumen es de $10 \text{ cm}^3 = x^3$, entonces $x = \sqrt[3]{10}$, por tanto:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

El área disminuye a razón de $\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

2 Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$, la altura del cono es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez aumenta su altura cuando el montón tiene tres metros de altura?

**Solución**




El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, pero $r = h$, entonces $V = \frac{1}{3}\pi h^3$ y $\frac{dV}{dt} = 30\frac{m^3}{min}$

Al derivar el volumen respecto del tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2\frac{dh}{dt} \quad \text{donde} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $\frac{dV}{dt} = 30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ y $h = 3\text{m}$

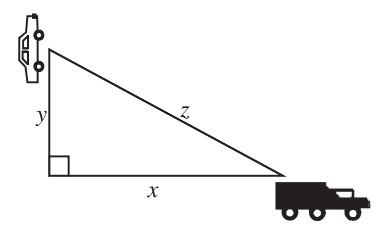
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi(3)^2}(30) = \frac{30}{9\pi} = \frac{10}{3\pi}$$

Por consiguiente, la altura aumenta a razón de $\frac{10}{3\pi}\frac{\text{m}}{\text{min}}$

3 Un automóvil se dirige al norte de una ciudad a razón de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, al mismo tiempo un camión se dirige al este de la ciudad a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿Cuál es la razón con la que varía la distancia entre los vehículos cuando el automóvil y el camión se encuentran a 30 y 40 km, respectivamente, de su punto de partida?

**Solución**

Se realiza el dibujo con las características establecidas:




Donde,

$$x = 40 \text{ km}, y = 30 \text{ km}; \ \frac{dy}{dt} = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}; \ \frac{dx}{dt} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se debe encontrar con qué rapidez se separan los vehículos $\left(\frac{dz}{dt}\right)$

La figura representa un triángulo rectángulo, por tanto, se aplica el teorema de Pitágoras para obtener la relación:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión respecto al tiempo:

$$\frac{dz^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \text{(simplificando)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Luego, en el momento en que $x = 40$ km; $y = 30$ km

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50 \text{ km}$$

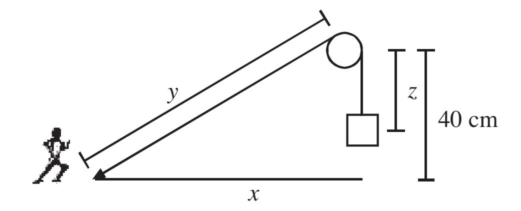
Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(80\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + \frac{30 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(40)(80) + (30)(60)}{50} = \frac{3200 + 1800}{50} = \frac{5000}{50} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

4 Una persona sostiene un extremo de una cuerda de 150 cm de largo y en el otro extremo cuelga un bloque. La cuerda pasa por una polea que está a 40 cm de altura directamente sobre la mano de la persona, si ésta se aleja de la polea a razón de 10 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se eleva el bloque cuando está a 6 cm de la polea?

**Solución**




La persona se aleja de la polea a $10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ entonces, $\frac{dx}{dt} = 10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

En la figura, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$y^2 = x^2 + (40)^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = x^2 + 1\,600$$

Luego, la medida de la cuerda está dada por:

$$y + z = 150 \qquad \text{donde,} \qquad y = 150 - z$$

Este resultado se sustituye en $y^2 = x^2 + 1\,600$

$$y^2 = x^2 + 1\,600 \quad \rightarrow \quad (150 - z)^2 = x^2 + 1\,600$$

Se deriva respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}(150 - z)^2 = \frac{d}{dt}(x^2 + 1600) \quad \rightarrow \quad 2(z - 150)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2(z-150)}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z-150}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $z = 6$ cm

$$x^2 + 1\,600 = (150 - z)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 1\,600 = (150 - 6)^2$$

$$x^2 + 1\,600 = (144)^2$$

$$x^2 = 20\,736 - 1\,600$$

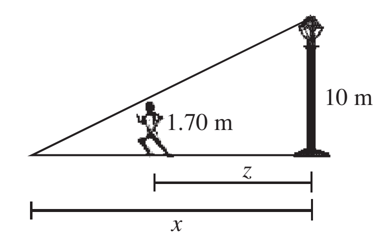
$$x^2 = 19\,136;\ x = \sqrt{19\,136}$$

Por tanto, la razón con la que se eleva el bloque es de:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{(z-150)}\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{19\,136}}{6-150}(10) = -\frac{\sqrt{19\,136}}{144}(10) = -\frac{5(8)\sqrt{299}}{72} = -\frac{5\sqrt{299}}{9}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

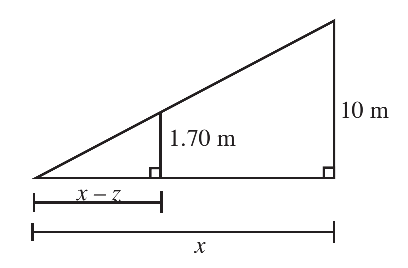
5 Un hombre de 1.70 m de altura se aleja de un poste de alumbrado a razón de 3 m/s, la lámpara del poste está a 10 m de altura. Determina la razón de cambio a la cual se mueve el extremo de la sombra del hombre.

**Solución**




De acuerdo con la figura $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la incógnita es $\frac{dx}{dt}$

Por triángulos semejantes:




Se obtiene:

$$\frac{10}{1.70} = \frac{x}{x-z} \quad \rightarrow \quad 10(x-z) = 1.70x$$

$$10x - 10z = 1.70x$$

$$10x - 1.70x = 10z$$

$$8.30x = 10z$$

Se deriva la expresión, resultando:

$$8.30\frac{dx}{dt} = 10\frac{dz}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}\frac{dz}{dt}$$

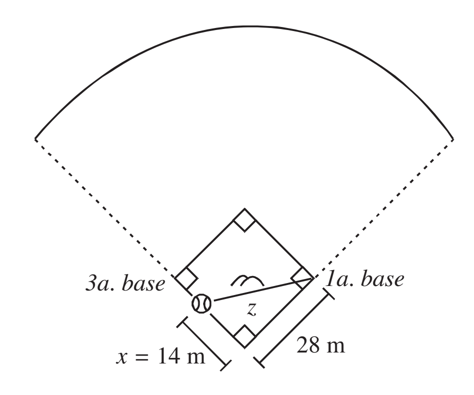
Luego, $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}(3) = \frac{30}{8.30} = 3.61\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Finalmente, la razón con que se mueve el extremo de la sombra es de 3.61 m/s.

6 La distancia que existe entre las bases de un campo de béisbol es de 28 m. Si la pelota se batea por la línea en dirección a la tercera base con una velocidad de $32\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre la pelota y la primera base cuando se encuentra a la mitad del camino hacia la tercera base?

**Solución**




En la figura se observa que:

$$z^2 = x^2 + (28)^2$$

En la cual, al derivar se obtiene:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2z}\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$$

Luego, cuando $x$ se encuentra a la mitad del recorrido, la distancia de $z$ es:

$$z^2 = (14)^2 + (28)^2 = 196 + 784 \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{980} = 14\sqrt{5}\text{ m}$$

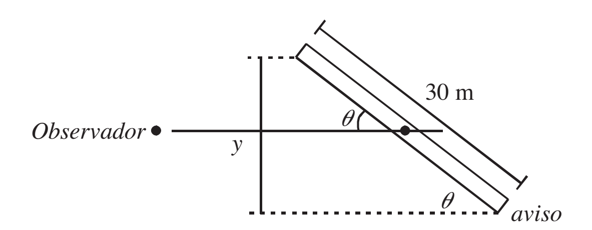
Al sustituir $z = 14\sqrt{5}$, $x = 14$ y $\frac{dx}{dt} = 32\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en $\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$, se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{14}{14\sqrt{5}}\right)(32) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(32) = \frac{\sqrt{5}}{5}(32)$$

Por consiguiente, la pelota se aleja de la primera base a razón de $\frac{32}{5}\sqrt{5}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

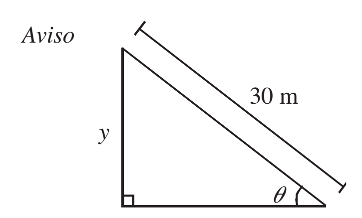
7 Un aviso rectangular que mide 30 m de ancho da vueltas sobre un eje vertical que pasa por el centro del rectángulo a razón de 10 rpm. Una persona que observa a distancia el aviso lo ve como un rectángulo de ancho variable. ¿Con qué rapidez cambia el ancho aparente del aviso cuando éste tiene 12 m de ancho, según lo ve el observador, y su ancho está aumentando?

**Solución**




Sea $y$ el ancho aparente del aviso, también se sabe que gira a 10 rpm, que es lo mismo que $20\pi$ rad/min, entonces se tiene que encontrar la relación que existe entre $y$ y $\theta$.

De la figura:




Se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{30} \qquad \rightarrow \qquad y = 30\operatorname{sen}\theta$$

Derivando la expresión anterior:

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Luego, cuando $y = 12$ m, entonces:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Como el ancho del aviso está aumentando, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por tanto:

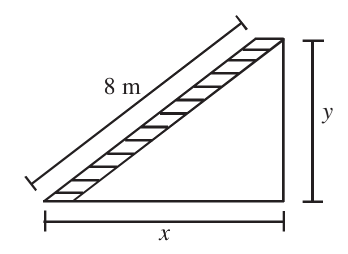
$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 23.5°$$

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = 30\cos(23.5°)(20\pi) = 30(0.9170)(20\pi) = 550.2\pi\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

8 Una escalera de 8 m de longitud está apoyada sobre un piso horizontal y contra una pared. Si el extremo inferior de la escalera se aleja del muro a razón de $\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez desciende el extremo superior en el instante en que su altura sobre el suelo es de 3 m?

**Solución**

Sea $y$ la altura generada por la escalera sobre la pared, $x$ la distancia generada por el extremo inferior y la pared, entonces,




Por el teorema de Pitágoras:

$$(8)^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad 64 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión:

$$\frac{d64}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

Se despeja $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $y = 3$, el valor de $x$ está determinado por:

$$(8)^2 = x^2 + (3)^2 \qquad 64 = x^2 + 9$$

$$64 - 9 = x^2$$

$$x = \sqrt{55}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-\sqrt{55}}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{55}}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El signo menos indica que la altura sobre la pared está decreciendo.

# EJERCICIO 45

1. Si la altura de un determinado árbol es de $10\sqrt{2}\,r^{\frac{3}{2}}$ cm, donde $r$ es el radio de la parte transversal del tronco del árbol. Si el radio aumenta a razón de $\frac{1}{6}\frac{\text{cm}}{\text{año}}$, ¿con qué rapidez cambia la altura cuando su radio es de 5 cm?
2. Un náufrago es remolcado hacia un barco con un cable. La proa de donde se jala el cable se encuentra a 7 m del nivel del mar y el cable es jalado a razón de $12\frac{\text{m}}{\text{min}}$. ¿Con qué rapidez se está moviendo el náufrago hacia el barco cuando se encuentra a 20 m de la base del barco?
3. Un automóvil que viaja a $80\frac{\text{m}}{\text{s}}$ cruza un puente sobre un río, 20 segundos antes de que un bote que viaja a $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$ pase por debajo del puente. Vistos desde arriba, el río y el puente forman un ángulo recto. ¿Con qué rapidez se están separando el automóvil y el bote 20 segundos después de que el bote pasa por debajo del puente?
4. Un globo de forma esférica, se infla a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cuál es el volumen del globo cuando su radio está aumentando a razón de $0.20\frac{\text{m}}{\text{min}}$?
5. Una escalera de 13 m de largo está apoyada sobre una pared. Encuentra la rapidez con que baja el extremo superior de la escalera, cuando su extremo inferior dista 5 m del muro y se separa a razón de $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$
6. Al caer una piedra a un estanque de aguas tranquilas forma una onda circular, cuyo radio aumenta a razón de $1\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez aumenta el área encerrada por la onda cuando el radio es de 5 cm?
7. Un tanque cilíndrico de 7 m de radio y 10 m de altura se llena de agua. Se hace un agujero en el fondo del tanque, en ese momento el agua sale a razón de $3\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿A qué rapidez está cambiando la altura del líquido en el tanque?
8. Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de un planeta. La ecuación de su órbita plana es de $9x^2 + 16y^2 = 144$. Si la rapidez del satélite en una dirección $x$ es de $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, cuando la coordenada $x$ es de $\frac{36}{\sqrt{137}}$ km. ¿Cuál es la rapidez en la dirección $y$ en ese instante?
9. Los automóviles A y B salen del mismo punto. El automóvil A viaja hacia el este a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y el automóvil B viaja hacia el norte a $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A qué razón está cambiando la distancia entre los dos a las 14:00 horas, si:
   *a*) *A* y *B* salen a las 12:00 a.m.
   *b*) *A* sale a las 12 del día y *B* sale a la 13:00 horas.
10. Se está vaciando un depósito cónico de 1.5 m de radio y 5 m de altura, a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cómo está bajando el nivel cuando la profundidad del agua es de 2 m?
11. En un crucero un camión sale a las 10:00 horas y viaja hacia el oeste a 60 km/h. Un automóvil sale a las 13:00 horas del mismo lugar y viaja hacia el norte a 80 km/h. ¿A qué razón se están separando a las 15:00 horas?
12. Un globo asciende sobre un punto a razón de $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$; un observador está situado a 300 m del punto de despegue del globo. Cuando el globo está a 400 m de altura, ¿con qué rapidez está cambiando la distancia entre el globo y el observador?
13. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de $7\frac{\text{pies}^3}{\text{min}}$. Si la presión se mantiene constante. ¿Con qué rapidez cambia el radio cuando éste es de 1 pie?

14. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de $6\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$. Calcula la rapidez de cambio de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es de 100 $\text{cm}^2$.
15. Un punto se mueve sobre la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ de tal manera que su ordenada aumenta siete unidades por segundo. Cuando $y = 1$, ¿con qué rapidez cambia su abscisa?
16. Una persona está de pie en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 2 m por encima del amarre de la lancha. Si la persona jala la cuerda a razón de $70\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se aproxima la lancha al muelle cuando se encuentra a 5 m de él?
17. Un hombre de 1.80 m de estatura camina en línea recta a $1.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ alejándose de un faro que se encuentra a 8 metros de altura sobre el suelo. ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra?, ¿Cuál es la rapidez con la que cambia la longitud de su sombra?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Aplicaciones a la economía

Sea $x$ el número total de unidades producidas por una empresa y $m$ el precio de venta por unidad, el ingreso se obtiene con la función:

$$I(x) = mx$$

Si el precio de venta depende linealmente del número de unidades producidas, $m = ax + b$, la función de ingreso se expresa como:

$$I(x) = mx \quad \rightarrow \quad I(x) = (ax + b)x \quad \rightarrow \quad I(x) = ax^2 + bx$$

Sea $C(x)$ el costo de producir $x$ unidades, la utilidad de la empresa se expresa:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Y el costo medio por unidad está dado por la expresión:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Otra forma de expresar la función de costo puede ser:

$$C = \text{costos variables} + \text{costos fijos}$$

Por ejemplo, si se tiene la función $C(x) = 4x^2 + 6x + 850$, los costos fijos son el término independiente de la función, es decir, 850, al ser $x$ el número de unidades, entonces $x \geq 0$ por consiguiente, el costo fijo de producción es $C(0) = 850$.

### Ejemplo

Las funciones de ingreso y costo son $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 600$. Determina la utilidad máxima y el costo mínimo en pesos.

### Solución

La utilidad $U(x) = I(x) - C(x), \; x \geq 0$

$$U(x) = (-2x^2 + 340x) - (3x^2 + 600)$$

$$U(x) = -2x^2 + 340x - 3x^2 - 600$$

$$U(x) = -5x^2 + 340x - 600$$

Se obtiene la derivada de la función de la utilidad:

$$U'(x) = -10x + 340$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $U'(x) = 0$

$$-10x + 340 = 0$$

$$-10x = -340$$

$$x = \frac{-340}{-10} = 34$$

Se evalúa $x = 34$ en la segunda derivada para verificar si existe un valor máximo.

$$U''(x) = -10$$

$$U''(34) = -10 < 0$$

Entonces para $x = 34$ existe un valor máximo.
Por consiguiente, se necesita producir 34 unidades para obtener una utilidad máxima, la cual es de:

$$U(34) = -5(34)^2 + 340(34) - 600 = 5180$$

Por tanto, la utilidad máxima es de \$5 180.00
Por otro lado el costo medio está dado por:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$Q(x) = \frac{3x^2 + 600}{x}$$

$$Q(x) = 3x + \frac{600}{x}$$

Se obtiene la derivada de la función de costo medio

$$Q'(x) = 3 - \frac{600}{x^2}$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $Q'(x) = 0$

$$3 - \frac{600}{x^2} = 0$$

$$3x^2 - 600 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{200}$$

$$x = \pm 10\sqrt{2}$$

Se verifica que sea el valor mínimo, esto se obtiene evaluando el valor crítico en la segunda derivada

$$Q''(x) = \frac{1200}{x^3}$$

$$Q''\left(10\sqrt{2}\right) = \frac{1200}{\left(10\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1200}{(200)\left(10\sqrt{2}\right)} = \frac{3}{5\sqrt{2}} > 0$$

Entonces, para $x = 10\sqrt{2} \approx 14$, hay un valor mínimo.

Para determinar el costo medio mínimo de forma aproximada se sustituye el valor crítico en la función de costo medio:

$$Q(x) = 3(14) + \frac{600}{14}$$

$$Q(x) = 42 + 42.86$$

$$Q(x) = 84.86$$

Por tanto, el costo mínimo aproximado es de \$84.86

### *Costo marginal*

Si $C(x)$ es la función de costo total que tiene una empresa por producir $x$ unidades de algún artículo y la empresa incrementa el número de unidades de $x_0$ a $x_1$ ($x_0 < x_1$), el costo se incrementa $C(x_1) - C(x_0)$, la razón de cambio del costo es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_1) - C(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$$

En economía, la expresión $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$ es la derivada de la función de costo total y recibe el nombre de costo marginal $C'(x)$ y representa el incremento del costo al incrementar la producción.

Para $\Delta x = 1$ y $x_0$ suficientemente grande (tan grande que $\Delta x$ sea pequeño respecto a $x_0$) se tiene que:

$$C'(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

Luego, el costo de producir $x_0 + 1$ unidades es aproximadamente el mismo de producir $x_0$ unidades.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una empresa estima que el costo (en pesos) por producir $x$ artículos es de:

$$C(x) = 0.02x^2 + 3x + 12\,000$$

Determina el costo marginal en un nivel de producción de 600 artículos y el costo real de producir el 601ésimo artículo.

**Solución**

Se obtiene la función del costo marginal:

$$C'(x) = 0.04x + 3$$

El costo marginal aproximado para 600 artículos es:

$$C'(600) = 0.04(600) + 3 = 27$$

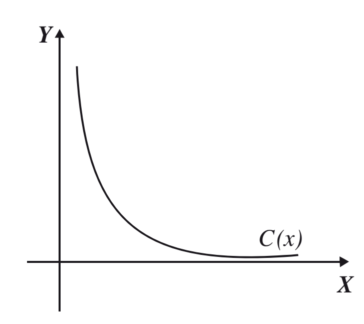
Por tanto, el costo marginal aproximado por artículo es de \$27.00

El costo real de producción del 601ésimo artículo es:

$$C(601) - C(600) = [0.02(601)^2 + 3(601) + 12\,000] - [0.02(600)^2 + 3(600) + 12\,000]$$
$$C(601) - C(600) = 21\,027.02 - 21\,000$$
$$C(601) - C(600) = 27.02$$

Se observa que $27 \approx 27.02$, es decir $C'(600) \approx C(600 + 1) - C(600)$, lo cual se había indicado antes.

El costo por unidad está dado por la función de costo promedio $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$. Si se toma una función característica de costo promedio ésta podría ser:




Dicha función tiene un punto crítico, si se localiza este punto se tendrá el costo mínimo.

Al derivar $Q(x)$ se obtiene:

$$Q'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

Se iguala con cero $Q'(x)$, para obtener el valor $C'(x)$

$$\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = 0$$
$$xC'(x) - C(x) = 0$$
$$xC'(x) = C(x)$$
$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Pero $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$, entonces, $C'(x) = Q(x)$

Es decir, cuando el costo promedio es mínimo se tiene que es igual al costo marginal. Lo anterior conlleva al hecho de que si el costo marginal es menor que el costo promedio, entonces se debe producir más para disminuir el costo promedio y viceversa, si el costo marginal es mayor que el costo promedio se tendrá que producir menos para que el costo promedio baje.

2 El costo (en pesos) estimado para producir $x$ artículos está dado por la función:

$$C(x) = 0.002x^2 + 2x + 3\,000$$

Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 1 200 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.

**Solución**

El costo promedio está dado por la fórmula $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$, entonces:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0.002x^2 + 2x + 3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x}$$

Se evalúa $x = 1\,200$

$$Q(1\,200) = 0.002(1\,200) + 2 + \frac{3\,000}{1\,200}$$

Por tanto, el costo promedio de producir 1 200 artículos es de \$6.90

Para obtener el costo marginal se determina $C'(x)$ y se evalúa $x = 1\,200$

$$C'(x) = 0.004x + 2$$

$$C'(1\,200) = 0.004(1\,200) + 2 = 6.8$$

Por tanto, el costo marginal de producir 1 200 artículos es de \$6.80

El costo promedio se minimiza cuando es igual al costo marginal.

$$C'(x) = Q(x) \quad \rightarrow \quad 0.004x + 2 = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad 0.004x = 0.002x + \frac{3\,000}{x}$$

$$\rightarrow \quad 0.002x = \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad 0.002x^2 = 300$$

$$x^2 = \frac{3\,000}{0.002}$$

$$x = \sqrt{\frac{3\,000}{0.002}} \approx 1\,225$$

Para mostrar que $x = 1\,225$, se obtiene un mínimo, se determina $Q''(x)$ y se evalúa:

$$Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad Q'(x) = 0.002 - \frac{3\,000}{x^2}$$

$$Q''(x) = \frac{6\,000}{x^3}$$

$$Q''(1225) = \frac{3\,000}{(1\,225)^3} > 0$$

Por tanto, para $x = 1\,225$ hay un mínimo.

El costo promedio se obtiene evaluando $x = 1\,225$ en $Q(x)$.

$$Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \qquad Q(1\,225) = 0.002(1\,225) + 2 + \frac{3\,000}{1\,225} = 6.89$$

Finalmente, el costo promedio mínimo por artículo es de \$6.89 ≈ \$7.00

De la misma forma existen funciones marginales para el ingreso y la utilidad, en los dos casos es la derivada de cada función.

$$\text{Ingreso marginal} = I'(x)$$

$$\text{Utilidad marginal} = U'(x)$$

## Ejemplo

Una empresa estima su ingreso y costo (en pesos) con las funciones $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 6\,000$, respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la vigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.

### Solución

Se evalúan $x = 20$ y $x = 21$ en la función de ingresos:

$$I(20) = -2(20)^2 + 340(20) = 6\,000$$

$$I(21) = -2(21)^2 + 340(21) = 6\,258$$

El valor de la vigésima primera unidad es:

$$I(21) - I(20) = 6\,258 - 6\,000 = 258$$

Si se obtiene con el concepto ingreso marginal, se deriva $I(x)$ y se evalúa $x = 20$

$$I'(x) = -4x + 340$$

$$I'(20) = -4(20) + 340 = 260$$

En el comparativo se observa que el ingreso marginal da un valor muy aproximado a 258 que es el ingreso real de la vigésima unidad.

## EJERCICIO 46

1. Dadas las funciones de ingreso y costo, $I(x)$ y $C(x)$ respectivamente, determina el ingreso máximo, la utilidad máxima y el costo medio mínimo:
   *a*) $I(x) = -x^2 + 300x$ y $C(x) = x^2 + 40x + 80$
   *b*) $I(x) = x(400 - 4x)$ y $C(x) = x^2 + 20x + 12$

Resuelve los siguientes problemas:

2. El costo estimado para producir $x$ artículos está dado por la función:
   $$C(x) = 0.004x^2 + 5x + 6\,000$$
   Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 2 000 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.
3. Una empresa estima su ingreso y costo con las funciones $I(x) = -4x^2 + 400x$ y $C(x) = 2x^2 + 300$ respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la trigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.
4. Una empresa de telas estima que el costo para producir $x$ metros de tela es $C(x) = 0.001x^3 - 0.2x^2 + 24x + 2\,400$ y que al vender $x$ metros cobraría $p(x) = 58 - 0.00042x$ por metro. Determina el nivel de producción para obtener una utilidad máxima.
   Ingreso sugerido: $I(x) = p(x) \cdot x$
5. Un estadio de futbol tiene una capacidad para 60 000 espectadores. El promedio de asistencia fue de 32 000 espectadores, teniendo los boletos un costo de \$60.00 por persona, la gerencia decide bajar el precio por boleto a \$40.00, teniendo un promedio de 48 000 espectadores. Determina la función lineal de demanda $p(x)$ y calcula el precio por boleto para minimizar el ingreso.

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Regla de L'Hôpital

Sean $f$ y $g$ dos funciones derivables con $g'(x) \neq 0$ cerca de $a$ (incluso en $a$)

Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

y para $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A esto le llamamos regla de L'Hôpital, la cual nos dice que el límite de un cociente de dos funciones es igual al límite del cociente de las derivadas de dichas funciones.

Esta regla es válida para los límites laterales ($x \to a^+$ o $x \to a^-$) y los límites al infinito ($x \to \infty$ o $x \to -\infty$)

- **Indeterminación $\frac{0}{0}$**

### Ejemplo

Obtén $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

**Solución**

Al evaluar se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$ y utilizando la regla se obtiene:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^2-9)}{\frac{d}{dx}(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = \frac{2(3)}{1} = 6$$

- **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$**

### Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{x-1}}$ ?

**Solución**

Al evaluar se obtiene $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^{x-1}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

- **Indeterminación $0 \cdot \infty$**

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, para $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ tenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Entonces podemos utilizar la regla de L'Hôpital transformando el producto de la siguiente forma

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

**Ejemplo**

Determina $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

**Solución**

Al evaluar se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot \lim_{x\to 0^+} \ln x = 0 \cdot (-\infty)$$

Para resolver el límite, se escribe

$$x^2 \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

de tal forma que:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \;\; ; \;\; \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

**Ejemplo**

Obtén la solución de $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x$

**Solución**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \left(\frac{1}{0}\right)\left(\tan(0)\right) = \infty \cdot 0$$

Al aplicar la regla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{\sec^2 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

**Indeterminación: $\infty - \infty$**

Cuando se obtienen diferencias indeterminadas del tipo $\infty - \infty$ para $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x))$, siendo $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, se utiliza la regla de L'Hôpital transformando (si es posible) la diferencia a un cociente.

**Ejemplo**

Calcula el resultado del $\lim_{x\to 0}\left(\text{ctg } x - \frac{1}{x}\right)$

**Solución**

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{ctg } x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

Se aplica la regla y se calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x \text{ sen } x + \cos x - \cos x}{x\cos x + \text{sen } x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x \text{ sen } x}{x\cos x + \text{sen } x}\right) = \frac{-0 \text{ sen } 0}{0\cos 0 + \text{sen } 0} = \frac{0}{0}$$

Se observa que el resultado es $\frac{0}{0}$, por consiguiente, se utiliza de nuevo la regla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}\right)$$

Al evaluar nuevamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}\right)=\frac{-0\cos 0-\operatorname{sen} 0}{2\cos 0-0\operatorname{sen} 0}=\frac{0}{2}=0\text{, entonces, }\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right]=0$$

- **Indeterminaciones del tipo 0°, ∞° y 1$^{\infty}$**

Para $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ se pueden obtener las siguientes formas indeterminadas:

- Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo 0°
- Si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo ∞°
- Si $\lim_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ se obtiene una indeterminación del tipo $1^{\infty}$

Para estos casos se puede aplicar el logaritmo natural en $y=[f(x)]^{g(x)}$ y aplicar la propiedad $\ln b^n = n\ln b$, es decir:

Sea $y=[f(x)]^{g(x)}$ entonces:

$$\ln y=\ln\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

De tal forma que esta transformación nos lleva a un producto indeterminado $g(x)\ln f(x)$ el cual es del tipo $0\cdot\infty$

Por otro lado también se puede utilizar la transformación: $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

## Ejemplo

Obtén el resultado de $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x$

### Solución

Al resolver directamente

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=0^0$$

se obtiene la indeterminación 0° sea $y=(\cot x)^x$, aplicando el logaritmo natural en ambos lados se obtiene

$$\ln y=\ln(\cot x)^x$$

Aplicamos la propiedad $\ln b^n = n\ln b$ y se tiene:

$$\ln y=x\ln\cot x$$

Calculamos el límite para $\ln y$ y se transforma el producto

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}x\ln\cot x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}$$

Se aplica la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\cot x}\right)(-\csc^2 x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\tan x)\left(-\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\text{sen } x}{\cos\ x}\right)\left(-\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\frac{1}{\text{sen } x\cos x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\text{sen } x\cos x}=\frac{0}{0}$$

Se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$, entonces se utiliza la identidad $\frac{1}{2}\text{sen } 2x=\text{sen } x\cos x$ y se aplica L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\text{sen } x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}\text{sen } 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2}{\text{sen } 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x}{2\cos 2x}=\frac{4(0)}{2\cos 2(0)}=\frac{0}{2\cos 0}=\frac{0}{2}=0$$

por tanto $\lim_{x\to 0^+}\ln y=0$

Pero queremos el límite de $y$, entonces partiendo de la propiedad $e^{\ln b}=b$ se escribe $y=e^{\ln y}$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln y}=e^0=1$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=1$

## Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\tan x}$?

### Solución

Sea $y=(1-\cos x)^{\tan x}$, aplicando logaritmo natural en ambos lados se obtiene:

$$\ln y=\ln(1-\cos x)^{\tan x}$$

$$\ln y=(\tan x)\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y=\frac{1}{\cot x}\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y=\frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x}$$

Aplicando el límite y luego la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)(\text{sen } x)}{-\csc^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\text{sen } x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{\text{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\text{sen}^2 x \text{ sen } x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{(1-\cos^2 x)\text{ sen } x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)\text{ sen } x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [-(1+\cos x)\text{sen } x] = -(1+\cos(0))\text{sen}(0)$$

$$= -(1+1)(0) = -(2)(0) = 0$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$ pero se quiere el límite de $y$, entonces sea $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

por tanto $\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x} = 1$

## Ejemplo

Determina $\lim_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

### Solución

Al sustituir directamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

sea $y = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$, al aplicar logaritmo natural

$$\ln y = \ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1-2x)$$

$$\ln y = \frac{\ln(1-2x)}{x}$$

Se obtiene el límite de ln $y$ y se aplica L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{1-2x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{2}{1-2x}\right] = -\frac{2}{1-2(0)} = -\frac{2}{1} = -2$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+} \ln y = -2$

Para calcular el límite de $y$ hacemos $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^2}$$

## EJERCICIO 47

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{x-2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{3x}$
5. $\lim_{x\to 0}(\tan x)^x$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2}$
7. $\lim_{x\to 0}(\sec x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim_{x\to 0}(x\csc 3x)$
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x+\text{sen } x)^{\tan x}$
10. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2x+1)-\ln(x+2)}{x}$
11. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\ln x}{2x-\ln x}$
12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\text{sen } 2x-1}{\ln(1+2x)}$
13. $\lim_{x\to 0}\left(1-\text{sen}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{\text{sen } 3x}\right)$
15. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
16. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-x}{x^3}\right)$
17. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$
18. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(\frac{3x+2}{x+2}\right)$
19. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$
20. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sec x-\tan x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Teorema de Rolle

**Definición**

Sea $f(x)$ una función que satisface las siguientes condiciones:

1. Es continua en el intervalo $[a, b]$.
2. Es derivable en el intervalo $(a, b)$.
3. $f(a) = f(b) = 0$
4. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - x - 6$ en el intervalo $[-2, 3]$ y determina el valor de $c$ en dicho intervalo.

**Solución**

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en todos los números reales, en particular en el intervalo $[-2, 3]$
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x)$ es definida en los números reales, en particular está definida en el intervalo $(-2, 3)$ y es continua.
3. $f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$ ; $f(3) = (3)^2 - (3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$
4. Por tanto, $f(x)$ satisface el teorema de Rolle.

Para obtener el valor de $c$ se emplea:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 2c - 1 = 0$$

Se resuelve la última ecuación y se obtiene:

$$c = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{2} \in (-2, 3)$$

2 Verifica si la función $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ satisface el teorema de Rolle en los intervalos $[-1, 2]$, $[2, 5]$ y encuentra los respectivos valores de $c$ en estos intervalos.

**Solución**

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en toda la recta real y en consecuencia es continua en los intervalos propuestos.
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$; esta función es continua en los intervalos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$ por ser una función polinomial.
3. Para el intervalo $[-1, 2]$

   $f(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$

   $f(2) = (2)^3 - 5(2)^2 + 2(2) + 8 = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$

   $f(-1) = f(2)$

   El teorema de Rolle se cumple para este intervalo.
   Para el intervalo $[2, 5]$

   $f(2) = 0$

   $f(5) = (5)^3 - 5(5)^2 + 2(5) + 8 = 125 - 125 + 10 + 8 = 18$

   $f(2) \neq f(5)$

   En este intervalo no se satisface el teorema de Rolle.
4. Se buscan los valores posibles de $c$ en el intervalo $[-1, 2]$:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 3c^2 - 10c + 2 = 0$$

Se resuelve la ecuación cuadrática para obtener los valores de $c$,

$$c = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{10\pm\sqrt{100-24}}{6}$$

$$= \frac{10\pm\sqrt{76}}{6}$$

$$= \frac{10\pm 8.717}{6}$$

$$c = 3.119$$

$$c = 0.213$$

# EJERCICIO 48

Verifica el teorema de Rolle en los intervalos indicados y halla los posibles valores de $c$ para las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$; $[-2, 2]$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x$; $\left[0, \frac{3}{2}\right]$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $[2, 3]$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ ; $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$ y $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

5. $f(x) = x^3 - 9x$ ; $[-3,0]$ y $[0,2]$

6. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ ; $[-2, 2]$

7. $f(x) = x^3 - 13x + 12$ ; $[-4,1]$ y $[1,3]$

8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ ; $[-5,0]$, $[-5,5]$ y $[0,5]$

9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 + 1}$ ; $[-2,0]$, $[-2,2]$ y $[0,2]$

10. $f(x) = \cos x$; $[-\pi,\pi]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

11. $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 \\ 8 - 5x \end{cases}$ ; si $\begin{matrix} x < 1 \\ x > 1 \end{matrix}$ ; $\left[-2, \frac{8}{3}\right]$

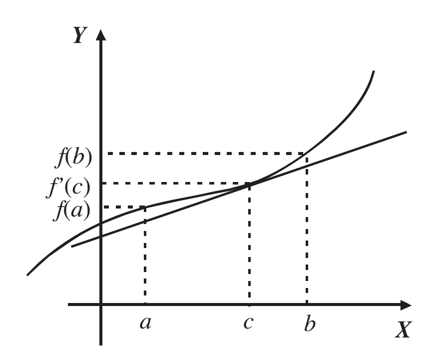
12. $h(x) = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}$ ; $[0,16]$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Teorema del valor medio

Dada una función $f(x)$ tal que:

1. $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$
2. $f(x)$ es diferenciable en el intervalo $(a, b)$
3. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica que la función $f(x) = x^2 - 4$ satisfaga el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 3]$ y encuentra el valor de $c$.

**Solución**

1. $f(x)$ es continua en $[-1, 3]$, ya que está definida en todos los puntos de este intervalo.
2. Como $f(x)$ es una función polinomial, entonces es continua y diferenciable en el intervalo $(-1, 3)$, $f'(x) = 2x$
3. Para buscar a $c$ se sustituye en la fórmula:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$$

$$2c = \frac{5 - (-3)}{4}$$

$$c = \frac{8}{8} = 1$$

Por tanto, el valor de $c$ es igual a 1.

2 Verifica si la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ satisface el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y calcula el valor de $c$.

**Solución**

1. $f(x)$ es una función polinomial, entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 2]$
2. Al ser $f(x)$ continua en el intervalo $[0, 2]$ entonces es derivable en el intervalo $(0, 2)$ y $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, aplicando el teorema del valor medio se obtiene el valor de $c$.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \rightarrow 3c^2 + 2c - 2 = \frac{8 - 0}{2}$$

$$3c^2 + 2c - 2 = 4$$

$$3c^2 + 2c - 6 = 0$$

Al resolver la ecuación para $c$:

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \begin{cases} c = 1.12 \\ c = -1.78 \end{cases}$$

El valor de $c$ que pertenece al intervalo $(0, 2)$ es $c = 1.12$

3 Verifica si la función $f(x) = x^2 + 5x + 4$, satisface el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3] y determina el valor de $c$.

**Solución**

1. La función es continua en el intervalo [1, 3], ya que está definida en todos los puntos del intervalo.
2. La función es polinomial y continua en el intervalo [1, 3] entonces, es diferenciable en ese intervalo $f'(x) = 2x + 5$
3. Para encontrar $c$ se aplica la fórmula: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$2c + 5 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}; \qquad 2c + 5 = \frac{28 - 10}{3 - 1}$$
$$2c + 5 = 9$$
$$2c = 4$$
$$c = 2$$

## EJERCICIO 49

Verifica el teorema del valor medio para las siguientes funciones en los intervalos indicados y determina el valor adecuado de $c$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; [0, 3]
2. $f(x) = 4 + x^2$; [−1, 2]
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; [1, 3]
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; [−2, 1]
5. $f(x) = \sqrt{x+1}$; [0, 8]
6. $f(x) = x^3 + 5x$; [−2, 1]
7. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$; $[-\pi, \pi]$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$; [0, 7]
9. $f(x) = e^x$; [0, 1]
10. $f(x) = \ln(2x + 1)$; [0, 4]

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

### Diferenciales

Se define la diferencial de una función $f$ en un punto $x$, como el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente y se denota por las expresiones $df(x)$ o $dy$, es decir:

$$df(x) = f'(x)dx \ \text{ o } \ dy = \frac{dy}{dx}dx \text{ ; para toda } dx \neq 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la diferencial de la función $y = x^2 - 5x + 6$

**Solución**

Se obtiene la derivada y se multiplica por $dx$:

$$dy = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 6) \cdot dx$$

$$dy = (2x - 5)dx$$

Por tanto, la diferencial es: $dy = (2x - 5)dx$

2 Determina la diferencial de la función $y = \sqrt{x^2 - 5}$

**Solución**

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2-5}}{dx} = \frac{1}{2}(x^2-5)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d(x^2-5)}{dx} = \frac{1}{2}(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$$

Por consiguiente,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}\,dx$$

3 Obtén la diferencial de la función $f(\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

**Solución**

Se deriva la función:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{d2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{d\theta} = 2\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\cos\theta}{d\theta} + \cos\theta\frac{d\operatorname{sen}\theta}{d\theta}\right]$$

$$= 2[\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(\cos\theta)]$$

$$= 2[\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta]$$

Pero $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, entonces:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = 2\cos 2\theta$$

Entonces

$$df(\theta) = 2\cos 2\theta\, d\theta$$

4 Obtén la diferencial de la función $y = \text{arc sen}(1 - x^2)$

**Solución**

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{ arc sen}(1 - x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\,\frac{d}{dx}(1 - x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2+x^4)}}\,(-2x)$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

$$= \frac{-2x}{x\sqrt{2-x^2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Por consiguiente, $dy = -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

## EJERCICIO 50

Determina la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = ax$
2. $y = ax^2 + bx + c$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
4. $s = \sqrt{t} - \sqrt[3]{t}$
5. $h(t) = (5 - 3t^2)^6$
6. $y = (x^2 - 2)^{-3}$
7. $y = \left(2 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$
8. $y = x\sqrt{x^2+2}$
9. $f(x) = (x - 1)^3(x + 3)^4$
10. $h(s) = \frac{2s-1}{2s+3}$
11. $g(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
12. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x+3}}$
13. $y = \sqrt{\frac{ax^2+b}{ax^2-b}}$
14. $f(x) = x - \cos 2x$
15. $f(t) = \tan^3 2t$
16. $y = (1 - \sec x)^2$
17. $g(x) = \frac{1-\text{sen } x}{1+\text{sen } x}$
18. $s(t) = \frac{\sqrt{\cos t}}{t}$
19. $f(x) = \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}}$
20. $y = \log(x^2 + 5)$

21. $y = \ln\sqrt{x^2 - 3}$

22. $y = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

23. $y = e^{\sqrt{x^3}}$

24. $y = 2^{x^3+5}$

25. $h(t) = \frac{e^t}{e^t - e^{-t}}$

26. $f(x) = x^2 \ln x$

27. $f(x) = \text{arc cos } 2x$

28. $y = \text{arc tan}\frac{2}{x}$

29. $y = \text{arc sec}\sqrt{x}$

30. $y = \text{arc csc}(3x^3)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Aplicaciones de la diferencial

Sea $y = f(x)$ una función, si se da a $x$ un incremento $\Delta x$, la variable $y$ recibe un incremento $\Delta y$, que se considera un valor muy próximo a $dy$, entonces el valor aproximado de $f(x + \Delta x)$ es:

$$f(x + \Delta x) \approx y + \Delta y \approx y + f'(x)dx \approx y + dy$$

A esta expresión se le llama aproximación lineal y sirve para aproximar valores de funciones.

### *Aproximación lineal*

**EJEMPLOS**

**Ejemplos**

1 Determina el valor aproximado de $\sqrt{25.020}$

**Solución**

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt{x}$$

Se busca un valor $x$ próximo a 25.020, cuya raíz cuadrada sea exacta, en este caso $x = 25$, $y = \sqrt{25} = 5$; las veinte milésimas restantes se toman como la diferencial de la variable $x$.

$$dx = 0.020 = \frac{1}{50}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{500}$$

$$dy = \frac{1}{500}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt{25.020} = \sqrt{25 + 0.02} \approx 5 + \frac{1}{500} \cong \frac{2501}{500} = 5.002$$

Por consiguiente, $\sqrt{25.020} \approx 5.002$

**2** Determina el valor aproximado de $\sqrt[3]{70}$

**Solución**

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Se busca un valor $x$ próximo a 70, cuya raíz cúbica sea exacta, en este caso $x = 64$, y las seis unidades restantes son tomadas como la diferencial de la variable $x$, es decir, $dx = 6$

Se obtiene la diferencial:

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$$

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}(6) = \frac{1}{8}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{(64+6)} \approx 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$$

Por tanto, $\sqrt[3]{64} \approx \frac{33}{8} = 4.125$

**3** Obtén el valor aproximado de cos 40°

**Solución**

La función asociada a la operación es:

$$y = \cos x$$

Se busca un valor $x$ próximo a 40°, en este caso $x = 30° = \frac{\pi}{6}$, $y = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y los $10° = \frac{\pi}{18}$ restantes es el valor de la diferencial de $x$.

$$dx = \frac{\pi}{18}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = -\text{sen}\, x\, dx$$

$$dy = (-\text{sen}\, 30°)\left(\frac{\pi}{18}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

$$dy = -\frac{\pi}{36}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\cos 40° \approx \cos(30° + 10°) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{36} = \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36} = 0.778758941$$

Finalmente, $\cos 40° \approx \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36}$

*Aproximación del aumento o disminución de funciones*

### Ejemplo

Al enfriar una placa cuadrada metálica de 8 cm de longitud, su lado disminuye un 0.03%. ¿Cuánto disminuirá porcentualmente su área?

#### Solución

Se determina cuánto disminuyó el lado de la placa, para ello se obtiene el 0.03% de 8.

$$(8)(0.0003) = 0.0024$$

Si $x$ = lado de la placa, entonces $dx = -0.0024$ cm, el signo menos indica que decrece el lado.
Luego:
El área de la placa es:

$$A = x^2$$

La disminución en el área es:

$$dA = 2x\,dx$$

$$dA = 2(8 \text{ cm})(-0.0024 \text{ cm}) = -0.0384 \text{ cm}^2$$

Por último, se determina qué porcentaje representa 0.0384 del área total de la placa, es decir:

$$A = x^2 = (8 \text{ cm})^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$\text{Porcentaje de la disminución de su área} = \frac{(0.0384 \text{ cm}^2)(100\%)}{64 \text{ cm}^2} = 0.06\%$$

Por lo tanto, el área disminuye 0.06%

*Estimación de errores de magnitudes*

### Ejemplo

Se calculó la longitud del lado de un cuadrado y éste mide 2.5 cm, con un error de 0.02 cm. Determina el máximo error que se comete al medir el área del cuadrado.

#### Solución

El área se determina con la fórmula $A = x^2$, se obtiene la diferencial $dA = 2x\,dx$, al sustituir se obtiene $dA = 2(2.5 \text{ cm})(0.02 \text{ cm}) = 0.1 \text{ cm}^2$; $dA$ representa el máximo error cometido en la medición del área.

➲ **Error relativo y error porcentual.**

$$\text{error relativo} = \frac{dv}{v}\text{; error porcentual} = 100\frac{dv}{v}$$

### Ejemplo

Se calculó el radio de una esfera y éste mide 4.5 cm con un error máximo de 0.035 cm. Calcula el error relativo y porcentual que se obtiene al medir el volumen.

#### Solución

Del problema se obtiene:

$$r = 4.5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad dr = 0.035 \text{ cm}$$

La fórmula del volumen es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su diferencial es $dv = 4\pi r^2 dr$

Entonces, el error máximo cometido al medir el volumen es:

$$dv = 4\pi r^2 dr = 4\pi(4.5\text{ cm})^2(0.035\text{ cm})$$
$$dv = 2.835\pi\text{ cm}^3$$

Luego, el volumen de la esfera con radio 4.5 cm es:

$$v = \frac{4}{3}\pi(4.5\text{ cm})^3 = 121.5\pi\text{ cm}^3$$

Por tanto, el error relativo es:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2.835\pi\text{ cm}^3}{121.5\pi\text{ cm}^3} \rightarrow \frac{dv}{v} = 0.02\overline{3}$$

Y el error porcentual:

$$100\frac{dv}{v} = 100(0.02\overline{3}) \rightarrow 100\frac{dv}{v} = 2.\overline{3}\%$$

# EJERCICIO 51

Calcula el valor más aproximado de las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{86}$
2. $\sqrt[3]{35}$
3. $\sqrt[4]{20}$
4. sen 38°
5. $\sqrt{6} + \cos 50°$
6. $\sqrt[3]{130} + 2\tan 63°$
7. $(123.5)^{\frac{3}{2}}$
8. sen 53° − cos 44°
9. $\text{sen}^4\ 29°$
10. cot 75°
11. Una placa circular de radio 3.8 cm, se introduce en un horno, aumentando su radio en 0.012 cm. ¿Cuál es el aumento en la superficie de la placa?
12. La longitud de las aristas de un cubo es de 5.9 cm cada una, se midieron con un error máximo de 0.032 cm. Determina el máximo error que se cometió al medir su superficie y volumen.
13. Se calculó el diámetro de la base de un cilindro circular y éste midió 7.2 cm, con un error máximo de 0.05 cm. Calcula el error máximo que se cometió al medir el volumen si la altura es constante e igual a 10 cm.
14. Se midió un lado de un cuadrado y se cometió un error máximo de 0.012 cm. Calcula la longitud de uno de sus lados si el error máximo que se cometió al medir su área es de 0.192 $\text{cm}^2$.
15. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el volumen y la superficie de una esfera, si su radio mide 12 cm y el error máximo que se cometió al medirlo es de 0.015 cm.
16. El error relativo que se comete al medir el área de un cuadrado es de 0.18, si el error que se comete al medir la longitud de uno de sus lados es de 0.01 cm. Encuentra la longitud de cada uno de los lados del cuadrado.
17. El error relativo al medir el volumen de una esfera es de 0.02. Calcula el error máximo cometido al medir su diámetro, si éste mide 3 cm.
18. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el área lateral de un cilindro de base circular, si al medir el diámetro de la base se obtiene 4.5 cm con un error máximo de 0.004 cm y la altura es de 5.6 cm.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cálculo integral

# Capítulo 1

## Sumas

**Reseña HISTÓRICA**

Nació en Breselenz, una aldea cercana a Dannenberg en el reino de Hannover, actualmente parte de Alemania.

Fue un matemático que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados se incorporaron a la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein. La cátedra de Gauss en Gottingen fue ocupada por Dirichlet en el año 1855 y después de su muerte por Riemann. En esos tiempos sufrió de tuberculosis y estuvo sus últimos años en Italia en un intento por mejorar su salud.

George Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)

## Definición

La suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

se representa con el símbolo sigma $\sum$, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

**Ejemplo**

Determina $\sum_{i=1}^{5} i^2$

**Solución**

Se sustituye $i$ por los valores de 1 a 5, se eleva cada uno de ellos al cuadrado y se suman los resultados:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

De manera que, $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55$

## Propiedades

1. $\sum_{i=a}^{n} k = (n - a + 1)k$
2. $\sum_{i=a}^{n} \left[ f(i) + g(i) \right] = \sum_{i=a}^{n} f(i) + \sum_{i=a}^{n} g(i)$
3. $\sum_{i=a}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=a}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n} \left[ f(i) - f(i-1) \right] = f(n) - f(0)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\sum_{i=3}^{7} 8$

**Solución**

Al aplicar la propiedad correspondiente a una constante, se obtiene:

$$\sum_{i=3}^{7} 8 = (7 - 3 + 1)8 = 40$$

2 Precisa el valor de $\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i)$

**Solución**

Se aplican las propiedades de las sumas y se determina que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = \sum_{i=1}^{4} i^2 + \sum_{i=1}^{4} 3i = \sum_{i=1}^{4} i^2 + 3\sum_{i=1}^{4} i$$

Se desarrollan,

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 30;\ 3\sum_{i=1}^{4} i = 3\,(1 + 2 + 3 + 4) = 3(10) = 30$$

Finalmente tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = 30 + 30 = 60$$

3 Calcula el valor de $\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right)$

**Solución**

Al aplicar las propiedades de las sumas, se determina:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right) = \sum_{n=0}^{5}2n^3-\sum_{n=0}^{5}\frac{2}{3}n+\sum_{n=0}^{5}7 = 2\sum_{n=0}^{5}n^3-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n+\sum_{n=0}^{5}7$$

Se desarrollan las sumas,

$$2\sum_{n=0}^{5}n^3 = 2[(0)^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+(4)^3+(5)^3] = 450;$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n = -\frac{2}{3}(0+1+2+3+4+5) = -\frac{2}{3}(15) = -10;$$

$$\sum_{n=0}^{5}7 = 7(5-0+1) = 7(6) = 42$$

Por tanto, se precisa que:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right) = 450-10+42 = 482$$

4 Determina el valor de $\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c)$

**Solución**

Al aplicar las propiedades de las sumas se encuentra que:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c) = \sum_{i=6}^{8}3ai^2+\sum_{i=6}^{8}12b\,i-\sum_{i=6}^{8}3c = 3a\sum_{i=6}^{8}i^2+12b\sum_{i=6}^{8}i-\sum_{i=6}^{8}3c$$

Se desarrollan las sumas,

$$3a\sum_{i=6}^{8}i^2 = (3a)[(6)^2+(7)^2+(8)^2] = (3a)(149) = 447a;$$

$$12b\sum_{i=6}^{8}i = (12b)(6+7+8) = (12b)(21) = 252b;\quad \sum_{i=6}^{8}3c = (3c)(8-6+1) = (3c)(3) = 9c$$

Finalmente el resultado es:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c) = 447a+252b-9c$$

# EJERCICIO 1

Realiza las siguientes sumas:

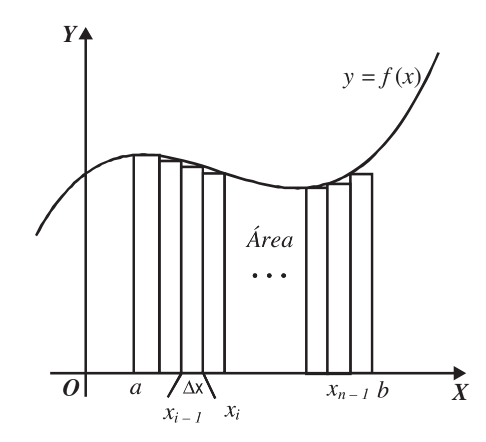
1. $\sum_{i=1}^{4} i^4$
2. $\sum_{i=2}^{6}(4-3i)$
3. $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{2-i}{4}\right)$
4. $\sum_{n=3}^{8}\left(\frac{2}{n-1}\right)$
5. $\sum_{i=1}^{7}(3i-2)^3$
6. $\sum_{n=2}^{4}(n^2-4)$
7. $\sum_{i=4}^{10}\left(\frac{i-i^2}{3}\right)$
8. $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{ai+b}{2a}\right)$
9. $\sum_{n=2}^{4}(3n^2-5n+7)$
10. $\sum_{n=1}^{5}\frac{n(n+1)}{n+2}$
11. $\sum_{n=3}^{6}(n^3-n)$
12. $\sum_{i=1}^{9}\left(i^2-(i-1)^2\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma de Riemann (rectángulos inscritos y circunscritos)

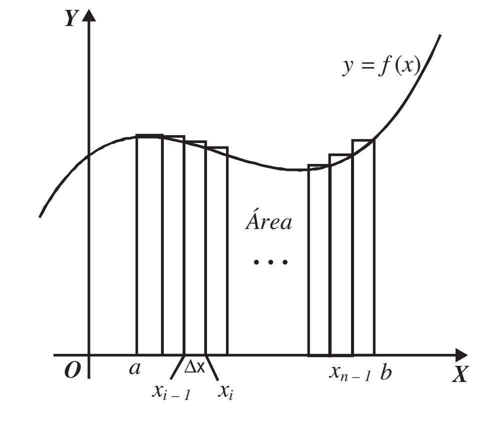
Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ el área $A$ bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo dado, se obtiene realizando estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra.

Rectángulos inscritos
sumas inferiores




$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + (i-1)\Delta x)$$

Rectángulos circunscritos
sumas superiores




$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

*Sumas básicas*

1. $\sum_{i=1}^{n} k = kn$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$

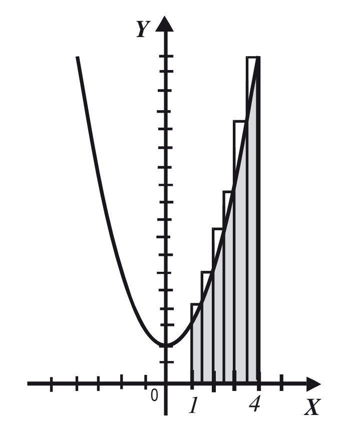
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ y el eje $x$ en el intervalo [1, 4]. Utiliza sumas superiores.

**Solución**

Gráfica




Se sustituye en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(a+i\Delta x) = f\left(1+\frac{3i}{n}\right) = \left(1+\frac{3i}{n}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + \frac{6i}{n} + 3$$

Por consiguiente,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}+\frac{6i}{n}+3\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}+\frac{18i}{n^2}+\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{27i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

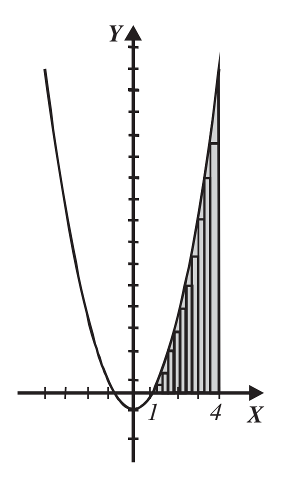
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2}+\frac{9}{n}\cdot n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(27+\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right) = 27u^2$$

Finalmente, el área es $A = 27u^2$

2 Aplica sumas inferiores para encontrar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 - 1$ y el eje $x$ en el intervalo [1, 4]

**Solución**




Se aplica la fórmula

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + (i-1)\Delta x)$$

Donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + (i-1)\Delta x = 1 + (i-1)\frac{3}{n} = \frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1$$

$$f(a + (i-1)\Delta x) = f\left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right) = \left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right)^2 - 1$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + i\left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right) + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^2}i^2 + \left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right)i + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3}i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}i + \left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + n\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} + 9 + \frac{9}{n} - \frac{27}{n} - \frac{27}{n^2} + \frac{27}{n^2} - \frac{18}{n}\right]$$

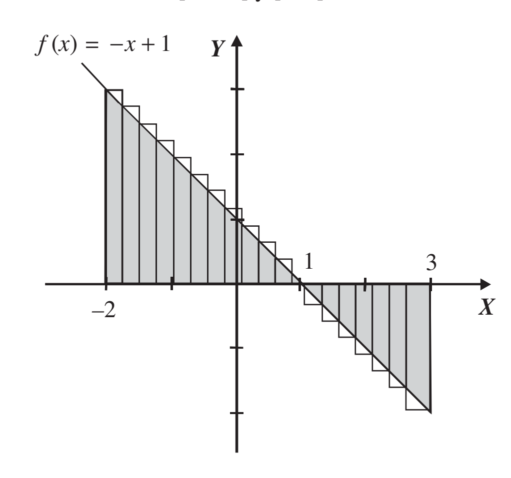
$$= \lim_{n\to\infty}\left[18 - \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right] = 18u^2$$

Por tanto, $A = 18u^2$

3 Determina el área limitada por la recta $f(x) = -x + 1$ y el eje $X$, mediante sumas superiores en el intervalo $[-2, 3]$

**Solución**

Al analizar la gráfica, se consideran 2 intervalos $[-2, 1]$ y $[1, 3]$.




Cálculo del área de $[-2, 1]$
Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{3}{n}$

$$f(a+i\Delta x) = -\left(-2+\frac{3i}{n}\right)+1 = -\frac{3i}{n}+3$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(-\frac{3i}{n}+3\right) = \frac{9}{2}u^2$$

Se realiza el cálculo del área de $[1, 3]$,
Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{2}{n}$

$$f(a + i\Delta x) = -\left(1+\frac{2i}{n}\right)+1 = -\frac{2i}{n}$$

Se sustituye en la fórmula y se tiene como resultado:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2i}{n}\right) = -2u^2$$

El signo negativo indica que el área se encuentra por debajo del eje $x$, pero para efectos del cálculo del área total, se considera su valor absoluto.
Por tanto, el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{9}{2}u^2 + 2u^2 = \frac{13}{2}u^2$$

## EJERCICIO 2

Emplea sumas superiores para encontrar el área limitada por la curva, el eje $X$, las rectas dadas o el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x + 5; x = 2, x = 5$
2. $f(x) = -2x + 6; x = 1, x = 4$
3. $f(x) = 4 - x^2; [-2, 2]$
4. $f(x) = x^3 - 4x; [-1, 1]$
5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 3; x = 0, x = 2$

Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje $X$ en el intervalo indicado utilizando sumas inferiores o superiores.

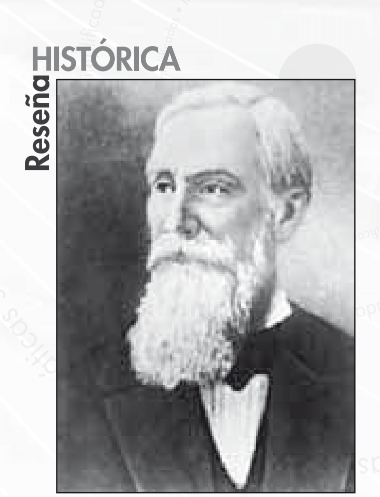
6. $f(x) = \frac{h}{b}x; [0, b]$
7. $f(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2; [-3, 3]$
8. $f(x) = (x - 2)^3 + 1; [1, 3]$
9. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x; [0, 3]$
10. $f(x) = 5x^4; [1, 3]$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 2

## Integrales inmediatas

Reseña HISTÓRICA



Matemático ruso conocido por sus trabajos en teoría de aproximación de funciones, geometría diferencial, polinomios ortogonales y probabilidad.

El nombre "Chevichev" es una transliteración del alfabeto cirílico, por lo que a veces se encuentra con grafías diferentes, por ejemplo: Chevyshev, Tchebyshef y otras similares.

Su aportación en matemáticas es notable, debido a sus múltiples aplicaciones tanto en teoría de la aproximación de funciones por polinomios, como en análisis numérico (inversión de matrices, la evaluación numérica de integrales, la integración numérica de ecuaciones diferenciales, o la más precisa aproximación a una función).

Pafnuti Lvovich Chevichev murió el 26 de noviembre de 1894 en San Petersburgo.

Pafnuti Lvovich Chevichev
(1821-1894)

## Definición

Si $F(x)$ es una función con derivada $f'(x)$ entonces, $F(x)$ se llama *integral indefinida* o *antiderivada de* $f'(x)$.
La antiderivada de una función no es única.

### Ejemplo

$$x^3,\ x^3 + 4,\ x^3 - 1$$

Son todas antiderivadas de $f'(x) = 3x^2$, puesto que todas las antiderivadas de $f'(x)$ quedan incluidas en $F(x) = x^3 + C$, en donde $C$ se llama constante de integración.

Para denotar la integral indefinida de $f'(x)$ se utiliza:

$$\int f'(x)dx$$

Entonces,

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

Fórmulas

1. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
2. $\int a\,dv = a\int dv$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
5. $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
6. $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$
7. $\int a^v\,dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$
8. $\int e^v\,dv = e^v + C$
9. $\int \text{sen}\, v\,dv = -\cos v + C$
10. $\int \cos v\,dv = \text{sen}\, v + C$
11. $\int \sec^2 v\,dv = \tan v + C$
12. $\int \csc^2 v\,dv = -\cot v + C$
13. $\int \sec v \tan v\,dv = \sec v + C$
14. $\int \csc v \cot v\,dv = -\csc v + C$
15. $\int \tan v\,dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$
16. $\int \cot v\,dv = \ln|\text{sen}\, v| + C$
17. $\int \sec v\,dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$
18. $\int \csc v\,dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int x^4dx$

**Solución**

$$\int x^4dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

2 Encuentra $\int 3ab^2x^4dx$

**Solución**

$$\int 3ab^2x^4\ dx = 3ab^2\int x^4\ dx = 3ab^2\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{3ab^2x^5}{5} + C$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\int (5x^3 + 2x^2 - 6x + 3)dx$?

**Solución**

$$\begin{aligned}\int(5x^3 + 2x^2 - 6x + 3)dx &= 5\int x^3dx + 2\int x^2dx - 6\int x\ dx + 3\int dx\\ &= 5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C\\ &= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 3x + C\\ &= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + C\end{aligned}$$

4 Obtén $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

**Solución**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

5 ¿Cuál es el resultado de $\int -\frac{3\ dx}{x^3}$?

**Solución**

$$\int -\frac{3\ dx}{x^3} = -3\int\frac{dx}{x^3} = -3\int x^{-3}dx = -3\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{-3x^{-2}}{-2} + C = \frac{3}{2x^2} + C$$

## Integrales por cambio de variable

Algunas integrales no se pueden resolver de forma inmediata, entonces se tratará de ser posible transformar la integral a una de las siguientes expresiones

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int\frac{dv}{v} = \ln|v| + C$$

En las integrales que se resuelven por cambio de variable, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se identifica la variable.
2. Se obtiene la diferencial de esta variable y se efectúa el despeje de la misma.
3. Se realiza la sustitución correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente integral:

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx$$

**Solución**

Se elige, de la siguiente forma, la nueva variable que se va a integrar:

$$v = 2 + x^2 \quad \rightarrow \quad dv = 2x\,dx$$

Se realizan las sustituciones y se resuelve la integral para obtener el resultado.

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx = \int (2+x^2)^{\frac{3}{2}}(2x)dx = \int v^{\frac{3}{2}}dv = \frac{v^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C = \frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+C$$

Por consiguiente,

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+C$$

2 Determina el resultado de $\int \sqrt{m+nx}\,dx$

**Solución**

$v = m + nx,\ dv = ndx$ donde $dx = \dfrac{dv}{n}$

Al realizar las sustituciones se genera la integral:

$$\int \sqrt{m+nx}\,dx = \int (m+nx)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{n}\int v^{\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3n}+C = \frac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n}+C$$

Finalmente, $\int \sqrt{m+nx}\,dx = \dfrac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n}+C$

3 Encuentra el resultado de $\int x(2+x^3)^2dx$

**Solución**

$v = 2 + x^3,\ dv = 3x^2dx$ donde $dx = \dfrac{dv}{3x^2}$

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int x\cdot v^2\frac{dv}{3x^2} = \int v^2\frac{dv}{3x}$$

En este ejemplo el cambio de variable no se puede efectuar debido a que la nueva integral tiene dos variables. Entonces, se realiza el producto indicado y se resuelve la integral.

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int (4+4x^3+x^6)x\,dx = \int (4x+4x^4+x^7)dx = 2x^2+\frac{4}{5}x^5+\frac{x^8}{8}+C$$

Por consiguiente,

$$\int x(2+x^3)^2dx = 2x^2+\frac{4}{5}x^5+\frac{x^8}{8}+C$$

4 Precisa la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{2+3x}$$

**Solución**

$v = 2 + 3x$, $dv = 3dx$ donde $\dfrac{dv}{3} = dx$

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\ln|v| + C = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

5 Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}}$$

**Solución**

$v = c + ae^{\theta}$, $dv = ae^{\theta}d\theta$ donde, $\dfrac{dv}{a} = e^{\theta}d\theta$

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\ln|v| + C = \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

6 Encuentra la primitiva de

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\,dx$$

**Solución**

$v = 1 - \cos 5x$, $dv = 5 \text{ sen } 5x\, dx$ donde $\dfrac{dv}{5} = \text{sen } 5x\, dx$

Se realiza la sustitución:

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\,dx = \int \frac{1}{5} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\ln|v| + C = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{\text{sen } 5x\, dx}{1-\cos 5x} = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

# EJERCICIO 3

Efectúa las siguientes integrales:

1. $\int x^6 dx$
2. $\int 5x^4 dx$
3. $\int bx^3 dx$
4. $\int \sqrt{3}x^2 dx$
5. $\int a\,dx$
6. $\int \frac{3\,dx}{4}$
7. $\int \frac{dx}{3}$
8. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$
9. $\int 5\sqrt[4]{x}\,dx$
10. $\int \frac{dx}{x^3}$
11. $\int \frac{5\,dx}{x^4}$
12. $\int \frac{4\,dx}{x}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$
14. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt[3]{x}}$
15. $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$
16. $\int \frac{a\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
17. $\int \frac{5\,dx}{2x}$
18. $\int \sqrt{bx}\,dx$
19. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}} - 4\sqrt[3]{x}\right)dx$
20. $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x}\right)dx$
21. $\int \sqrt[3]{at}\,dt$
22. $\int \sqrt{6t}\,dt$
23. $\int (8x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 3)\,dx$
24. $\int (ax^3 - bx^2 - cx + d)dx$
25. $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{3x}{\sqrt{a}} - 5\sqrt{b}\right)dx$
26. $\int \left(\frac{x^4 - 6x^3 - 7x}{x}\right)dx$
27. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$
28. $\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$
29. $\int \left(y^{\frac{5}{2}} - 5y^{\frac{4}{3}} - 2y^{\frac{1}{4}} - \sqrt{y}\right)dy$
30. $\int \left(\frac{y^{\frac{7}{2}} - y^{\frac{5}{3}} - y^{\frac{1}{4}}}{y^2}\right)dy$
31. $\int \sqrt[3]{t}(5t^2 - 3t + 2)\,dt$
32. $\int \sqrt[3]{7t}\,dt$
33. $\int (3x+4)^6 dx$
34. $\int (ax^2 - b)^5 x\,dx$
35. $\int t^2(t^3 - 4)^2 dt$
36. $\int (a - by)^4 dy$
37. $\int (t^2 - 6)^2 dt$
38. $\int x(x+4)^2 dx$

39. $\int x^2(x+1)^3 dx$

40. $\int \sqrt{m+ny}\, dy$

41. $\int \sqrt{5x-3}\, dx$

42. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{at^2+b}}$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}}$

44. $\int \left(\sqrt{x}-4\right)^2 dx$

45. $\int \frac{x\, dx}{(3x^2-4)^4}$

46. $\int \frac{5\, dx}{(3x-4)^2}$

47. $\int \frac{8x\, dx}{(2x^2+5)^4}$

48. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-b\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

49. $\int \frac{dt}{at+b}$

50. $\int \frac{x\, dx}{3x^2-4}$

51. $\int \frac{dx}{x+3}$

52. $\int \frac{4x\, dx}{2x^2-6}$

53. $\int \frac{(2x-3)\, dx}{(x^2-3x+6)^2}$

54. $\int (x^2-2)\sqrt{x^3-6x+3}\, dx$

55. $\int \frac{y^{n-1}dy}{(ay^n+b)^m}$

56. $\int e^{3x}(1-e^{3x})^2 dx$

57. $\int \frac{(4-\ln|x+3|)^3 dx}{x+3}$

58. $\int \cos 4x(1-\text{sen } 4x)^3 dx$

59. $\int \csc^2 x\sqrt{3+\cot x}\, dx$

60. $\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{\sqrt{1-\sec 2x}} dx$

61. $\int \frac{\cos ax}{1-\text{sen } ax} dx$

62. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{e^{\sqrt{x}}-1}}{\sqrt{x}} dx$

63. $\int \cot x(2+\ln|\text{sen } x|)\, dx$

64. $\int \frac{\text{sen } 2x\, dx}{(1-\cos^2 x)^3}$

65. $\int \text{sen}^2 bx \cos bx\, dx$

66. $\int \cot mx \csc^2 mx\, dx$

67. $\int \cos^2 4x\, \text{sen } 4x\, dx$

68. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\text{sen } 5x+4}} dx$

69. $\int \frac{4x+2}{x+2} dx$

70. $\int \frac{(3x^2+2)\, dx}{x-1}$

71. $\int \frac{dy}{y \ln^2 y}$

72. $\int \frac{dx}{2x \ln 3x}$

73. $\int x^n \sqrt{ax^{n+1}+b}\, dx$

74. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\, dx$

75. $\int \csc^2 3x \cos 3x\, dx$

76. $\int \left(\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+1}\right) dx$

77. $\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+5}\right)dx$

78. $\int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{5}{3x-4}\right)dx$

79. $\int\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$

80. $\int\operatorname{sen}^3 x\operatorname{sen}2x\,dx$

81. $\int\frac{dw}{\operatorname{sen}^2 w\sqrt{1-\cot w}}$

82. $\int\frac{3\operatorname{sen} y\cos y}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2 y}}\,dy$

83. $\int\sqrt{1+\cos\alpha}\,d\alpha$

84. $\int\frac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{4}}x}{\cos^{\frac{11}{4}}x}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

*Integrales de funciones exponenciales*

Las siguientes fórmulas se emplean para integrar funciones exponenciales

$$\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln a}+C \quad \text{y} \quad \int e^v dv=e^v+C$$

EJEMPLOS

1 Encuentra la integral indefinida de $\int e^{2x}dx$

**Solución**

Se escoge la variable de acuerdo con la fórmula que se va a emplear, en este caso,

$$v=2x,\quad \text{su diferencial}\quad dv=2dx\quad \text{donde,}\quad dx=\frac{dv}{2}$$

Se realiza el cambio de variable y el resultado es,

$$\int e^{2x}dx=\int e^v\frac{dv}{2}=\frac{1}{2}\int e^v dv=\frac{1}{2}e^v+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

Finalmente,

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

2 Determina el resultado de $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$

**Solución**

$v=\frac{x}{3},\quad dv=\frac{1}{3}dx\quad$ donde, $\quad 3dv=dx$

Por consiguiente, al realizar la sustitución se obtiene:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx=3\int e^v\,dv=3e^v+C=3e^{\frac{x}{3}}+C$$

3 Obtén la función primitiva de $\int a^{nx}dx$

**Solución**

$v = nx, dv = n\,dx$ donde, $\dfrac{dv}{n} = dx$

Se realiza la sustitución,

$$\int a^{nx}dx = \frac{1}{n}\int a^{v}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{a^{v}}{\ln a} + C = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

Por tanto,

$$\int a^{nx}dx = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \dfrac{dx}{e^{2x}}$

**Solución**

$v = -2x, dv = -2dx$ donde, $\dfrac{dv}{-2} = dx$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{v}dv = -\frac{1}{2}e^{v} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C = \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

## EJERCICIO 4

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int e^{4x}dx$
2. $\int 8e^{\frac{x}{2}}\,dx$
3. $\int e^{ax+b}dx$
4. $\int \dfrac{e^{\sqrt{3x}}dx}{\sqrt{3x}}$
5. $\int \dfrac{e^{8x}}{e^{5x}}\,dx$
6. $\int e^{\cos 4x}\,\text{sen}\,4x\,dx$
7. $\int 2x^{2}e^{x^{3}}dx$
8. $\int b^{4x}dx$
9. $\int 3^{2x}dx$
10. $\int 2^{x}e^{x}dx$
11. $\int \sqrt[3]{e^{x}}dx$
12. $\int \sqrt{e^{3x}}dx$
13. $\int \dfrac{dx}{5^{4x}}$
14. $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x^{2}}}}{x^{3}}\,dx$
15. $\int \left[\sqrt[3]{e^{x}}\right]^{4}dx$
16. $\int x^{2}(3 - e^{x^{3}})\,dx$
17. $\int (2x-3)e^{x^{2}-3x+1}dx$
18. $\int \dfrac{dt}{\sqrt[5]{e^{2t}}}$

19. $\int e^{\frac{1}{\sec 2x}} \text{sen } 2x\, dx$

20. $\int \frac{t^3 dt}{e^{2t^4}}$

21. $\int 4^x \cdot e^{2x} dx$

22. $\int \left( e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{x}{2}} \right) dx$

23. $\int (e^{3x} - 2)^2 dx$

24. $\int x \cdot 5^{x^2} dx$

25. $\int (e^{2x} - e^{-2x})^2 dx$

26. $\int e^{\tan 3x} \sec^2 3x\, dx$

27. $\int x^2 5^{x^3} dx$

28. $\int (10^{3x} - 2^x)\, dx$

29. $\int \left( e^{\frac{x}{n}} - a^{\frac{x}{n}} \right) dx$

30. $\int \left( \frac{e^{4x} - 5}{e^{2x}} \right) dx$

31. $\int \left( \frac{1 - e^{ax}}{e^{ax}} \right) dx$

32. $\int \frac{e^{\cos^2 x}}{\csc 2x} dx$

33. $\int \frac{e^{\text{arc sen } 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$

34. $\int \frac{e^{\text{arc tan } x}}{1 + x^2} dx$

35. $\int (3^{2x} + 3^{4x})^2 dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Integrales de funciones trigonométricas*

Las funciones trigonométricas se integran con las siguientes fórmulas y en algunos casos auxiliándose de un cambio de variable.

1. $\int \text{sen } v\, dv = -\cos v + C$

2. $\int \cos v\, dv = \text{sen } v + C$

3. $\int \sec^2 v\, dv = \tan v + C$

4. $\int \csc^2 v\, dv = -\cot v + C$

5. $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + C$

6. $\int \csc v \cot v\, dv = -\csc v + C$

7. $\int \tan v\, dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$

8. $\int \cot v\, dv = \ln|\text{sen } v| + C$

9. $\int \sec v\, dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$

10. $\int \csc v\, dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \cos my\, dy$

**Solución**

Se hace un cambio de variable y se obtiene su diferencial:

$$v = my, \quad dv = mdy, \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{m} = dy$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int \cos my\, dy = \int \cos v \frac{dv}{m} = \frac{1}{m}\int \cos v\, dv = \frac{1}{m}\text{sen } v + C = \frac{1}{m}\text{sen } my + C$$

2 ¿Cuál es el resultado de $\int \sec 7x\, dx$ ?

**Solución**

$v = 7x, \quad dv = 7dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{7} = dx$

$$\int \sec 7x\, dx = \frac{1}{7}\int \sec v\, dv = \frac{1}{7}\ln|\sec v + \tan v| + C = \frac{1}{7}\ln|\sec 7x + \tan 7x| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int x \cot x^2 dx$

**Solución**

$v = x^2, \quad dv = 2x\, dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{2} = x\, dx$

Se realiza el cambio de variable y se resuelve la integral:

$$\int x \cot x^2 dx = \int \cot v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \cot v\, dv = \frac{1}{2}\ln|\text{sen } v| + C = \frac{1}{2}\ln|\text{sen } x^2| + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

**Solución**

La fórmula que se va a utilizar es $\int \tan v\, dv = \ln|\sec v| + C$ , de manera que:

$$v = \sqrt{x}, \quad dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{donde,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dv$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral:

$$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \tan v\, dv = 2\ln|\sec v| + C = 2\ln|\sec\sqrt{x}| + C$$

5 Determina $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}dx$

**Solución**

Antes de resolver esta integral se recomienda emplear identidades trigonométricas.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\cos x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}=\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$$

$$=\tan 2x$$

Al sustituir la identidad encontrada, se tiene $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}dx=\int \tan 2x\,dx$, donde:

$$v=2x,\quad dv=2dx;\quad dx=\frac{dv}{2}$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}dx=\int\tan 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\tan v\,dv=-\frac{1}{2}\ln|\cos v|+C=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$$

## EJERCICIO 5

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 5x\,dx$
2. $\int \cos 6x\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}\frac{x}{4}\,dx$
4. $\int \tan bx\,dx$
5. $\int \sec^2\frac{x}{a}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax}$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 bx}$
8. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$
9. $\int \csc\frac{t}{4}\cot\frac{t}{4}\,dt$
10. $\int x\operatorname{sen} 4x^2 dx$
11. $\int x^2\cos\frac{x^3}{5}\,dx$
12. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx$
13. $\int \sec ax\tan ax\,dx$
14. $\int 3x\sec^2 4x^2 dx$
15. $\int \csc^2(3x-1)dx$
16. $\int \cot(ax-b)dx$
17. $\int \sec ax\,dx$
18. $\int x\csc 4x^2 dx$

19. $\int \cot x\sqrt{\csc x}\, dx$

20. $\int (\cot b\theta + \tan b\theta)^2\, d\theta$

21. $\int (\csc 3x - \cot 3x)^2\, dx$

22. $\int (\tan 5x - \sec 5x)^2\, dx$

23. $\int \frac{\text{sen}^3 x}{1-\cos x}\, dx$

24. $\int x\cos(2-x^2)\, dx$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x}\, dx$

26. $\int \sqrt{1+\text{sen}\, 2x}\, dx$

27. $\int \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\, dx$

28. $\int \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]^{-2} dx$

29. $\int \frac{dw}{\cos^2 w - \cos 2w}$

30. $\int \left(\frac{1+\text{sen}^2 x}{1+\cos 2x}\right) dx$

31. $\int (\cot^2 x + \cot^4 x)\, dx$

32. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{sen}\, x}}\, dx$

33. $\int \frac{dw}{\text{sen}^2 w(1-4\cot w)}$

34. $\int \left(\frac{1-\text{sen}\, x}{1+\text{sen}\, x}\right) dx$

35. $\int \frac{dy}{\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)}$

36. $\int \frac{2\tan\alpha\, d\alpha}{\sec^2\alpha - 2\tan^2\alpha}$

37. $\int \frac{\text{sen}\, 2\theta}{\sqrt{\text{sen}^2\theta + 1}}\, d\theta$

38. $\int e^{2x}\text{sen}(e^{2x})\, dx$

39. $\int \frac{\text{sen}(\ln x^2)}{x}\, dx$

40. $\int \frac{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}{3x}\, dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Integrales con expresiones de la forma*

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2 - v^2},\ v^2 \pm a^2,\ a^2 - v^2$$

Fórmulas

1. $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a} + C$

2. $\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + C$

3. $\int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| + C$

4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\frac{v}{a} + C$

5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc sec}\frac{v}{a} + C$

7. $\int \sqrt{a^2-v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sen}\frac{v}{a} + C$

8. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+36}$

**Solución**

Se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a} + C$$

se deducen las siguientes equivalencias y se sustituyen en la fórmula.

$$v^2 = x^2,\ v = x \text{ y } dv = dx;\ a^2 = 36,\ a = 6$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+36} = \frac{1}{6}\text{arc tan}\frac{x}{6} + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{16x^2-9}$

**Solución**

Para resolver la integral se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + C$$

se determina la variable y se encuentra su diferencial,

$$v^2 = 16x^2,\ v = 4x,\ dv = 4dx \quad \text{y} \quad \frac{dv}{4} = dx;\ a^2 = 9,\ a = 3$$

Finalmente, se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{16x^2-9} = \frac{1}{4}\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + C = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int \frac{m}{n^2x^2-p^2}\,dx$

**Solución**

$$a^2 = p^2,\ a = p \quad v^2 = n^2x^2;\ v = nx, dv = ndx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{n} = dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2-p^2} = \frac{m}{n}\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2(p)}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C$$

Se concluye que,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2-p^2} = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C$$

4 Precisa el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$

**Solución**

Para resolver la integral se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C$$

se deduce $a$, $v$ y la diferencial $dv$

$$a^2 = 9,\ a = 3;\ v^2 = 25x^2,\ v = 5x,\ dv = 5\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{5} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3} + C$$

5 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}}$

**Solución**

$$a^2 = 5,\ a = \sqrt{5};\ v^2 = 9x^2,\ v = 3x,\ dv = 3\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{3} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}} = \int \frac{\frac{dv}{3}}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+5}\right| + C$$

## EJERCICIO 6

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^2+81}$
2. $\int \frac{dy}{by^2+b^3}$
3. $\int \frac{dy}{y^2-16}$
4. $\int \frac{dx}{25-4x^2}$
5. $\int \frac{dx}{2x^2-16}$
6. $\int \frac{dx}{9x^2-144}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-7}}$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8}}$

11. $\int \frac{4\,dx}{b^4x^2+m^2}$

12. $\int \frac{2v\,dv}{v^4-b^4}$

13. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}$

14. $\int \frac{dx}{\sec x(1-\operatorname{sen}^2 x)}$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$

16. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{3-3x^2}}$

17. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x}\sqrt{e^x+4}}$

18. $\int \frac{dy}{\sqrt{5-4y^2}}$

19. $\int \frac{dy}{25a-a^3y^2}$

20. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2+5}}$

21. $\int \frac{dy}{5-2y^2}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$

23. $\int \frac{dx}{x^2+b^4}$

24. $\int \frac{dy}{\sqrt{4-2y^2}}$

25. $\int e^{2x}\sqrt{16-e^{4x}}\,dx$

26. $\int \sqrt{1-2x^2}\,dx$

27. $\int \frac{dm}{\sqrt{8-\frac{m^2}{5}}}$

28. $\int \sqrt{(2x+1)^2-a^2}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{28+343x^{2m}}}{x^{1-m}}\,dx$

30. $\int \frac{dt}{2t^2+7}$

31. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{5x^2-16}}$

32. $\int \frac{dt}{\csc(2t)\cdot(5-\cos^2 2t)}$

33. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+\cos^2 x}$

34. $\int \sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\,dt+\int \ln(3t)\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\,dt$,

demuestra que:

$$\frac{t\ln(3t)}{2}\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}+2\ln\left(t\ln(3t)+\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\right)+C$$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

*Integrales en las que se completa un trinomio cuadrado perfecto*

En aquellas integrales con un denominador de la forma $ax^2 + bx + c$, se utiliza el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para llegar a las formas:

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2-v^2},\ v^2 \pm a^2,\ a^2-v^2$$

Según sea el caso.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

**Solución**

Se completa el TCP, entonces, el denominador se expresa como:

$$x^2+4x+3=(x^2+4x+4)-4+3=(x+2)^2-1$$

Donde,

$$v^2=(x+2)^2,\ v=x+2,\ dv=dx;\ a^2=1,\ a=1$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-1}=\frac{1}{2(1)}\ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$

**Solución**

La expresión

$$x^2-8x+25=(x^2-8x+16)-16+25=(x-4)^2+9$$

Donde,

$$v^2=(x-4)^2,\ v=x-4,\ dv=dx;\ a^2=9,\ a=3$$

Finalmente,

$$\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}=3\int \frac{dx}{(x-4)^2+9}=3\cdot\frac{1}{3}\text{arc tan}\frac{x-4}{3}+C=\text{arc tan}\left(\frac{x-4}{3}\right)+C$$

3 Encuentra el resultado de la integral indefinida $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

**Solución**

Se completa el TCP y el trinomio se convierte a la expresión equivalente.

$$2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

Se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a}+C$$

se obtiene la variable, su diferencial y el valor de $a$, entonces,

$$v^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\ v=x-\frac{1}{2},\ dv=dx;\ a^2=\frac{1}{4},\ a=\frac{1}{2}$$

Se realizan los cambios y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\text{arc tan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C=\text{arc tan}\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{1}{2}}+C$$

Por tanto, el resultado de la integral es:

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}=\text{arc tan}(2x-1)+C$$

4 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

**Solución**

La expresión

$$2-3x-4x^2=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right]=4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]$$

Se deduce entonces la fórmula que se va a utilizar:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=\text{arc sen}\frac{v}{a}+C$$

Donde,

$$v^2=\left(x+\frac{3}{8}\right)^2 \quad v=x+\frac{3}{8},\ dv=dx;\ a^2=\frac{41}{64},\ a=\frac{\sqrt{41}}{8}$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{x+\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C=\frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{\frac{8x+3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C=\frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$$

5 Encuentra el resultado de $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5}$

**Solución**

En este caso, la expresión se representa como:

$$\frac{2x+5}{x^2+2x+5}=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{3}{x^2+2x+5}$$

Se ha elegido esta separación debido a que,

$$\text{si } v=x^2+2x+5 \text{ entonces } dv-(2x+2)dx$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Para la integral $\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el cambio,

$$v = x^2+2x+5,\ dv = (2x+2)dx \text{ y } \frac{dv}{(2x+2)} = dx$$

Resultando:

$$\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + C$$

Ahora, con la integral $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el siguiente cambio:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\text{arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

Finalmente, al sustituir se obtiene:

$$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + 3\cdot\frac{1}{2}\text{arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

6 Obtén el resultado de $\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}\,dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^x}}$

**Solución**

La integral se expresa de la siguiente manera:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^x}} = \int \frac{\sqrt{e^x}(e^{2x}+4e^x)dx}{\sqrt{e^x}\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} = \int \frac{(e^{2x}+4e^x)\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}}$$

Se realiza la separación en el numerador

$$\int \frac{(e^{2x}+4e^x)\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^x+e^x)\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^x)dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} + \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}}$$

Ahora, para la integral $\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se realiza el siguiente cambio:

$$v = e^{2x} + 6e^{x} + 5,\ dv = (2e^{2x} + 6e^{x})dx = 2(e^{2x} + 3e^{x})dx$$

Entonces,

$$\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}$$

Por consiguiente, para la integral $\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se completa el trinomio cuadrado perfecto y se realiza el cambio de variable.

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-9+5}} = \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-4}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}}$$

Donde,

$$w = e^{x} + 3,\ dw = e^{x}dx$$

Entonces,

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}} = \int \frac{dw}{\sqrt{w^{2}-4}} = \ln\left|w+\sqrt{w^{2}-4}\right| = \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}\right|$$

$$= \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right|$$

Por tanto, se concluye que:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}}+4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5} + \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right| + C$$

## EJERCICIO 7

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^{2}+6x}$
2. $\int \frac{dx}{x^{2}+8x}$
3. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x+6}$
4. $\int \frac{dx}{2x^{2}+3x+1}$
5. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x-14}$
6. $\int \frac{dx}{2x^{2}+9x+4}$
7. $\int \frac{dx}{a^{2}x^{2}+8ax+15}$
8. $\int \frac{3e^{x}dx}{e^{2x}+9e^{x}+20}$
9. $\int \frac{dw}{13w-2w^{2}-15}$
10. $\int \frac{d\alpha}{5+9\alpha-2\alpha^{2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8}$

12. $\int \frac{e^{2x} + 3e^x - 3}{e^{2x} + 2e^x - 3}\, dx$

13. $\int \frac{\cos x\, dx}{(\text{sen } x - 3)^2 - 3}$

14. $\int \frac{dw}{\sqrt{-5w^2 + 22w - 8}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}$

16. $\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2 + 4z}}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 7 \ln x + 6}}$

19. $\int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 9w + 5}}$

20. $\int \sqrt{x^2 + 4x - 3}\, dx$

21. $\int \sqrt{4 - 3x - 2x^2}\, dx$

22. $\int \sqrt{3x - x^2}\, dx$

23. $\int \sqrt{3x^2 - 4x}\, dx$

24. $\int x\sqrt{x^4 - x^2 - 20}\, dx$

25. $\int \sqrt{-x^2 - 5x + 24}\, dx$

26. $\int \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + 2}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - 21x}}$

28. $\int e^{nx}\sqrt{3 + 2e^{nx} - e^{2nx}}\, dx$

29. $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + y + 1}}$

30. $\int \sqrt{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

31. $\int \frac{dw}{\sqrt{5w - 2w^2}}$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 3x\sqrt{ax} + 2x}}$

33. $\int \frac{dy}{\sqrt{3y^2 + 13y - 10}}$

34. $\int \frac{(6x - 5)}{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

35. $\int \frac{3x - 4}{9 - x^2}\, dx$

36. $\int \frac{4 - 7x}{9x^2 - 16}\, dx$

37. $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 4x + 1}\, dx$

38. $\int \frac{x - 2}{3x^2 + 5x - 4}\, dx$

39. $\int \frac{x + 5}{x^2 - 7x + 6}\, dx$

40. $\int \frac{2x + 21}{3x^2 + 27x - 15}\, dx$

41. $\int \frac{(3x + 2)}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$

42. $\int \frac{3x - 11}{\sqrt{4 - 9x^2}}\, dx$

43. $\int \frac{5 - 2x}{\sqrt{16x^2 + 25}}\, dx$

44. $\int \frac{4 - 3x}{\sqrt{7 - 2x^2}}\, dx$

45. $\int \frac{x+6}{8+14x-10x^2}\,dx$

46. $\int \frac{5x-11}{\sqrt{x^2+3x-5}}\,dx$

47. $\int \frac{2-x}{\sqrt{2x^2+5x-1}}\,dx$

48. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$

49. $\int (2x+1)\sqrt{x^2-3x+4}\,dx$

50. $\int (3x+7)\sqrt{x^2+7x+6}\,dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Capítulo 3

## Integrales de diferenciales trigonométricas

### Reseña HISTÓRICA

Matemático y físico francés nacido en Auxerre y fallecido en París, conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas series de Fourier.

Participó en la Revolución Francesa y, gracias a la caída del poder de Robespierre, se salvó de ser guillotinado. Se incorporó a la Escuela Normal Superior de París en donde tuvo entre sus profesores a Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace. Posteriormente ocupó una cátedra en la Escuela Politécnica.

Según él, cualquier oscilación periódica, por complicada que sea, se puede descomponer en serie de movimientos ondulatorios simples y regulares, la suma de los cuales es la variación periódica compleja original. Es decir se expresa como una serie matemática en la cual los términos son funciones trigonométricas. El teorema de Fourier tiene muchas aplicaciones; se puede utilizar en el estudio del sonido y de la luz y, desde luego, en cualquier fenómeno ondulatorio. El estudio matemático de tales fenómenos, basado en el teorema de Fourier se llama análisis armónico.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

## Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$, $\int \cos^n v\, dv$, con *m* y *n* impar

En aquellas integrales cuya función seno o coseno sea una potencia impar, se realiza la separación en potencias pares y siempre sobra una lineal, la cual funcionará como diferencial; el resto se transforma mediante las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \text{sen}^3 x\, dx$

**Solución**

Se separa la potencia de la siguiente manera:

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x \text{ sen } x\, dx$$

Se sustituye $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, de esta forma:

$$v = \cos x,\ dv = -\text{sen } x\, dx,\ -dv = \text{sen } x\, dx$$

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x \text{ sen } x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \text{ sen } x\, dx = \int (1 - v^2)(-dv) = \int -dv + \int v^2 dv$$

$$= -v + \frac{1}{3}v^3 + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

Por consiguiente, $\int \text{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

2 Precisa el resultado de $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x}$

**Solución**

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{(1 - \text{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

Se realiza el cambio de variable, $v = \text{sen } x$ y $dv = \cos x\, dx$,

$$\int \frac{(1 - v^2)dv}{v^4} = \int \frac{dv}{v^4} - \int \frac{dv}{v^2} = \int v^{-4} dv - \int v^{-2} dv = \frac{v^{-3}}{-3} - \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3v^3} + \frac{1}{v} + C$$

Pero $v = \text{sen } x$, entonces,

$$\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{3\text{sen}^3 x} + C = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

Finalmente, $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

3 Encuentra el resultado de $\int \frac{\text{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$

**Solución**

$$\int \frac{\text{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = \int \frac{\text{sen}^4 y \,\text{sen}\, y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = \int \frac{(\text{sen}^2 y)^2 \text{sen}\, y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

Se sustituye $\text{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$ en la integral:

$$\int \frac{(1-\cos^2 y)^2 \,\text{sen}\, y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

se realiza el cambio de variable, $v = \cos y$, $dv = -\text{sen}\, y\, dy$, $-dv = \text{sen}\, y\, dy$

$$-\int \frac{\left(1-v^2\right)^2 dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{\left(1-2v^2+v^4\right)dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} + 2\int v^{\frac{3}{2}}\, dv - \int v^{\frac{7}{2}}\, dv$$

$$= -2\sqrt{v} + \frac{4}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9}v^{\frac{9}{2}} + C$$

Al factorizar $-2\sqrt{v}$ de la expresión se obtiene:

$$= -2\sqrt{v}\left(1-\frac{2}{5}v^2+\frac{1}{9}v^4\right)+C \text{ , pero } v = \cos y$$

Finalmente,

$$\int \frac{\text{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = -2\sqrt{\cos y}\left(1-\frac{2}{5}\cos^2 y+\frac{1}{9}\cos^4 y\right)+C$$

## EJERCICIO 8

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \text{sen}^3 4x \cos 4x\, dx$
2. $\int \cos^5 3x \;\text{sen}\, 3x\, dx$
3. $\int \text{sen}^3 ax\, dx$
4. $\int \text{sen}^3 5x\, dx$
5. $\int \text{sen}^3 \frac{x}{4}\, dx$
6. $\int \cos^3 x\, dx$
7. $\int \cos^3 ax\, dx$
8. $\int \cos^3 6x\, dx$
9. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int \text{sen}^5 x\, dx$
11. $\int \text{sen}^5 ax\, dx$
12. $\int \text{sen}^5 4x\, dx$
13. $\int \text{sen}^5 \frac{x}{2}\, dx$
14. $\int \cos^5 y\, dy$
15. $\int \cos^5 bx\, dx$
16. $\int \cos^5 \frac{x}{3}\, dx$

17. $\int \text{sen}^7\theta\, d\theta$
18. $\int \text{sen}^7 3x\, dx$
19. $\int \cos^7 y\, dy$
20. $\int \cos^7 4x\, dx$
21. $\int \text{sen}^3 4x \cos^5 4x\, dx$
22. $\int \cos^3 x\, \text{sen}^5 x\, dx$
23. $\int \frac{\cos^5 2x}{\sqrt{\text{sen}\, 2x}}\, dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Integrales de la forma: $\int \tan^n v\, dv$, $\int \cot^n v\, dv$ con $n$ par o impar

En este tipo de integrales se separan potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 x\, dx$

**Solución**

Se realiza la separación de la potencia:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx$$

Se sustituye $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,

$$\int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$

Al aplicar $v = \tan x$, $dv = \sec^2 x\, dx$, para la primera integral, entonces:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx = \int v\, dv - \int \tan x\, dx = \frac{v^2}{2} - (-\ln|\cos x|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

2 Obtén el resultado de $\int (\sec 3x + \tan 3x)^2\, dx$

**Solución**

Se desarrolla el binomio al cuadrado y se obtiene:

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \tan^2 3x)\, dx$$

se realiza el cambio $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \sec^2 3x - 1)dx$$

Se simplifican términos semejantes y resulta:

$$\int (2\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x - 1)\, dx$$

Se efectúa el cambio, $v = 3x$, entonces $dv = 3dx$ y $\frac{dv}{3} = dx$

Se procede a integrar

$$= \int \frac{2}{3}\sec^2 v\, dv + \int \frac{2}{3}\sec v \tan v\, dv - \int \frac{dv}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\int \sec^2 v\, dv + \frac{2}{3}\int \sec v \tan v\, dv - \frac{1}{3}\int dv$$

$$= \frac{2}{3}\tan v + \frac{2}{3}\sec v - \frac{1}{3}v + C\ ;$$

pero $v = 3x$, entonces finalmente se obtiene:

$$\int (\sec 3x + \tan 3x)^2\, dx = \frac{2}{3}\tan 3x + \frac{2}{3}\sec 3x - x + C$$

3 Determina el resultado de $\int \cot^5 ax\, dx$

**Solución**

Al separar la integral

$$\int \cot^5 ax\, dx = \int \cot^3 ax \cot^2 ax\, dx$$

Se realiza el cambio $\cot^2 ax = \csc^2 ax - 1$

$$\int \cot^3 ax(\csc^2 ax - 1)dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\, dx - \int \cot^3 ax\, dx$$

De nueva cuenta se tiene una potencia impar, por lo que se vuelve a separar y a sustituir la identidad:

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax \cot^2 ax\, dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax(\csc^2 ax - 1)dx$$

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax \csc^2 ax\, dx + \int \cot ax\, dx$$

$v = \cot ax$ y $dv = -a \csc^2 ax\, dx$

$$= -\frac{1}{a}\int v^3 dv + \frac{1}{a}\int v dv + \frac{1}{a}\ln|\text{sen } ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{v^4}{4} + \frac{1}{a}\cdot\frac{v^2}{2} + \frac{1}{a}\ln|\text{sen } ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2} - \ln|\text{sen } ax|\right) + C,$$

pero $v = \cot ax$, por lo que finalmente,

$$\int \cot^5 ax\, dx = -\frac{1}{a}\left(\frac{\cot^4 ax}{4} - \frac{\cot^2 ax}{2} - \ln|\text{sen } ax|\right) + C$$

# EJERCICIO 9

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \tan^3 5x\, dx$
2. $\int \tan^3 \frac{x}{2}\, dx$
3. $\int \cot^3 4x\, dx$
4. $\int \cot^3 \frac{x}{3}\, dx$
5. $\int \cot^5 6x\, dx$
6. $\int \cot^5 \frac{y}{4}\, dy$
7. $\int \tan^5 5x\, dx$
8. $\int \cot^4 5x\, dx$
9. $\int \tan^4 6x\, dx$
10. $\int (\tan 3x - \cot 3x)^3 dx$
11. $\int (\tan^2 2y + \tan^4 2y)\, dy$
12. $\int (\cot^4 3x + \cot^2 3x)\, dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Integrales de la forma: $\int \sec^n v\, dv$, $\int \csc^n v\, dv$ con $n$ par

En este tipo de integrales se separa en potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva.

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x\ ;\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

EJEMPLOS

1 Precisa el resultado de $\int \sec^4 x\, dx$

**Solución**

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

Se realiza el cambio con la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$\int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \text{ y } dv = \sec^2 x\, dx$$

se obtiene:

$$\int (1 + v^2)dv = \int dv + \int v^2 dv = v + \frac{v^3}{3} + C$$

Pero $v = \tan x$, entonces,

$$\int \sec^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \csc^4 \frac{x}{4}\, dx$

**Solución**

$$\int \csc^4 \frac{x}{4} dx = \int \csc^2 \frac{x}{4}\ \csc^2 \frac{x}{4}\, dx \ = \int \left(1+\cot^2 \frac{x}{4}\right) \csc^2 \frac{x}{4}\, dx$$

Donde

$$v = \cot \frac{x}{4}\ \text{ y }\ dv = -\frac{1}{4}\csc^2 \frac{x}{4}\, dx$$

entonces:

$$= -4\int (1+v^2) dv = -4\int dv - 4\int v^2\, dv \ = -4v - \frac{4}{3}v^3 + C$$

pero $v = \cot \frac{x}{4}$, por consiguiente

$$\int \csc^4 \frac{x}{4} dx = -\frac{4}{3}\cot^3 \frac{x}{4} - 4\cot \frac{x}{4} + C$$

## Integrales de la forma: $\int \tan^m v \cdot \sec^n v\, dv$, $\int \cot^m v \cdot \csc^n v\, dv$ con $n$ par y $m$ par o impar

En este tipo de integrales se emplean las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1;\ \csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$

**Solución**

En la integral la secante tiene potencia par, entonces se realiza la separación de una secante cuadrada y se sustituye por la identidad trigonométrica correspondiente.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx \ = \int \tan^2 x (1+\tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \quad \text{y} \quad dv = \sec^2 x\, dx$$

finalmente se determina que:

$$= \int v^2(1+v^2) dv \ = \int (v^2+v^4) dv = \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + C \ = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\, dx$

**Solución**

En la integral las potencias, tanto de la tangente como de la secante, son impares, por lo que la separación es para ambas funciones.

$$\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\, dx = \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx$$

Luego

$$\tan^2 \frac{x}{4} = \sec^2 \frac{x}{4} - 1$$

por consiguiente,

$$= \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx = \int \left( \sec^2 \frac{x}{4} - 1 \right) \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx$$

Ahora, al hacer

$$v = \sec \frac{x}{4} \text{ y } dv = \frac{1}{4} \sec \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4}\, dx$$

se obtiene:

$$= 4\int (v^2 - 1) v^2 dv = 4\int v^4 dv - 4\int v^2\, dv = \frac{4}{5} v^5 - \frac{4}{3} v^3 + C$$

$$= \frac{4}{5} \sec^5 \frac{x}{4} - \frac{4}{3} \sec^3 \frac{x}{4} + C$$

## EJERCICIO 10

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \sec^4 3x\, dx$
2. $\int \sec^4 ax\, dx$
3. $\int \sec^4 \frac{x}{6}\, dx$
4. $\int \csc^4 9x\, dx$
5. $\int \csc^4 bx\, dx$
6. $\int \csc^4 \frac{x}{7}\, dx$
7. $\int \sec^4 \frac{2x}{3}\, dx$
8. $\int \csc^4 \frac{5x}{4}\, dx$
9. $\int \tan^2 8x \sec^4 8x\, dx$
10. $\int \tan^2 ax \sec^4 ax\, dx$
11. $\int \tan^2 \frac{x}{7} \sec^4 \frac{x}{7}\, dx$
12. $\int \tan^2 \frac{5x}{3} \sec^4 \frac{5x}{3}\, dx$
13. $\int \tan^3 5x \sec^3 5x\, dx$
14. $\int \tan^3 bx \sec^3 bx\, dx$

15. $\int \tan^3 \frac{x}{6} \sec^3 \frac{x}{6}\, dx$

16. $\int \tan^3 \frac{4x}{7} \sec^3 \frac{4x}{7}\, dx$

17. $\int \cot^3 bx \csc^3 bx\, dx$

18. $\int \cot^3 4x \csc^3 4x\, dx$

19. $\int \sec^6 \frac{x}{2}\, dx$

20. $\int \csc^4 \left(\frac{3\theta}{2}\right) d\theta$

21. $\int 2x^2 \sec^4 x^3\, dx$

22. $\int \left(1+\frac{1}{\text{ctg}^2 x}\right)^3 dx$

23. $\int \sec^6 \alpha \cos 2\alpha\, d\alpha$

24. $\int \frac{dt}{\cos^4 2t}$

25. $\int \csc^4 (3x-1) dx$

26. $\int \tan^5 x \sec x\, dx$

27. $\int \tan 2x \sec^3 2x\, dx$

28. $\int \text{ctg}^5 x \csc^3 x\, dx$

29. $\int \frac{\text{sen}^5 3x\, dx}{\cos^8 3x}$

30. $\int \frac{\sec^6 x\, dx}{\sqrt{\tan x}}$

31. $\int \left(\sec^4 3t - \csc^4 \left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$

32. $\int \csc^4 (2x-1)\, dx$

33. $\int \frac{d\theta}{\text{sen}^6 \left(\frac{\theta}{5}\right)}$

34. $\int \csc^8 x\, dx$

35. $\int x(1-\tan^4 x^2)\, dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$ y $\int \cos^n v\, dv$, con *m* y *n* par

En estas integrales cuando las potencias de las funciones sen $x$ y cos $x$ son pares, se utilizan las identidades trigonométricas del doble de un ángulo:

$$\text{sen}\, v \cos v = \frac{1}{2}\text{sen}\, 2v \quad \text{sen}^2 v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2v \quad \cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Obtén el resultado de $\int \text{sen}^2 x\, dx$

**Solución**

Se emplea la identidad correspondiente y se integra:

$$\int \text{sen}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\, 2x}{4} + C$$

2 Determina el resultado de $\int \text{sen}^4 2x\,dx$

**Solución**

$$\int \text{sen}^4 2x\,dx = \int (\text{sen}^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\ 4x + \frac{1}{4}\cos^2 4x\right)dx$$

Ahora se transforma la potencia par de cos 4$x$, utilizando la identidad:

$$\cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$$

Entonces,

$$\int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\ 4x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x\right)\right)dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right)dx$$

Ahora bien, al integrar cada uno de los términos queda:

$$\int \text{sen}^4 2x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{\text{sen } 4x}{8} + \frac{\text{sen } 8x}{64} + C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \cos^6 \frac{x}{3}\,dx$

**Solución**

La integral se expresa de la siguiente manera

$$\int \cos^6 \frac{x}{3}\,dx = \int \left(\cos^2 \frac{x}{3}\right)^3 dx$$

Se sustituye $\cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 \frac{x}{3}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}\right)^3 dx \\
&= \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{8}\cos^2\frac{2x}{3} + \frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{4x}{3}\right) + \frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\cos^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\left(1 - \text{sen}^2\frac{2x}{3}\right)\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\cos\frac{2x}{3} - \frac{1}{8}\text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} - \frac{1}{8}\text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \frac{5}{16}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{2x}{3}\,dx + \frac{3}{16}\int \cos\frac{4x}{3}\,dx - \frac{1}{8}\int \text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx
\end{aligned}$$

Se aplica el cambio de variable para cada una de las integrales,

$$v = \frac{2x}{3} \quad dv = \frac{2}{3}dx \quad z = \frac{4}{3}x \quad dz = \frac{4}{3}dx \quad w = \text{sen}\,\frac{2x}{3}, \quad dw = \frac{2}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$$

Entonces,

$$= \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int \cos v\,dv + \frac{3}{16}\cdot\frac{3}{4}\int \cos z\,dz - \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}\int w^2 dw$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{3}{4}\text{sen}\,v + \frac{9}{64}\text{sen}\,z - \frac{3}{16}\cdot\frac{w^3}{3} + C$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{3}{4}\text{sen}\frac{2x}{3} + \frac{9}{64}\text{sen}\frac{4x}{3} - \frac{1}{16}\text{sen}^3\frac{2x}{3} + C$$

## EJERCICIO 11

Verifica las siguientes integrales:

1. $\int \text{sen}^2 3x\,dx$
2. $\int \text{sen}^2 ax\,dx$
3. $\int \text{sen}^2 \frac{x}{5}\,dx$
4. $\int \text{sen}^2 \frac{3x}{4}\,dx$
5. $\int \cos^2 5x\,dx$
6. $\int \cos^2 bx\,dx$
7. $\int \cos^2 \frac{x}{7}\,dx$
8. $\int \cos^2 \frac{7x}{2}\,dx$
9. $\int \text{sen}^4 8x\,dx$
10. $\int \text{sen}^4 ax\,dx$
11. $\int \text{sen}^4 \frac{x}{7}\,dx$
12. $\int \text{sen}^4 \frac{3x}{4}\,dx$
13. $\int \cos^4 9x\,dx$
14. $\int \cos^4 bx\,dx$
15. $\int \cos^4 \frac{x}{3}\,dx$
16. $\int \cos^4 \frac{5x}{3}\,dx$
17. $\int \text{sen}^6 x\,dx$
18. $\int \text{sen}^6 4x\,dx$
19. $\int \text{sen}^6 ax\,dx$
20. $\int \text{sen}^6 \frac{x}{4}\,dx$
21. $\int \text{sen}^6 \frac{5x}{2}\,dx$
22. $\int \cos^6 x\,dx$
23. $\int \cos^6 3x\,dx$
24. $\int \cos^6 bx\,dx$
25. $\int \cos^6 \frac{x}{2}\,dx$
26. $\int \cos^6 \frac{2x}{5}\,dx$
27. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sec^5 x}$
28. $\int \text{sen}^4 3x\,dx$

29. $\int \frac{dy}{\csc^4 \frac{y}{2}}$

30. $\int \frac{dx}{\csc^2 x}$

31. $\int \frac{\cos^2 3x\, dx}{1+\tan^2 3x}$

32. $\int 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

33. $\int (3-\cos\alpha)^2\, d\alpha$

34. $\int (\text{sen}\, x+1)^3 dx$

35. $\int \text{sen}^2\left(\frac{x}{b}\right)\cos^2\left(\frac{x}{b}\right)dx$

36. $\int \left(\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)-\sqrt{\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}\right)^2 d\theta$

37. $\int \cos^8 x\, dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Integrales de la forma $\int \text{sen}\, mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \text{sen}\, mx \cdot \text{sen}\, nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

En las siguientes integrales se utilizan las identidades trigonométricas:

$$\int \text{sen}\, mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

$$\int \text{sen}\, mx\, \text{sen}\, nx\, dx = -\frac{\text{sen}(m+n)\, x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\, x}{2(m-n)} + C$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\text{sen}(m+n)\, x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\, x}{2(m-n)} + C, \text{ cuando } m \neq n$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \text{sen}\, 2x \cos 4x\, dx$

**Solución**

$$\int \text{sen}\, 2x \cos 4x\, dx = -\frac{\cos(2+4)\, x}{2(2+4)} - \frac{\cos(2-4)\, x}{2(2-4)} + C = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos(-2x)}{-4} + C$$

$$= -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

2 Determina el resultado de $\int \cos 3x \cos x\, dx$

**Solución**

$$\int \cos 3x \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen}(3+1)x}{2(3+1)} + \frac{\operatorname{sen}(3-1)x}{2(3-1)} + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 4x}{2(4)} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2(2)} + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

## EJERCICIO 12

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen} x \cos 3x\, dx$
3. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x\, dx$
4. $\int \cos 7y \cos 3y\, dy$
5. $\int \cos(5x) \operatorname{sen}(2x)\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha$
7. $\int \cos\left(\frac{3}{5}w\right) \cos\left(\frac{1}{4}w\right) dw$
8. $\int \operatorname{sen}(mx+b) \operatorname{sen}(mx-b)\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}(3x+4) \operatorname{sen}(3x-4)\, dx$
10. $\int \operatorname{sen} 3w \operatorname{sen} 2w \operatorname{sen} w\, dw$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 4

## MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

### Reseña HISTÓRICA

Uno de los científicos matemáticos y físicos italianos más importantes de finales del siglo XVIII. Inventó y maduró el cálculo de variaciones y más tarde lo aplicó a una nueva disciplina, la mecánica celeste, sobre todo al hallazgo de mejores soluciones al problema de tres cuerpos. También contribuyó significativamente con la solución numérica y algebraica de ecuaciones y con la teoría numérica. En su clásica *Mecanique analytique* (*Mecánicas analíticas*, 1788), transformó la mecánica en una rama del análisis matemático. El tratado resumió los principales resultados sobre mecánica que se saben del siglo XVIII y es notable por su uso de la teoría de ecuaciones diferenciales. Otra preocupación central de Lagrange fueron los fundamentos del cálculo. En un libro de 1797 enfatizó la importancia de la serie de Taylor y el concepto de función. Sus trabajos sirvieron de base para los de Augustin Cauchy, Niels Henrik Abel, y Karl Weierstrass en el siguiente siglo.

Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)

## Sustitución trigonométrica

Algunas integrales que involucran expresiones de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$ , $\sqrt{u^2+a^2}$ y $\sqrt{u^2-a^2}$ , deben resolverse utilizando las siguientes transformaciones:

| **Caso** | **Cambio** | **Diferencial** | **Transformación** | **Triángulo** |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a^2-u^2}$ | $u = a \text{ sen } z$ | $du = a \cos z\, dz$ | $\sqrt{a^2-u^2} = a \cos z$ | $a$, $u$, $z$, $\sqrt{a^2-u^2}$ |
| $\sqrt{u^2+a^2}$ | $u = a \tan z$ | $du = a \sec^2 z\, dz$ | $\sqrt{u^2+a^2} = a \sec z$ | $\sqrt{u^2+a^2}$, $u$, $z$, $a$ |
| $\sqrt{u^2-a^2}$ | $u = a \sec z$ | $du = a \sec z \tan z\, dz$ | $\sqrt{u^2-a^2} = a \tan z$ | $u$, $\sqrt{u^2-a^2}$, $z$, $a$ |

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \frac{dy}{(y^2+7)^{\frac{3}{2}}}$

**Solución**

Para resolver la integral se utiliza el segundo caso y se hacen los cambios propuestos, entonces

$$u^2 = y^2 \;\rightarrow\; u = y, \quad \text{luego} \quad a^2 = 7 \;\rightarrow\; a = \sqrt{7}$$

Cambiando los elementos, se sustituyen en la integral:

$$y = \sqrt{7}\tan z \qquad dy = \sqrt{7}\sec^2 z\, dz \qquad \sqrt{y^2+7} = \sqrt{7}\sec z$$

$$\int \frac{dy}{(y^2\ 1\ 7)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dy}{\left(\sqrt{y^2+7}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{7}\sec^2 z\, dz}{\left(\sqrt{7}\sec z\right)^3} = \int \frac{dz}{7\sec z} = \frac{1}{7}\int \cos z\, dz = \frac{1}{7}\text{sen } z + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces

$\sqrt{y^2+7}$, $y$, $z$, $\sqrt{7}$

$$\text{sen } z = \frac{y}{\sqrt{y^2+7}}$$

Se concluye que,

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+7\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{7\sqrt{y^2+7}} + C$$

2 Resuelve $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

**Solución**

$$u^2 = x^2 \quad \rightarrow \quad u = x;\, a^2 = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

Para resolver la integral se aplica el tercer caso, por tanto, los cambios se sustituyen en la integral:

$$x = 2\sec\theta,\, dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$

Entonces,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{(2\sec\theta)^3(2\sec\theta\tan\theta)}{2\tan\theta}\,d\theta = \int 8\sec^4\theta\, d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\ \sec^2\theta\, d\theta$$

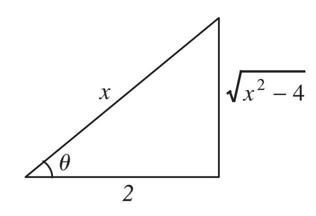
$$= 8\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 8\int (\sec^2\theta + \sec^2\theta\tan^2\theta)\, d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\, d\theta + 8\int \tan^2\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces




En el triángulo

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = 8\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3 + C$$

$$= 4\left(\sqrt{x^2-4}\right) + \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2+8)\sqrt{x^2-4}}{3} + C$$

3 Determina el resultado de $\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx$

**Solución**

$$v^2 = 16x^2 \rightarrow v = 4x;\ a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

Para resolver la integral se utiliza el primer caso, donde

$$4x = 5\text{ sen }\theta,\ x = \frac{5}{4}\text{sen }\theta,\ dx = \frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta \text{ y } \sqrt{25-16x^2} = 5\cos\theta$$

La nueva integral es:

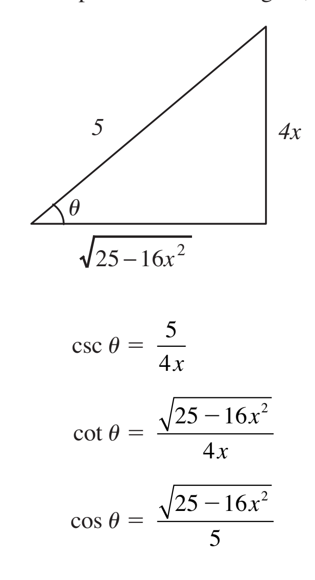
$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = \int \frac{5\cos\theta}{\frac{5}{4}\text{sen }\theta}\cdot\frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta = 5\int\frac{\cos^2\theta}{\text{sen }\theta}d\theta = 5\int\frac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{sen }\theta}d\theta$$

$$= 5\int(\csc\theta - \text{sen }\theta)\,d\theta$$

$$= 5(\ln|\csc\theta - \cot\theta| - (-\cos\theta)) + C$$

$$= 5\ln|\csc\theta - \cot\theta| + 5\cos\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo,




$$\csc\theta = \frac{5}{4x}$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Finalmente,

$$\int\frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = 5\ln\left|\frac{5}{4x} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + 5\cdot\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5} + C$$

$$= 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + \sqrt{25-16x^2} + C$$

# EJERCICIO 13

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+36}}$

2. $\int \frac{dw}{(w^2+5)^{\frac{3}{2}}}$

3. $\int \frac{y^2dy}{(y^2+3)^{\frac{3}{2}}}$

4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$

5. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2+25}}$

6. $\int \frac{(36-25x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx$

7. $\int \frac{\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{4\alpha-\alpha^2}}$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2+16}}$

9. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-16}}$

10. $\int \frac{\sqrt{5-\theta^2}}{\theta^2}d\theta$

11. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$

12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$

13. $\int \frac{y^2dy}{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}$

14. $\int y^3\sqrt{3-y^2}\,dy$

15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

16. $\int \frac{w^3}{\sqrt{w^2+7}}\,dw$

17. $\int \frac{x^4}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$

18. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{x^2-11}}$

19. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$

20. $\int \frac{\ln w}{w\sqrt{4+4\ln w-\ln^2 w}}dw$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Integración por partes

Deducción de la fórmula
Sean $u$ y $v$ funciones, la diferencial del producto es:

$$d(uv) = u\cdot dv + v\cdot du$$

Se despeja $u\,dv$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Al integrar la expresión se obtiene la fórmula de integración por partes,

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Donde:

1. $u$ es una función fácil de derivar.
2. $dv$ es una función fácil de integrar.
3. $\int v\,du$ es más sencilla que la integral inicial.

La integral por partes se aplica en los siguientes casos:

1. Algebraicas por trigonométricas.
2. Algebraicas por exponenciales.
3. Exponenciales por trigonométricas.
4. Logarítmicas.
5. Logarítmicas por algebraicas.
6. Funciones trigonométricas inversas.
7. Funciones trigonométricas inversas por algebraicas.

## EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

**Solución**

Se determinan $u$ y $dv$ y mediante una diferencial e integral se obtienen $du$ y $v$ respectivamente.

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

Se aplica la fórmula:

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2 Determina el resultado de $\int xe^x\,dx$

**Solución**

Se eligen $u$ y $dv$ de la siguiente manera:

$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

Se sustituyen los datos en la fórmula, entonces,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

por tanto,

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \ln x\, dx$

**Solución**

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \int dx = x$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = (\ln x - 1) + C$$

4 Obtén el resultado de $\int \text{arc tan } x\, dx$

**Solución**

$$u = \text{arc tan } x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = \int dx = x$$

Por consiguiente,

$$\int \text{arc tan } x\, dx = x \text{ arc tan } x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}$$

La nueva integral se resuelve por cambio de variable, entonces se elige

$$w = 1 + x^2, \quad dw = 2x\, dx$$

Y el resultado es:

$$\int \text{arc tan } x\, dx = x \text{ arc tan } x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \text{ arc tan } x - \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w}$$

$$= x \text{ arc tan } x - \frac{1}{2}\ln|w| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \text{arc tan } x\, dx = x \text{ arc tan } x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + C$$

5 Determina el resultado de $\int e^x \cos x\, dx$

**Solución**

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = \int \cos x\, dx = \text{sen}\, x$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \text{sen}\, x - \int e^x \text{sen}\, x\, dx$$

La nueva integral se resuelve integrando por partes,

$$u = e^x \qquad dv = \text{sen}\, x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$$

Resulta

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \text{sen}\, x - \int e^x \text{sen}\, x\, dx = e^x \text{sen}\, x - (-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx) = e^x \text{sen}\, x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

Entonces,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \text{sen}\, x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

Se despeja $\int e^x \cos x\, dx$ ; $\quad \int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x \text{sen}\, x + e^x \cos x + C$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \text{sen}\, x + e^x \cos x + C$$

Finalmente,

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\text{sen}\, x + \cos x) + C$$

## EJERCICIO 14

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int xe^{3x} dx$
2. $\int xe^{ax} dx$
3. $\int x\, e^{\frac{x}{3}} dx$
4. $\int x \text{ sen } 5x\, dx$
5. $\int x \text{ sen } ax\, dx$
6. $\int x \text{ sen } \frac{x}{4}\, dx$
7. $\int x \cos 4x\, dx$
8. $\int x \cos bx\, dx$
9. $\int x \cos \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int 2x \ln x^2\, dx$
12. $\int x^5 \ln x\, dx$
13. $\int x^4 \ln 5x\, dx$
14. $\int x^n \ln x\, dx$

15. $\int x^2 e^x\, dx$
16. $\int y^2 e^{3y}\, dy$
17. $\int x^3 e^{4x}\, dx$
18. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$
19. $\int x^2 \operatorname{sen} bx\, dx$
20. $\int x^3 \cos\frac{x}{2}\, dx$
21. $\int x \csc^2 ax\, dx$
22. $\int y \sec^2 my\, dy$
23. $\int \operatorname{arc\,cos} ax\, dx$
24. $\int \operatorname{arc\,sen} bx\, dx$
25. $\int \operatorname{arc\,tan} ax\, dx$
26. $\int \operatorname{arc\,sec} mx\, dx$
27. $\int \operatorname{arc\,cot}\frac{x}{n}\, dx$
28. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$
29. $\int e^{3x} \cos 4x\, dx$
30. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{5t+3}}$
31. $\int \frac{x\, dx}{(ax+b)^4}$
32. $\int \frac{x^2\, dx}{(2x+1)^5}$
33. $\int \frac{\ln(\ln y)}{y}\, dy$
34. $\int x^3 e^{2x}\, dx$
35. $\int \frac{\operatorname{arc\,cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
36. $\int e^{2x} \cos x\, dx$
37. $\int (\operatorname{arc\,cos} y)^2\, dy$
38. $\int \frac{\operatorname{arc\,cos} x}{x^2}\, dx$
39. $\int \frac{w^2}{\sqrt{16-w^2}}\, dw$
40. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x)\, dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Integración por fracciones parciales

Integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$

**Caso I.** El denominador tiene sólo factores de 1er grado que no se repiten
A cada factor de la forma:

$$ax + b$$

Le corresponde una fracción de la forma,

$$\frac{A}{ax+b}$$

Donde $A$ es una constante por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}$

**Solución**

Se factoriza el denominador

$$\frac{7x+29}{x^2+8x+15}=\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$7x+29=A(x+3)+B(x+5)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$7x+29=x(A+B)+3A+5B$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 3A+5B=29 \end{cases}$$

la solución del sistema es:

$$A=3 \quad \text{y} \quad B=4$$

Entonces:

$$\int \frac{(7x+29)}{x^2+8x+15}dx=\int\left(\frac{3}{x+5}+\frac{4}{x+3}\right)dx=\int\frac{3}{x+5}dx+\int\frac{4}{x+3}dx=3\ln|x+5|+4\ln|x+3|+C$$

$$\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}=\ln\left|(x+5)^3\cdot(x+3)^4\right|+C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

**Solución**

Se factoriza el denominador,

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

Se hace la equivalencia como sigue:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$4x-2=A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$4x-2=x^2(A+B+C)+x(-A+B-2C)-2A$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-A+B-2C=4\\-2A=-2\end{cases},$$

la solución del sistema es:

$$A=1, B=1, C=-2$$

Entonces:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C$$

$$=\ln|x|+\ln|x-2|-\ln(x+1)^2+C$$

Se aplican las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión:

$$=\ln\frac{|x(x-2)|}{(x+1)^2}+C=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

Por consiguiente:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

➲ **Caso II.** Los factores del denominador son todos de 1er grado y algunos se repiten
Si se tiene un factor de la forma $(ax+b)^n$, se desarrolla una suma como sigue:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots+\frac{Z}{ax+b}$$

En donde $A$, $B$, $C$ y $Z$ son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\int \frac{\left(3x^2+5x\right)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

**Solución**

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x-1)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad:

$$3x^2+5x=x^2(A+C)+x(2A+B)+A-B-C$$

Entonces se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5, \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

su solución es:

$$A=2, B=1, C=1$$

finalmente,

$$\int\frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|(x+1)(x-1)^2\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

2 Resuelve $\int \frac{(y^4-8)}{y^3+2y^2}\,dy$

**Solución**

Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división.

$$\frac{y^4-8}{y^3+2y^2}=y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}$$

Entonces,

$$\int\frac{\left(y^4-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\int\left(y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}\right)dy$$

Se separan las integrales,

$$=\int y\,dy-2\int dy+\int\frac{\left(4y^2-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\int\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$$

La integral $\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$ se resuelve mediante fracciones parciales,

$$\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}=\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} \quad \rightarrow \quad \frac{4y^2-8}{y^2(y+2)}=\frac{A}{y^2}+\frac{B}{y}+\frac{C}{y+2}$$

$$\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} = \frac{A(y+2)+By(y+2)+Cy^2}{y^2(y+2)} = \frac{y^2(B+C)+y(A+2B)+2A}{y^2(y+2)}$$

De la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C=4 \\ A+2B=0 \\ 2A=-8 \end{cases},$$

donde

$$A=-4, B=2 \text{ y } C=2$$

La integral se separa de la siguiente manera:

$$\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^{2y}}=-4\int \frac{dy}{y^2}+2\int \frac{dy}{y}+2\int \frac{dy}{y+2}=\frac{4}{y}+2\ln|y|+2\ln|y+2|+C$$

$$=\frac{4}{y}+2(\ln|y|+\ln|y+2|)+C$$

$$=\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

Se concluye que,

$$\int \frac{(y^4-8)\,dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

## EJERCICIO 15

Obtén las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}dx$
2. $\int \frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}dx$
3. $\int \frac{(x^2+11x-30)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$
4. $\int \frac{(12+10x-2x^2)\,dx}{x^3-4x}$
5. $\int \frac{(-9x-9)\,dx}{x(x^2-9)}$
6. $\int \frac{7x^2-4}{x^3+x^2-2x}$
7. $\int \frac{(16x^2-48x+15)\,dx}{2x^3-7x^2+3x}$
8. $\int \frac{(8+3x-x^2)\,dx}{(2x+3)(x+2)^2}$
9. $\int \frac{2x^2-5x+4dx}{(x-2)^3}$
10. $\int \frac{2x^2-10x+14}{(x-3)^3}$
11. $\int \frac{(x^2+x-1)}{x^3+2x^2+x}dx$
12. $\int \frac{dy}{(y-m)(y-n)}$

13. $\int \frac{w^2-9w+25}{w^2-9w+20}\,dw$

14. $\int \frac{dy}{(y-3)(y-2)(y-1)}$

15. $\int \frac{3-5x}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

16. $\int \frac{3\,dw}{w^3-w}$

17. $\int \frac{(11x-7)\,dx}{2x^2-3x-2}$

18. $\int \frac{w^2dw}{(w-6)(w^2-36)}$

19. $\int \frac{8x-3}{12x^2-7x+1}\,dx$

20. $\int \frac{(x-x^2)dx}{3x^3+26x^2+64x+32}$

21. $\int \frac{5x^2-5}{x^3-9x^2+23x-15}\,dx$

22. $\int \frac{2x^5+x^4-39x^3-22x^2+112x+96}{4x^3-25x^2+38x-8}\,dx$

23. $\int \frac{dx}{16x-x^3}$

24. $\int \frac{5-4x}{6x-x^2-x^3}\,dx$

25. $\int \frac{m}{(1-m)^2}\,dm$

26. $\int \frac{y\,dy}{(y+5)^2(y-5)}$

27. $\int \frac{(x+2)dx}{x(x+6)^2}$

28. $\int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx$

29. $\int \frac{1+x^5}{(x-1)^4}\,dx$

30. $\int \frac{x^3}{(x-3)^2(x+3)^2}\,dx$

31. $\int \frac{x^3-1}{x^3(x-2)^2}\,dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

**Caso III.** El denominador contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite
A todo factor de la forma $ax^2+bx+c$, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

En donde $A$ y $B$ son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int\frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}$

**Solución**

La expresión

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x}=\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$

entonces:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{x^2(A+B)+Cx+3A}{x(x^2+3)}$$

De la igualdad resulta el sistema:

$$\begin{cases}A+B=4\\C=0\\3A=6\end{cases}$$

donde

$$A = 2, B = 2, C = 0$$

Entonces,

$$\int\frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\int\frac{2dx}{x}+\int\frac{(2x+0)dx}{x^2+3}=2\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{x\,dx}{x^2+3}=2\ln|x|+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2(x^2+3)+C$$

Por consiguiente,

$$\int\frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\ln x^2(x^2+3)+C$$

2 ●●● Determina el resultado de $\int \frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$

**Solución**

Se realiza la separación mediante fracciones parciales,

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$=\frac{A(x^2+1)+Bx^2-3Bx+Cx-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(-3B+C)+A-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

De la igualdad resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3B+C=1 \\ A-3C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=\frac{6}{5},\ B=-\frac{1}{5}\ \text{y}\ C=\frac{2}{5}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int\frac{(x^2+x)dx}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{\left(-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{6}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{6}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{10}\ln(x^2+1)+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

$$=\ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right|+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

Finalmente:

$$\int\frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx\ =\ \ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right|+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

➲ **Caso IV.** Los factores del denominador son todos de segundo grado y algunos se repiten
Si existe un factor de segundo grado de la forma

$$(ax^2+bx+c)^n$$

Se desarrolla una suma de $n$ fracciones parciales, de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{Vx+W}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}$

**Solución**

Se realiza la separación mediante fracciones parciales:

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x^3+2x)+(Dx+E)x}{x(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^4+4x^2+4)+(Bx^4+2Bx^2+Cx^3+2Cx)+(Dx^2+Ex)}{x(x^2+2)^2}$$

Se agrupan términos semejantes,

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{x^4(A+B)+Cx^3+x^2(4A+2B+D)+x(2C+E)+4A}{x(x^2+2)^2}$$

De la igualdad anterior se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+2B+D=4 \\ 2C+E=2 \\ 4A=8 \\ C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=-2, C=0, D=0 \text{ y } E=2$$

La integral se puede separar en:

$$\int\frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$=2\ln|x|-\ln|x^2+2|+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

La última integral se resuelve por sustitución trigonométrica y el resultado es:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\text{arc tan}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}+C$$

Este resultado se sustituye en la integral.

$$\int\frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=\ln|x^2|-\ln|x^2+2|+2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\text{arc tan}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}\right)+C$$

Entonces se concluye que:

$$\int\frac{(4x^2+2x+8)\,dx}{x(x^2+2)^2} = \ln\left|\frac{x^2}{x^2+2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)+\frac{x}{2x^2+4}+C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2}$

**Solución**

Como el numerador es más grande en grado que el denominador, se realiza la división,

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2} = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}$$

Entonces la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int x dx - \int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

La integral

$$\int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

se realiza por fracciones parciales,

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+x(4A+C)+4B+D}{(x^2+4)^2}$$

De la cual se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A = 8 \\ B = 0 \\ 4A + C = 16 \\ 4B + D = 0 \end{cases}$$

donde $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$

$$\int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = 8\int \frac{x\,dx}{x^2+4} - 16\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^2} = 4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}$$

Finalmente, este resultado se sustituye en la integral

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int x dx - \int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - \left(4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\ln\left|x^2+4\right| - \frac{8}{x^2+4} + C$$

# EJERCICIO 16

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dm}{m^3+m^2}$
2. $\int \frac{dm}{m^3+m}$
3. $\int \frac{x^5-6x^3-6x^2-8}{x^3-6x}dx$
4. $\int \frac{(2x^5+x^4+37x^3+28x^2+171x+162)}{x(x^2+9)^2}dx$
5. $\int \frac{8\,dy}{y^4-16}$
6. $\int \frac{x^4-1}{x^3-x^2+9x-9}dx$
7. $\int \frac{4x^2+48}{16-x^4}dx$
8. $\int \frac{y^3+5y}{(y^2+1)^2}dy$
9. $\int \frac{x^3+4}{x^4-5x^2+4}dx$
10. $\int \frac{dx}{x^3-8}$
11. $\int \frac{y^5}{1-y^4}dy$
12. $\int \frac{2x^3+9x^2+14x+8}{(x^2+2x)(x^2+2)}dx$
13. $\int \frac{(5x^4-x^3+8x^2-4x+4)}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$
14. $\int \frac{(3x^2+5x-1)}{(x^2+2x-1)^2}dx$
15. $\int \frac{x^2-5x+3}{(x^2-6x+8)^2}dx$
16. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+4)^2}$
17. $\int \frac{(4x^4+x^3+30x^2+7x+49)}{(x^2+4)^2(x+1)}dx$
18. $\int \frac{(3x^4+x^3+22x^2+5x+50)}{x(x^2+5)^2}dx$
19. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+5)^2}$
20. Demuestra que $\int \frac{3x^5+13x^4+32x^3+8x^2-40x-75}{x^2(x^2+3x+5)^2}dx$ equivale a:

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4(x^2+3x+5)\right|-\frac{35\sqrt{11}}{121}\arctan\left(\frac{\sqrt{11}(2x+3)}{11}\right)+\frac{3}{x}-\frac{4(3x+10)}{11(x^2+3x+5)}+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Integración por sustitución de una nueva variable

Algunas integrales que contienen exponentes fraccionarios o radicales no se pueden integrar de manera inmediata; por lo anterior se hace una sustitución por una nueva variable, de tal modo que la integral que resulte se pueda integrar por alguno de los métodos estudiados.

### Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de *x*

Una integral que contenga potencias fraccionarias de *x*, se puede transformar a otra mediante la sustitución:

$$x = w^n$$

Donde *n* es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

**Ejemplo**

Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

**Solución**

Se obtiene el menor denominador común que en este caso es 4, por lo que la sustitución es:

$$x = w^4$$

Luego,

$$x^{\frac{1}{2}} = w^2,\; x^{\frac{1}{4}} = w \quad \text{y} \quad dx = 4w^3 dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4w^3 dw}{w^2 - w}$$

Se integra,

$$\int \frac{4w^3}{w^2 - w} dw = 4\int\left(w + 1 + \frac{w}{w^2 - w}\right)dw = 4\int w dw + 4\int dw + 4\int \frac{w dw}{w^2 - w}$$

$$= \frac{4w^2}{2} + 4w + 4\int \frac{w\,dw}{w(w-1)}$$

$$= 2w^2 + 4w + 4\int \frac{dw}{w-1} + C$$

$$= 2w^2 + 4w + \ln|w - 1| + C$$

Pero $w = x^{\frac{1}{4}}$, se demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

## Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de $a + bx$

Una integral que contenga potencias fraccionarias de $a + bx$, se puede transformar en otra, mediante la sustitución:

$$a + bx = w^n$$

Donde $n$ es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

**EJEMPLOS**

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1 + (x+1)^{\frac{2}{3}}} dx = (x + 1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \arctan \sqrt[3]{x+1} + C$

**Solución**

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores de las potencias fraccionarias y se realiza el cambio,

$$x + 1 = w^3$$

donde $dx = 3w^2\,dw \quad \text{y} \quad (x+1)^{\frac{2}{3}} = w^2,$

Por tanto, la nueva integral resulta,

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}dx \quad \int \frac{w^2}{1+w^2}(3w^2dw) = 3\int \frac{w^4}{w^2+1}dw$$

Se resuelve la división y se integra:

$$3\int \frac{w^4}{w^2+1}dw = 3\int\left(w^2-1+\frac{1}{w^2+1}\right)dw = 3\int w^2dw - 3\int dw + 3\int \frac{dw}{w^2+1}$$

$$= w^3 - 3w + 3 \text{ arc tan } w + C$$

$x + 1 = w^3$, entonces $w = (x+1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+1}$, por consiguiente se deduce que:

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}dx = (x+1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \text{ arc tan} \sqrt[3]{x+1} + C$$

2 Demuestra que $\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}dx = 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$

**Solución**

La sustitución que se realiza es:

$$w^2 = x + 3$$

donde,

$$x + 1 = w^2 - 2, x + 2 = w^2 - 1 \quad \text{y} \quad dx = 2w\, dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}dx = \int \frac{(w^2-2)}{(w^2-1)(w)}(2w\,dw) = 2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}dw$$

Ahora bien, al resolver la división e integrar, se obtiene:

$$2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}dw = 2\int\left(1-\frac{1}{w^2-1}\right)dw = 2\int dw - 2\int \frac{dw}{w^2-1} = 2w - \ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right| + C$$

$w^2 = x + 3$, entonces $w = \sqrt{x+3}$ y al sustituir se obtiene:

$$= 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right| + C$$

Se racionaliza,

$$= 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$$

Por consiguiente, se comprueba que:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}dx = 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$$

# EJERCICIO 17

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{3x^{\frac{1}{3}}dx}{1+x^{\frac{2}{3}}}$

2. $\int \frac{x^{\frac{1}{5}}dx}{1+x^{\frac{3}{5}}}$

3. $\int \frac{x\,dx}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}$

4. $\int \frac{x}{3\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}}dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}$

6. $\int \frac{x^{\frac{1}{6}}dx}{\sqrt{4+x^{\frac{1}{3}}}}$

7. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}$

8. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+2}$

9. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}-3}$

10. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{3}}+1}$

11. $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x}(x+5)}$

12. $\int \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{2}}+(x-3)^{\frac{1}{4}}}$

13. $\int \frac{(t-1)\,dt}{t\sqrt{t+2}}$

14. Demuestra que $\int \frac{(x+2)^{\frac{1}{6}}\,dx}{\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}}$ equivale a:

$$\left[(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{8(x+2)^{\frac{5}{6}}-10(x+2)^{\frac{1}{2}}+15(x+2)^{\frac{1}{6}}}{8}\right]-\frac{15}{8}\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{6}}+\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}\right|+C$$

15. Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{3}}}$ equivale a:

$$\sqrt[12]{x}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{7}{12}}-\frac{12}{7}x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{12}}-\frac{12}{5}x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{1}{6}}+6x^{\frac{1}{12}}-12\right)+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}+1\right|+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Integración de las diferenciales binomias

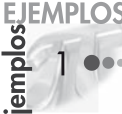
Son aquellas integrales que contienen expresiones de la forma $x^w(a+bx^t)^{\frac{p}{q}}$ con $t > 0$ y se reducen mediante los cambios de variable que se indican:

### Caso I

Si $\frac{w+1}{t}=L$ con $L \in Z$ su cambio de variable es:

$$u=(a+bx^t)^{\frac{1}{q}}$$

EJEMPLOS



Ejemplos

1 Demuestra que $\int \frac{x^2\,dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{4+x^3}+C$

**Solución**

En la integral se observa que

$$w = 2,\ t = 3,\ p = -1 \text{ y } q = 2$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t}=\frac{2+1}{3}=1,\quad 1 \in Z$$

Por tanto, el cambio de variable es:

$$u = (4+x^3)^{\frac{1}{2}} \quad \text{donde} \quad u^2 = 4 + x^3$$

Se despeja la variable $x$ y se determina la diferencial,

$$x = (u^2-4)^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int \frac{x^2dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}}=\int x^2(4+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx=\int (u^2-4)^{\frac{2}{3}}(u^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

$$=\frac{2}{3}\int du=\frac{2}{3}u+C$$

Pero

$$u = (4+x^3)^{\frac{1}{2}}$$

por consiguiente:

$$\int \frac{x^2dx}{\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{4+x^3}+C$$

2 Comprueba que $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$

**Solución**

En esta integral

$$w = 3,\ t = 2,\ p = -1 \ \text{ y } \ q = 3$$

entonces

$$\frac{w+1}{t} = \frac{3+1}{2} = 2,\ 2 \in Z$$

El cambio de variable es,

$$u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{donde} \quad u^3 = 1 + x^2$$

Se despeja la variable $x$ y se determina la diferencial,

$$x = (u^3-1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad dx = \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

Se sustituye en la integral y se obtiene:

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}dx = \int (u^3-1)^{\frac{3}{2}}(u^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\int (u^3-1)u\,du = \frac{3}{10}u^5 - \frac{3}{4}u^2 + C$$

Pero $u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$, por tanto, al sustituir y simplificar el resultado

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{10}(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{5}(x^2+1) - \frac{1}{2}\right) + C$$

$$= \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

**Caso II**

Si $\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q}=L$ , $L \in Z$ el cambio de variable es:

$$u=\left(\frac{a+bx^t}{x^t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

## Ejemplo

Demuestra que:

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=-\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}+C$$

### Solución

En esta integral

$$w=-2,\ t=4,\ p=-3 \text{ y } q=4$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q} = \frac{-2+1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$$

Por consiguiente, el cambio de variable es,

$$u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{donde} \quad x=\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}} \quad \text{y} \quad dx=\frac{-u^3\,du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}$$

Al sustituir en la integral se obtiene,

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=\int x^{-2}(1+x^4)^{-\frac{3}{4}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}}\right)^{-2}\left(\frac{u^4}{u^4-1}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{-u^3du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)=-\int du=-u+C$$

Pero $u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}$, entonces de acuerdo con el resultado anterior

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x} + C$$

# EJERCICIO 18

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{y^3\,dy}{(2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

2. $\int x^3\sqrt{7-5x^2}\,dx$

3. $\int \frac{x^5\,dx}{(9+x^3)^{\frac{5}{4}}}$

4. $\int x^3(3+4x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx$

5. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

6. $\int \frac{(4+3x^4)^{\frac{3}{2}}\,dx}{x}$

7. $\int \frac{5\,dx}{x(x^5+16)^{\frac{1}{4}}}$

8. $\int \frac{dx}{x^2(4-x^4)^{\frac{3}{4}}}$

9. $\int x^2(3+x)^{\frac{5}{3}}\,dx$

➡ **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Transformaciones de diferenciales trigonométricas

Aquellas integrales que tengan una forma racional, cuyos elementos sean funciones trigonométricas seno y coseno, se emplean las siguientes sustituciones, mediante la transformación:

De la identidad trigonométrica,

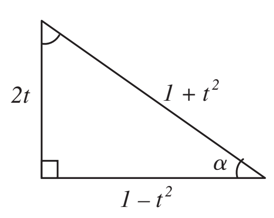
$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se realiza el cambio $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$

$$t^2=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se despeja cos $\alpha$, $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dada la función trigonométrica cos $\alpha$, se completa el triángulo rectángulo de la siguiente figura:




Por tanto, $\text{sen}\,\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

luego, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$ entonces $d\alpha=2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha}$

**Solución**

Se emplea el cambio

$$d\alpha = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

se sustituye en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3-2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{5t^2+1}{1+t^2}}dt = 2\int \frac{dt}{5t^2+1} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\,t\right)\right] + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, por tanto, se deduce que,

$$\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{d\theta}{5\text{sen}\,\theta - 1}$

**Solución**

Se sustituye

$$d\theta = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-1}dt = 2\int \frac{dt}{-t^2+10t-1} = -2\int \frac{dt}{(t-5)^2-24} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{t-2\sqrt{6}-5}{t+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, por tanto, se concluye que,

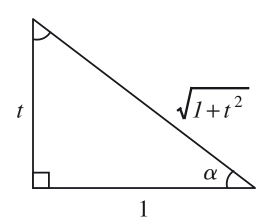
$$\int \frac{d\theta}{5\,\text{sen}\,\theta - 1} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-2\sqrt{6}-5}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

*Fórmulas equivalentes de transformación*

Otro cambio que se emplea en las integrales en forma racional que contienen funciones trigonométricas seno y coseno es:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\text{, }\tan\alpha=t\quad \text{y}\quad d\alpha=\frac{dt}{1+t^2}$$

Cuyo triángulo es,




Se recomienda utilizar estas sustituciones cuando se tienen las expresiones: $\operatorname{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int\frac{dy}{(5-\operatorname{sen}y)(5+\operatorname{sen}y)}$

**Solución**

La integral es equivalente a

$$\int\frac{dy}{25-\operatorname{sen}^2 y}$$

Entonces,

$$dy=\frac{dt}{1+t^2}\ ;\ \operatorname{sen}y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene,

$$\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{25-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{24t^2+25}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{24t^2+25}=\frac{\sqrt{6}}{60}\text{arc tan}\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}t\right)+C$$

Pero $\tan y=t$, por tanto, se concluye que,

$$\int\frac{dy}{(5-\operatorname{sen}y)(5+\operatorname{sen}y)}=\frac{\sqrt{6}}{60}\text{arc tan}\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\tan y\right)+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{(\tan^3 x + 1)\, dx}{3\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x}$

**Solución**

Se sustituyen las equivalencias en la integral y se simplifican:

$$\int \frac{\left(\tan^3 x + 1\right)dx}{3\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{\left(t^3+1\right)\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2}dt}{\frac{3}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2}dt}{\frac{3-2t+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{(t^3+1)\,dt}{t^2-2t+3}$$

La integral resultante se expresa de la siguiente manera,

$$\int \frac{(t^3+1)dt}{t^2-2t+3} = \int \left(t + 2 + \frac{t-5}{t^2-2t+3}\right)dt$$

Se resuelve cada una de las integrales,

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1-4}{t^2-2t+3}\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1}{t^2-2t+3}\,dt - 4\int \frac{dt}{t^2-2t+3}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\int \frac{dt}{(t-1)^2+2}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C$$

Pero $t = \tan x$, entonces:

$$\frac{1}{2}\tan^2 x + 2\tan x + \frac{1}{2}\ln\left|\tan^2 x - 2\tan x + 3\right| - 2\sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

# EJERCICIO 19

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{d\theta}{4+5\cos\theta}$

2. $\int \frac{d\theta}{1+2\cos\theta}$

3. $\int \frac{d\alpha}{\text{sen}^2\alpha+8\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$

4. $\int \frac{dx}{1-\cos x+\text{sen}\,x}$

5. $\int \frac{3}{(1+\text{sen}\,\beta)^2}\,d\beta$

6. $\int \frac{dw}{\text{sen}\,w+\cos w-1}$

7. $\int \frac{d\theta}{1-\text{tg}\,\theta}$

8. $\int \frac{d\theta}{3\,\text{sen}\,\theta-\cos\theta}$

9. $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta+\text{sen}\,2\theta}$

10. $\int \frac{d\theta}{4\sec\theta-1}$

11. $\int \frac{d\alpha}{6-3\,\text{sen}\,\alpha+4\cos\alpha}$

12. $\int \frac{dx}{2+3\sec x}$

13. $\int \frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}\,d\beta$

14. $\int \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta-\cos\theta}\,d\theta$

15. $\int \frac{3\,\text{sen}\,\theta+4\cos\theta}{4\,\text{sen}\,\theta-3\cos\theta}\,d\theta$

16. $\int \frac{dw}{\text{sen}^2 w-5\,\text{sen}\,w\cdot\cos w+\cos^2 w}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 5

## APLICACIONES DE LA INTEGRAL

### Reseña HISTÓRICA

Matemático francés, Cauchy fue pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Gracias a Cauchy el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual, toma el concepto de límite como punto de partida del análisis y elimina de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos ahora otorgan rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que queda eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangente.

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

## Constante de integración

Dada la integral indefinida $\int f'(x)\,dx = F(x) + C$, representa la familia de funciones de $F(x)$ donde $C$ recibe el nombre de constante de integración.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la función cuya derivada sea $e^{2x}$

**Solución**

La derivada de la función que se busca es:

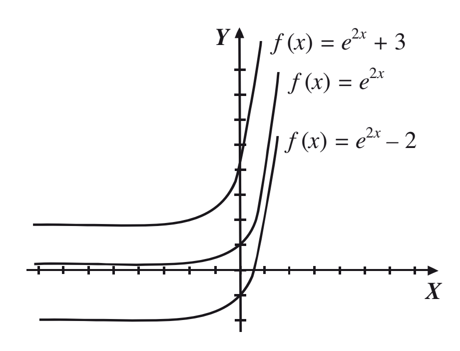
$$f'(x) = e^{2x}$$

Se integra $f'(x)$ para obtener $f(x)$

$$f(x) = \int e^{2x}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Si $C = -2, 0, 2$ se obtiene una famila de curvas para $f(x)$,




Finalmente, la función que se busca es: $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

2 Determina la ecuación de la curva, cuya pendiente de la recta tangente en el punto (4, 5) es $y' = \sqrt{2x+1}$

**Solución**

Se integra $y' = \sqrt{2x+1}$

$$y = \int \sqrt{2x+1}\,dx \quad \rightarrow \quad y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (4, 5) se obtiene el valor de $C$,

$$5 = \frac{(2(4)+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad \rightarrow \quad 5 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -4$$

De acuerdo con el resultado anterior, la ecuación de la curva es:

$$y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4$$

3 Encuentra la ecuación de la curva cuya pendiente de la recta tangente en el punto (3, 1) es igual a $2xy$

**Solución**

La derivada es implícita, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Ahora, se agrupan las variables,

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

Se integra la expresión y se obtiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \quad \rightarrow \quad \ln y = x^2 + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (3, 1), se encuentra el valor de la constante de integración,

$$\ln 1 = 3^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -9$$

Por consiguiente, la ecuación de la curva es:

$$\ln y = x^2 - 9 \quad \rightarrow \quad y = e^{x^2 - 9}$$

4 Una motocicleta viaja a razón de $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y acelera a un ritmo de $(3t - 5)\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Determina la velocidad a la que viaja la motocicleta al transcurrir 4 segundos.

**Solución**

La aceleración se define como $\frac{dv}{dt} = a$, entonces, $dv = a\,dt$

Integrando esta expresión, se obtiene la velocidad $v$

$$\int dv = \int (3t - 5)\,dt \quad \rightarrow \quad v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + C$$

Para un tiempo inicial $t = 0$, la velocidad de la motocicleta es $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, estos datos se sustituyen en la función para obtener el valor de $C$.

$$10 = \frac{3}{2}(0)^2 - 5(0) + C \quad \text{donde} \quad C = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por consiguiente, $v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + 10$, luego, la velocidad de la motocicleta al cabo de 4 segundos es:

$$v = \frac{3}{2}(4)^2 - 5(4) + 10 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

# EJERCICIO 20

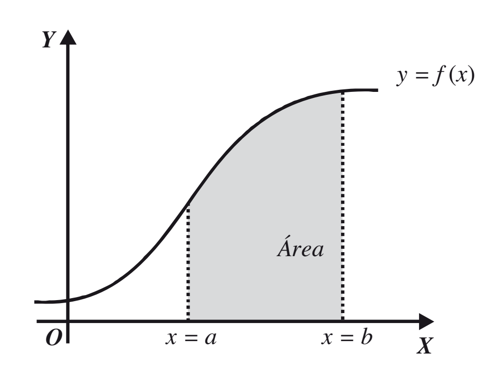
1. La pendiente de la recta tangente a una curva es $x + 3$. Obtén la ecuación de la curva si pasa por el punto $(2, 4)$
2. La derivada de una función está dada como $f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Encuentra $f(x)$ si ésta contiene al punto de coordenadas $(2\pi, 1)$
3. Una curva pasa por el punto $(3, e^3)$ y su derivada en este punto es igual a $xe^x$. Determina la ecuación de dicha curva.
4. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\frac{2a}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en este punto es $\frac{\sqrt{4a^2 - 9x^2}}{x^2}$
5. Determina la ecuación de la curva, cuya derivada es $\frac{dx}{dy} = 3y^2 - 4y$ cuando pasa por el punto $\left(-\frac{19}{8}, \frac{1}{2}\right)$
6. Obtén la ecuación de la curva que pasa por el punto $(-\ln 4, 1)$ y cuya derivada es $x' = -\frac{3y^2 - 12y + 3}{(2 - y)^2(y + 1)}$
7. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(5, \frac{2}{3}\right)$ y cuya pendiente de la recta tangente en este punto es $y' = x\sqrt{x^2 - 9}$
8. Encuentra la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\frac{5}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en dicho punto es $x' = \operatorname{sen}^4 \frac{y}{2}$
9. La derivada de una función es $\frac{y + 3}{2 - x}$. Encuentra la función cuando pasa por el punto $(-3, -1)$.
10. La pendiente de la recta tangente a una curva en el punto $(0, 4)$ es $\frac{2x^2 y}{x^2 + 1}$. Encuentra la ecuación de la curva.
11. La derivada de una función en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ es $x^2 \operatorname{sen}^2 y$. Obtén la función.
12. Determina la función del desplazamiento de una partícula que lleva una velocidad constante de 11 m/s y al transcurrir 8 segundos se desplazó 73 m.
13. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba y 3 segundos después su velocidad es de 30.6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcula la velocidad del lanzamiento.
14. Una partícula parte del reposo y se mueve con una aceleración de $(t + 2)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, para un tiempo de 4 segundos su velocidad es de 12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determina la distancia recorrida en este tiempo.
15. En un proceso de enfriamiento, conforme transcurre el tiempo, la rapidez de pérdida de temperatura (T) es el cuádruplo de los $t$ minutos transcurridos. Si al principio del proceso el material tenía una temperatura de 64º C, determina la temperatura al transcurrir $t$ minutos.
16. Desde lo alto de un edificio se deja caer un objeto y tarda 6 segundos en llegar al suelo. Calcula la altura del edificio.
17. Desde la parte más alta de una torre se arroja hacia abajo un cuerpo con una velocidad de 8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y tarda 3.2 segundos en tocar al suelo. Calcula la altura de la torre y la velocidad con la que choca el cuerpo contra el suelo.

   Nota: $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Integral definida

Representa el área que forma la función $f(x)$ con el eje $X$ en el intervalo $[a, b]$.




Teorema fundamental

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$a$ = límite inferior
$b$ = límite superior

### Cálculo de una integral definida

a) Se integra la diferencial de la función.
b) Se sustituye la variable de la integral que se obtuvo, por los límites superior e inferior, y los resultados se restan para obtener el valor de la integral definida.

### Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\left[F(b) - F(a)\right]$ donde $c$ es una constante

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ con $c \in [a, b]$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \dfrac{2a^3}{3}$

**Solución**

Se integra, $\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^a$

se sustituyen los límites

$$= \left[a^2(a) - \frac{a^3}{3}\right] - \left[a^2(0) - \frac{0^3}{3}\right] = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

2 Demuestra que: $\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{3x-2}}=\frac{4}{3}$

**Solución**

Se integra y se sustituyen los límites,

$$\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{3x-2}}=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\right]_{2}^{6}=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3(6)-2}-\frac{2}{3}\sqrt{3(2)-2}\right]=\left[\frac{2}{3}(4)-\frac{2}{3}(2)\right]=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

3 Verifica que la integral definida $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\frac{\pi-2}{8}$

**Solución**

Se integra la expresión

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

Se sustituyen los límites

$$\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2(0)\right]$$

$$=\left[\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[0-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(0)\right]=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=\frac{\pi-2}{8}$$

Finalmente tenemos que:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\frac{\pi-2}{8}$$

4 Demuestra que: $\int_{1}^{e}x\ln x\,dx=\frac{1}{4}(e^2+1)$

**Solución**

Se integra por partes,

$$\int_{1}^{e}x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int_{1}^{e}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_{1}^{e}$$

Se sustituyen los límites,

$$\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_{1}^{e}=\left[\frac{e^2}{2}\left(\ln e-\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\frac{1^2}{2}\left(\ln 1-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{e^2}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

Por consiguiente,

$$\int_{1}^{e}x\ln x\,dx=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

5 Calcula el valor de la integral $\int_{0}^{4}2^{\frac{x}{2}}dx$

**Solución**

Se integra y se sustituyen los límites:

$$\int_{0}^{4}2^{\frac{x}{2}}dx=\left[\frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2}\right]_{0}^{4}=\left[\frac{2^{\frac{4}{2}+1}}{\ln 2}\right]-\left[\frac{2^{\frac{0}{2}+1}}{\ln 2}\right]=\frac{8}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}=\frac{6}{\ln 2}$$

# EJERCICIO 21

Determina el valor de las siguientes integrales:

1. $\int_0^2 (x^2 - 2x)dx$
2. $\int_{-2}^2 (x+5)\,dx$
3. $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + 3x\right)dx$
4. $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 3)dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}\, x \cos x\, dx$
6. $\int_0^{\pi} 3\,\text{sen}\, x\, dx$
7. $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2 - 4}$
8. $\int_e^4 \frac{dx}{2x}$
9. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{1 + \cos x}\, dx$
10. $\int_{-1}^2 \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$
11. $\int_{-2}^3 e^{\frac{x}{2}} dx$
12. $\int_1^5 xe^x dx$
13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x\, \text{sen}\, x\, dx$
14. $\int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$
15. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
16. $\int_e^{e^2} \frac{\cos(\ln x)dx}{x}$
17. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
18. $\int_3^5 \frac{(7x - 11)dx}{x^2 - 3x + 2}$
19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$
20. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^3(2x)\, dx$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Área bajo la curva

El área limitada por la curva $y = f(x)$ continua en $[a, b]$, el eje $X$ y las rectas $x = a$, $x = b$, es:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

El área limitada por la curva $x = f(y)$ continua en $[c, d]$, el eje $Y$ y las rectas $y = c$, $y = d$, es:

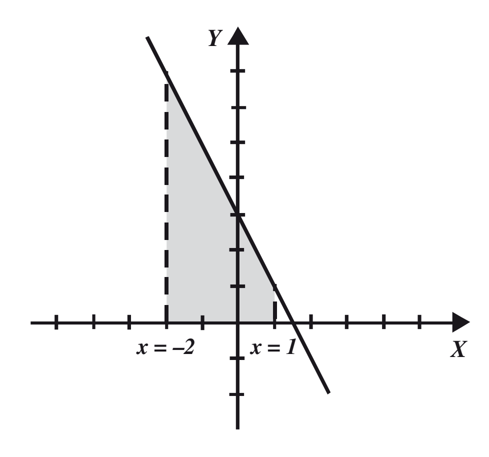
$$\text{Área} = \int_c^d f(y)\,dy = \int_c^d x\,dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el área limitada por la recta $y = -2x + 3$ desde $x = -2$ hasta $x = 1$

**Solución**




$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-2x + 3)\,dx = \left[-x^2 + 3x\right]_{-2}^{1}$$

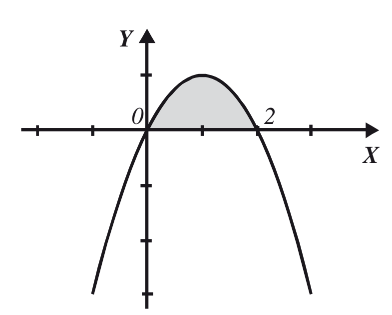
$$= [-(1)^2 + 3(1)] - [-(-2)^2 + 3(-2)]$$

$$= 2 - (-10) = 12u^2$$

2 Encuentra el área comprendida entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje $X$

**Solución**

Se buscan los puntos de intersección de la curva con el eje $X$,



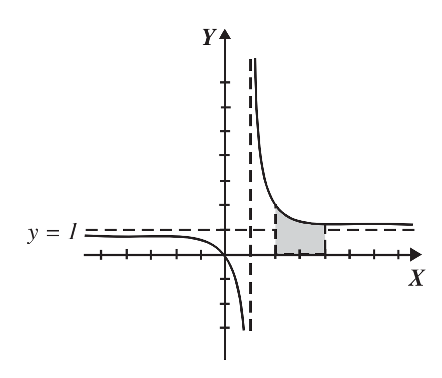

$$2x - x^2 = 0,\ x(2 - x) = 0 \quad \text{donde} \quad x = 0,\ x = 2$$

$$\text{Área} = \int_{0}^{2} (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}$$

$$\text{Área} = \left[(2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$$

3 Determina el área limitada por el eje $X$, la curva $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y las rectas $x = 2$ y $x = 4$

**Solución**




$$\text{Área} = \int_2^4 \frac{x}{x-1}\,dx = \left[x + \ln(x-1)\right]_2^4$$

$$= [4 + \ln(4-1)] - [2 + \ln(2-1)]$$

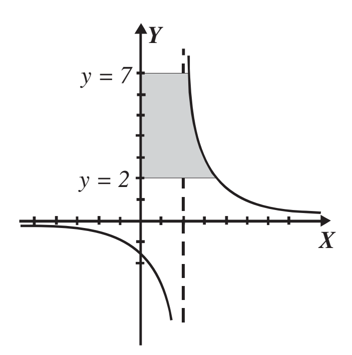
$$= 2 + \ln(3) = 3.098\ u^2$$

4 Calcula el área limitada por la curva $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$, limitada por el eje $Y$ y las rectas $y = 2$, $y = 7$

**Solución**

Se despeja $x$ de la función y se obtiene

$$x = \frac{3}{y} + 2$$



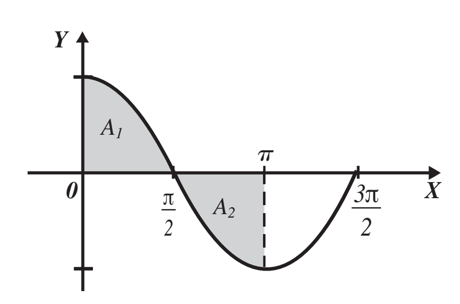

$$\text{Área} = \int_2^7 x\,dy = \int_2^7 \left(\frac{3}{y} + 2\right) dy = \left[3\ln y + 2y\right]_2^7$$

$$= \left(3\ln\left(\frac{7}{2}\right) + 10\right) u^2$$

5 Encuentra el área limitada por el eje $X$, la función $f(x) = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$

**Solución**

Se traza la gráfica de la función $f(x) = \cos x$




Parte del área sombreada queda por debajo del eje $X$, así que se multiplica por $-1$

$$\text{Área}_T = A_1 - A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx$$

$$= \left[\text{sen } x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\text{sen } x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\text{sen}\frac{\pi}{2} - \text{sen } 0\right] - \left[\text{sen } \pi - \text{sen}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 1 - [-1] = 1 + 1 = 2u^2$$

# EJERCICIO 22

Determina las áreas comprendidas entre las curvas y las rectas dadas.

1. $f(x) = 2x + 1, x = 1, x = 4$
2. $f(x) = x^2, x = 0, x = 3$
3. $f(x) = x^3, x = 2, x = 5$
4. $f(x) = \sqrt{x}, x = 0, x = 9$
5. $f(x) = 4 - x^2, x = -2, x = 2$
6. $f(x) = x^2 - 6x + 9, x = 3, x = 6$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}, x = -3, x = 1$
8. $f(x) = \sqrt{x-2}, x = 2, x = 11$
9. $f(x) = \text{sen } x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$
10. $f(x) = x^2 - 2x + 1, x = -1, x = 3$
11. $x = \frac{1}{6}(5 - 4y - y^2)$, el eje $Y$
12. $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4$
13. $x = y - 1, y = 1, y = 5$
14. $y = 9 - x^2$, el eje $X$
15. $y = \frac{2}{x+1}, x = 0, x = 3$
16. $f(y) = y^3 - y, y = -1, y = 1$
17. $y = (a\,x)^3, x = -\frac{2}{a}, x = \frac{2}{a}$
18. $x = \frac{y-3}{y-2}, y = 3, y = 5$
19. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}, x = 1, x = \sqrt{10}$
20. $y = \frac{x^2-1}{x^2+2}, x = 0, x = 4$
21. $x = \ln y, y = 1, y = 4$
22. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}, x = 0, x = 1$

23. $x = \dfrac{2y}{\sqrt{9-y^2}}, y = 0, y = 2$

24. $y = 3 \text{ sen } 2x, x = 0, x = \pi$

25. $y = e^{2x}, x = 0, x = \dfrac{1}{2}$

26. $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}, x = -2, x = -1$

27. $x = \sqrt{4-y^2}, y = -2, y = 2$

28. $y = x^2 \cos x, x = -\dfrac{\pi}{2}, x = 0$

29. $x = \dfrac{3y-5}{y^2-2y-3}, y = 4, y = 6$

30. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-x-6}, x = 4, x = 6$

31. $x = ye^y, y = -2, y = 0$

32. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}, x = 4, x = 9$

33. $x = \dfrac{e^{\sqrt[3]{y}}}{\sqrt[3]{y^2}}, y = 1, y = 8$

34. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, x = -a, x = a$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Fórmula de trapecios

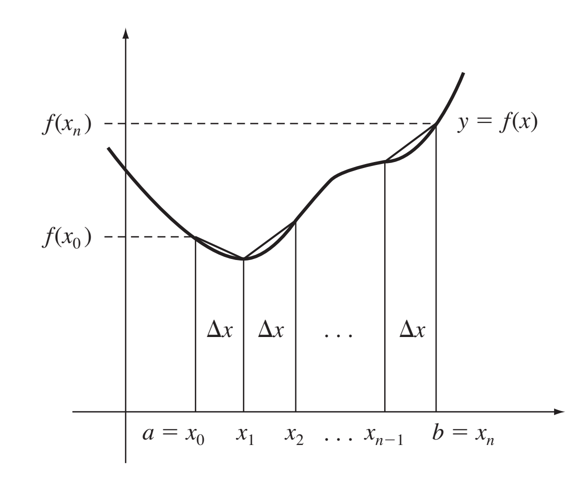
Determinada la función $y = f(x)$, el área aproximada que está limitada por la curva en el intervalo $[a, b]$ es:

$$A = \left(\frac{1}{2}f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + ... + \frac{1}{2}f(x_n)\right)\Delta x \quad \text{donde} \quad x_o = a, x_n = b$$

$n$ = número de partes iguales en las que se divide el intervalo $[a, b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

es la longitud de cada parte.

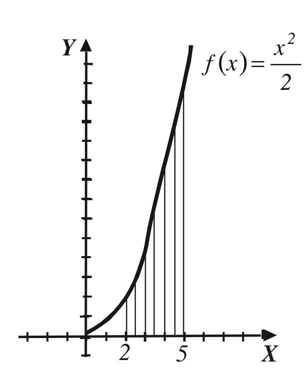


EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\int_2^5 \left(\frac{x^2}{2}\right) dx$ utilizando la fórmula de trapecios, dividiendo el intervalo [2, 5] en 6 partes iguales.

**Solución**




Los datos son:

$$x_o = 2, n = 6, x_6 = 5$$

Con los cuales se obtiene la longitud de cada parte:

$$\Delta x = \frac{5-2}{6} = 0.5$$

Se determinan las ordenadas de los puntos mediante la función $y = \frac{x^2}{2}$,

| $x_n$ | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_n)$ | 2 | 3.125 | 4.5 | 6.125 | 8 | 10.125 | 12.5 |

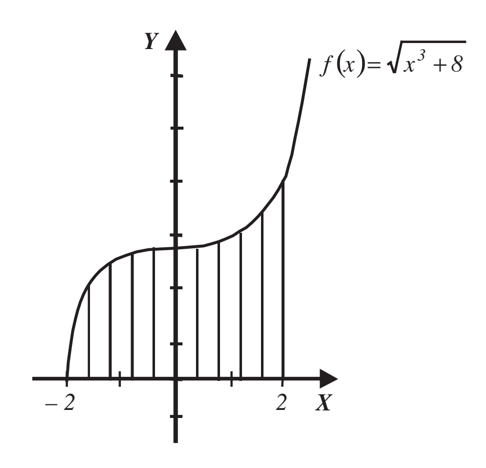
Se aplica la fórmula de trapecios para obtener el área en el intervalo [2, 5],

$$A = \left(\frac{1}{2}(2) + 3.125 + 4.5 + 6.125 + 8 + 10.125 + \frac{1}{2}(12.5)\right)(0.5)$$

$$A = 19.5625\ u^2$$

2 Evalúa la siguiente integral $\int_{-2}^{2}\sqrt{x^3+8}\,dx$ con $n = 10$ intervalos.

**Solución**




Los datos son:

$$x_0 = -2\,,\quad n = 10,\quad x_{10} = 2$$

Se obtiene el valor de $\Delta x$,

$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{10} = 0.4$$

Se realiza la tabla para encontrar las ordenadas de $x_n$, sustituyendo en:

$$f(x) = \sqrt{x^3+8}$$

| $x_n$ | −2 | −1.6 | −1.2 | −0.8 | −0.4 | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_n)$ | 0 | 1.975 | 2.504 | 2.736 | 2.817 | 2.828 | 2.839 | 2.917 | 3.118 | 3.477 | 4 |

Se aplica la fórmula de área de trapecios,

$$A = \left(\frac{1}{2}(0)+1.975+2.504+2.736+2.817+2.828+2.839+2.917+3.118+3.477+\frac{1}{2}(4)\right)0.4$$

Por consiguiente, el área es 10.884 $u^2$

3 Encuentra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x^2 dx$ tomando 5 intervalos.

**Solución**

De acuerdo con la integral se tienen los siguientes datos:

$$x_0 = 0, \quad x_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad n = 5$$

La longitud de cada trapecio está determinada por,

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Se realiza la tabulación para obtener las ordenadas de la función $f(x) = \text{sen } x^2$

| $x_n$ | 0 | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_n)$ | 0 | −0.5877 | −0.5877 | 0.5877 | 0.5877 | 0 |

Entonces, se concluye que,

$$\text{Área} = \left(\frac{1}{2}(0) + |-0.5877| + |-0.5877| + 0.5877 + 0.5877 + \frac{1}{2}(0)\right)\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.7385\ u^2$$

# EJERCICIO 23

Utiliza la fórmula de trapecios para obtener las siguientes áreas:

1. $\int_1^3 x^2\, dx$ con $n = 5$

2. $\int_2^4 (2x - 1) dx$ con $n = 8$

3. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^3}\, dx$ con $n = 4$

4. $\int_0^5 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x + 4}}\, dx$ con $n = 8$

5. $\int_1^3 \sqrt{\ln x}\, dx$ con $n = 8$

6. $\int_1^2 \sqrt{x^5 - \sqrt{x}}\, dx$ con $n = 5$

7. $\int_1^3 e^{x^2 - 1}\, dx$ con $n = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Fórmula de Simpson $\frac{1}{3}$

Dada la función $y = f(x)$, el área limitada por la función y el eje $X$ en el intervalo $[a, b]$ está determinada por:

$$\text{Área} = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + ... + f(x_n)\right)$$

Donde:

$$x_o = a, \quad x_n = b, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \text{número par de intervalos.}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Evalúa $\int_1^3 \sqrt{x}\, dx$ con $n = 4$ intervalos.

**Solución**

Los datos son:

$$x_o = 1, \quad x_4 = 3, \quad n = 4$$

Se determina el valor de $\Delta x$,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

Se sustituyen los valores de $x_n$ en la función $y = \sqrt{x}$ para obtener las ordenadas,

| $x_n$ | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_n)$ | 1 | 1.224 | 1.414 | 1.581 | 1.732 |

Por consiguiente,

$$\text{Área} = \frac{0.5}{3}(1 + 4(1.224) + 2(1.414) + 4(1.581) + 1.732)$$

$$\text{Área} = 2.796\ u^2$$

2 Evalúa $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}dx$ con $n = 6$ intervalos.

**Solución**

$x_0 = 0, \quad x_n = 2, \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3},$

entonces el área es:

$$\text{Área} = \frac{\frac{1}{3}}{3}(0 + 4(0.327) + 2(0.585) + 4(0.707) + 2(0.726) + 4(0.702) + 0.66)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{9}(10.226) = 1.136\ u^2$$

# EJERCICIO 24

Utiliza el método de Simpson $\frac{1}{3}$ para evaluar las siguientes integrales:

1. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ con $n = 4$ intervalos
2. $\int_1^4 \sqrt[3]{x^5-2}\, dx$ con $n = 6$ intervalos
3. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\, dx$ con $n = 8$ intervalos
4. $\int_0^8 \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+1}}{x+1}\, dx$ con $n = 6$ intervalos
5. $\int_0^{\pi} \cos x^2\, dx$ con $n = 4$ intervalos

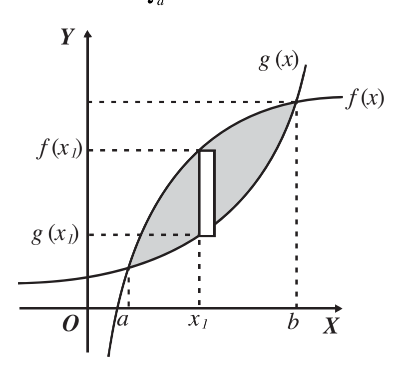
**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Área entre curvas planas

### Rectángulos de base *dx*

El área comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, tomando rectángulos de base $dx$, está definida como:

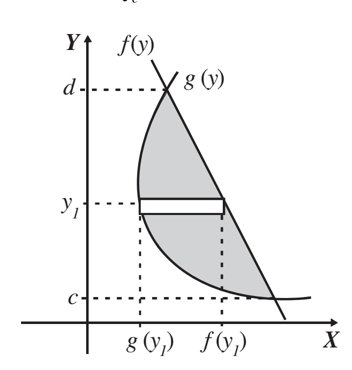
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$




### Rectángulos de base *dy*

El área comprendida entre las curvas $f(y)$ y $g(y)$, tomando rectángulos de base $dy$, se define como:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$




Es conveniente graficar las funciones para determinar la fórmula que se debe utilizar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área limitada entre las curvas $y = x^3 + 1$ y $x - y + 1 = 0$

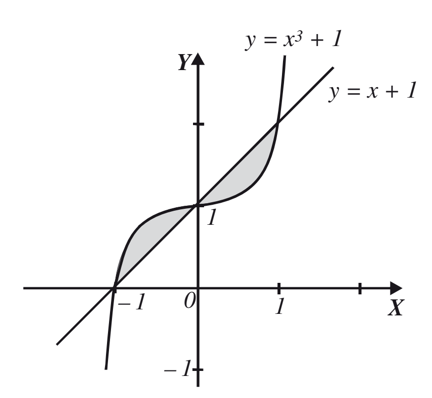
**Solución**

Se buscan los puntos de intersección de ambas curvas igualando las funciones:

$$x^3 + 1 = x + 1$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x - 1)(x + 1) = 0$$

Por consiguiente,

$$x = 0,\ x = 1 \text{ y } x = -1$$




Se eligen rectángulos verticales de base $dx$ para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0}(y_1 - y_2)dx + \int_{0}^{1}(y_2 - y_1)dx \quad \text{siendo} \quad y_1 = x^3 + 1 \text{ y } y_2 = x + 1$$
$$= \int_{-1}^{0}[(x^3 + 1) - (x + 1)]\,dx + \int_{0}^{1}[(x + 1) - (x^3 + 1)]\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)\,dx$$

Pero

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = -\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$

entonces,

$$\text{Área} = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = 2\int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$
$$= 2\left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^4}{4}\right]$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}u^2$$

Finalmente, el área comprendida entre las curvas es $\frac{1}{2}u^2$

2 Obtén el área limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $4x + y - 6 = 0$

**Solución**

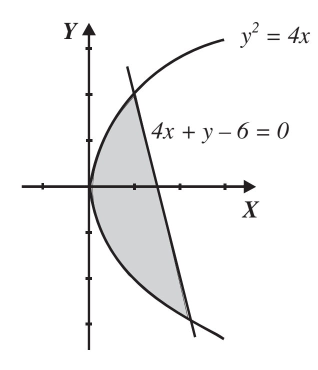
Se buscan las intersecciones de las curvas igualando los despejes en $x$,

$$\frac{y^2}{4} = \frac{6-y}{4}$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$y = -3;\ y = 2$$




Se eligen rectángulos horizontales de base $dy$, para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2}[x_1 - x_2]\,dx = \int_{-3}^{2}\left(\frac{6-y}{4} - \frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-3}^{2}(6 - y - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{125}{6}\right)$$

$$= \frac{125}{24}u^2$$

Finalmente, tenemos que el área comprendida por las curvas es $\frac{125}{24}u^2$

**3** Encuentra el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ y $y^2 - 8x + 16 = 0$

**Solución**

Los puntos de intersección entre las curvas se obtienen al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \\ y^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}$$

Al multiplicar por $-1$ la segunda ecuación y sumar con la primera, se obtiene,

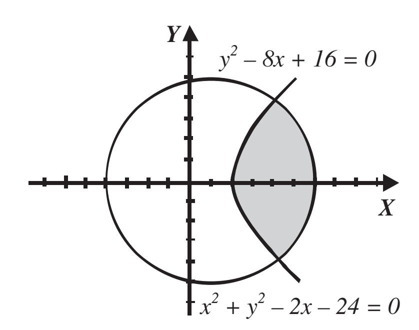
$$x^2 + 6x - 40 = 0 \rightarrow (x + 10)(x - 4) = 0 \rightarrow x = -10; x = 4$$

Se sustituye el valor de $x = 4$ en la ecuación de la parábola,

$$y^2 - 8(4) + 16 = 0$$
$$y^2 - 16 = 0$$
$$y = \pm 4$$

Por consiguiente, los puntos de intersección son los puntos (4, 4) y (4, $-4$) y el área está determinada por:

$$\text{Área} = \int_{-4}^{4} (x_2 - x_1)\, dx$$




Se despeja $x$ de ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \qquad\qquad y^2 - 8x + 16 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 24 - y^2 + 1 \qquad\qquad -8x = -y^2 - 16$$
$$(x-1)^2 = 25 - y^2 \qquad\qquad x = \frac{y^2 + 16}{8}$$
$$x - 1 = \sqrt{25 - y^2}$$
$$x = \sqrt{25 - y^2} + 1$$

Al final se sustituyen en la fórmula del área:

$$A = \int_{-4}^{4} \left[ \left( \sqrt{25 - y^2} + 1 \right) - \left( \frac{y^2 + 16}{8} \right) \right] dy = \int_{-4}^{4} \left( \sqrt{25 - y^2} - \frac{y^2}{8} - 1 \right) dy$$

$$= \left[ \frac{y}{2}\sqrt{25 - y^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\frac{y}{5} - \frac{y^3}{24} - y \right]_{-4}^{4}$$

$$= \left[ \frac{4}{2}\sqrt{25 - 4^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{4^3}{24} - 4 \right] - \left[ \frac{-4}{2}\sqrt{25 - (-4)^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{-4}{5}\right) - \frac{(-4)^3}{24} - (-4) \right]$$

$$= [6 + 11.59 - 2.66 - 4] - [-6 - 11.59 + 2.66 + 4] = 21.86\, u^2$$

# EJERCICIO 25

Obtén el área limitada entre las siguientes curvas:

1. $y = x^2$; $y = x + 2$
2. $x = y^3$; $x^2 + y = 0$
3. $y = 4x - x^2$; $y = x^2$
4. $y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$; $y = 2x + 3$
5. $4x^2 - 17x - 15y + 30 = 0$; $y = \sqrt{x+4}$
6. $x^2 + y^2 = 18$; $x^2 = 6y - 9$
7. $x^2 + y^2 = 25$; $y^2 - 8x + 8 = 0$
8. $5x^2 + 16y^2 = 84$; $4x^2 - y^2 = 12$
9. $3x^2 + 16y - 48 = 0$; $x^2 + y^2 = 16$
10. $y = x^3$; $y = \dfrac{3x}{x+2}$
11. $y^2 = x$; $xy^2 + 2x = 3$
12. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ ; $x^2 + y^2 = 16$
13. $x = 9 - y^2$; $x = 1 - \dfrac{1}{9}y^2$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

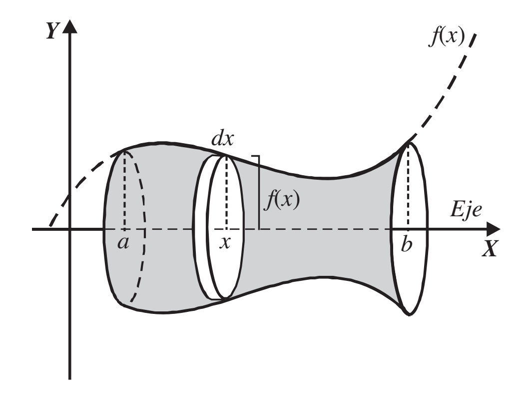
## Volumen de sólidos de revolución

Se generan al girar un área plana en torno a una recta conocida como eje de rotación o revolución. Para calcular el volumen se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos.

### Método de discos

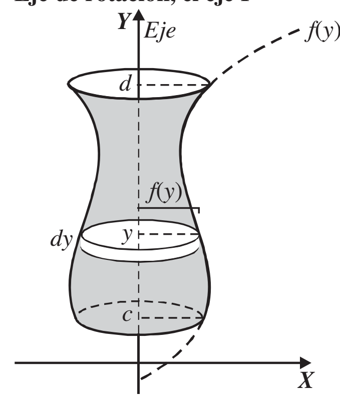
Se utiliza cuando el eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

**Eje de rotación, el eje *X***



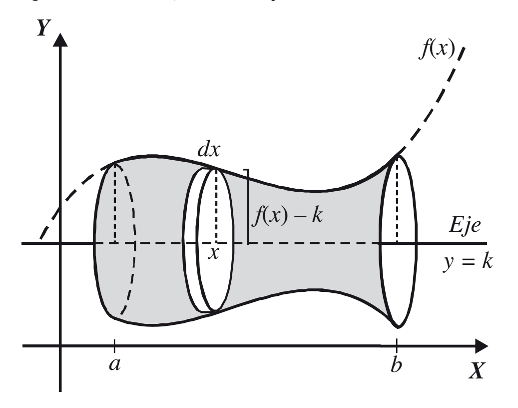

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

**Eje de rotación, el eje *Y***



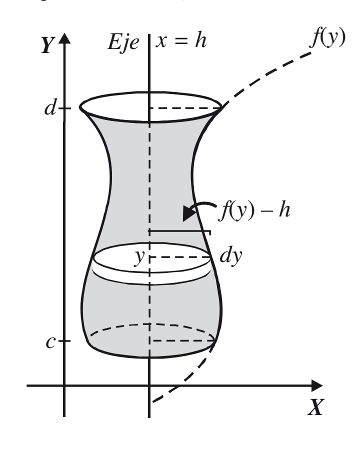

$$V = \pi\int_c^d [f(y)]^2\, dy$$

**Eje de rotación, la recta $y = k$**




$$V = \pi\int_a^b [f(x) - k]^2\, dx$$

**Eje de rotación, la recta $x = h$**




$$V = \pi\int_c^d [f(y) - h]^2\, dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el volumen que se genera al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x - 2 = 0$ alrededor del eje $X$.

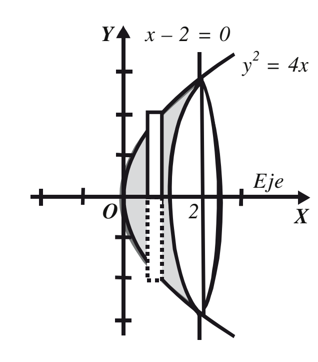
**Solución**

Al hacer girar el rectángulo de altura $f(x)$ y ancho $dx$ alrededor del eje $X$, se forma un disco de volumen,

$$dV = \pi y^2\, dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = 2$, se obtiene el volumen del sólido,

$$V = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 (4x)dx = \left[2\pi x^2\right]_0^2 = 8\pi u^3$$



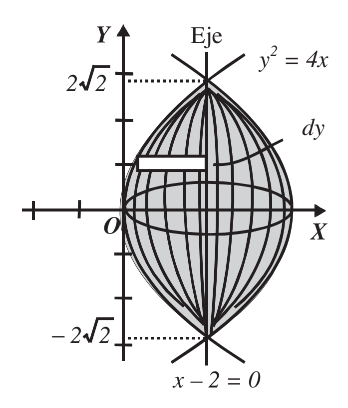
2 Encuentra el volumen generado al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ en torno a la recta $x - 2 = 0$

**Solución**

Para generar el sólido se deben girar los rectángulos alrededor del eje $x = 2$, que es paralelo al eje $Y$, por tanto el volumen de los discos es:

$$dV = \pi(2 - x)^2\, dy$$

Integrando desde $y = -2\sqrt{2}$ hasta $y = 2\sqrt{2}$ se obtiene el volumen del sólido.




$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}(2 - x)^2 dy$ con $x = \dfrac{y^2}{4}$, sustituyendo y simplificando:

$$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(2 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(2 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(4 - y^2 + \frac{y^4}{16}\right)dy$$

$$= 2\pi\left[4y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{80}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{128\sqrt{2}}{15}\pi u^3$$

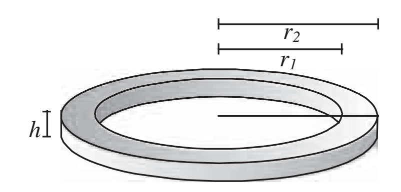
## Método de las arandelas

Se emplea cuando el eje de rotación no es parte del contorno del área limitada por las curvas, esto significa que se generan sólidos de revolución con un hueco en el centro, al tipo de discos con hueco en el centro que se utilizan para hallar el volumen se denomina, arandela.

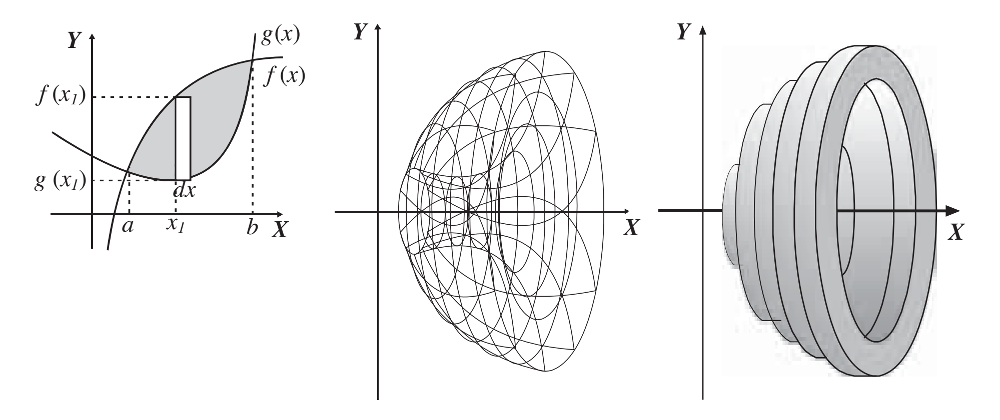
### *Volumen de una arandela*

Sea $V$ el volumen de la arandela, entonces se define como la diferencia de volúmenes de los cilindros de radio $r_2$ y $r_1$

$$V = V_1 - V_2 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$



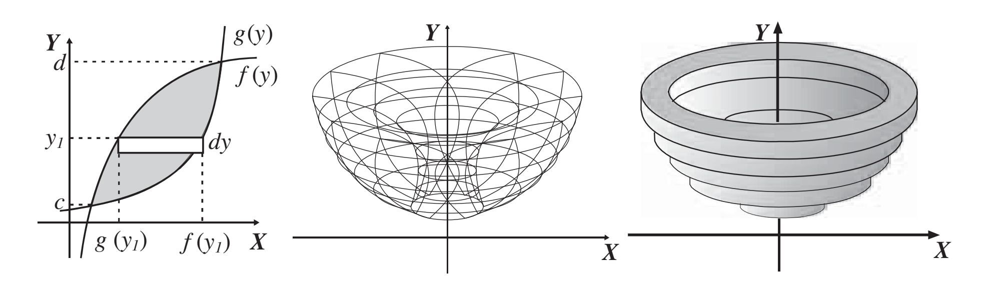
**Eje de rotación horizontal**




El volumen generado en torno al eje $X$ se define como:

$$V=\pi\int_a^b\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

**Eje de rotación vertical**



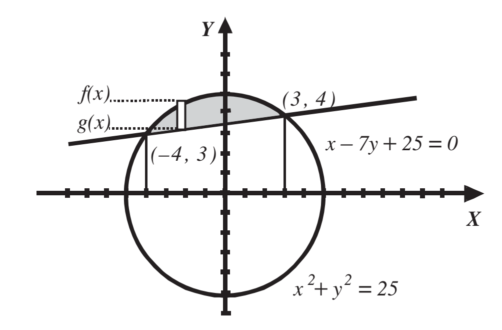

El volumen generado en torno al eje $Y$ se define como:

$$V=\pi\int_c^d\left([f(y)]^2-[g(y)]^2\right)dy$$

## Ejemplo

Determina el volumen que se genera al girar el área limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $x - 7y + 25 = 0$ en torno al eje $X$.

### Solución



Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los puntos de intersección,

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad x - 7y + 25 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad y = \frac{x+25}{7}$$

$$\pm\sqrt{25 - x^2} = \frac{x+25}{7}$$

$$\left(\pm\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = \left(\frac{x+25}{7}\right)^2$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Por consiguiente, las abscisas de los puntos son $x = -4$ y $x = 3$, los cuales resultan ser los límites de integración.
El eje de rotación no es parte del contorno de la superficie, por lo que se emplea la fórmula:

$$V = \pi\int_a^b \left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right)dx$$

Donde $f(x)$ es la circunferencia y $g(x)$ la recta.
Al calcular el volumen se obtiene:

$$V = \pi\int_{-4}^{3}\left(\left[\pm\sqrt{25-x^2}\right]^2 - \left[\frac{x+25}{7}\right]^2\right)dx = \pi\int_{-4}^{3}\left(25 - x^2 - \frac{x^2+50x+625}{49}\right)dx$$

$$= \pi\int_{-4}^{3}\left(\frac{600-50x-50x^2}{49}\right)dx = \frac{50}{49}\pi\int_{-4}^{3}(12 - x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{50}{49}\pi\left[12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}$$

$$= \frac{50}{49}\pi\left[\left(12(3) - \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(12(-4) - \frac{(-4)^2}{2} - \frac{(-4)^3}{3}\right)\right]$$

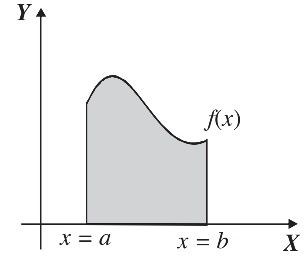
Por consiguiente, se deduce que el volumen es igual a: $V = \frac{175}{3}\pi\, u^3$

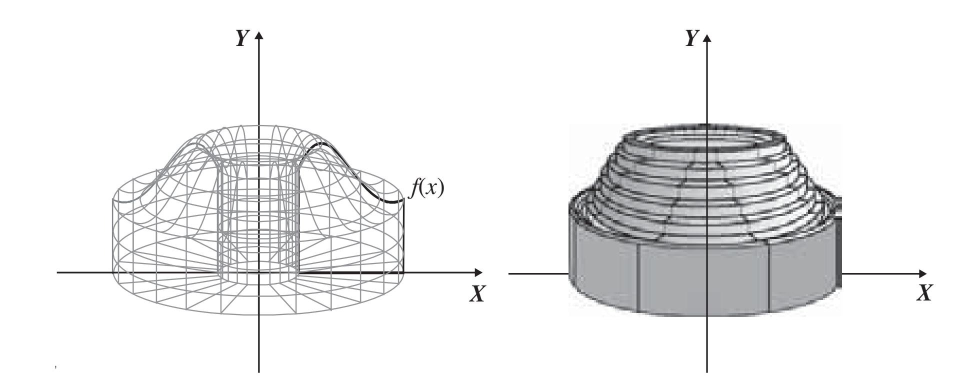
## Método de capas

En este método el volumen de la capa se expresa en función de la circunferencia media, la altura y el espesor de la capa cilíndrica, engendrada al girar el rectángulo en torno al eje de rotación.

La gráfica de la derecha muestra el área comprendida por la función $y = f(x)$ con $f(x) > 0$, el eje $X$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Al girarla sobre el eje $Y$ se genera el sólido de revolución, éste se divide en $n$ capas o casquetes cilíndricos, unos dentro de otros, con la finalidad de obtener el volumen del sólido.






El volumen de un casquete cilíndrico se define como el volumen del cilindro exterior menos el interior, entonces:

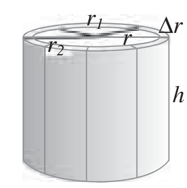
$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^{\,2} h - \pi r_1^{\,2} h = \pi h (r_2^{\,2} - r_1^{\,2})$$
$$= \pi h (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

pero

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{y} \quad \Delta r = r_2 - r_1$$

entonces:

$$V = 2\pi r h \Delta r$$




➲ **Eje de rotación el eje "y"**

En el plano cartesiano se elige el *i*-ésimo casquete cilíndrico de dimensiones $r = x_i$, $h = f(x_i)$ y $\Delta r = \Delta x$, al sumar los volúmenes de los *n* casquetes cilíndricos cuando *n* es muy grande se obtiene:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i) \Delta x = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

➲ **Eje de rotación el eje "x"**

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i f(y_i) \Delta y = 2\pi \int_c^d y f(y)\, dy$$

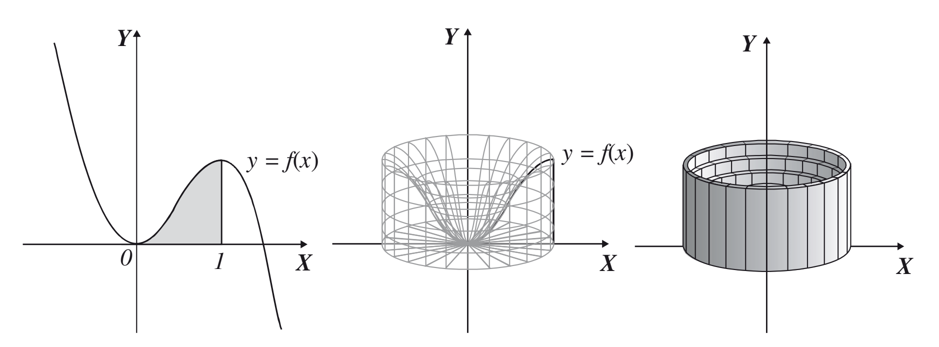
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Utiliza el método de capas para hallar el volumen que se genera al girar sobre el eje $Y$ el área limitada por la curva $y = 3x^2 - 2x^3$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

**Solución**

Gráfica del área a rotar y del sólido de revolución seccionado en capas



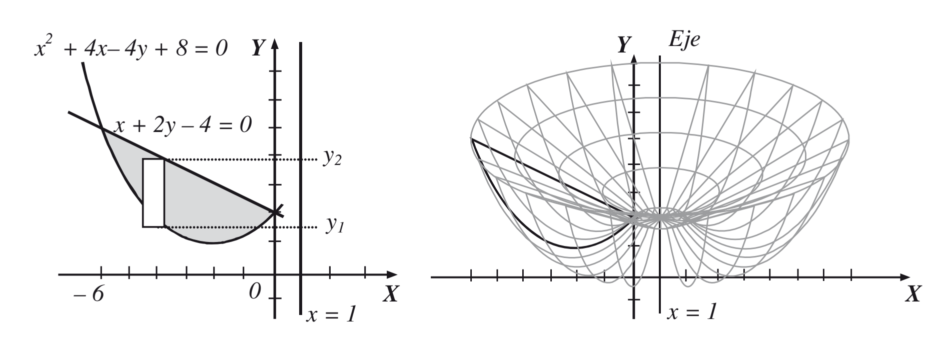

Luego, el volumen se define:

$$V = 2\pi\int_0^1 x(3x^2 - 2x^3)dx = 2\pi\int_0^1 (3x^3 - 2x^4)dx = 2\pi\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{5}(1)^5\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right] = 2\pi\left[\frac{15-8}{20}\right] = 2\pi\left[\frac{7}{20}\right] = \frac{7}{10}\pi\, u^3$$

2 Obtén el volumen que genera el área plana acotada por la parábola $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ y la recta $x + 2y - 4 = 0$, al girar en torno a la recta $x - 1 = 0$

**Solución**




Para encontrar los puntos de intersección de la recta y la parábola se igualan las ordenadas y se resuelve la ecuación para $x$.

$$\frac{x^2 + 4x + 8}{4} = \frac{4 - x}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x = 0 \qquad x(x + 6) = 0$$

$$x = 0,\ x = -6$$

La altura del rectángulo está determinada por

$$y_2 - y_1 = \frac{4-x}{2} - \frac{x^2+4x+8}{4} = -\frac{6x+x^2}{4}$$

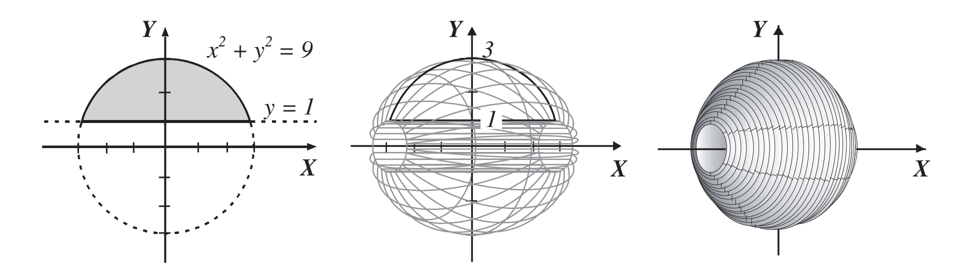
la distancia del rectángulo al eje de rotación es $(1 - x)$ y su ancho $dx$, al aplicar la fórmula se obtiene el volumen,

$$V = 2\pi\int_{-6}^{0}(1-x)\left(-\frac{6x+x^2}{4}\right)dx = \frac{2\pi}{4}\int_{-6}^{0}(x^3+5x^2-6x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-3x^2\right]_{-6}^{0}$$

Finalmente, el volumen resulta ser: $V = 72\,\pi u^3$

3 Determina el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar sobre el eje $X$ el área limitada por la curva $x^2 + y^2 = 9$ y la recta $y - 1 = 0$

**Solución**




El volumen se genera tanto en el lado positivo como en el lado negativo del eje $X$, por tanto:

$$V = 2\int_{1}^{3}2\pi y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy = 4\pi\int_{1}^{3}y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy$$

Se resuelve la integral:

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{1}^{3}$$

Al evaluar se obtiene como resultado

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-9)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{(9-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = 4\pi\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi u^3$$

# EJERCICIO 26

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 4 alrededor del eje $X$.
2. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x-2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 11$, alrededor del eje $X$.
3. Obtén el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^2$ y las rectas $x = 0$, $x = 3$ alrededor del eje $X$.
4. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 2$, $x = 0$ alrededor del eje $Y$.
5. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^3$, y las rectas $x = 0$, $y = 8$, alrededor del eje $Y$.
6. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = 16$ alrededor del eje $Y$.
7. Determina el volumen que origina la superficie limitada por la parábola $y + x^2 = 0$ y la recta $y + 4 = 0$, al girar en torno del eje $Y$.
8. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno al eje $X$ el área limitada por la curva $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 0$.
9. Encuentra el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $y = \sqrt{x^2+1}$ y las rectas $x = -2$ y $x = 2$ en torno al eje $X$.
10. Determina el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $x^2 - y^2 + 1 = 0$ y las rectas $y = 1.5$, $y = 3$ en torno al eje $Y$.
11. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje $X$ la superficie limitada por la semielipse $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ y el eje $X$.
12. Obtén el volumen generado al girar en torno al eje $Y$ la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
13. Encuentra el volumen que se origina al girar en torno al eje $X$, la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
14. Determina el volumen generado por las curvas $x^2 + y^2 = 25$ y $y^2 - 6x + 15 = 0$, al girar en torno al eje $Y$.
15. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje $X$ la superficie limitada por la curva $y = 4x - x^2$ y la recta $x - y = 0$
16. Calcula el volumen generado al rotar en torno al eje $X$, la superficie limitada por la parábola $x^2 - 6x - 8y + 17 = 0$ y la recta $x - 4y + 5 = 0$
17. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, cuando gira en torno a la recta $x + 3 = 0$
18. Calcula el volumen que se genera al girar la superficie limitada por la parábola $y^2 + 4x - 6y - 11 = 0$, y la recta $2x + y - 9 = 0$, en torno a la recta $y + 1 = 0$
19. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno a la recta $x - 2 = 0$, la superficie limitada por la curva $4x^2 + y^2 + 48x + 128 = 0$
20. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la primera arcada de la función sen $x$, al girar en torno a la recta $2x - 3\pi = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

## Longitud de arco

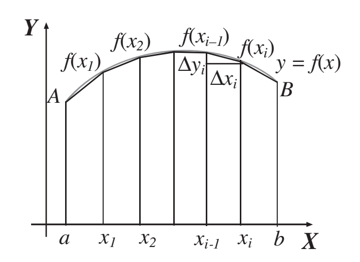
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco se define como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

### Demostración

Se eligen $n$ puntos del arco $AB$ y se unen los puntos adyacentes mediante cuerdas, las cuales tendrán longitud $\Delta s$, la línea quebrada resultante tendrá longitud

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$




El límite al que tiende esta longitud cuando $\Delta s_i$ tiende a cero es la longitud ($L$) del arco $AB$, siendo

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

y por el teorema del valor medio:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x)$$

para cualquier valor de $x$ que cumpla $x_{i-1} < x < x_i$, entonces:

$$L = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

En forma semejante, si la curva tiene por ecuación $x = h(y)$, entonces la longitud de la curva está determinada por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [h'(y)]^2}\, dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud del arco de la curva $y = x^2$, en el intervalo [2, 4]

**Solución**

Se deriva la función y se obtiene

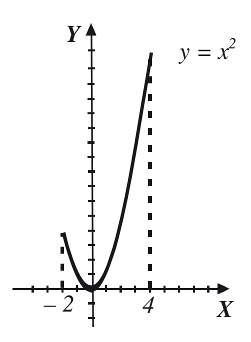
$$y' = 2x$$

Al sustituir en la fórmula,

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1+4x^2}\,d.$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_2^4$$

$$= 2\sqrt{65} - \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\frac{8+\sqrt{65}}{4+\sqrt{17}} = 12.170\ u$$




2 Obtén la longitud del arco de la curva, cuya ecuación es $x = y^{\frac{3}{2}}$, entre los puntos (0, 0) y (64, 16)

**Solución**

Al derivar con respecto a $Y$ se obtiene,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, se sustituye en la fórmula:

$$L = \int_0^{16} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dy = \int_0^{16}\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{16}\sqrt{4+9y}\,dy$$

$$= \left[\frac{\sqrt{(4+9y)^3}}{27}\right]_0^{16}$$

$$= 66.685\ u$$

## EJERCICIO 27

Encuentra la longitud de arco en los intervalos dados de cada una de las siguientes curvas.

1. $y^2 = x^3$ $\quad 1 \leq x \leq 4$
2. $x = y^2$ $\quad 0 \leq x \leq 1$
3. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ $\quad 1 \leq x \leq 4$
4. $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$
5. $f(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ $\quad 1 \leq x \leq 3$
6. $f(x) = \ln \cos x$ $\quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
7. $f(x) = \ln \text{sen}\, x$ $\quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
8. $y = \ln x^2$ $\quad 1 \leq x \leq 5$
9. $y = \ln x$ $\quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
10. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ $\quad 2 \leq x \leq 5$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Aplicaciones a la economía

### Función de costos

El costo total para producir, vender y distribuir un artículo es igual a la suma de los costos fijos más los costos variables.

$$C(x)_t = C_f + C_v$$

Los costos variables dependen del número de unidades $x$, mientras que los costos fijos no. Estos últimos permanecen constantes, algunos son el pago de la renta, el mantenimiento, y otros más en los cuales no importa si se produce, vende y distribuye una pieza, mil o cualquier otra cantidad y se representan, como:

$$C(x = 0) = C_f$$

El costo marginal es el costo para producir una unidad adicional más cuando ya se tiene un nivel de producción determinado y se expresa como la derivada del costo total respecto al número de unidades:

$$\text{Costo marginal} = \frac{dC(x)}{dx}$$

De forma contraria, si lo que se conoce es el costo marginal, entonces el costo total es la integral:

$$C = \int C'(x)\, dx$$

Cuando se resuelve esta integral se obtiene una constante de integración, la cual se puede conocer mediante las condiciones iniciales, la cual regularmente es equivalente a los costos fijos.

**Ejemplo**

El costo marginal que emplea un fabricante de pernos está dado por $\frac{dC(x)}{dx} = 302 - 0.04x$ y el costo fijo es de \$12. Obtén la función de costo total.

**Solución**

El costo total se obtiene resolviendo la integral:

$$C = \int (302 - 0.04x)\,dx$$

$$C = 302x - 0.02x^2 + K$$

Pero $K$, en realidad, son los costos fijos $C_f$, entonces:

$$C(x = 0) = 302(x) - 0.02(x)^2 + K,$$

pero se sabe que $C(x = 0) = C_f$, entonces:

$$C_f = 12 = K$$

Entonces la función del costo total es:

$$C(x) = 302x - 0.02x^2 + 12$$

## Función de ingresos

La demanda de un producto se define como $p(x)$, mientras el ingreso total es el producto del precio, por el número de unidades $x$, que se venden.

$$I(x) = p(x) \cdot x$$

El ingreso marginal está en función de la cantidad demandada y matemáticamente se representa como la derivada del ingreso total, con respecto a la cantidad $x$

$$\text{Ingreso marginal} = \frac{d\,I(x)}{dx}$$

Si lo que se desea obtener es el ingreso total y se tiene el ingreso marginal, entonces se procede a efectuar una integración:

$$I(x) = \int I'(x)\,dx$$

En este caso, cuando se integra y se encuentra la constante ésta será siempre igual a cero, ya que si no se comercializa ninguna pieza $x$, no existirán ingresos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función del ingreso marginal al producir una bicicleta está dada por la función $\frac{dI(x)}{dx} = 3x^2 - 2x + 20$, determina la función del ingreso total y la función de demanda total.

**Solución**

El ingreso total se obtiene resolviendo la integral:

$$I(x) = \int (3x^2 - 2x + 20)dx$$

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x + C$$

Pero $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de $C$

$$I(x = 0) = (0)^3 - (0)^2 + 20(0) + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x$$

Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se obtiene:

$$p(x) = \frac{x^3 - x^2 + 20x}{x} = x^2 - x + 20$$

2 Una compañía manufacturera sabe que la función del ingreso marginal de un producto es $I'(x) = 20 - 0.002x$, en donde $I'(x)$ se cuantifica en pesos y $x$ es el número de unidades.
Con base en la información antes mencionada, determina:

*a*) La función de ingresos totales
*b*) La función de la demanda del producto
*c*) Los ingresos totales al venderse 500 unidades
*d*) El precio, cuando se venden 3 500 artículos

**Solución**

*a*) La función de los ingresos totales se obtiene al resolver la integral:

$$I(x) = \int (20 - 0.002x)\, dx$$

$$I(x) = 20x - 0.001x^2 + C$$

La condición $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de $C$

$$I(0) = 20(0) - (0.001)(0)^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = 20x - 0.001x^2$$

*b*) Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se determina que:

$$p(x) = \frac{20x - 0.001x^2}{x} = 20 - 0.001x$$

*c*) Para determinar los ingresos totales al venderse 500 artículos, se sustituye en:
$I(x) = 20x - 0.001x^2$
$I(500) = 20(500) - (0.001)(500)^2$
$I(500) = 10\,000 - 250$
$I(500) = \$\,9\,750$

*d*) Si se desea obtener el precio, cuando se venden 3 500 unidades, se sustituye en:
$p(x) = 20 - 0.001x$
$p(3\,500) = 20 - 0.001(3\,500)$
$p(3\,500) = 20 - 3.5$
$p(3\,500) = \$16.5$

# EJERCICIO 28

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. El costo marginal para producir un perno metálico está dado por $C'(x) = 20 - x - x^2$, además se sabe que el costo fijo es $4.00
   Determina:
   *a*) La función de costo total
   *b*) El costo de producir 5 unidades

2. La función del ingreso marginal de un cierto producto es $I'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, determina la función de ingreso total.

3. La función $f(x) = 4e^{0.005x}$, representa el costo marginal de producción de un buje de cobre, en donde los costos fijos están dados por $C_f = \$200.00$. Obtén:
   *a*) La función del costo total
   *b*) El costo cuando se producen 500 piezas

4. El ingreso marginal que tiene registrado un productor de bicicletas de montaña es: $I'(x) = 8 + 3(2x - 3)^2$, determina la función del ingreso total y la demanda.

5. El gerente de una empresa productora de dulces sabe que su costo marginal está dado por la función

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{5}{\sqrt{2x+1}},$$

   además sabe que el costo de producir 40 dulces, es $53.00.
   Encuentra:
   *a*) La función del costo total
   *b*) El costo de fabricar 220 piezas

6. Una máquina de coser industrial se deprecia en función del tiempo $t$, según la función $P'(t) = -\dfrac{8160}{(3t+2)^2}$.
   Determina:
   *a*) La función del precio $P(t)$, de la máquina, $t$ años después de su adquisición
   *b*) ¿Cuál es su valor después de 5 años?

7. Una compañía deprecia una computadora en función del tiempo $t$ medido en años, según la función

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{24\,000}{(t+3)^4}$$

   en donde $P(t)$, es el precio de la máquina $t$ años después de su adquisición. ¿Cuál es su valor después de 2 años?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

# CAPÍTULO 6

## ECUACIONES DIFERENCIALES

**Reseña HISTÓRICA**

Inventó un método para determinar aproximadamente el tiempo de un fósil. Su teoría (de la datación o fechamiento con radiocarbono), está basada en que la razón de la cantidad de carbono 14 al carbono ordinario es constante de tal forma que la cantidad proporcional absorbida por los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Por lo que cuando muere un organismo la absorción de este elemento cesa y empieza a desintegrarse (vida media de un material radiactivo).

De tal forma que solo basta con comparar la cantidad de carbono 14 presente en el fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera. Con base en la vida media del carbono que es aproximadamente de 5600 años se plantea la variación de una cantidad inicial $C_0$ de carbono 14 en el fósil con respecto al tiempo, obteniendo una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0 \quad \text{en donde} \quad C_0 = C_0(0)$$

La cual resolveremos en este capítulo.

Willard Libby
(1908-1980)

## Introducción

Casi cualquier problema del mundo real se puede resolver mediante la formulación de un modelo matemático que, al resolverlo con los conocimientos adquiridos (en particular de cálculo), permita obtener conclusiones matemáticas, las cuales posteriormente nos permitirán hacer una interpretación acerca del fenómeno sobre el cual gira el problema y entonces podremos hacer predicciones sobre el mismo. Estas predicciones siempre se deben verificar con los datos nuevos que se derivan de la práctica. Es decir, si las predicciones no coinciden con los datos nuevos, entonces hay que ajustar el modelo.

La mayoría de estos problemas a resolver surgen en la física, la química y las ciencias sociales (crecimiento de población, decaimiento radiactivo, problemas donde interviene la velocidad y la aceleración, antigüedad de un fósil, etc.…). En muchas ocasiones, cuando se utiliza el cálculo, es porque se presenta una ecuación diferencial surgida del modelo encontrado, por esta razón una de las aplicaciones más importantes del cálculo son, sin duda, las ecuaciones diferenciales.

En este capítulo sólo se dará una introducción a las ecuaciones diferenciales (definición, clasificación, algunos métodos de solución y ejemplos de aplicación); es decir, no se pretende dar un curso completo, sólo haremos referencia a lo básico para que el alumno posteriormente pueda iniciar un curso formal de ecuaciones diferenciales.

## Definición

Una ecuación diferencial es aquella que tiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

La representación de una ecuación diferencial en su forma general es:

$$F(x, y, y', y'' \cdot y''', ..., y^n) = 0$$

Con $x$ variable independiente, $y = f(x)$ variable dependiente (en este caso la función desconocida), $y', y'', y''', \ldots, y^n$, sus derivadas.

El **orden** de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

El **grado** de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Por ejemplo:

| **Ecuación** | **Orden** | **Grado** |
|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx} - x = 7$ | Primero | Primero |
| $2xy' - y = 6$ | Primero | Primero |
| $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = -4y$ | Segundo | Primero |
| $(y'')^2 + 2(y')^3 + 2y = x$ | Segundo | Segundo |
| $2y''' - 4(y'')^2 - y' = 6x$ | Tercero | Primero |

Si una ecuación tiene una variable independiente se denomina ***ecuación diferencial ordinaria***, ya que sus derivadas son ordinarias.

Por ejemplo:

$$y' - 2x = 8 \qquad y'' - y' = x \qquad y''' - xy'' + 2y(y')^2 - xy = 0$$

Si una ecuación diferencial tiene dos o más variables independientes, se llama ecuación entre derivadas parciales, ya que las derivadas son parciales:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}t + \frac{\partial z}{\partial t} = xyt$$

La **solución** de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que junto con sus derivadas sucesivas se transforma en una identidad al ser sustituidas en ella.

## Ejemplo

Comprueba que $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, es solución de la ecuación $3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$

### Solución

Se obtienen la primera y segunda derivada de $f(x)$

$y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ Función

$y' = f'(x) = 3x^2 + 6x + 6$ Primera derivada

$y'' = f''(x) = 6x + 6$ Segunda derivada

Se sustituyen $y$, $y'$, $y''$ en la ecuación

$$3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$$
$$3(x^3 + 3x^2 + 6x + 1) - x(3x^2 + 6x + 6) + 3 = (6x + 6) + 3(2x + x^2)$$
$$3x^3 + 9x^2 + 18x + 3 - 3x^3 - 6x^2 - 6x + 3 = 6x + 6 + 6x + 3x^2$$
$$3x^2 + 12x + 6 = 3x^2 + 12x + 6$$

Por tanto, $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ es solución de la ecuación.

Una **solución general** es una función de una variable que tiene un número de constantes arbitrarias no conocidas igual al orden de la ecuación y que al sustituirla en la ecuación se transforma en una igualdad.

Una **solución particular** es una función de una sola variable que se obtiene de la solución general, obteniendo el valor de sus constantes y que al sustituirla en la ecuación la transforma en una identidad.

## Ejemplo

Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 5 - 2x$$

Determina cuál de las siguientes funciones es solución e indica de qué tipo es:

*a*) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

*b*) $y = -e^x - x + 1$

### Solución

*a*) Se sustituye $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será del tipo general.

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1$

$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x}$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (C_1e^x + 4C_2e^{2x}) - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1) \\ &= C_1e^x - 3C_1e^x + 2C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 6C_2e^{2x} + 2C_2e^{2x} + 3 - 2x + 2 \\ &= 5 - 2x \end{aligned}$$

$C_1$, $C_2$ son constantes no conocidas, por tanto es una solución general.

*b*) Se sustituye $y = -e^x - x + 1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será particular.

$$y = -e^x - x + 1$$

$$y' = -e^x - 1$$

$$y'' = -e^x$$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (-e^x) - 3(-e^x - 1) + 2(-e^x - x + 1) \\ &= -e^x + 3e^x - 2e^x + 3 - 2x + 2 \\ &= 5 - 2x \end{aligned}$$

La solución tiene constantes definidas $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, por tanto es una solución particular.

## Ecuación diferencial de primer orden

Ahora se resolverán algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden con el método de variables separables y homogéneas.

Al resolver ecuaciones diferenciales seguramente se necesitarán ciertos métodos de integración, por ello te sugerimos tomarte algunos minutos en repasar los capítulos anteriores.

### Variables separables

La técnica más simple es la aplicada en una ecuación diferencial que se reduce a la forma:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Donde $M(x)$ es una función que depende de $x$ y $N(y)$ es una función que depende de $y$. Con ello han sido separadas las variables, por lo cual la ecuación diferencial es del tipo de **variables separables**. Su solución se obtiene por integración directa:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Donde $C$ es una constante arbitraria.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $\frac{dy}{dx} = 6x^2$

**Solución**

La ecuación se transforma a:

$$dy = 6x^2\,dx$$

Se integran ambos miembros de la ecuación

$$\int dy = \int 6x^2 dx$$

$$y = 2x^3 + C$$

Por consiguiente la solución es:

$$y = 2x^3 + C$$

2 Resuelve la ecuación $(1 + y^2)dx + xydy = 0$

**Solución**

Se trasponen los términos:

$$(1 + y^2)dx + xydy = 0$$

$$(1 + y^2)dx = -xydy$$

Se multiplica por $\frac{1}{x(1+y^2)}$ y se simplifica:

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1 + y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}(-xydy)$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{ydy}{1+y^2}$$

Se integra cada lado de la igualdad:

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{ydy}{1+y^2} + C_1$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C_1$$

Se sustituye $C_1 = \ln C_2$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C_2$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln a^m = m \ln a$

$$\ln x + \ln\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln x\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

$$x\sqrt{1+y^2} = C$$

$$\left(x\sqrt{1+y^2}\right)^2 = (C_2)^2$$

Se despeja $y$, se sustituye $(C_2)^2 = C$

$$x^2(1+y^2) = C$$

$$1 + y^2 = \frac{C}{x^2}$$

$$y^2 = \frac{C}{x^2} - 1 = \frac{C - x^2}{x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{C - x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{C - x^2}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{C - x^2}$$

Por tanto, la solución general es: $y = \frac{1}{x}\sqrt{C - x^2}$

3 Resuelve la ecuación $(y^2 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$

**Solución**

La ecuación se transforma en:

$$(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$$

Se factoriza cada término

$$y^2(1 + x)\frac{dy}{dx} + x^2(1 - y) = 0$$

$$y^2(1 + x)dy + [x^2(1 - y)]dx = 0$$

Se multiplica cada término por $\dfrac{1}{(1+x)(1-y)}$

$$\frac{1}{(1+x)(1-y)}[y^2(1 + x)]dy + \frac{1}{(1+x)(1-y)}[x^2(1 - y)]dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2}{1+x}dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy = -\frac{x^2}{1+x}dx$$

Al integrar ambos miembros de la igualdad

$$\int\frac{y^2}{1-y}dy = -\int\frac{x^2}{1+x}dx$$

se divide y se obtiene que

$$\frac{y^2}{1-y} = -y - 1 + \frac{1}{1-y}$$

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Regresando a la integral

$$\int\left(-y-1+\frac{1}{1-y}\right)dy = -\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$-\int ydy - \int dy + \int\frac{dy}{1-y} = -\int xdx + \int dx - \int\frac{dx}{x+1}$$

$$-\frac{1}{2}y^2 - y - \ln|y - 1| = -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x + 1| + C_1$$

Se multiplica por 2

$$-y^2 - 2y - 2\ln|y - 1| = -x^2 + 2x - 2\ln|x + 1| + 2C_1$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y + 2\ln|x + 1| - 2\ln|y - 1| = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln a^m = m\ln a$ y al factorizar $x^2 - y^2$ se obtiene:

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + \ln(x + 1)^2 - \ln(y - 1)^2 = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

Finalmente, la solución general es:

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

4 Resuelve $(1 + y^2)dx = xdy$

**Solución**

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x(1+y^2)}$, cada término de la igualdad

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1 + y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}xdy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+y^2}$$

Al integrar se obtiene:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| = \arctan(y) + C_1$$

Se aplica la definición de logaritmo natural, si $\ln b = c$, entonces $e^c = b$

$$x = e^{\arctan(y) + C_1}$$

$$x = e^{\arctan(y)} \cdot e^{C_1}$$

$$x = e^{\arctan(y)} \cdot C$$

$$x = Ce^{\arctan(y)}$$

Por tanto, la solución es:

$$x = Ce^{\arctan(y)}$$

Otra forma de representar la solución es la siguiente:

$$\ln|x| = \arctan(y) + C_1$$

$$\ln|x| - C_1 = \arctan(y)$$

Se sustituye $\ln C = -C_1$

$$\ln|x| + \ln C = \arctan(y)$$

Se aplica la propiedad ln $ab = \ln a + \ln b$

$$\ln|Cx| = \text{arc tan}(y)$$

Se obtiene la tangente de cada término de la igualdad

$$\tan(\ln|Cx|) = \tan(\text{arc tan}(y))$$
$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

Finalmente, la solución es:

$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

5 Resuelve $e^{-y}(1 + y') = 1$

**Solución**

Se resuelve el producto

$$e^{-y}(1 + y') = 1$$
$$e^{-y} + e^{-y}y' = 1$$

La ecuación se transforma en:

$$e^{-y} + e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1$$
$$e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1 - e^{-y}$$
$$e^{-y}\,dy = (1 - e^{-y})dx$$
$$\frac{e^{-y}dy}{1 - e^{-y}} = dx$$

Se integra cada término de la igualdad

$$\int \frac{e^{-y}dy}{1 - e^{-y}} = \int dx$$
$$\ln|1 - e^{-y}| = x + C_1$$
$$\ln|1 - e^{-y}| - C_1 = x$$
$$\ln|1 - e^{-y}| + \ln|C| = x$$
$$\ln|C(1 - e^{-y})| = x$$
$$C(1 - e^{-y}) = e^x$$

Por consiguiente, la solución es:

$$e^x = C(1 - e^{-y})$$

6 Determina la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

para la cual

$$y = 2$$

cuando

$$x = 0$$

**Solución**

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$2y\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int 2y\,dy = \int 3x^2 dx$$

$$y^2 = x^3 + C$$

En la solución general se sustituyen los valores de: $y = 2$, $x = 0$

$$y^2 = x^3 + C$$

$$(2)^2 = (0)^3 + C$$

Por tanto,

$$C = 4$$

Este resultado se sustituye en la solución general, se despeja $y$

$$y^2 = x^3 + C$$

$$y = \sqrt{x^3 + C}$$

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

Por tanto, la ecuación particular es:

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

7 Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración debida a la gravedad de un cuerpo que cae es de $9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, esto es posible si se desprecia la resistencia del aire. Si se arroja un cuerpo hacia arriba desde una altura inicial de 30 m, con una velocidad de $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, determina su velocidad y su altura tres segundos más tarde.

**Solución**

La altura $s$ se tomara positiva hacia arriba, entonces la velocidad $v$ es positiva, pero la aceleración $a$ es negativa ya que la atracción de la gravedad tiende a disminuir $v$, por tanto la solución esta dada por la ecuación diferencial.

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

Con las condiciones iniciales

$$v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{y} \quad s = 30 \text{ m}$$

La ecuación $\frac{dv}{dt} = -9.81$, se resuelve por el método de variables separables, es decir:

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

$$dv = -9.81\ dt$$

$$\int dv = -\int 9.81 dt + C$$

$$v = -9.81t + C$$

En el instante $t = 0$, $v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces

$$v = -9.81t + C$$

$$20 = -9.81(0) + C$$

$$C = 20$$

Por tanto

$$v = -9.81t + 20$$

Luego, $v = \frac{ds}{dt}$, entonces se tiene una segunda ecuación diferencial.

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

Al resolver la ecuación diferencial por variables separables resulta:

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

$$\int ds = \int(-9.81t + 20)dt + K$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

Se determina el valor de $K$, con los valores iniciales $s = 30$, $t = 0$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

$$30 = -\frac{9.81}{2}(0)^2 + 20(0) + K$$

Por tanto, $K = 30$, entonces la solución es:

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30$$

Finalmente se obtiene el valor de la velocidad y la altura 3 s más tarde.

$$v = -9.81t + 20 = -9.81(3) + 20 = -29.43 + 20 = -9.43\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30 = -\frac{9.81}{2}(3)^2 + 20(3) + 30 = (-4.905)(9) + 20(3) + 30 = -44.14 + 60 + 30 = 45.86\text{ m}$$

8 Se tiene un cultivo con una cantidad $N_0$ de bacterias, al pasar una hora el número de bacterias es de $\frac{5}{2}N_0$. Si la razón en la que se reproducen es proporcional al número de bacterias, ¿en cuánto tiempo se cuadriplicará la cantidad inicial de bacterias?

**Solución**

Si la razón de reproducción, la variación de $N_0$ respecto al tiempo $\left(\frac{dN_0}{dt}\right)$, es proporcional al número de bacterias, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dN_0}{dt} = kN_0$$

La cual es una ecuación de variables separables, al resolverla se obtiene:

$$\frac{dN_0}{N_0} = kdt$$

$$\ln N_0 = kt + C_1$$

$$e^{kt+C_1} = N_0$$

$$N_0(t) = e^{kt+C_1}$$

$$N_0(t) = e^{kt}e^{C_1}$$

donde

$$N_0(t) = Ce^{kt}$$

Cuando $t = 0$ entonces $N_0(0) = Ce^{k(0)} = Ce^0 = C(1) = C$, pero sabemos que la cantidad inicial de bacterias es $N_0$, es decir $C = N_0$, por tanto $N_0(t) = N_0e^{kt}$.

Encontremos el valor de $k$, para eso tenemos que $N_0(1) = \frac{5}{2}N_0$, de donde

$$N_0e^{k(1)} = \frac{5}{2}N_0$$

$$N_0e^{k} = \frac{5}{2}N_0$$

Se divide entre $N_0$

$$e^k = \frac{5}{2}$$

Se aplica logaritmo natural en ambos lados

$$\ln e^k = \ln \frac{5}{2}$$

$$k = \ln \frac{5}{2}$$

$$k = 0.9163$$

Por tanto. la función solución a nuestro problema es $N_0(t) = N_0 e^{0.9163t}$
Si queremos saber en cuánto tiempo se cuadriplicará la población, entonces se plantea la siguiente igualdad:

$$4\,N_0 = N_0 e^{0.9163t}$$

Se divide entre $N_0$

$$4 = e^{0.9163t}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln 4 = \ln e^{0.9163t}$$

$$\ln 4 = 0.9163t$$

$$\frac{\ln 4}{0.9163} = t$$

$$t \approx 1.51$$

En aproximadamente 1.51 horas se cuadriplicará la población inicial.

9 Al analizar el hueso de un fósil se encontró que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original. ¿Cuál es la edad del fósil?

**Solución**

Existe un método basado en la cantidad de carbono 14 (C − 14) que existe en los fósiles. El químico Willard Libby inventó la teoría de la datación con radiocarbono, la cual se basa en que la razón de la cantidad de carbono 14 en la atmósfera es constante, lo que trae como consecuencia que la cantidad de este isótopo en los organismos es proporcional al que existe en la atmósfera. Al morir un organismo deja de absorber carbono 14, es decir la cantidad absorbida de este elemento cesa, y al ser un elemento radiactivo se va desintegrando (recuerda que la vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de este elemento). Entonces basta con comparar la cantidad proporcional de carbono 14 en el fósil con la cantidad constante en la atmósfera. Para hacer esto se toma en cuenta la vida media del carbono 14 que es aproximadamente de 5600 años.

Ahora regresemos a nuestro problema: digamos que $C_0$ es la cantidad inicial de carbono 14 en el fósil, entonces la variación de esta cantidad respecto al tiempo es proporcional a la cantidad inicial, es decir:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0$$

en donde

$$C_0 = C_0(0)$$

La ecuación diferencial obtenida es parecida al modelo del ejemplo 10, al resolverlo se obtiene:

$$C_0(t) = C_0 e^{kt}$$

Para obtener el valor de $k$, consideremos que la vida media del carbono 14 es de 5600 años, esto quiere decir que:

$$\frac{C_0}{2} = C_0(5600)$$

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{5600k}$$

Se divide entre $C_0$

$$\frac{1}{2} = e^{5600k}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5600k}$$

$$\ln\frac{1}{2} = 5600k$$

$$\frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} = k$$

$$k = -0.00012378$$

Por tanto,

$$C_0(t) = C_0 e^{-0.00012378t}$$

Si nos dicen que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original, entonces basta con plantear la siguiente igualdad.

$$\frac{C_0}{100} = C_0 e^{-0.00012378t}$$

$$\frac{1}{100} = e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = \ln e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = -0.00012378t$$

$$\frac{\ln\frac{1}{100}}{-0.00012378} = t$$

de donde

$$t \approx 37\,204$$

Por tanto, el fósil tiene aproximadamente 37 200 años.

# EJERCICIO 29

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y(1-x^3)}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{5+y^2}$
4. $(4 - y^2)dx - (4 - x^2)dy = 0$
5. $(9 + y^2)dx + 4xy\,dy = 0$
6. $(2y^2 - xy^2)y' + 2x^2 - yx^2 = 0$
7. $x\sqrt{y^2-2}\,dx + y\sqrt{x^2-2}\,dy = 0$
8. $e^{3y}(y' + 3) = 2$
9. $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y \cos 2x$
10. $y' = \cos(x + y)$
11. $(-4y + y^2)dx + x(x - 6)dy = 0$
12. $4x^3 - y^3y' = 0$
13. $y' = \frac{2x+1}{y^3+1}$
14. $e^x dx - \frac{1}{y}dy = 0$
15. $\frac{3}{x}dx + \frac{2}{y}dy = 0$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y-y}{y+4}$
17. $y' = x^2 \operatorname{sen} 2x$
18. $\frac{dy}{dx} = e^{2x-3y}$
19. $ydx + x\ln x dy = 0$
20. $(1 + e^x)e^y y' = y^{-1}$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Ecuaciones homogéneas

$f(x, y)$ es una función homogénea de grado $n$ si $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$
Por ejemplo: $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^2$ es homogénea, hagamos la evaluación:

$$f(\alpha x, \alpha y) = 3(\alpha x)^4 - (\alpha x)^3(\alpha y) = 3\alpha^4x^4 - \alpha^4x^3y = \alpha^4(3x^4 - x^3y) = \alpha^4 f(x, y)$$
$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4 f(x, y)$$

por tanto es homogénea de grado 4.

Una ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se llama homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas.

Por ejemplo:
La ecuación $\frac{x^2}{y}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{y}dy + x\ln\frac{x}{y}dx = 0$ es homogénea ya que para

$$M(x, y) = \frac{x^2}{y}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad N(x, y) = x\ln\frac{x}{y}$$

se tiene que:

$$M(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2}{\alpha y}\operatorname{arc\,cos}\frac{\alpha x}{\alpha y} = \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha y}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{y} = \alpha\frac{x^2}{y}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{y} = \alpha M(x, y)$$

$$N(\alpha x, \alpha y) = \alpha x\ln\frac{\alpha x}{\alpha y} = \alpha x\ln\frac{x}{y} = \alpha N(x, y)$$

Ambas son homogéneas de grado 1, por tanto, la ecuación $\frac{x^2}{y}\text{arc cos}\frac{x}{y}dy + x\ln\frac{x}{y}dx = 0$ es homogénea.

Para resolver una ecuación homogénea se utiliza la siguiente transformación:

$$y = vx \quad \text{de donde} \quad dy = vdx + xdv$$

## Ejemplo

Resuelve la ecuación $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$

### Solución

Sustituimos $y = vx$ de donde $dy = v\,dx + x\,dv$ en la ecuación:

$$(4x - 3(vx))dx + (2(vx) - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

$$(4x - 3vx)dx + (2vx - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

Se multiplica y simplifica:

$$4xdx - 3vxdx + 2v^2xdx + 2vx^2dv - 3xvdx - 3x^2dv = 0$$

$$(2v^2x - 3vx - 3vx + 4x)dx + (2vx^2 - 3x^2)dv = 0$$

$$(2v^2 - 6v + 4)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

$$2(v^2 - 3v + 2)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x^2(v^2 - 3v + 2)}$

$$\frac{2(v^2 - 3v + 2)xdx}{x^2(v^2 - 3v + 2)} + \frac{(2v - 3)x^2dv}{x^2(v^2 - 3v + 2)} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} = -\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2}$$

Se integra

$$2\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 4}$$

$$2\ln x + C_1 = -\ln|v^2 - 3v + 2| + C_2$$

$$2\ln x + \ln|v^2 - 3v + 2| = C_2 - C_1$$

Se hace la sustitución $C_3 = C_2 - C_1$ y se aplican las propiedades $\ln a^n = n\ln a$,

$$\ln x^2|v^2 - 3v + 2| = C_3$$

Se aplica la definición de logaritmo $\ln b = c$ quiere decir $e^c = b$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = e^{C_3}$$

Se sustituye $C = e^{C_3}$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = C$$

De $y = vx$ se despeja $v$, $v = \dfrac{y}{x}$ para sustituirla en la función.

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 2\right) = C$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2} - \frac{3x^2y}{x} + 2x^2 = C$$

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = C$$

Se factoriza

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Por tanto, la solución es

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Existen ecuaciones que son lineales pero no homogéneas, aunque se pueden reducir a ellas, haciendo una traslación. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

En donde si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, la ecuación se reduce a la forma homogénea

$$(a_1x' + b_1y')dx' + (a_2x' + b_2y')dy' = 0$$

Al hacer una traslación por medio de las transformaciones:

$$x = x' + h \qquad dx = dx'$$

$$y = y' + k \qquad dy = dy'$$

$(h, k)$ es el punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación de variables separables

$$P(x, t)dx + Q(x, t)dt = 0$$

Mediante la transformación $a_1x + b_1y = t$ de donde

$$dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

**Solución**

Tenemos la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

En donde $(2)(2) - (3)(-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0$, por tanto resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$2x - y + 4 = 0$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

Al resolverlo se obtiene que el punto $(h, k) = (-1, 2)$, se sustituye en las fórmulas de transformación:

$$x = x' + h \qquad y = y' + k$$
$$x = x' - 1 \qquad y = y' + 2$$
$$dx = dx' \qquad dy = dy'$$

Posteriormente en la ecuación dada:

$$(2[x' - 1] - [y' + 2] + 4)dx' + (3[x' - 1] + 2[y' + 2] - 1)dy' = 0$$
$$(2x' - 2 - y' - 2 + 4)dx' + (3x' - 3 + 2y' + 4 - 1)dy' = 0$$
$$(2x' - y')dx' + (3x' + 2y')dy' = 0$$

Se obtuvo una ecuación homogénea y se sustituye $y' = vx'\ dy' = vdx' + x'dv$

$$(2x' - vx')dx' + (3x' + 2vx')(vdx' + x'dv) = 0$$
$$2x'dx' - vx'dx' + 3x'vdx' + 3x'^2dv + 2v^2x'dx' + 2vx'^2dv = 0$$
$$2v^2x'dx' + 2vx'dx' + 2x'dx' + 2vx'^2dv + 3x'^2dv = 0$$
$$2(v^2 + v + 1)x'dx' + (2v + 3)x'^2dv = 0$$

Se multiplica por el factor: $\dfrac{1}{x'^2(v + v + 1)}$

$$\frac{2(v^2 + v + 1)x'dx'}{x'^2(v^2 + v + 1)} + \frac{(2v + 3)x'^2 dv}{x'^2(v^2 + v + 1)} = 0$$

$$\frac{2dx'}{x'} = -\frac{(2v + 3)dv}{v^2 + v + 1}$$

Se integran ambos lados

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+3)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1+2)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-\int\frac{2dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v^2+v+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$2\ln x'+C_1=-\ln(v^2+v+1)-2\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{v+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]+C_2$$

$$2\ln x'+\ln(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\frac{2v+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]=C_2-C_1$$

$$\ln x'^2(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2v+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

Al sustituir $v=\frac{y'}{x'}$

$$\ln x'^2\left(\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\left(\frac{y'}{x'}\right)+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2}{x'^2}+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{x'}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2+x'y'+x'^2}{x'^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{\sqrt{3}x'}\right)=C$$

Se sustituye $x'=x+1$, $y'=y-2$

$$\ln(x+1)^2\left(\frac{(y-2)^2+(x+1)(y-2)+(x+1)^2}{(x+1)^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(y-2)+\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{3}(x+1)}\right)=C$$

2 Resuelve la ecuación:

$$(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$$

**Solución**

En la ecuación se tiene que $(1)(-6) - (3)(-2) = -6 + 6 = 0$, entonces utilizamos la transformación:

$$a_1x + b_1y = t, \qquad dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

$$x - 2y = t, \qquad dy = \frac{dt - dx}{-2} = -\frac{dt - dx}{2}$$

Se sustituye en la ecuación:

$$(x - 2y - 1)dx + (3(x - 2y) + 2)dy = 0$$

$$(t - 1)dx + (3t + 2)\left(-\frac{dt - dx}{2}\right) = 0$$

$$tdx - dx - \frac{3}{2}tdt + \frac{3}{2}tdx - dt + dx = 0$$

$$tdx - \frac{3}{2}tdt + \frac{3}{2}tdx - dt = 0$$

$$2tdx - 3tdt + 3tdx - 2dt = 0$$

$$5tdx - (3t + 2)dt = 0$$

$$5tdx = (3t + 2)dt$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t}(5tdx = (3t + 2)dt)$$

$$5dx = 3dt + \frac{2}{t}dt$$

Se integran ambos miembros

$$5\int dx = 3\int dt + 2\int \frac{dt}{t}$$

$$5x = 3t + 2\ln t + C$$

$$5x = 3(x - 2y) + 2\ln(x - 2y) + C_1$$

$$5x = 3x - 6y + 2\ln(x - 2y) + C_1$$

$$2x + 6y - 2\ln(x - 2y) = C_1$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{2}$

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = \frac{1}{2}C_1$$

Se sustituye $C = \frac{1}{2}C_1$

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = C$$

Por tanto, la solución es:

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = C$$

# EJERCICIO 30

1. $xdy = (2x + 2y)dx$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3xy + y^2}{x^2}$
3. $xy\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + 2y^2$
4. $y' = \dfrac{x - y}{2x}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{x}{y}$
6. $(x^2 - y^2)y' = xy$
7. $(4x^2 - 5xy + y^2) + x^2y' = 0$
8. $(x^2 + y^2)y' = y^2$
9. $(2x - y)dy = (2y + x)dx$
10. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\sec\dfrac{y}{x}$
11. $(x - y)y' + (y - 2x) = 0$
12. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
13. $(x + y)y' + y = x$
14. $x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$
15. $(y^2 - 5xy)y' - (xy - 5x^2) = 0$
16. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$
17. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$
18. $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$
19. $(2x - 5y + 3)dx + (-2x - 4y + 6)dy = 0$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

# Solución a los ejercicios de aritmética

# CAPÍTULO 1

## EJERCICIO 1

1. Inverso aditivo
2. Conmutativa para la multiplicación
3. Cerradura para la multiplicación
4. Asociativa para la multiplicación
5. Neutro aditivo
6. Distributiva
7. Inverso aditivo
8. Cerradura para la suma
9. Conmutativa para la suma
10. Asociativa para la suma
11. Distributiva
12. Neutro multiplicativo
13. Inverso multiplicativo
14. Conmutativa para la suma
15. Conmutativa para la multiplicación
16. Asociativa para la multiplicación

## EJERCICIO 2

1. Cuarenta y cinco
2. Ochenta
3. Quinientos veintitrés
4. Setecientos setenta
5. Quinientos noventa y siete
6. Ocho mil trescientos dos
7. Nueve mil dieciséis
8. Veinte mil dieciocho
9. Once mil once
10. Nueve mil setenta y dos
11. Doce mil ciento tres
12. Veintidós mil quinientos
13. Treinta y cuatro mil cuatrocientos ochenta
14. Ciento ocho mil doscientos catorce
15. Tres millones ochenta y cuatro mil
16. Un millón doscientos quince mil trescientos sesenta y cuatro
17. Cinco millones seiscientos ochenta y tres mil cuarenta
18. Trece millones setenta y cinco

## EJERCICIO 3

| | | |
|---|---|---|
| 1. 521 | 5. 8 400 | 9. 1 108 012 |
| 2. 16 000 | 6. 601 | 10. 144 000 144 |
| 3. 1 299 | 7. 700 138 | 11. 116 386 514 |
| 4. 35 000 | 8. 1 527 428 | 12. 505 000 210 |

## EJERCICIO 4

| | | |
|---|---|---|
| 1. $<$ | 5. $>$ | 9. $<$ |
| 2. $>$ | 6. $<$ | 10. $=$ |
| 3. $<$ | 7. $=$ | 11. $<$ |
| 4. $>$ | 8. $<$ | 12. $>$ |

## EJERCICIO 5

| | | |
|---|---|---|
| 1. $>$ | 5. $>$ | 9. $>$ |
| 2. $<$ | 6. $=$ | 10. $<$ |
| 3. $>$ | 7. $<$ | 11. $=$ |
| 4. $=$ | 8. $<$ | 12. $>$ |

## EJERCICIO 6

| | | |
|---|---|---|
| 1. 10 | 5. $\frac{1}{3}$ | 9. 3.2 |
| 2. $\frac{7}{4}$ | 6. 2.5 | 10. 6.8 |
| 3. 9 | 7. $\frac{13}{9}$ | 11. 0 |
| 4. $\frac{5}{2}$ | 8. $\frac{9}{3} = 3$ | 12. 0.0001 |

## EJERCICIO 7

| | Valor absoluto | Valor relativo |
|---|---|---|
| 1. | 3 | 3 |
| 2. | 8 | 80 |
| 3. | 3 | 300 |
| 4. | 5 | 500 |
| 5. | 7 | 7 000 |
| 6. | 5 | 5 000 |
| 7. | 4 | 40 000 |
| 8. | 9 | 900 |
| 9. | 6 | 60 |
| 10. | 0 | 0 |
| 11. | 2 | 2 000 000 |
| 12. | 5 | 50 000 000 |

## EJERCICIO 8

Notación desarrollada

1. 70 + 5
2. 100 + 30 + 2
3. 400 + 20 + 8
4. 500 + 10
5. 3 000 + 2
6. 7 000 + 400 + 90 + 1
7. 10 000 + 5 000 + 200 + 4
8. 30 000 + 2 000 + 700 + 90
9. 40 000 + 9 000 + 800 + 30 + 5
10. 200 000 + 40 000 + 6 000 + 900 + 30 + 2
11. 300 000
12. 400 000 + 70 000 + 5 000 + 300 + 10 + 4
13. 100 000 + 20 000 + 900 + 80 + 3
14. 1 000 000 + 300 000 + 20 000 + 800 + 60 + 5
15. 3 000 000 +7 00 000 +40 000 + 2 000 + 900 + 50 + 8

# CAPÍTULO 2

## EJERCICIO 9

| | | |
|---|---|---|
| 1. 457 | 5. 4 356 905 | 9. –11 276 |
| 2. 6 379 | 6. 7 705 847 | 10. –636 312 |
| 3. 17 630 | 7. –805 | 11. –17 681 704 |
| 4. 114 948 | 8. –1 648 | 12. –537 591 965 |

## EJERCICIO 10

| | | |
|---|---|---|
| 1. 37 años | 5. Falleció en 2005 | 9. 1 020 calorías |
| 2. 22 años | 6. 750 kilómetros | 10. Se retiró en 1997 |
| 3. $10 000 | 7. 1 000 kilómetros | 11. – 53° C |
| 4. 2004, 2006 | 8. 30 700 libros | 12. Perdió $1 110 000 |

### Ejercicio 11

1. 4
2. – 3
3. 2
4. – 5
5. – 8
6. 14
7. 0
8. 11
9. – 38
10. – 66
11. 1
12. – 11
13. – 6
14. 20
15. – 7
16. 26
17. 17
18. – 11
19. 32
20. 10
21. 8
22. 19
23. – 5
24. 7
25. – 2
26. – 12
27. 110
28. – 716
29. 10 595
30. – 9 625

### Ejercicio 12

1. 370 mujeres
2. $23 000
3. $237 000
4. 23 años
5. 28 años
6. $993
7. 18 metros
8. 4 150 metros
9. $4 500
10. 53 años

### Ejercicio 13

1. 15
2. – 8
3. 24
4. 21
5. 7
6. – 2
7. – 1
8. 19
9. 0
10. – 18
11. 2
12. 6
13. 3
14. 0
15. – 10
16. 24
17. – 27
18. – 5
19. – 2
20. – 6
21. 10
22. 18
23. 4
24. – 1
25. – 9
26. – 8
27. 5
28. 25
29. 12
30. 17

### Ejercicio 14

1. 1 701
2. 24 230
3. 2 295
4. 17 172
5. 142 528
6. 260 496
7. 2 947 680
8. 43 436 664
9. 38 203 690
10. 1 913 085
11. 20
12. – 160
13. 322
14. – 15 552
15. 303 660
16. – 195 720
17. 12 865 888
18. – 9 105 315
19. – 225 286 184
20. – 54 285 042
21. – 105
22. 30
23. 18
24. 60
25. – 864
26. – 720
27. 1 680

### Ejercicio 15

1. 216 refrescos
2. 180 libros
3. 105 canicas
4. 750 árboles
5. $960
6. 10 080 minutos
7. 336 departamentos
8. 6 000 lapiceros
9. $64 800
10. 645 personas
11. $120 000

### Ejercicio 16

1. 2
2. 11
3. – 13
4. 66
5. 175
6. – 39
7. – 28
8. – 45
9. – 14
10. 8

### Ejercicio 17

1. $4 400
2. $5 000
3. $540
4. $3 600
5. $10 000 000
6. 60 años
7. $4 370
8. $6 150
9. $347 000
10. $7 650 000

### Ejercicio 18

c: cociente, r: residuo

1. $c$: 2, $r$: 2
2. $c$: 3, $r$: 1
3. $c$: 49, $r$: 0
4. $c$: 297, $r$: 1
5. $c$: 8, $r$: 0
6. $c$: 13, $r$: 2
7. $c$: 21, $r$: 2
8. $c$: 34, $r$: 26
9. $c$: 29, $r$: 99
10. $c$: 5, $r$: 31
11. $c$: 29, $r$: 142
12. $c$: 47, $r$: 433
13. $c$: 52, $r$: 812
14. $c$: 17, $r$: 1944
15. $c$: 9, $r$: 8446
16. $c$: 73, $r$: 19022
17. $c$: 198, $r$: 9888
18. $c$: 4 932, $r$: 14974

### Ejercicio 19

1. 23 veces
2. $3000
3. 148
4. 56 horas
5. 3 libros
6. 9 horas
7. 7 días
8. 15 minutos
9. 9 litros por minuto
10. 2 pantalones y 2 chamarras
11. $320

## Capítulo 3

### Ejercicio 20

1. 105, 243, 2 457
2. 800, 112, 324, 13 564
3. 105, 8 910, 34 615
4. 78, 768, 1 470
5. 175,1 645, 3 528
6. 3 128, 5 024, 9 000
7. 225, 1 008, 2 925
8. 66, 253, 935
9. 195, 1 105
10. 1 007, 380, 1596

### Ejercicio 21

1. 2· 2· 2· 3· 3
2. 2· 2· 2· 2· 2· 3
3. 3· 3· 5· 5
4. 2· 2· 2· 2· 2· 2· 3· 3
5. 3· 3· 3· 5· 7
6. 2· 3· 5· 7
7. 2· 2· 2· 3· 5· 7
8. 2· 3· 5· 7· 11
9. 3· 5· 5· 7· 7
10. 2· 2· 2· 3· 3· 3· 11
11. 2· 2· 3· 3· 3· 5· 13
12. 2· 2· 2· 3· 5· 5· 7· 7
13. 2· 2· 2· 2· 2· 3· 3· 3· 5· 7
14. 2· 2· 2· 3· 3· 3· 3· 5· 5
15. 2· 3· 5· 7· 11· 13

### Ejercicio 22

1. MCD = 36
2. MCD = 90
3. MCD = 1
4. MCD = 6
5. MCD = 1
6. MCD = 5
7. MCD = 12
8. MCD = 14
9. MCD = 77
10. MCD = 143

### Ejercicio 23

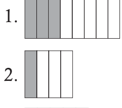
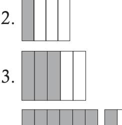
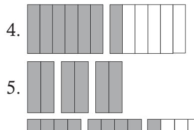
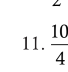
1. mcm = 216
2. mcm = 90
3. mcm = 432
4. mcm = 180
5. mcm = 540
6. mcm = 1260
7. mcm = 300
8. mcm = 10 800
9. mcm = 7 700
10. mcm = 148 225

**EJERCICIO 24**

1. Cada bolsa pesa 6 kg y hay 2 de res, 3 de cerdo, y 4 de pollo por caja
2. Después de 30 segundos
3. 20 cm por lado
4. Después de 12 minutos y dieron 2 y 3 vueltas
5. 24 litros
6. 6 metros
7. 3 metros, 10 troncos
8. $1 000 a cada nieto y tiene 14 nietos
9. 252 minutos y a las 3:12 horas volverán a coincidir
10. Se pueden hacer 13 costalitos con 15 canicas
11. Cada caja contiene 150 lapiceros
12. De color lila 3 cubos y de color rojo 4
13. 90 minutos, y dan. 9, 6 y 5 vueltas, respectivamente
14. 2006
15. 25 cm y son 187 mosaicos

## CAPÍTULO 4

**EJERCICIO 25**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{2}{5}$
9. $\frac{1}{8}$
10. $\frac{3}{2}$
11. $\frac{10}{4}$
12. $\frac{6}{3}=2$

**EJERCICIO 26**

1. $\frac{5}{14}$ 2. $\frac{18}{24}$ 3. $\frac{40}{100}$ y $\frac{60}{100}$ 4. $\frac{16}{24}$

**EJERCICIO 27**

1. Propia
2. Impropia
3. Propia
4. Propia
5. Impropia
6. Propia
7. Impropia
8. Propia
9. Impropia
10. Impropia
11. Propia
12. Impropia
13. Propia
14. Impropia
15. Propia

**EJERCICIO 28**

1. $1\frac{1}{3}$
2. $1\frac{2}{5}$
3. $1\frac{1}{2}$
4. $3\frac{1}{4}$
5. 4
6. $1\frac{5}{8}$
7. $6\frac{5}{6}$
8. 6
9. $3\frac{6}{7}$
10. $2\frac{10}{13}$
11. $2\frac{2}{13}$
12. $2\frac{1}{12}$
13. $1\frac{1}{18}$
14. $2\frac{13}{16}$
15. $3\frac{11}{40}$
16. $7\frac{33}{65}$
17. $5\frac{14}{105}$
18. $4\frac{38}{305}$

**EJERCICIO 29**

1. $\frac{17}{5}$
2. $\frac{11}{9}$
3. $\frac{30}{7}$
4. $\frac{34}{6}$
5. $\frac{23}{3}$
6. $\frac{35}{4}$
7. $\frac{19}{10}$
8. $\frac{34}{13}$
9. $\frac{83}{16}$
10. $\frac{139}{19}$
11. $\frac{123}{10}$
12. $\frac{542}{30}$
13. $\frac{319}{20}$
14. $\frac{277}{12}$
15. $\frac{507}{14}$
16. $\frac{354}{7}$
17. $\frac{608}{5}$
18. $\frac{1562}{7}$

**EJERCICIO 30**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. sí | 3. sí | 5. sí | 7. sí | 9. sí | 11. no |
| 2. no | 4. no | 6. no | 8. no | 10. sí | 12. no |

**EJERCICIO 31**

1. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{3}{4}$
4. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{5}{2}$
6. $\frac{1}{5}$
7. $\frac{9}{20}$
8. $\frac{7}{8}$
9. $\frac{4}{5}$
10. $\frac{7}{2}$

**EJERCICIO 32**

1. $\frac{5}{8}$

0 1

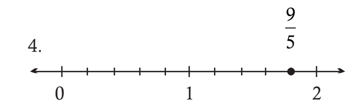
2. $-\frac{9}{4}$

−2 −1 0

3. $-\frac{2}{6}$

−1 0

4. $\frac{9}{5}$




5. $\frac{5}{9}$

0 1

6. $\frac{8}{12}$

0 1

7. $1\frac{1}{5}$

0 1 2

8. $-2\frac{1}{3}$

−3 −2 −1 0

9. $-1\frac{2}{6}$

−2 −1 0

10. $2\frac{5}{10}$

0 1 2 3

**EJERCICIO 33**

1. 2
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{11}{9}$
4. $\frac{13}{6}$
5. $\frac{11}{7}$
6. $\frac{8}{5}$
7. $\frac{49}{9}$
8. $\frac{69}{8}$
9. 8
10. $\frac{4}{5}$
11. $\frac{1}{3}$
12. $\frac{4}{15}$
13. $\frac{2}{3}$
14. $\frac{5}{17}$
15. $\frac{1}{2}$
16. $\frac{2}{3}$
17. $\frac{1}{5}$
18. $\frac{4}{9}$
19. $\frac{1}{2}$
20. $\frac{14}{9}$
21. $\frac{1}{4}$
22. 0
23. $\frac{2}{7}$
24. $\frac{3}{5}$
25. $\frac{1}{2}$
26. $\frac{14}{13}$
27. 1

**EJERCICIO 34**

1. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 2
4. $\frac{79}{120}$
5. $\frac{9}{13}$
6. $\frac{7}{8}$
7. $\frac{5}{3}$
8. $\frac{22}{9}$
9. $\frac{35}{16}$
10. $\frac{3}{8}$
11. $\frac{1}{8}$
12. $-\frac{29}{64}$
13. $\frac{6}{5}$
14. $\frac{89}{60}$
15. 0
16. $\frac{109}{120}$
17. 1
18. $\frac{11}{4}$
19. $-\frac{5}{16}$
20. $\frac{3}{10}$
21. $\frac{13}{24}$
22. $\frac{133}{20}$
23. −1
24. $\frac{9}{20}$
25. $\frac{37}{10}$
26. $-\frac{3}{2}$
27. $-\frac{5}{2}$
28. 0
29. $\frac{7}{2}$
30. 7
31. $\frac{517}{60}$
32. $\frac{29}{12}$
33. $\frac{21}{4}$
34. $\frac{3}{2}$
35. $-\frac{31}{32}$
36. $-\frac{17}{12}$

**EJERCICIO 35**

1. $\frac{9}{4}$ kg
2. $\frac{83}{20}$ km
3. $\frac{27}{8}$ kg
4. $\frac{13}{4}$ h
5. $\frac{25}{16}$ kg
6. $\frac{51}{5}$ m
7. $\frac{7}{12}$
8. $\frac{4}{9}$
9. $\frac{121}{4}$ pulg
10. $\frac{5}{8}$ kg
11. $\frac{1}{4}$
12. $\frac{7}{12}$
13. $\frac{1}{6}$
14. $\frac{3}{8}$
15. $\frac{7}{20}$
16. $\frac{1}{2}$

**EJERCICIO 36**

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{5}{14}$
3. $\frac{1}{9}$
4. $\frac{3}{2}$
5. $\frac{39}{20}$
6. $\frac{17}{10}$
7. $\frac{19}{5}$
8. 5
9. $\frac{37}{5}$
10. $\frac{128}{15}$
11. $\frac{5}{12}$
12. $\frac{9}{10}$
13. $\frac{5}{14}$
14. 1
15. 14
16. 4
17. $\frac{32}{45}$
18. $\frac{1}{3}$
19. $\frac{28}{3}$
20. 15
21. 6

**EJERCICIO 37**

1. 2 250 litros
2. 2 100 aficionados
3. 1 400 habitantes
4. 150 automovilistas
5. 40 rojas, 20 azules y 60 verdes
6. $30
7. $900
8. 275 kilómetros
9. 60
10. 5 alumnos
11. 3 600 personas
12. 18 pastillas
13. 504 joules

**EJERCICIO 38**

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 3
4. $\frac{13}{12}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\frac{2}{3}$
7. 8
8. 5
9. $\frac{2}{5}$
10. 10
11. $\frac{18}{13}$
12. $\frac{2}{13}$
13. $\frac{1}{18}$
14. $\frac{1}{8}$
15. $\frac{4}{5}$
16. 12
17. $\frac{1}{3}$
18. $\frac{9}{2}$
19. $\frac{3}{2}$
20. $\frac{3}{13}$

**EJERCICIO 39**

1. $\frac{1}{8}$ kg
2. 80 botellas
3. 5
4. 14 min
5. 48 km/h
6. $18
7. $\frac{1}{4}$ litro
8. 24 personas

**EJERCICIO 40**

1. $-\frac{4}{7}$
2. $\frac{15}{4}$
3. 2
4. $\frac{3}{4}$
5. 0
6. $-\frac{7}{5}$
7. $\frac{1}{8}$
8. $\frac{3}{2}$
9. $\frac{1}{4}$
10. $\frac{1}{2}$
11. $\frac{12}{5}$
12. $\frac{2}{3}$
13. $\frac{3}{2}$
14. 4

**EJERCICIO 41**

1. 3 900 mililitros
2. 4 horas
3. $2 200
4. Alimentación: $4 000, Renta y servicios: $6 000 y Diversión: $2 000
5. $137\frac{1}{2}$ kg
6. $28\ \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$
7. 7 ancho $\times\ 11\frac{1}{4}$ largo

**EJERCICIO 42**

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{25}{21}$
3. $\frac{67}{19}$
4. 3
5. $\frac{8}{3}$
6. 4
7. 1
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{7}{43}$
10. 2
11. $\frac{3}{4}$
12. $\frac{1}{2}$
13. $-\frac{1}{2}$
14. $\frac{12}{13}$
15. 1

## CAPÍTULO 5

**EJERCICIO 43**

1. Treinta y un centésimos.
2. Un entero noventa y ocho milésimos.
3. Veinte enteros cuatro milésimos.
4. Dos enteros ochocientos nueve milésimos.
5. Doce enteros novecientos quince diezmilésimos.
6. Tres enteros quinientos sesenta y siete milésimos.
7. Trece enteros ochocientos setenta y seis diezmilésimos.
8. Cinco cienmilésimos.
9. Doscientos cuarenta y cinco enteros seis mil noventa y tres cienmilésimos.
10. Dos enteros cuarenta mil nueve millonésimos.
11. Dieciocho enteros cuarenta mil quinientos seis millonésimos.
12. Trescientos cuarenta y dos enteros doscientos cincuenta y seis millonésimos.

**EJERCICIO 44**

1. 0.0005
2. 0.00048
3. 0.0678
4. 2.4
5. 6.043
6. 5.00029
7. 0.32524
8. 0.00066
9. 1.000477
10. 0.000003
11. 472.232101
12. 48.030215

**EJERCICIO 45**

1. 70.8118
2. 77.5818
3. 3 764.996
4. 548.1207
5. 8 830.591
6. 1.113
7. 3.037
8. 25.19346
9. 121.99742
10. 277.967011
11. 327.872
12. 444.6986
13. 60 700.719
14. 13 520.3306
15. 1 912 546.511
16. 10.2405
17. 2 518.4686
18. 358.07514
19. 37 999.945
20. 952.1374

### EJERCICIO 46

1. 2.8 millones
2. 16.05 km
3. 63.925 kg
4. 65.5 m
5. 7.5 galones
6. 24.75 ton
7. 58.55 cm
8. 769.2 kilowatts
9. 11 kilogramos
10. 666.5 calorías
11. $42.5
12. 1.153 kg
13. 19.82 minutos
14. 42.45 km
15. 309.03
16. 175.23
17. 4407.977 litros
18. 239.25 MB
19. 166.59 litros
20. $21.16
21. 140.75 km
22. 6.44 km
23. 0.39 m
24. 204.53 km
25. $10 353.82
26. 63.965 kg
27. 133.743

### EJERCICIO 47

1. 15.732
2. 261.95
3. 992.53508
4. 6 867.125
5. 31.43
6. 1
7. 48.5
8. 2 805
9. 384.36
10. 3 875
11. 5 400
12. 28136.7
13. 117.626256
14. 12 385.197
15. 6 733.9836
16. 1 496.01291
17. 1 793.108902
18. 730.5
19. 465.6
20. 21 650
21. 48 260
22. 386 200

### EJERCICIO 48

1. $1 236
2. $760.60
3. 511.8 km
4. $1 031.80
5. $1 294.50
6. $45 187.50
7. 1 198.185 $m^2$
8. $143 260 y $3 770
9. $19 902.50
10. 75 litros
11. 50.8 cm
12. 22.5 pastillas
13. 6 882.56688 $cm^3$
14. 7.28 m
15. $35 520
16. $287

### EJERCICIO 49

*C*: Cociente, *R*: Residuo

1. $C = 4.896$, $R = 0.008$
2. $C = 0.177$, $R = 0.018$
3. $C = 4113.6$, $R = 0.008$
4. $C = 148.17$, $R = 0.028$
5. $C = 2.356$, $R = 0$
6. $C = 200$, $R = 0$
7. $C = 100$, $R = 0$
8. $C = 0.767$, $R = 0.0041$
9. $C = 5104$, $R = 0$
10. $C = 250.5$, $R = 0$
11. $C = 3.033$, $R = 0.069$
12. $C = 15.384$, $R = 0.00016$
13. $C = 16.071$, $R = 0.00012$
14. $C = 120.857$, $R = 0.00001$
15. $C = 217.142$, $R = 0.00015$
16. $C = 14.615$, $R = 0.001$
17. $C = 238.015$, $R = 0.00071$
18. $C = 5.974$, $R = 0.611$

### EJERCICIO 50

1. 23
2. $3.2
3. 60 m
4. 6000 envases
5. 1.75 litros
6. 68 km/h
7. 12.1 cm
8. 22.928 °C
9. $58.5
10. $4.5
11. 24 descargas
12. 0.0125 cm
13. 8000 naranjas
14. $78.5
15. 21.34
16. $442.75
17. 35 millares

### EJERCICIO 51

1. $101.50
2. $309.70
3. $352.70
4. 8.5
5. 43 cm
6. $8.36
7. 10 263.85 kg
8. 6.952 cm
9. 768.43 gramos
10. $44.20

### EJERCICIO 52

1. $0.\overline{3}$
2. 0.2
3. 0.5
4. 0.4
5. 1.25
6. 0.6
7. 1.5
8. 0.1
9. 0.375
10. 1.8
11. 1.625
12. 2.3125
13. 1.9
14. $3.\overline{45}$
15. 2.875
16. $4.58\overline{3}$
17. 3.32
18. $4.2\overline{3}$
19. $5.3\overline{6}$
20. $7.2\overline{7}$

### EJERCICIO 53

1. $\frac{1}{5}$
2. $\frac{33}{100}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{11}{25}$
5. $\frac{33}{50}$
6. $\frac{3}{2}$
7. $\frac{11}{4}$
8. $\frac{77}{25}$
9. $\frac{1}{200}$
10. $\frac{673}{500}$

### EJERCICIO 54

1. $\frac{8}{9}$
2. $\frac{2}{11}$
3. $\frac{11}{9}$
4. $\frac{139}{33}$
5. $\frac{2}{9}$
6. $\frac{3118}{999}$
7. $\frac{9023}{999}$
8. $\frac{15451}{4950}$
9. $\frac{514}{99}$
10. $\frac{344}{99}$

## CAPÍTULO 6

### EJERCICIO 55

1. 16
2. $-15625$
3. $\frac{1}{1296}$
4. 1
5. $-729$
6. $-\frac{1}{32}$
7. 81
8. 4
9. $\frac{1}{256}$
10. $\frac{1}{27}$
11. $-\frac{125}{8}$
12. $\frac{343}{27}$
13. $\frac{3125}{59049}$
14. $-9$
15. 4
16. 4 096
17. 18.49
18. $\frac{343}{216}$
19. $\frac{441}{16}$
20. $\frac{1331}{1000}$

**EJERCICIO 56**

1. 625
2. $\frac{1}{27}$
3. $3^{-\frac{1}{3}}$
4. 4
5. $\frac{200}{9}$
6. $\frac{4}{9}$
7. 8192
8. 216
9. $\frac{1}{25}$
10. 81
11. 1
12. $\frac{4}{3}$
13. $\frac{16}{9}$
14. $\frac{49}{9}$
15. $\frac{1}{30}$
16. $\frac{4}{9}$
17. 20
18. $\frac{3}{4}$
19. $\frac{9}{4}$
20. 16
21. 54
22. 16
23. 15625
24. – 15625
25. 16
26. 25
27. 225
28. $\frac{81}{64}$
29. $\frac{27}{20}$
30. 49
31. 11 664
32. $\frac{3^{\frac{1}{2}}}{16}$
33. 3
34. $\frac{9}{4}$
35. $\frac{1}{65\,536}$
36. $\frac{1}{64}$
37. $\frac{16}{9}$
38. $\frac{1}{4}$
39. $\frac{81}{10\,000}$
40. $\frac{1}{729}$
41. $\frac{1}{216}$
42. 49

**EJERCICIO 57**

1. 7
2. 27
3. 17
4. – 8
5. 3
6. 5
7. 9
8. – 3
9. 14
10. 21
11. 24
12. 6
13. – 12
14. 15
15. 24
16. 6
17. 12
18. 21
19. 6
20. 15
21. 270
22. 108
23. 45
24. 300
25. 100
26. 324
27. 64
28. $\frac{121}{6}$
29. 2
30. 10
31. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{13}{6}}$
32. 3
33. $5^2$
34. 3
35. 2
36. 10
37. 3
38. 50
39. $5^{\frac{19}{24}}$
40. 2
41. 5
42. $\frac{5}{24}$

**EJERCICIO 58**

1. $2\sqrt{5}$
2. $6\sqrt{2}$
3. $2\sqrt[3]{2}$
4. $3\sqrt[3]{5}$
5. $5\sqrt[3]{2}$
6. $9\sqrt{2}$
7. $6\sqrt{5}$
8. $6\sqrt[4]{5}$
9. $2\sqrt[3]{2}$
10. $2\sqrt{15}$
11. $2\sqrt[4]{2}$
12. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$

**EJERCICIO 59**

1. $12\sqrt{2}$
2. $7\sqrt{3}$
3. $\frac{13}{4}\sqrt{5}$
4. $\sqrt[3]{9}$
5. $-5\sqrt{2}$
6. $-2\sqrt{5}$
7. $\frac{7}{6}\sqrt[4]{7}$
8. $-8\sqrt[3]{2}$
9. $\frac{33}{20}\sqrt{6}$
10. $5\sqrt{2}$
11. $\sqrt{3}$
12. $6\sqrt{5}$
13. $-7\sqrt{2}$
14. $2\sqrt{3}$
15. $3\sqrt{5}-\sqrt{3}$
16. $7\sqrt{2}$
17. $3\sqrt{2}+20\sqrt{3}-22\sqrt{5}$
18. $-5\sqrt{2}$
19. $\sqrt{3}$
20. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
21. $4\sqrt{11}-\sqrt{5}$
22. $3\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{2}$
23. $\sqrt[3]{3}$
24. $4\sqrt[3]{2}$

**EJERCICIO 60**

1. 4
2. 5
3. $\sqrt{21}$
4. $3\sqrt{7}$
5. $6\sqrt{5}$
6. $12\sqrt{3}$
7. $4\sqrt{6}$
8. 45
9. 180
10. 18
11. $\frac{5}{4}\sqrt{30}$
12. 60
13. $3\sqrt[3]{5}$
14. $2\sqrt[3]{25}$
15. $20\sqrt[3]{90}$
16. $2\sqrt[3]{3}$
17. $\sqrt[6]{675}$
18. 2
19. $2\sqrt[15]{6561}$
20. $2\sqrt[12]{2}$
21. $6\sqrt[3]{2}$
22. $2\sqrt[3]{9}$
23. $\frac{1}{2}\sqrt[6]{2592}$
24. $\frac{1}{8}\sqrt[6]{24}$

**EJERCICIO 61**

1. 6
2. $\sqrt{2}$
3. $\frac{5}{6}\sqrt{3}$
4. $\frac{7}{4}\sqrt{5}$
5. $\sqrt{7}$
6. $\frac{1}{4}\sqrt{5}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $2\sqrt[3]{2}$
9. $\sqrt[15]{4}$
10. $\sqrt[6]{54}$
11. 1
12. $\sqrt[14]{12}$
13. 5
14. $\sqrt[6]{\frac{9}{8}}-\sqrt[6]{\frac{3}{4}}$
15. $\sqrt[4]{2}+\sqrt[12]{2}$
16. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt[6]{32}}-\frac{1}{\sqrt[10]{128}}$

**EJERCICIO 62**

1. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{9}$
4. $\sqrt[4]{2}$
5. $2\sqrt{6}$
6. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
7. $\frac{1}{10}\sqrt{15}$
8. $3\sqrt[3]{2}$
9. $\sqrt{5}$
10. $2-\sqrt{6}$

11. 1
12. $12 - 4\sqrt{7}$
13. $2\sqrt{6} - 4$
14. $-\frac{1}{2}\left(5 + 3\sqrt{3}\right)$
15. $-11 - 5\sqrt{5}$
16. $\frac{2}{7}\left(3 - \sqrt{2}\right)$
17. $-\frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{7}\right)$
18. $-\frac{1}{3}\left(5 + \sqrt{10}\right)$
19. $\frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$
20. $\frac{2}{11}\left(7 + 3\sqrt{3} - \sqrt{5} - 2\sqrt{15}\right)$

### EJERCICIO 63

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\frac{2}{5\sqrt{2}}$
3. $\frac{7}{5\sqrt{7}}$
4. $\frac{12}{5\sqrt{6}}$
5. $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$
6. $\frac{3}{2\sqrt[5]{16}}$
7. $\frac{5}{2\sqrt{15}}$
8. $\frac{1}{3\left(\sqrt{2} - 1\right)}$
9. $\frac{2}{\sqrt{5} - 1}$
10. $\frac{9}{2\left(5 - \sqrt{7}\right)}$
11. $-\frac{1}{7 + 3\sqrt{5}}$
12. $-\frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$
13. $-\frac{3}{2 + \sqrt{7}}$
14. $\frac{4}{3 - \sqrt{5}}$
15. $\frac{23}{4 - 10\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 8\sqrt{6}}$

### EJERCICIO 64

1. 15
2. 25
3. 27
4. 18
5. 4.84
6. 7.96
7. 23.76
8. 18.01
9. 65.74
10. 73.7
11. 48.41
12. 8865
13. 7825
14. 5690.5
15. 4325.13
16. 20870.40

### EJERCICIO 65

1. 5.916
2. 7.7459
3. 11.2249
4. 23.5159
5. 35.5387
6. 64.8074
7. 256.8929
8. 282.8427
9. 645.4257
10. 935.6297

### EJERCICIO 66

1. 8
2. 9
3. 15
4. 17
5. 22
6. 38
7. 67
8. 95
9. 135
10. 328
11. 429
12. 604

### EJERCICIO 67

1. 10
2. 3
3. 79
4. 7
5. 54
6. 35
7. 11
8. 7
9. – 27
10. – 16
11. $\frac{67}{6}$
12. $\frac{5}{12}$
13. 0
14. $\frac{1}{4}$
15. $\frac{5}{24}$

## CAPÍTULO 7

### EJERCICIO 68

1. $4.35 \times 10^{3}$
2. $1.6 \times 10^{4}$
3. $9.548 \times 10^{4}$
4. $2.73 \times 10^{5}$
5. $6.702 \times 10^{5}$
6. $3.5 \times 10^{8}$
7. $5.342 \times 10^{6}$
8. $1.86 \times 10^{7}$
9. $1.76 \times 10^{-1}$
10. $8.89 \times 10^{-2}$
11. $4.28 \times 10^{-3}$
12. $3.26 \times 10^{-4}$
13. $4.62 \times 10^{-7}$
14. $3 \times 10^{-8}$
15. $8.79 \times 10^{-8}$
16. $1.2 \times 10^{-9}$
17. $5.69 \times 10^{-10}$
18. $7.81 \times 10^{-11}$

### EJERCICIO 69

1. 16 000
2. 0.001
3. 3 760 000
4. 0.006
5. 420
6. 0.000724
7. 0.000001
8. 0.00083
9. 10 500 000
10. 0.234
11. 326.4
12. 6.234
13. 0.0000000000023
14. 0.000301
15. 414 501 000
16. 0.0000003002

### EJERCICIO 70

1. $5.11 \times 10^{6}$
2. $1.04 \times 10^{-3}$
3. $1.1 \times 10^{-5}$
4. $1.9 \times 10^{3}$
5. $1.02 \times 10^{7}$
6. $4.354 \times 10^{-2}$
7. $2.34 \times 10^{4}$
8. $5.73 \times 10^{-3}$
9. $1.27 \times 10^{6}$
10. $3.38 \times 10^{-5}$
11. $2.32 \times 10^{2}$
12. $1.484 \times 10^{-2}$
13. $3.1217 \times 10^{3}$
14. $9.764 \times 10^{-3}$
15. $1.272 \times 10^{-1}$

### EJERCICIO 71

1. $2.16 \times 10^{-5}$
2. $1.4784 \times 10^{9}$
3. $5.65 \times 10^{4}$
4. $1.2075 \times 10^{-6}$
5. $1.09 \times 10^{8}$
6. $1.63 \times 10^{-3}$
7. $7.79 \times 10^{13}$
8. $3.1668 \times 10^{2}$
9. $5.1 \times 10^{-14}$
10. $7.13 \times 10^{11}$
11. $2.375 \times 10^{4}$
12. $4.32 \times 10^{-3}$
13. $5.8 \times 10^{-3}$
14. $8.5 \times 10^{-6}$
15. $1.1 \times 10^{5}$
16. $5.964 \times 10^{-5}$
17. $2 \times 10^{2}$
18. $8.5 \times 10^{3}$
19. $4 \times 10^{-2}$
20. $1 \times 10^{2}$

### EJERCICIO 72

1. $2.89 \times 10^{-4}$
2. $1.5625 \times 10^{10}$
3. $1.444 \times 10^{-11}$
4. $5.832 \times 10^{24}$
5. $7.8125 \times 10^{-7}$
6. $2.5 \times 10^{5}$
7. $3.1 \times 10^{-4}$
8. $6 \times 10^{2}$
9. $1.8 \times 10^{-4}$
10. $3 \times 10^{2}$
11. $2 \times 10^{-3}$
12. $1.9008 \times 10^{-11}$
13. $2 \times 10^{3}$
14. $5 \times 10^{-3}$

### EJERCICIO 73

1. 3.1300
2. 2.1300
3. 1.1300
4. $\bar{3}.1300$
5. 1.5065
6. 0.8621
7. $\bar{1}.8382$
8. $\bar{2}.6902$
9. $\bar{3}.8921$
10. 3.7547
11. 3.5096
12. 4.7243
13. 0.1348
14. 0.7018
15. $\bar{1}.6128$
16. 1.4771
17. 0.8471
18. 3

**Ejercicio 74**

1. 73.69
2. 6377
3. 31.26
4. 294
5. 3.640
6. 5.398
7. 1.015
8. 451.3
9. 2.963
10. 1004
11. 3772
12. 0.01827
13. 0.2524
14. 0.0005204
15. 0.4276
16. 0.05066
17. 0.005641
18. 0.01081
19. 0.6236
20. 0.0001259

**Ejercicio 75**

1. 99.91
2. 9.561
3. 41.24
4. 6.546
5. 37.13
6. 0.5020
7. 0.3989
8. 2.5
9. 0.7539
10. 3.6165
11. – 104.3
12. – 0.7037
13. – 19.91
14. – 3.658
15. 4.941
16. 374.1
17. 276.9
18. 31.56
19. 7.998
20. 14
21. 5.705
22. 4.804
23. 707.6
24. 1.146
25. 1.176
26. 1.477
27. 1.6231
28. 2.021
29. 1.3009
30. 1.5562
31. 2.1759
32. 2.4681
33. 2.535
34. 0.875
35. 0.6232
36. $0.2411\overline{6}$
37. $0.8479\overline{3}$
38. 0.20982
39. 0.86
40. – 0.01

**Ejercicio 76**

1. 1.9164
2. 1.0834
3. 0.8001
4. 2.6022
5. 0.2984
6. 1.6090
7. 0.7761
8. 1.1363
9. 1.9631
10. 13.0435

## Capítulo 8

**Ejercicio 77**

1. 6
2. 8
3. 15
4. 2
5. 50
6. 5
7. 12
8. 18
9. 64
10. 6
11. 12
12. 2
13. 9
14. 200
15. 140
16. 3
17. 20
18. 510
19. 6
20. 1

**Ejercicio 78**

1. 6
2. 12
3. 15
4. $4\sqrt{3}$
5. $\sqrt{14}$
6. $9\sqrt{2}$
7. $5\sqrt{10}$
8. $\frac{1}{10}\sqrt{5}$
9. $\frac{2}{5}$
10. $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

**Ejercicio 79**

1. $\frac{75}{2}$
2. 32
3. 35
4. 24
5. 45
6. 10
7. 16
8. 1
9. $\frac{7}{10}$
10. $\frac{3}{10}$
11. $\frac{10}{9}$
12. $\frac{35}{24}$

**Ejercicio 80**

1. 2, 54
2. $\frac{2}{3}$, 144
3. 2, 16
4. 36, $\frac{9}{2}$
5. 6, 162
6. $\frac{2}{15}$, $\frac{25}{12}$
7. $\frac{16}{9}$, $\frac{3}{32}$
8. $\frac{50}{9}$, $\frac{1}{180}$
9. $\frac{18}{25}$, $\frac{5}{12}$
10. $\frac{1}{4}$, 54

**Ejercicio 81**

1. 125 latas
2. 28 minutos
3. $4 100
4. 8 160 litros
5. 80 km
6. 70 páginas
7. 4 200 sacos
8. 10 segundos
9. 27 horas
10. $24
11. 6 kg
12. Ana $324<br>Fabián $486<br>Liam $810
13. 125 $m^2$
14. 144 tarros
15. 30 kg
16. $1 000
17. Fernando $450<br>Josué $300<br>Martín $225
18. $42.50
19. 900 min.
20. $75
21. $147
22. $150
23. 3 canicas
24. 80 litros
25. $15 000
26. 45 días
27. 5 hombres
28. 48 km/h
29. 20 frascos
30. 300 hombres
31. 40 árboles

**Ejercicio 82**

1. 128 min
2. 50 días
3. 150 pares
4. 7.2 litros
5. $273 600

**Ejercicio 83**

1. 0.03
2. 0.04
3. 0.06
4. 0.08
5. 0.15
6. 0.01
7. 0.05
8. 0.25
9. 0.30
10. 0.50
11. 0.75
12. 0.32
13. 0.045
14. 0.0008
15. 0.0003

**Ejercicio 84**

1. 18
2. 100
3. 250.25
4. 5.25
5. 0.77
6. 1.5
7. 1 575
8. 22.5
9. 462.72
10. 43.75
11. 4.8
12. 1 250
13. 3129.6
14. 279.986
15. 62.003
16. 8.15
17. 1 400
18. 1 637.44
19. 75.516
20. 8.28

**Ejercicio 85**

1. 5 000
2. 7 925
3. 9 500
4. 1 562.5
5. 1 606.25
6. 2 850
7. 6 000
8. 1 980
9. 3 650

**Ejercicio 86**

1. 20%
2. 30%
3. 25%
4. 42%
5. 36%
6. 24%
7. 15%
8. 17.022%
9. 23%
10. 33.75%

### EJERCICIO 87

1. 64 alumnos
2. $440
3. $2 975
4. $11 437.50
5. $1 155
6. $111
7. $1 496
8. $1 207.50
9. $1 254.40
10. $822 025
11. $3 000
12. $2 000
13. 63.75%
14. 21 preguntas
15. $96 000
16. $1 000
17. $126 000
18. $190 400
19. $2 880
20. 45 preguntas
21. 46.93%
22. 50%
23. 45%
24. 34.48%
25. 57.8125%

### EJERCICIO 88

1. $33 000
2. $532 000
3. $140 800
4. $22 365
5. $60 480
6. $558 250
7. $104 160
8. $16 280
9. $3 685.67
10. $2 268
11. 3%
12. $25 000
13. $50 000
14. 30%
15. 1.5 años
16. 1.02%
17. $450 000

## CAPÍTULO 9

### EJERCICIO 89

1. $4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
2. $1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0$
3. $9 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$
4. $1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
5. $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$
6. $1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0 + 1 \times 3^{-1} + 1 \times 3^{-2}$
7. $4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0 + 0 \times 5^{-1} + 1 \times 5^{-2} + 4 \times 5^{-3} + 2 \times 5^{-4}$
8. $1 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 6 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1} + 3 \times 8^{-2} + 5 \times 8^{-3}$
9. $6 \times 8^4 + 0 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1} + 1 \times 8^{-2}$
10. $2 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0$
11. $1 \times 16^2 + B \times 16^1 + A \times 16^0 + 4 \times 16^{-1} + E \times 16^{-2}$
12. $C \times 16^0 + 2 \times 16^{-1} + 4 \times 16^{-2} + A \times 16^{-3} + B \times 16^{-4}$

### EJERCICIO 90

1. $12_{(10)}$
2. $23_{(10)}$
3. $219_{(10)}$
4. $57.8125_{(10)}$
5. $19.6875_{(10)}$
6. $65_{(10)}$
7. $123_{(10)}$
8. $253_{(10)}$
9. $199.\overline{703}_{(10)}$
10. $1796.\overline{851}_{(10)}$
11. $232_{(10)}$
12. $387.671875_{(10)}$
13. $225.703125_{(10)}$
14. $98_{(10)}$
15. $669_{(10)}$
16. $69_{(10)}$
17. $2930_{(10)}$
18. $430.768_{(10)}$
19. $1259.9856_{(10)}$
20. $84.2048_{(10)}$
21. $29_{(10)}$
22. $1063_{(10)}$
23. $35.62\overline{037}_{(10)}$
24. $3978_{(10)}$
25. $3001_{(10)}$
26. $491.1330566_{(10)}$
27. $666_{(10)}$
28. $626_{(10)}$
29. $685_{(10)}$
30. $43820_{(10)}$
31. $2874_{(10)}$
32. $3882.116211_{(10)}$

### EJERCICIO 91

1. $1111_{(2)}$
2. $100111011_{(2)}$
3. $1101.11_{(2)}$
4. $10011.1_{(2)}$
5. $0.101_{(2)}$
6. $1111001.111_{(2)}$
7. $101_{(3)}$
8. $222201_{(3)}$
9. $311_{(4)}$
10. $3202_{(5)}$
11. $122.41_{(5)}$
12. $3021.204_{(5)}$
13. $553_{(6)}$
14. $1523_{(6)}$
15. $166_{(7)}$
16. $2041_{(7)}$
17. $77_{(8)}$
18. $150_{(8)}$
19. $536.14_{(8)}$
20. $70153.6_{(8)}$
21. $165_{(9)}$
22. $1424_{(9)}$
23. $157071_{(9)}$
24. $C4_{(16)}$
25. $166.1_{(16)}$
26. $53DC.8_{(16)}$

### EJERCICIO 92

1. $1617_{(8)}$
2. $3343_{(8)}$
3. $717.65_{(8)}$
4. $111011101_{(2)}$
5. $1100110011_{(2)}$
6. $100101010001011_{(2)}$
7. $101110.100011_{(2)}$
8. $111010.001110_{(2)}$
9. $100001010.110111_{(2)}$
10. $110000001111.0100000001_{(2)}$
11. $468_{(16)}$
12. $9B1.EA3_{(16)}$
13. $FB8.62_{(16)}$
14. $1001110101100_{(2)}$
15. $110100101111.10101011_{(2)}$
16. $111111010001111.11000101_{(2)}$

### EJERCICIO 93

1. $1001100_{(2)}$
2. $101110101_{(2)}$
3. $11011111_{(2)}$
4. $110111010_{(2)}$
5. $11022_{(3)}$
6. $101212_{(3)}$
7. $1012121_{(3)}$
8. $100101022_{(3)}$
9. $123212_{(4)}$
10. $100232_{(4)}$
11. $230200213_{(4)}$
12. $2320122_{(4)}$
13. $1344_{(5)}$
14. $4330_{(5)}$
15. $32220_{(5)}$
16. $444202_{(5)}$
17. $66225_{(8)}$
18. $233446_{(8)}$
19. $1042140_{(8)}$
20. $1203523_{(8)}$
21. $A68_{(16)}$
22. $1022_{(16)}$
23. $11436_{(16)}$
24. $CD267_{(16)}$

### EJERCICIO 94

1. $100011_{(2)}$
2. $110001010_{(2)}$
3. $1100010_{(2)}$
4. $24231_{(5)}$
5. $411011_{(5)}$
6. $5103_{(8)}$
7. $15622_{(8)}$
8. $3BE_{(16)}$
9. $3811_{(16)}$

### EJERCICIO 95

1. $10111101_{(2)}$
2. $100001001_{(2)}$
3. $122122_{(3)}$
4. $20223132_{(4)}$
5. $21320112_{(4)}$
6. $2013044_{(5)}$
7. $3641143_{(8)}$
8. $4041446_{(8)}$
9. $26054504_{(8)}$
10. $10257247_{(8)}$
11. $1BAC4_{(16)}$
12. $26C54_{(16)}$

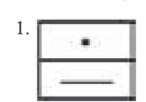
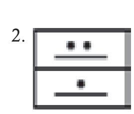
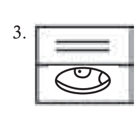
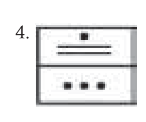
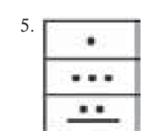
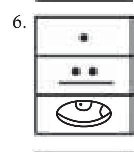
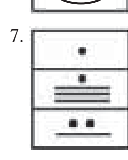
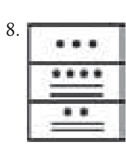
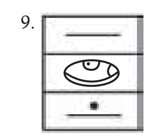
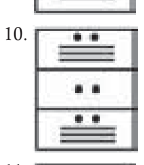
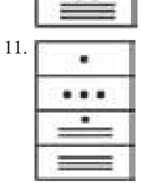
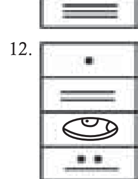
### EJERCICIO 96

1. $110_{(2)}$
2. $1101_{(2)}$
3. $111011_{(2)}$
4. $211_{(3)}$
5. $1201_{(3)}$
6. $301_{(4)}$
7. $10202_{(4)}$
8. $421_{(5)}$
9. $11330_{(5)}$
10. $7531_{(8)}$
11. $207_{(8)}$
12. $173_{(8)}$
13. $14_{(16)}$
14. $52_{(16)}$

### EJERCICIO 97

1. 26
2. 111
3. 248
4. 401
5. 2407
6. 466
7. 922
8. 1341
9. 1365
10. 2527
11. 3026
12. 4048

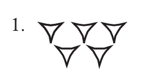
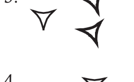
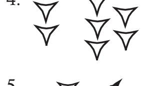
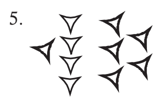
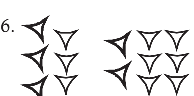
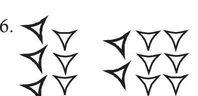
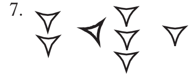
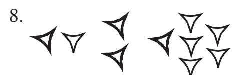
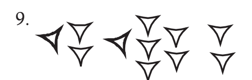
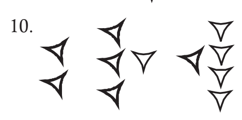
**EJERCICIO 98**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 

**EJERCICIO 99**

1. 813
2. 1360
3. 5013
4. 12912
5. 37964
6. 84793

**EJERCICIO 100**

1. 
2.
3. 
4. 
5. 
6.  
7. 
8. 
9. 
10. 

**EJERCICIO 101**

1. LXXXIX
2. XCIX
3. CCCLXXVI
4. DCCLXXXVI
5. CMLVII
6. MIV
7. MCDXCII
8. MDLXXXIX
9. MDCXXI
10. MDCCCX
11. MCMXCVII
12. $\overline{XII}$ CCCXLV
13. $\overline{XV}$ CDXXXII
14. $\overline{XXIII}$ VII
15. $\overline{XLIII}$ DCCCLXXIX
16. $\overline{LXXXIX}$
17. $\overline{CXXIII}$
18. $\overline{CCXXX}$ V
19. $\overline{\overline{II}\ CCCXLV}$
20. $\overline{\overline{VIII}\ CCCXL}$ XX

**EJERCICIO 102**

1. 82
2. 74
3. 56
4. 93
5. 39
6. 68
7. 564
8. 719
9. 452
10. 991
11. 803
12. 244
13. 1 850
14. 1 752
15. 1 806
16. 1 525
17. 2 814
18. 1 429
19. 23 457
20. 19 020
21. 245 000
22. 3 457 998
23. 9 575 973
24. 4 945 912

**EJERCICIO 103**

1. 326
2. 23 123
3. 10 304
4. 1 223
5. 1 020 037
6. 200 401
7. 2 054
8. 3 100 102
9. 300 200
10. 2 001 000

**EJERCICIO 104**

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.

## Capítulo 10

### Ejercicio 105

1. 80 dm
2. 15 000 cm
3. 7 050 dm
4. 0.019 m
5. 18.5 dm
6. 0.9 dm
7. 17 000 500 Dm
8. 5 400 m
9. 8.06 cm
10. 165 Hm
11. 3.8 km
12. 63 000 dm
13. 38 km
14. 9 Hm
15. 6 m
16. 4 563 cm
17. 3 016 mm
18. 850 mm
19. 15 480 m
20. 756 m

### Ejercicio 106

1. 300 $dm^2$
2. 160 000 $cm^2$
3. 7 000 000 $mm^2$
4. 8 000 000 $m^2$
5. 190 000 $m^2$
6. 63 500 $m^2$
7. 2 800 $Dm^2$
8. 1 400 000 $m^2$
9. 8 $Dm^2$
10. 19 $Hm^2$
11. 0.3 $Km^2$
12. 16 $m^2$
13. 130 $m^2$
14. 98 $Km^2$
15. 1 40 000 $dm^2$
16. 210 000 $dm^2$
17. 43 856 $cm^2$
18. 18 $m^2$
19. 450 $Dm^2$
20. 0.35 $m^2$

### Ejercicio 107

1. 24 000 $dm^3$
2. 13 800 $cm^3$
3. 190 litros
4. 149 000 $cm^3$
5. 7 000 $mm^3$
6. 9 540 litros
7. 485 $dm^3$
8. 975 000 $cm^3$
9. 590 dl
10. 3 146 $dm^3$
11. 40 $m^3$
12. 3 905 ml
13. 15 $m^3$
14. 60 $cm^3$
15. 96 Dl
16. 450 000 $mm^3$
17. 16 850 $dm^3$
18. 153 Hl
19. 7 500 $cm^3$
20. 43 000 $dm^3$
21. 7 506 $m^3$
22. 4 Dl
23. 8 316 $cm^3$
24. 5 475 cl
25. 38.6 $cm^3$
26. 1.8 $m^3$
27. 32.8 litros
28. 45 $Dm^3$
29. 0.035 $m^3$
30. 1 700 cl

### Ejercicio 108

1. 3 000 g
2. 0.07 kg
3. 1 560 Dg
4. 3 600 Dg
5. 70 Dg
6. 5 kg
7. 0.38 Hg
8. 64 g
9. 1 800 g
10. 380 Hg
11. 4 g
12. 85 Dg
13. 1.5 g
14. 4.9 Dg
15. 2 400 g
16. 0.08 Hg
17. 2.45 g
18. 0.635 dg
19. 0.1728 g
20. 38 500 mg

### Ejercicio 109

1. 35 años 9 meses 23 días
2. 1 hora 30 segundos
3. 124° 40' 56"
4. 5 meses 12 días 17 horas
5. 43 años 7 meses 17 días
6. 25 meses 19 días 8 horas 45 minutos
7. 438° 0' 43"
8. 3 décadas 8 años 11 meses 4 días
9. 7 días 12 horas
10. 40° 18'
11. 3 años 7 meses 15 días
12. 145° 58' 48"
13. 37 años 5 meses 12 días
14. 35° 40' 12"
15. 4 años 18 días
16. 85° 36' 36"
17. $3\frac{7}{8}$ años
18. $78\frac{23}{40}$ grados
19. $6\frac{18}{25}$ horas
20. $324\frac{43}{50}$ grados
21. $3\frac{161}{200}$ décadas
22. $148\frac{3}{200}$ grados
23. $120\frac{1}{2}$ minutos
24. $608\frac{2}{5}$ horas

### Ejercicio 110

1. 8 horas 40 minutos 13 segundos
2. 217° 43' 2"
3. 8 años 9 meses 23 días
4. 506° 28' 25"
5. 36 horas 6 minutos
6. 270° 56' 30"
7. 1 mes 3 días 5 horas 28 minutos 51 segundos
8. 2 décadas 2 años 10 meses 1 día
9. 287° 4' 10"
10. 2 décadas 4 años 11 meses 16 días 5 horas 39 minutos

### Ejercicio 111

1. 3 años 2 meses 8 días
2. 30° 6' 24"
3. 1 mes 27 días 17 horas
4. 91° 13' 29"
5. 25 días 14 horas
6. 16° 44' 36"
7. 4 meses 28 días 19 horas 37 minutos
8. 37° 35' 36"
9. 1 día 4 horas 45 minutos
10. 57 minutos 13 segundos

### Ejercicio 112

1. 2 días 1 hora 12 minutos 32 segundos
2. 692° 25' 12"
3. 2 meses 16 días 5 horas
4. 984° 56' 15"
5. 3 décadas 2 años 6 meses 12 días 4 horas
6. 1 580° 53"
7. 84 años 9 meses 18 días
8. 1 872° 8'
9. 3 días 18 horas 57 minutos 12 segundos
10. 1 siglo 9 años 1 mes 24 días

### EJERCICIO 113

$C$: cociente; $R$: residuo

1. $C$: 1 año 9 meses 3 días
2. $C$: 10° 38' 8"
3. $C$: 1 hora 22 minutos 56 segundos
4. $C$: 23° 2' 3"
5. $C$: 26 min 1 s
6. $C$: 47° 10' 43"
7. $C$: 3 horas 2 minutos 25 segundos
8. $C$: 16° 1"
9. $C$: 5 h 8 min 2 s
10. $C$: 3 años 4 meses 3 días
11. $C$: 3 meses 7 días 5 horas 12 minutos
12. $C$: 34° 20' 37"
13. $C$: 1 año 6 meses 6 días
14. $C$: 21° 25' 43"

## CAPÍTULO 11

### EJERCICIO 114

1. 12
2. 5
3. 6
4. 36
5. 8
6. 25 y 4
7. 42 y 7
8. 12 y 3
9. 14:00 h, 340 de M 300 de N
10. 6 pm
11. 1 pm
12. 11 pm
13. Playera: $600, Short: $500 y Tenis: $1 200
14. Paulina: 20 años, Mónica: 16 años y Andrea: 24 años
15. 40 min
16. 250 litros
17. 5 hrs

### EJERCICIO 115

1. 30
2. $\frac{5}{4}$
3. $\frac{15}{4}$
4. $\frac{2}{3}$
5. 24
6. $\frac{10}{7}$
7. 9
8. 18 años
9. 70 y 42
10. 20 y 35
11. 180
12. 50 hombres
13. 280 ton
14. $25 000 000
15. 4 días
16. 3 h 36 min
17. 6 horas
18. La mitad
19. 12 h
20. 1 min
21. 12 días
22. 8 h

### EJERCICIO 116

1. 110
2. 631
3. 4 100
4. 570
5. $\frac{871666576}{19683}$
6. –1640
7. $10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$
8. $10^{11} + 10^{10} + 10^9 + 10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$
9. $10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 10^0$
10. 6 045
11. $2^{11}$
12. $3^6$
13. $4^3$
14. 6
15. 12
16. 16
17. 18
18. 417 cifras
19. 2 268 cifras

### EJERCICIO 117

1. Sobrino de 7 años, $490
   de 11 años, $770
   de 15 años, $1 050
2. 6 años, $360
   8 años, $270
   10 años, $216
   12 años, $180
3. 2 días $600
   6 días $1 200
   10 días, $2 000
4. 1ra. parte 34
   2da. parte 85
   3ra. parte 136
5. 180, 360 y 480
6. 48, 72 y 108
7. 1ra persona, $840
   2da persona, $1400
   3ra persona, $4200
8. Hija,$162 000
   Hijo, $18 000
   Madre, $54 000
9. Sobrino, $9 000
   Hermana, $15 000
   Hermano, $18 750

# Solución a los ejercicios de álgebra

## Capítulo 1

### Ejercicio 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\notin$ | 4. $\notin$ | 7. $\in$ | 10. $\notin$ |
| 2. $\notin$ | 5. $\in$ | 8. $\notin$ | 11. $\notin$ |
| 3. $\in$ | 6. $\in$ | 9. $\in$ | 12. $\notin$ |

### Ejercicio 2

1. $R = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 10 \}$
2. $A = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
3. $B = \{ 4 \}$
4. $C = \{ x \in N \mid x \text{ es divisor de } 20 \}$
5. $V = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$
6. $Q = \{ e, o, u \}$
7. $T = \{ 2, 3, 4, 5 \}$
8. $S = \{ 2, 3, 7 \}$
9. $U = \{ x \in N \mid x \text{ es un múltiplo de } 4 \}$
10. $M = \{ 2, 10, 50 \}$

### Ejercicio 3

| | |
|---|---|
| 1. $n(A) = 8$ | 6. $n(T) = 1$ |
| 2. $n(B) = 1$ | 7. $n(M) = 0$ |
| 3. $n(S) = 4$ | 8. $n(L) = 4$ |
| 4. $n(R) = 0$ | 9. $n(J) = \infty$ |
| 5. $n(Q) = \infty$ | 10. $n(O) = 12$ |

### Ejercicio 4

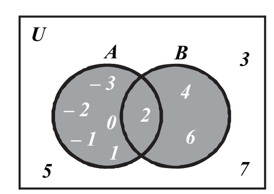
1. Iguales
2. Equivalentes y disjuntos
3. Disjuntos
4. Disjuntos
5. Equivalentes
6. Equivalentes y disjuntos
7. Equivalentes y disjuntos
8. Disjuntos
9. Disjuntos
10. Iguales

### Ejercicio 5

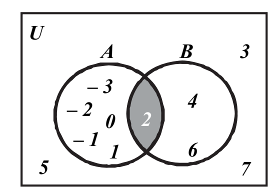
1. 8 subconjuntos
2. 32 subconjuntos
3. 16 subconjuntos
4. $\{\{\ \},\{\alpha\},\{\beta\},\{\theta\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\theta\},\{\beta,\theta\},\{\alpha,\beta,\theta\}\}$
5. $\{\{\ \},\{a\},\{c\},\{e\},\{f\},\{a,c\},\{a,e\},\{a,f\},$ $\{c,e\},\{c,f\},\{e,f\},\{a,c,e\},\{a,c,f\},\{a,e,f\},$ $\{c,e,f\},\{a,c,e,f\}\}$
6. $\{\{\ \},\{1\},\{2\},\{3\},\{6\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,6\},$ $\{2,3\},\{2,6\},\{3,6\},\{1,2,3\},\{1,2,6\},\{1,3,6\},$ $\{2,3,6\},\{1,2,3,6\}\}$
7. $\{\{\ \},\{1\},\{3\},\{9\},\{1,3\},\{1,9\},\{3,9\},\{1,3,9\}\}$
8. $\{\{\ \},\{5\},\{6\},\{7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\},\{5,6,7\}\}$

### Ejercicio 6

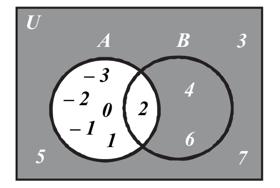
1. $A \cup B = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 6 \}$



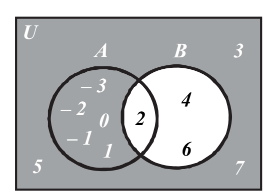

2. $A \cap B = \{ 2 \}$



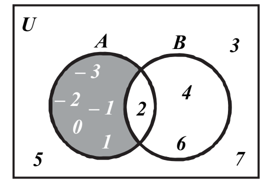

3. $A' = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$



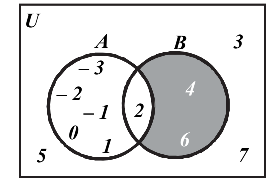

4. $B' = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 3, 5, 7 \}$




5. $A - B = \{ -3, -2, -1, 0, 1 \}$




6. $B - A = \{ 4, 6 \}$

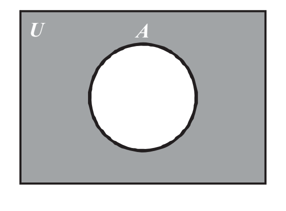


**EJERCICIO 7**

1. $A \cup B = \{0,1,2,3,4,6,8,12\}$
2. $B \cup C = \{0,1,2,3,4,5,6,12\}$
3. $C \cup D = \{0,1,2,3,4,5,6\}$
4. $D \cup B = \{1,2,3,4,5,6,12\}$
5. $A \cap B = \{2,4,6\}$
6. $A \cap D = \{4,6\}$
7. $C \cap E = \{0,1,2,3,4,5\}$
8. $B \cap C = \{1,2,3,4\}$
9. $A' = \{1,3,5,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$
10. $B' = \{0,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18\}$
11. $C' = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$
12. $D' = \{0,1,2,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$
13. $A - B = \{0,8\}$
14. $C - D = \{0,1,2\}$
15. $E - B = \{0,5,7,8,9\}$
16. $B - A = \{1,3,12\}$
17. $A' \cap B = \{1,3,12\}$
18. $A \cup B' = \{0,2,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18\}$
19. $B' \cap E' = \{10,11,13,14,15,16,17,18\}$
20. $A' - G = \{1,3,5,7,9,10,11,13,15,17\}$
21. $(A \cup B)' = \{5,7,9,10,11,13,14,15,16,17,18\}$
22. $(A \cap B)' = \{0,1,3,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$
23. $(A \cup F) \cap C = \{0,2,4\}$
24. $B \cup (F - G) = \{1,2,3,4,6,12,15,17\}$
25. $(F - G) \cap E' = \{15,17\}$
26. $(F \cap G) \cup D = \{3,4,5,6,14,16,18\}$
27. $E' \cap (A \cup G) = \{12,14,16,18\}$
28. $(E \cup F) \cap (A \cup G) = \{0,2,4,6,8,14,16,18\}$
29. $(C \cup E) \cap (F \cup G) = \{\ \} = \phi$
30. $(B \cup D) \cup (F \cap G) = \{1,2,3,4,5,6,12,14,16,18\}$
31. $(B \cup D)' - (E \cup G)' = \{0,7,8,9,14,16,18\}$
32. $(A' \cap B') - (E' \cap F') = \{5,7,9,14,15,16,17,18\}$

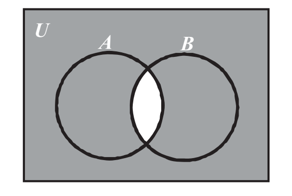
**EJERCICIO 8**

1.



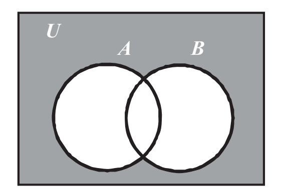

$A'$

2.



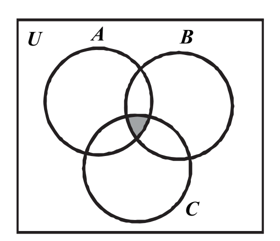

$(A \cap B)'$

3.



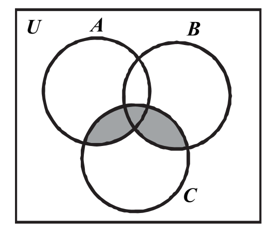

$A' \cap B'$

4.



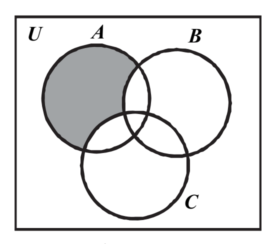

$A \cap B \cap C$

5.



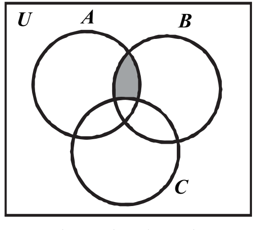

$(A \cup B) \cap C$

6.



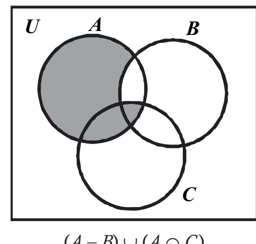
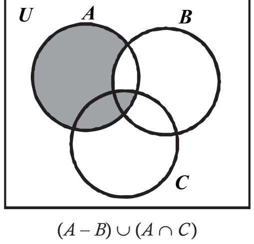

$B' \cap (A - C)$

7.




$(A \cup C) \cap (B - C)$

8.

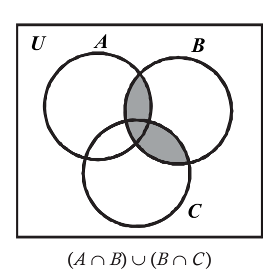




$(A - B) \cup (A \cap C)$

9.

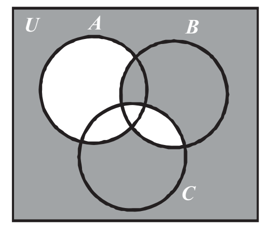
$(A \cap B \cap C)'$

10.



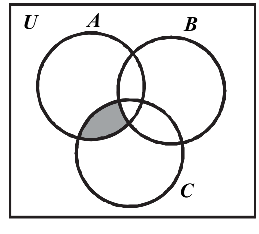

$(A \cap B) \cup (B \cap C)$

11.



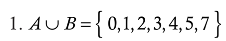

$((A - B) \cup (B \cap C))'$

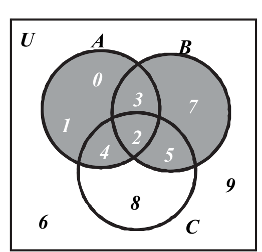
12.



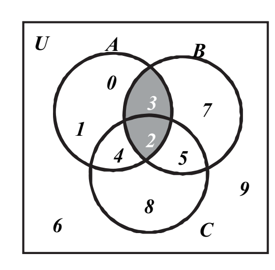

$(A' \cup B') - (A' \cup C')$

**Ejercicio 9**

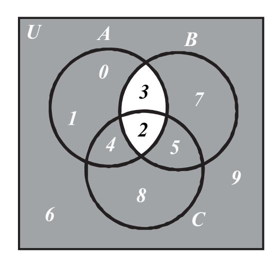

1. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$



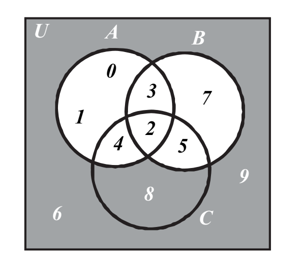

2. $A \cap B = \{2, 3\}$



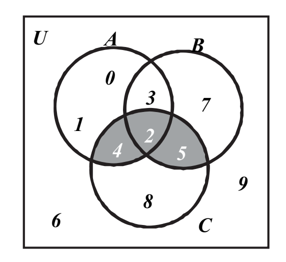

3. $A' \cup B' = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



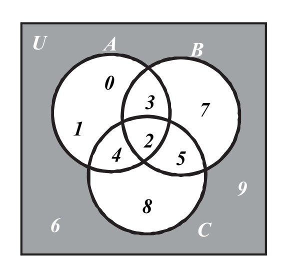
4. $A' \cap B' = \{6, 8, 9\}$



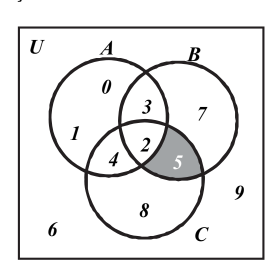

5. $(A \cup B) \cap C = \{2, 4, 5\}$



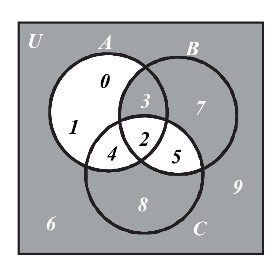

6. $(A \cup B \cup C)' = \{6, 9\}$



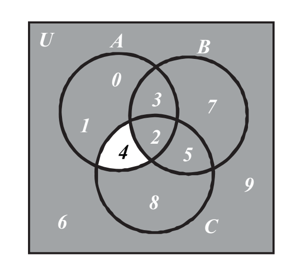

7. $(A' - B') \cap C = \{5\}$



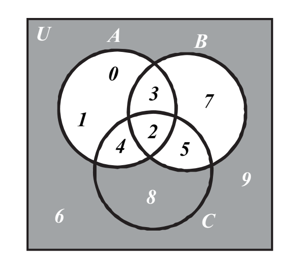

8. $(A - B)' \cap (B \cap C)' = \{3, 6, 7, 8, 9\}$



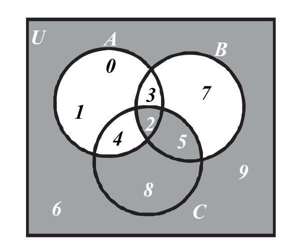

9. $(A - B)' \cup C' = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$



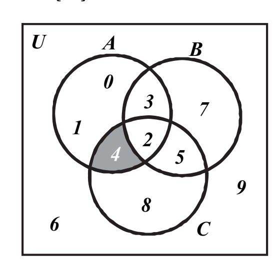

10. $(A \cap B)' \cap (A' \cap B') = \{6, 8, 9\}$




11. $(A - B)' \cap (B - C)' = \{2, 5, 6, 8, 9\}$

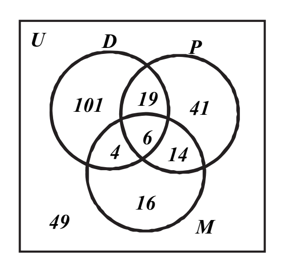



12. $(A' \cup B') - (A' \cup C') = \{4\}$



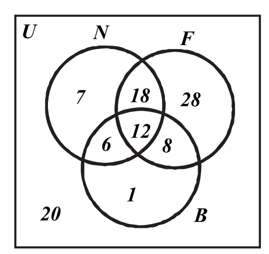

## Ejercicio 10

1.



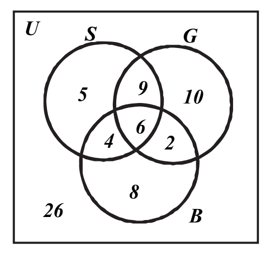

*a*) 101 personas
*b*) 158 personas
*c*) 100 personas

2.



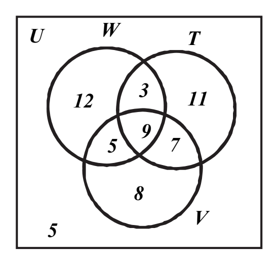

*a*) 52 niños
*b*) 73 niños
*c*) 100 niños
*d*) 32 niños

3.



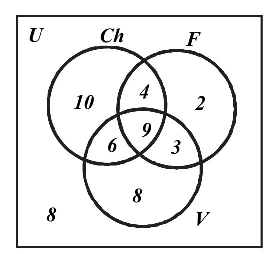

*a*) 8 personas
*b*) 5 personas
*c*) 10 personas
*d*) 26 personas
*e*) 34 personas
*f*) 36 personas

4.




*a*) 5 personas
*b*) 15 personas
*c*) 55 personas
*d*) 31 personas

5.




*a*) 50 niños
*b*) 13 niños
*c*) 20 niños
*d*) 16 niños

## EJERCICIO 12

1. "España está en Europa y Japón está en Asia"
2. "España está en Europa o Japón está en Asia"
3. "España no está en Europa"
4. "Japón no está en Asia"
5. "Si España está en Europa, entonces Japón está en Asia"
6. "España está en Europa, si y sólo si Japón está en Asia"
7. "España no está en Europa y Japón está en Asia"
8. "España está en Europa o Japón no está en Asia"
9. "No es verdad que España está en Europa o Japón está en Asia"
10. "No es verdad que España está en Europa y Japón está en Asia"

## EJERCICIO 13

1. $a \wedge b$
2. $a \wedge \sim b$
3. $\sim a \vee \sim b$
4. $b \vee a$
5. $\sim a \wedge b$
6. $\sim(a \wedge b)$

## EJERCICIO 14

1. $\sim a$ = "España no está en Europa y 6 no es número par"
2. $\sim b$ = "Los perros no ladran o 12 no es múltiplo de 3"
3. $\sim c$ = "5 no es número par o es múltiplo de 15"
4. $\sim d$ = "7 es primo y no es divisor de 21"
5. $\sim e$ = "6 es número impar o el tucán es un ave"

## EJERCICIO 15

1.

Conversa:
"Si 3 no es par, entonces es divisor de 6"
Contrapositiva:
"Si 3 es par, entonces no es divisor de 6"
Inversa:
"Si 3 no es divisor de 6, entonces es par"

2.

Conversa:
"Si $x$ es divisor de 25, entonces es múltiplo de 5"
Contrapositiva:
"Si $x$ no es divisor de 25, entonces no es múltiplo de 5"
Inversa:
"Si $x$ no es múltiplo de 5, entonces no es divisor de 25"

3.

Conversa:
"Si un triángulo no es un cuadrilátero, entonces es un polígono"
Contrapositiva:
"Si un triángulo es un cuadrilátero, entonces no es un polígono"
Inversa:
"Si un triángulo no es un polígono, entonces es un cuadrilátero"

4.

Conversa:
"Si la Luna es un satélite, entonces Marte no es un planeta"
Contrapositiva:
"Si la Luna no es un satélite, entonces Marte es un planeta"
Inversa:
"Si Marte es un planeta, entonces la Luna no es un satélite"

5.

Conversa:

"Si 17 no es múltiplo de 50, entonces es número primo"

Contrapositiva:

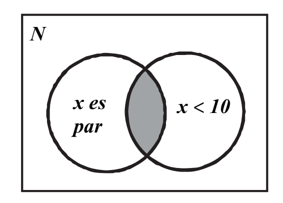
"Si 17 es múltiplo de 50, entonces no es número primo"

Inversa:

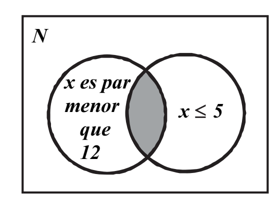
"Si 17 no es número primo, entonces es múltiplo de 50"

**Ejercicio 16**

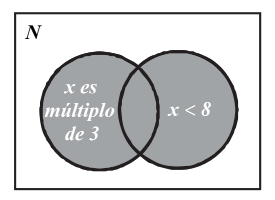
1. $\{2, 4, 6, 8\}$



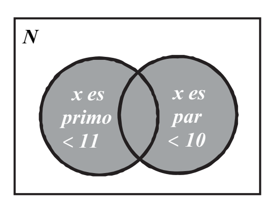

2. $\{2, 4\}$



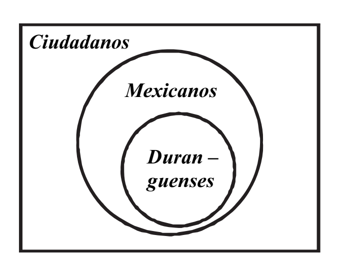

3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 15, 18, ...\}$



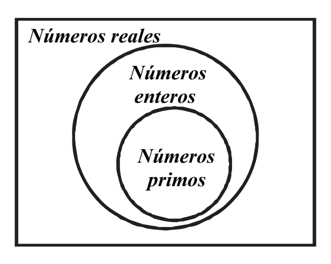

4. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$




5.

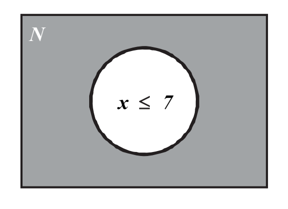



6.



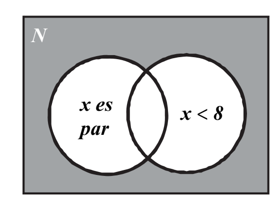

7. $\sim g$ = "$x \nleq 7$"; $x \in N$

$\sim g$ = "$x > 7$"; $x \in N$



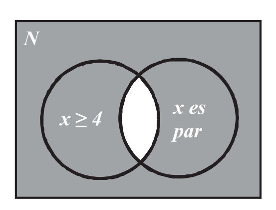

8. $\sim h$ = "$x$ no es par y $x \nless 8$"; $x \in N$

$\sim h$ = "$x$ no es par y $x \geq 8$"; $x \in N$



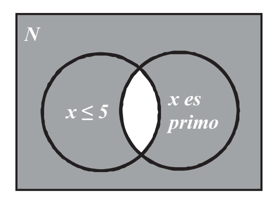

9. $\sim i$ = "$x \ngeq 4$ o $x$ no es par"; $x \in N$

$\sim i$ = "$x < 4$ o $x$ no es par"; $x \in N$




10. $\sim j$ = "$x \nleq 5$ o $x$ no es primo"; $x \in N$

$\sim j$ = "$x > 5$ o $x$ no es primo"; $x \in N$



## Ejercicio 17

1. Falso 2. Falso 3. Falso 4. Verdadero 5. Verdadero 6. Verdadero

## Ejercicio 18

1.

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \vee \sim q$ |
|---|---|---|---|
| v | v | f | v |
| v | f | v | v |
| f | v | f | f |
| f | f | v | v |

2.

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|
| v | v | f | f |
| v | f | v | v |
| f | v | f | f |
| f | f | v | f |

3.

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \Rightarrow \sim q$ |
|---|---|---|---|---|
| v | v | f | f | v |
| v | f | f | v | v |
| f | v | v | f | f |
| f | f | v | v | v |

4.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $\sim q$ | $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| v | v | v | f | f | v |
| v | f | v | f | v | v |
| f | v | v | f | f | v |
| f | f | f | v | v | v |

5.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| v | v | v | v | v |
| v | f | f | v | f |
| f | v | f | v | f |
| f | f | f | f | v |

6.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim(p \Rightarrow q)$ | $(p \vee q) \wedge \sim(p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| v | v | v | v | f | f |
| v | f | v | f | v | v |
| f | v | v | v | f | f |
| f | f | f | v | f | f |

7.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|
| v | v | v | v | v |
| v | f | f | v | v |
| f | v | v | f | v |
| f | f | v | v | v |

8.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \wedge (p \Rightarrow q)$ | $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$ |
|---|---|---|---|---|
| v | v | v | v | v |
| v | f | f | f | v |
| f | v | v | f | v |
| f | f | v | f | v |

9.

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \wedge \sim q$ | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | v | f | f | f | v | f | v |
| v | f | f | v | f | v | f | v |
| f | v | v | f | f | v | f | v |
| f | f | v | v | v | f | v | v |

10.

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $p \vee r$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| v | v | v | v | v | v |
| v | v | f | v | v | v |
| v | f | v | v | v | v |
| v | f | f | v | v | v |
| f | v | v | v | v | v |
| f | v | f | v | f | f |
| f | f | v | f | v | f |
| f | f | f | f | f | f |

11.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim q \Leftrightarrow r)$ | $\sim p \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| v | v | v | f | f | f | f |
| v | v | f | f | f | v | v |
| v | f | v | f | v | v | v |
| v | f | f | f | v | f | f |
| f | v | v | v | f | f | v |
| f | v | f | v | f | v | v |
| f | f | v | v | v | v | v |
| f | f | f | v | v | f | v |

### Ejercicio 19

1. $A \times B = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$
2. $A \times C = \{(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,5),(2,6),(3,3),(3,5),(3,6)\}$
3. $B \times C = \{(2,3),(2,5),(2,6),(4,3),(4,5),(4,6)\}$
4. $B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
5. $C \times B = \{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4),(6,2),(6,4)\}$
6. $A \times (B \times C) = \{(1,2,3),(1,2,5),(1,2,6),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6)$ $(2,2,3),(2,2,5),(2,2,6),(2,4,3),(2,4,5),(2,4,6)$ $(3,2,3),(3,2,5),(3,2,6),(3,4,3),(3,4,5),(3,4,6)\}$
7. $(A \times B) \times C = \{(1,2,3),(1,2,5),(1,2,6),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6)$ $(2,2,3),(2,2,5),(2,2,6),(2,4,3),(2,4,5),(2,4,6)$ $(3,2,3),(3,2,5),(3,2,6),(3,4,3),(3,4,5),(3,4,6)\}$
8. $(A \cup B) \times (A \cap C) = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$
9. $(A - B) \times C = \{(1,3),(1,5),(1,6),(3,3),(3,5),(3,6)\}$
10. $(A - C) \times (A \cap C) = \{(1,3),(2,3)\}$

## Capítulo 2

### Ejercicio 20

| | | |
|---|---|---|
| 1. $-5x$ | 10. $2n$ | 19. $a^2b - ab^2$ |
| 2. $13a^2b$ | 11. $-\frac{11}{60}a^3b$ | 20. $a^3b^2c - 2a^2bc^2$ |
| 3. $-10xy^2$ | 12. 0 | 21. $7x^2 - 10y^2 + 8$ |
| 4. 0 | 13. $0.05b = \frac{1}{20}b$ | 22. $-8m^2 + 4mn + 5n^2$ |
| 5. $10a^2b$ | 14. $-2ab^3c$ | 23. $2x^{2a+1} + 5x^{3a-2}$ |
| 6. $-8a$ | 15. $-3m^{x-2}$ | 24. $-9a^{m+5} + 7x^{m+2}$ |
| 7. $-x$ | 16. $-3x + 3y$ | 25. $-\frac{15}{4}a^2 + 3ab$ |
| 8. $8ab$ | 17. $b$ | 26. $-\frac{17}{6}x^{m-1} - \frac{17}{20}b^{m-2}$ |
| 9. $-a^2$ | 18. $-11m - 8n$ | 27. $\frac{1}{2}x - 3y$ |

### Ejercicio 21

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $-1$ | 10. $\frac{1}{36}$ | 16. $\frac{7}{3}$ | 21. $\frac{5}{12}$ |
| 2. 5 | 11. $\frac{49}{144}$ | 17. 2 | 22. $\frac{285}{16}$ |
| 3. 3 | 12. 31 | 18. $\frac{11}{12}$ | 23. $-\frac{1}{156}$ |
| 4. 1 | 13. $-\frac{65}{4}$ | 19. $-\frac{23}{4}$ | 24. 432 |
| 5. 14 | 14. 24 | 20. $-\frac{9}{64}$ | 25. $\frac{33}{2}$ |
| 6. $\frac{7}{12}$ | 15. $-\frac{105}{8}$ | | |
| 7. $-2$ | | | |
| 8. $-6$ | | | |
| 9. 24 | | | |

### Ejercicio 22

1. $x - 3$
2. $3a + 8$
3. $\frac{x}{y}$
4. $100 - x$
5. $x, x + 1$
6. $2a,\ 2a + 2,\ 2a + 4$ con $a \in Z$
7. $(x + y)^2$
8. $x^2 + y^2$
9. $\frac{1}{x}$
10. $\sqrt[3]{x - y}$
11. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
12. $5x - 10$
13. $\frac{a + b}{6}$
14. $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 3(2x) + \frac{3}{4}(2x + 4)$
15. $2y(10) + y = 21y$
16. $\frac{1}{4}xyz - 4$
17. $(a + b)^2 = 49$
18. $A = x^2$
19. $P = 2(3a + a) = 2(4a) = 8a$
20. $x + (x + 3) + (x + 5) = P$
21. $x - 0.15x = 0.85x$
22. $50 - 2x$
23. $x, 80 - x$
24. $2x + 1,\ 2x + 3,\ 2x + 5$ con $x \in Z$
25. $A = x(3x - 3)$
26. $x - 10$
27. $x^3 - \frac{x}{2}$
28. $x, 2x, 180° - 3x$
29. $0.30x$
30. $2x + 4$
31. $\frac{2}{3}x + 3(x + 1) - \frac{1}{x} = 10$
32. $2x = 3(x - 1) + 7$

### Ejercicio 23

1. Un número aumentado en tres unidades.
2. El doble de un número disminuido en once unidades.
3. El triple del cuadrado de un número.
4. Las cinco sextas partes de un número cualquiera.
5. El recíproco de un número.
6. El cuadrado de la suma de dos cantidades diferentes.
7. La suma de los cubos de dos números.
8. El cociente de un número entre su consecutivo.
9. El quíntuplo de un número equivale a treinta unidades.
10. El triple de un número disminuido en dos unidades equivale a veinticinco.

11. Las tres cuartas partes de un número aumentado en dos unidades equivalen a dicho número.
12. Una sexta parte de la diferencia de dos cantidades aumentada en tres unidades equivale a la suma de dichos números.
13. El cociente de dos números equivale a un quinto de su diferencia.
14. La diferencia de los cuadrados de dos cantidades.
15. La diferencia del cuadrado de un número con el doble del mismo.
16. El cuadrado de la semisuma de dos cantidades.
17. La raíz cuadrada del cociente de la suma de los números entre la diferencia de ellos.
18. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos.

## EJERCICIO 24

1. $10x - 5y - z$
2. $-3m - n - 2$
3. $3a - b$
4. $-7p + 2q - 7r$
5. $5x^2 + 10x + 2$
6. $-2a^3 + 9a^2 - 5$
7. $2x^4 + x^3 + 2x^2 - x$
8. $x^2 - 2x$
9. $5y^3 - 3y^2 - 3y - 1$
10. $2z^3 + 7z^2 - 7z - 1$
11. $-9x^2 + 3xy - 11y^2$
12. $x^5 + x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x - 2$
13. $-23x^3y - x^2y^2 - 10xy^3$
14. $4x^4 - xy^3 - 4y^4$
15. $-4a^7 + 3a^6 + 6a^4 - a^2 + 7a$
16. $\frac{1}{6}x^2 - 3xy - \frac{1}{3}y^2$
17. $\frac{1}{3}a^2 + \frac{13}{12}ab - \frac{7}{24}b^2$
18. $\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{8}xy^2 - 2y^3$
19. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{17}{6}y$
20. $x^5 + \frac{13}{5}x^4y - \frac{3}{10}x^3y^2 - \frac{5}{6}x^2y^3 - \frac{3}{4}xy^4 - \frac{29}{18}y^5$
21. $\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
22. $3a^{3x} + 2a^{2x} + a^x$
23. $x^{2a} + x^{2a-2}$
24. $-\frac{7}{8}b^{2x} + \frac{1}{6}b^x + \frac{7}{3}b$
25. $\frac{2}{3}x^{1-y} + \frac{1}{12}x^{1-2y} - \frac{1}{3}x^{1-3y}$

## EJERCICIO 25

1. $-3a^2 + 2a - 5$
2. $x^3 - 5x^2 - 10x + 11$
3. $-5a^5 + 4a^4 - 7a^3 + 2a^2 - 9a - 1$
4. $15x^4y - 17x^2y^3 - 5xy^4$
5. $-a^5b - 4a^4b^2 - 2a^3b^3 + 5ab^5 - 1$
6. $-x^{a+2} - 13x^{a+1} - x^a + 12x^{a-1}$
7. $10a^{2m-1} - 6a^{2m} - 5a^{m+1} + a^{m-3}$
8. $x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{5}{3}$
9. $\frac{2}{3}m^4n + \frac{3}{5}m^3n^2 - \frac{4}{3}m^2n^3 - 2mn^4$
10. $-\frac{5}{2}x^4 + \frac{14}{5}x^3y - \frac{4}{15}x^2y^2 - \frac{1}{3}y^4$
11. $-3x + 7y + 5$
12. $2a - 2$
13. $18x^3 - 18x^2 + 5x + 1$
14. $2a^4 - 2a^2 - a + 5$
15. $-4x^7y^5 - 6x^6y^4 + 12x^3y^2$
16. $4m^{x+1} + 2m^{x-2} + m^{x-5} - 3m^{x-6} - 4m^{x-9}$
17. $-15a^{n+10} + 4a^{n+9} - 5a^{n+2} + 3a^{n+1} - 8a^n + 5a^{n-3}$
18. $\frac{1}{2}m - \frac{7}{10}n + \frac{5}{6}p$
19. $\frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{5}{12}y^3$
20. $-\frac{17}{2}a^5b + \frac{23}{4}a^4b^2 + \frac{15}{4}a^3b^3 + \frac{1}{2}a^2b^4$

## EJERCICIO 26

1. $8x + y$
2. $-11a + 3b + 2c$
3. $-23x + 3y$
4. $23m - 14n$
5. $-12a + 2b$
6. $-18x + 7y$
7. $19x^2 + 4x - 12y$
8. $-2x - 20y$
9. $-5x - 2y + 18z$
10. $-5x + 5y - 8z$
11. $2a - \frac{9}{10}b$
12. $\frac{14}{15}x + \frac{17}{15}y$

## EJERCICIO 27

1. $-15x^2$
2. $24x^8y^9z^2$
3. $-14a^9bc^8$
4. $-\frac{3}{10}xyz^5$
5. $50m^8p^4$
6. $-3c^{11}m^{10}p^2$
7. $-x^2y^2z^2$
8. $-4a^4bc$
9. $m^5n^2p$
10. $\frac{7}{6}a^8b^{13}c^3$
11. $-\frac{12}{35}x^3y^2z^4$
12. $-27m^7p^3$

13. $0.1m^8np^5$
14. $0.048abcxyz$
15. $-10a^{m+2}b^{n+3}c^2$
16. $-42m^{3x+2}n^{4x+5}$
17. $-36x^{3m+5}y^{2n+5}$
18. $6x^{5a-2}y^{9a-5}$
19. $\frac{1}{4}a^{5x-2}b^{2x+1}c^{x+4}$
20. $-2x^{a+1}y$
21. $-30a^6b^3c$
22. $-56x^9y^8z^2$
23. $30xyz$
24. $48x^{11}y^8$
25. $\frac{8}{3}a^{12}b^5c^4$
26. $-\frac{1}{2}a^9b^4c^4$
27. $40a^{6x+4}b^{3x+3}c^{x+2}$
28. $-\frac{1}{12}x^{4a+2}y^{7a+1}$
29. $24x^{9a-2}y^{6a+1}$
30. $20a^{8x+2}b^6m^{2x+3}n^{5x+3}$

**Ejercicio 28**

1. $8a^5b-14a^4b^2$
2. $-15m^5+9m^4-18m^2+9m$
3. $3x^4y-7x^3y-2x^2y$
4. $-6a^3b+21a^2b^2-24ab^3$
5. $24a^8b^4-28a^7b^5+16a^6b^7$
6. $-35x^7y^4z^2+15x^6y^3z+20x^2y^2z^2$
7. $40m^4np^3-24m^5p^4+48m^3p^3$
8. $-12a^4c^5+21a^3bc^4+6ac^5$
9. $15m^{x+7}n^{2x+1}-9m^{x+2}n^{2x+4}+6m^{x+2}n^{2x+1}$
10. $-14x^{a+3}-12x^{a+1}+16x^a+18x^{a-1}-4x^{a-2}$
11. $-9a^{3x+2}b^{3x+1}+21a^{3x+1}b^{3x+2}+12a^{2x+1}b^{2x+2}$
12. $-25x^{5m}y^{3n+1}+10x^{5m+1}y^{3n+2}+20x^{5m+2}y^{3n+3}$
13. $-12a^{x+5}b^{y+2}c^{m+5}+12a^{x+4}b^{y+3}c^7-8a^xb^{y+1}c^6$
14. $\frac{1}{3}a^3b^2-\frac{1}{2}a^2b^3-\frac{2}{5}ab^4$
15. $x^5y+8x^4y^2-\frac{4}{9}x^3y^3$
16. $\frac{8}{25}a^7b^2c-\frac{14}{5}a^5b^4c+\frac{32}{25}a^3b^6c-\frac{1}{20}ab^3c$
17. $-4a^{6m+4}b^{2m}c^4+\frac{35}{2}a^{m+6}c^{m+4}$
18. $-3x^{2m-3}+x^{2m-2}-\frac{3}{2}x^{2m-1}$
19. $\frac{28}{3}a^{m+1}b^{3n+1}c+\frac{16}{5}a^mb^{3n+3}$
20. $-\frac{16}{15}m^{3x+3}n^{3a+4}+m^{3x+2}n^{3a+3}+\frac{14}{5}m^{3x}n^5$

**Ejercicio 29**

1. $x^2-5x-14$
2. $m^2+m-72$
3. $x^2-5x+6$
4. $3x^2+19x+28$
5. $6x^2-11x-10$
6. $25x^2-16y^2$
7. $9x^2+3xy-2y^2$
8. $n^4-3n^2-28$
9. $\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x-4$
10. $\frac{10}{9}x^2-\frac{16}{3}xy+\frac{3}{2}y^2$
11. $\frac{4}{15}x^2-\frac{31}{30}xy-\frac{3}{4}y^2$
12. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
13. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
14. $m^3+n^3$
15. $m^3-n^3$
16. $15x^3-22x^2y-13xy^2+14y^3$
17. $-27a^3+51a^2b+40ab^2-28b^3$
18. $4a^4-2a^3-6a^2+11a-4$
19. $15x^5-20x^4-9x^3+12x^2-18x+24$
20. $x^4-3x^3+3x-1$
21. $\frac{2}{15}a^3-\frac{27}{10}a^2b+\frac{193}{18}ab^2-\frac{7}{6}b^3$
22. $10x^3-\frac{23}{6}x^2y+\frac{21}{20}xy^2-\frac{1}{15}y^3$
23. $-x^3+\frac{13}{30}x^2y+\frac{63}{40}xy^2-\frac{1}{2}y^3$
24. $m^x-m^{x-1}n-mn^{a-1}+n^a$
25. $b^{m+3}+b^m$
26. $x^{2m+5}+2x^{2m+4}-3x^{2m+3}-4x^{2m+2}+2x^{2m+1}$
27. $x^{2a+3}+4x^{2a+2}+x^{2a+1}-2x^{2a}$
28. $6x^4-31x^3+43x^2-6x-8$
29. $-18x^4-25x^2-14x-9$
30. $4x^5y-6x^4y^2-2x^2y^4-12xy^5$
31. $m^2-2mp-n^2+p^2$
32. $-2m^2+5mn-mp-3n^2-np+10p^2$
33. $a^2-b^2+2bc-c^2$
34. $x^6-2x^5-x^4+4x^3-4x+2$
35. $3x^4-11x^3+20x^2-7x-5$
36. $-x^{2m+4}+2x^{2m+3}-x^{2m+2}+x^{2m}$
37. $2x^{2m+3}+7x^{2m+2}+7x^{2m+1}+x^{2m}-x^{2m-1}$
38. $a^6-2a^4b^2-4a^2b^4+7ab^5-2b^6$
39. $m^{a+2}-2m^a+8m^{a-1}-3m^{a-2}$
40. $30x^{5a+1}+34x^{5a}-31x^{5a-1}-23x^{5a-2}+3x^{5a-3}$
41. $m^6+2m^5-2m^4-3m^3+2m^2-m-1$
42. $\frac{1}{9}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{55}{72}x^3-\frac{17}{12}x^2+\frac{55}{48}x+\frac{3}{2}$
43. $-a^{2x+3}+2a^{2x+2}+2a^{2x+1}-4a^{2x}-a^{2x-1}+a^{2x-2}$
44. $a^{2x+6}+a^{2x+5}+5a^{2x+4}+4a^{2x+3}-a^{2x+2}-5a^{2x+1}-5a^{2x}$

**EJERCICIO 30**

1. $3a^4b^5$
2. $-6x^4$
3. $2a^5b^3$
4. $-4p^2q^4$
5. $-3a^8b$
6. $5a^6b^6$
7. $-\frac{1}{3}x^4y^2$
8. $-\frac{2}{3}a^2b^6$
9. $\frac{2}{3}x^2z$
10. $\frac{1}{4}xy^3z$
11. $-2x^{7a-6}y^{3b-3}$
12. $5a^{n-6}b^{2n+7}$
13. $-3a^{x+2}b^{x+3}c^{x-3}$
14. $\frac{10}{3}x^{5m-5}y^{9n-5}z^{2m-2}$
15. 1
16. $\frac{7}{20}ac^2$
17. $\frac{3}{4}a$
18. $-4xy^5$
19. $\frac{7}{6}a^{m-1}b^{n-2}$
20. $\frac{1}{9}x^4y^5$
21. $-9n^4p$
22. $-\frac{1}{2}c^3d^{5-x}$
23. $2a^3b^2$
24. $\frac{9}{8}a^{4m-1}b^{2n-2}$

**EJERCICIO 31**

1. $x+2$
2. $2x+1$
3. $-5x+2y$
4. $2x^2-x+1$
5. $x^2+3x-4$
6. $-2x^4+\frac{5}{2}x^2+3x$
7. $9m^3n^4-5m^2n^4+1$
8. $4a^6b^2+6a^5b-\frac{1}{8}a^3$
9. $4x^7y^5-7x^5y^2-1$
10. $\frac{1}{2}a-5$
11. $\frac{1}{30}a^2b^5-\frac{1}{24}ab^3-\frac{1}{6}b^2$
12. $-\frac{1}{3}a^7b^5+2a^5b^4-\frac{2}{9}a^3b$
13. $\frac{9}{4}x^6y^4-\frac{5}{2}x^7y^2+5x^3$
14. $-\frac{5}{36}x^4y^4+\frac{10}{9}x^2y^2-\frac{5}{18}xy^7$
15. $-\frac{1}{5}x^8y^5+\frac{4}{15}x^6y^4-\frac{1}{20}x^3y^3+\frac{2}{5}xy^2$
16. $2+12a^xb^yc^z-16a^{2x}b^{2y}c^{2z}$
17. $\frac{1}{6}x^{a-3}y^{12}-2x^4y^{1-a}$
18. $-4a^{3m+2}b^{3m}+3a^{2m+7}b^{2m-6}-2a^{m+1}b^{m-1}$
19. $-2a^{4m-6}b^{n+10}+5a^{5m-4}b^{n-1}-\frac{4}{5}a^{3m-2}b^{5-2n}$
20. $9x^{2a}y^bz^3+2x^{2a-1}y^{b-1}z^{c+2}-4x^{2a-2}y^{b-3}z^{c+3}$

**EJERCICIO 32**

1. $x+2$
2. $x+1$
3. $x+3y$
4. $x+3$
5. $x-6$
6. $x+6$
7. $m-4n$
8. $x-10y$
9. $n^2-6$
10. $m^3+4$
11. $x^4+2$
12. $x^6-7$
13. $3x-7$
14. $4m-3$
15. $5a-7$
16. $2a+3b$
17. $7m-3$
18. $3a+4b$
19. $7m-3n$
20. $3x-2y$
21. $3m^2-5n^2$
22. $3m^2+5$
23. $5m^3-6$
24. $5m^2-3m-2$
25. $3x^2+7x-6$
26. $2a-7$
27. $x^2+xy+y^2$
28. $4x^2-6xy+9y^2$
29. $x^4+2x^2y^2+4y^4$
30. $a^3+a^2+a$
31. $x-4$
32. $2x^2+xy+3y^2$
33. $3x^2+x-2$
34. $3x^2-x+1$
35. $2x^2-3x-1$
36. $2x^2-3x-5$
37. $4a^2-6a-7$
38. $6x^2-3x-4$
39. $7x^2+x-4$
40. $5x^2-9x-3$
41. $4x^2+3x-1$
42. $5a^3-3a^2b-6ab^2-2b^3$
43. $4x^5-6x^4-7x^3-8x^2-3x+2$
44. $\frac{5}{3}a+\frac{1}{2}b$
45. $4x-\frac{1}{5}y$
46. $4m-\frac{1}{3}n$
47. $\frac{1}{4}a+\frac{2}{3}$
48. $x^{a+2}-x^{a+1}+x^a$
49. $a^{m-1}-b^{y-1}$
50. $m^a-2m^{a-1}+m^{a-2}$
51. $m^{x+2}+3m^{x+1}-2m^x$
52. $m^{x+2}+2m^{x+1}-m^x$
53. $-5m^{2x+2}+m^{2x+1}+3m^{2x}$
54. $x^{m+4}-x^{m+3}-2x^{m+2}+x^{m+1}$

**EJERCICIO 33**

1. $6t^2-t+6$
2. $x^2+2x+4\,400$
3. $5x^2+6xy+y^2$
4. $15y^2+14y+3$
5. $20x^2-7xy-6y^2$
6. $12w^3-8w^2-13w-3$
7. $4x+y$
8. $6t^4+t^3+7t^2-2$
9. $40x^2+36x+8$
10. $9x^2-1$
11. $15x^2+4x-3$
12. $20x^2-3x-9$

## CAPÍTULO 3

### EJERCICIO 34

1. $x^2 + 16x + 64$
2. $m^2 - 20m + 100$
3. $a^2 - 6a + 9$
4. $y^2 + 2y + 1$
5. $y^2 + 10y + 25$
6. $p^2 - 12p + 36$
7. $1 - 2b + b^2$
8. $x^2 - 10x + 25$
9. $4 + 4n + n^2$
10. $16 - 8m + m^2$
11. $y^2 + 18y + 81$
12. $x^2 - 24x + 144$
13. $p^2 + 30p + 225$
14. $4a^2 - 4a + 1$
15. $\frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{9}$
16. $9a^2x^2 - 6ax + 1$
17. $m^2n^2 + 16amn + 64a^2$
18. $49a^2 - 42ab + 9b^2$
19. $4x^2 + 12xy + 9y^2$
20. $x^2 + 0.4x + 0.04$
21. $16x^6 + 40x^3y + 25y^2$
22. $81a^6 - 18a^5b + a^4b^2$
23. $36m^2n^8 + 36m^6n^4p + 9m^{10}p^2$
24. $a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10}$
25. $1 - \frac{3}{2}xy + \frac{9}{16}x^2y^2$
26. $\frac{1}{16}x^2 - xy^3 + 4y^6$
27. $\frac{4}{9x^2} - \frac{1}{3xy} + \frac{1}{16y^2}$
28. $9x^4 + 24x^3y^7 + 16x^2y^{14}$
29. $25a^2b^2 - 30abxy^5 + 9x^2y^{10}$
30. $m^{18} + 24m^9y^4 + 144y^8$
31. $9x^4 - 54x^2y^6 + 81y^{12}$
32. $a^{2x} - 2a^xb^y + b^{2y}$
33. $9x^{8a-10} + 12x^{4a-5}y^{2a+1} + 4y^{4a+2}$
34. $m^{6a+12} - 8m^{3a+6}n^{3b} + 16n^{6b}$
35. $9a^{2x} + 3a^{4x}b^{4y} + \frac{1}{4}a^{6x}b^{8y}$
36. $\frac{16}{25}a^{4m-2} - \frac{12}{5}a^{2m-1}b + \frac{9}{4}b^2$
37. $0.36m^{4x} - 0.6m^{2x}n^4 + 0.25n^8$
38. $36x^{6m-4} + 60x^{3m-2}y^{4m}z^3 + 25y^{8m}z^6$
39. $0.09x^{4a} - 0.48x^{2a}y^{b-1} + 0.64y^{2b-2}$
40. $\frac{25}{9}x^{6a-4} + 4x^{3a-2}y^{1-3a} + \frac{36}{25}y^{2-6a}$
41. $\frac{x^{16-2y}}{4} + 3x^{8-y}y^{8-x} + 9y^{16-2x}$
42. $\frac{x^{8a}}{25} - \frac{b^{4x}x^{4a}y^{a+1}}{10} + \frac{b^{8x}y^{2a+2}}{16}$
43. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$
44. $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1$
45. $a^2 + 36b^2 + 25c^2 + 12ab - 10ac - 60bc$
46. $a^4 + 10a^3 + 33a^2 + 40a + 16$
47. $a^4 + 6a^3 + 5a^2 - 12a + 4$
48. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
49. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4$
50. $4a^2 - 12ab + 9b^2 + 4a - 6b + 1$
51. $16m^2 + 25n^2 + p^2 + 40mn + 8mp + 10np$
52. $9x^4 + 4y^4 + 1 + 12x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2$
53. $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 + c^2 + ac + \frac{1}{3}ab + \frac{2}{3}bc$
54. $\frac{1}{36}x^2 + y^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{12}x - \frac{1}{2}y$
55. $\frac{4}{x^2} + \frac{9}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{12}{xy} - \frac{4}{xz} - \frac{6}{yz}$
56. $a^{2x} + b^{2y} + c^{2z} - 2a^xb^y + 2a^xc^z - 2b^yc^z$
57. $a^{2x+2} - 4a^{2x+1} + 2a^{2x} + 4a^{2x-1} + a^{2x-2}$

### EJERCICIO 35

1. $x^2 - 9$
2. $a^2 - 1$
3. $b^2 - 4$
4. $k^2 - 64$
5. $25 - y^2$
6. $81 - a^2$
7. $m^2 - n^2$
8. $x^2y^2 - z^2$
9. $9x^2 - 25y^2$
10. $16m^2 - 81n^2$
11. $4b^2 - 9c^2$
12. $36x^{10} - 1$
13. $9m^6 - 64$
14. $25x^8y^2 - 16z^2$
15. $81a^2b^8 - c^{14}$
16. $49a^8b^6 - c^2d^{10}$
17. $\frac{9}{25}m^2 - \frac{1}{4}$
18. $\frac{49}{36}x^6 - \frac{9}{4}$
19. $\frac{1}{9}x^2y^2 - z^{12}$
20. $9x^4 - \frac{1}{100}$
21. $9a^{2x-8} - b^{6x}$
22. $64y^{4a-6} - 16x^{8a}$
23. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
24. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
25. $m^2 - n^2 - 2np - p^2$
26. $x^2 + 2xy + y^2 - 9$
27. $16x^2 - 9y^2 + 6yz - z^2$
28. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
29. $m^8 - m^4 - 2m^3 - m^2$
30. $4x^2 + 20xy + 25y^2 - 9z^2$
31. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1$
32. $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m + \frac{1}{16} - \frac{4}{9}n^2$
33. $\frac{4}{25}x^4 + \frac{37}{315}x^2y^2 + \frac{4}{49}y^4$
34. $\frac{1}{9}x^{2m+2} - \frac{1}{36}x^{2m} + \frac{1}{6}x^{2m-1} - \frac{1}{4}x^{2m-2}$

35. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$
36. $x^2 + 2xz + z^2 - y^2 + 2y - 1$
37. $m^2 - 10m + 25 - 4n^2 + 12np - 9p^2$
38. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 8z - 16$
39. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16z^2 + 56z - 49$
40. $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2 - 30z - 25$

### EJERCICIO 36

1. $x^2 - 3x - 40$
2. $m^2 + 3m - 28$
3. $x^2 - 12x + 20$
4. $x^2 - 11x + 30$
5. $x^2 + 10x + 24$
6. $n^2 + n - 12$
7. $x^2 - 9x + 8$
8. $a^2 - 6a - 27$
9. $x^2 - 3x - 10$
10. $m^2 + 5m - 24$
11. $4x^2 - 4x - 24$
12. $9m^2 + 6m - 24$
13. $36x^2 - 6x - 12$
14. $16x^2 - 28x + 10$
15. $2 - 9x + 9x^2$
16. $25x^2 + 50x + 24$
17. $4 - 2x - 42x^2$
18. $25 - 35x - 18x^2$
19. $x^4 - 4x^2 - 60$
20. $m^6 - 12m^3 + 32$
21. $x^8 - 6x^4 - 72$
22. $x^{10} + x^5 - 2$
23. $a^6 - 7a^3 + 10$
24. $x^{4m-2} + 2x^{2m-1} - 35$
25. $a^4x^6 + 3a^2x^3b^4 + 2b^8$
26. $9x^{2m} - 9x^my^n - 28y^{2n}$
27. $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9}$
28. $\frac{1}{9}m^2 - \frac{1}{30}m - \frac{1}{5}$
29. $\frac{9}{16}y^2 - \frac{11}{32}y - \frac{5}{48}$
30. $x^2y^2 - \frac{11}{8}xy + \frac{15}{32}$
31. $\frac{9}{49}y^2 - \frac{9}{70}xy - \frac{2}{5}x^2$
32. $\frac{36}{25}x^4 + \frac{1}{10}x^2y^2 - \frac{1}{12}y^4$
33. $a^2 + 2ab + b^2 + 7a + 7b + 12$
34. $a^2 - 4ab + 4b^2 + 6a - 12b + 5$
35. $x^2 - 2xy + y^2 - 4xz + 4yz - 21z^2$
36. $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2$
37. $m^4 + 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2 + 4n^2 - 45$
38. $a^2 - b^2 + 3c^2 - 4ac - 2bc$
39. $x^2 - 6y^2 - 4z^2 + xy - 3xz + 11yz$
40. $a^2 + c^2 - 25b^2 + 2ac$

### EJERCICIO 37

1. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
2. $m^3 + 18m^2 + 108m + 216$
3. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
4. $a^3 + 30a^2 + 300a + 1\,000$
5. $n^3 - 21n^2 + 147n - 343$
6. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
7. $1 - 3x + 3x^2 - x^3$
8. $1\,000 - 300m + 30m^2 - m^3$
9. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
10. $27a^3 - 108a^2 + 144a - 64$
11. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
12. $1 - 12m + 48m^2 - 64m^3$
13. $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
14. $125m^6 + 150m^4n^5 + 60m^2n^{10} + 8n^{15}$
15. $27x^9y^3 - 54x^6y^2z^4 + 36x^3yz^8 - 8z^{12}$
16. $64x^6 + 96x^5y + 48x^4y^2 + 8x^3y^3$
17. $27m^{12} - 108m^{11}n + 144m^{10}n^2 - 64m^9n^3$
18. $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$
19. $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$
20. $\frac{8}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}$
21. $\frac{27}{125}x^3 + \frac{36}{25}x^2y + \frac{16}{5}xy^2 + \frac{64}{27}y^3$
22. $\frac{1}{8}a^3 - \frac{9}{16}a^2b + \frac{27}{32}ab^2 - \frac{27}{64}b^3$
23. $\frac{1}{27}x^{12} + \frac{1}{3}x^8y + x^4y^2 + y^3$
24. $8x^{6a-9} - 36x^{4a-6}y^{4a+1} + 54x^{2a-3}y^{8a+2} - 27y^{12a+3}$

### EJERCICIO 38

1. $x^4 + x^2 - 2$
2. $m^4 - 65m^2 + 64$
3. $81x^4 - 162x^3 - 99x^2 + 180x + 100$
4. $625x^4 - 1\,800x^2 + 1\,296$
5. $m^6 - 12m^4 + 48m^2 - 64$
6. $x^4 - 72x^2 + 1\,296$
7. $n^8 - 36n^4 + 84n^2 - 49$
8. $x^{16} - 2x^8y^4 + y^8$
9. $16m^4 - 4m^3 - 200m^2 - 148m - 48$
10. $6\,561 - 1\,296x^{12}$
11. $x^4 - 41x^2 + 400$
12. $\frac{16}{81}x^{16} - \frac{8}{225}x^8y^{10} + \frac{1}{625}y^{20}$
13. $256x^8 - 32x^4y^4 + y^8$
14. $m^4 - m^2 - 2m - 1$
15. $x^4 - y^4$
16. $m^6 - 12m^4 + 48m^2 - 64$
17. $x^8 - 2x^4y^4 + y^8$
18. $x^4 - 10x^2 + 9$
19. $m^8 - 11m^4 - 80$
20. $n^{12} - 48n^8 + 768n^4 - 4\,096$

## CAPÍTULO 4

### EJERCICIO 39

1. $a(a + 1)$
2. $a^3b(b - 2)$
3. $a^2(a^2 + a - 1)$
4. $6x^4(3x + 5)$
5. $12x^2(4 - x - 2x^2)$
6. $5b^2(5 + 7b^2 - 9b^3)$
7. $11a(x - 11ax + 3a^2)$
8. $3ab(3a^4 - 4ab^2 + 5b - 6a^2b^3)$
9. $3(3x^2 + 2x + 1)$
10. $4x^2(x^2 - 2x + 3)$
11. $6x(x - y - 1)$
12. $14x^2(y^2 - 2x + 4x^2)$
13. $17a(2x^2 + 3ay - 4y^2)$
14. $55m^2(n^3x + 2n^3x^2 - 4y^3)$
15. $5x^2(5x^5 - 2x^3 + 3x - 1)$
16. $3a(3a - 4b + 5a^2b^2 - 8b^3)$
17. $12m^2n(1 + 2mn - 3m^2 + 4m^3n^3)$
18. $a^2b(3 + 6ab - 5a^2b^2 + 8a^3b^3 + 4a^4b^4)$
19. $8x^2y(2xy - x^2 - 3 - 5y^2)$
20. $50abc(2ab^2 - 3bc + b^2c^2 - 4c)$
21. $31a^2x(3axy - 2x^2y^2 - 4)$
22. $2x(3x - 1)^2(x + 3)$
23. $3(x + 1)(2 - x)$
24. $x(x + 2)(x - 1)$
25. $4x^2(2x - 5)(2x - 3)$
26. $(2x - 1)(3 - 2x)$

### EJERCICIO 40

1. $(m + n)(m + x)$
2. $(x^2 + 1)(3x - 1)$
3. $(x + y)(a - b)$
4. $(y - 3a)(2y^2 - 1)$
5. $(a - 2b)(m - 3n)$
6. $(a^2 - 3b)(4x - 5y)$
7. $(m^2 - 3n)(z^2 + p^2)$
8. $(5m + n^2)(mn + p^2)$
9. $(3a - 2b)(y^4 + 1)$
10. $(2m + 3n)(x^4 + 5)$
11. $(b - c)(y^2 + m^2)$
12. $(x + 3)(x^2 - 5)$
13. $(b - 3m)(3z - y)$
14. $(a^2 + 1)(a + 1)$
15. $(1 - 3a^2)(2a + 1)$
16. $(3x - 7)(x^2 + 1)$
17. $(1 - 4a)(b - 1)$
18. $(3m + 2)(6m^2 - 5)$
19. $(xz + my)(xy - mz)$
20. $(p^2t + m^2n)(pt^2 + mn^2)$

**EJERCICIO 41**

1. $(x-1)(x+1)$
2. $(x+7)(x-7)$
3. $(9-x)(x+9)$
4. $(4x-3)(4x+3)$
5. $(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$
6. $(x^2+8)(x^2-8)$
7. $4(5-2x)(5+2x)$
8. $(6x-1)(6x+1)$
9. $(2-5x)(5x+2)$
10. $(2a^2-3bc)(2a^2+3bc)$
11. $(x^3+6)(x^3-6)$
12. $(4a^2b^3+c^3)(4a^2b^3-c^3)$
13. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
14. $\left(x+\frac{2}{9}\right)\left(x-\frac{2}{9}\right)$
15. $\left(x-\frac{4}{7}\right)\left(x+\frac{4}{7}\right)$
16. $\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
17. $\left(7x-\frac{4}{5}\right)\left(7x+\frac{4}{5}\right)$
18. $\left(x^{3a}-y^{2b}\right)\left(x^{3a}+y^{2b}\right)$
19. $\left(a^{x+3}-3b^{3y}\right)\left(a^{x+3}+3b^{3y}\right)$
20. $\left(m^{2a+4}-5\right)\left(m^{2a+4}+5\right)$
21. $\left(1-x^a\right)\left(1+x^a\right)$
22. $\left(m^{3x-2y}-n^{4x+y}\right)\left(m^{3x-2y}+n^{4x+y}\right)$
23. $\left(4x^{3a}-7y^b\right)\left(4x^{3a}+7y^b\right)$
24. $(x+y-4)(x-y+2)$
25. $(2x+y+6)(2x-y-4)$
26. $(x-4y-1)(x+4y-1)$
27. $(3x-1)(9x-7)$
28. $(3x+2y)(5x+6y)$
29. $4(7x-9)(13x-6)$
30. $3x^2(3x-2)(5x+6)$

**EJERCICIO 42**

1. $(a+4)^2$
2. $(m-5)^2$
3. $(n-4)^2$
4. $(x-3)^2$
5. $(x+6)^2$
6. $(3a-5)^2$
7. $(11c-6)^2$
8. $(4a+3b)^2$
9. $(2a-5b)^2$
10. $(3a+b)^2$
11. $(2a-3b)^2$
12. $a^2(12x^2a-1)^2$
13. $(10a^2-3b)^2$
14. $(a^4+6bc)^2$
15. $(9a^6+11)^2$
16. $(7x^3-5ay^2)^2$
17. $(20a^5+1)^2$
18. $(x^4+9)^2$
19. $\left(\frac{y}{2}-z\right)^2$
20. $\left(\frac{p}{3}+1\right)^2$
21. $\left(x^2-\frac{y^2}{2}\right)^2$
22. $\left(\frac{5}{6}b^2-\frac{1}{5}\right)^2$
23. $\left(4m^3-\frac{n^2}{4}\right)^2$
24. $[3a+3x-2]^2$
25. $(2m-n+3)^2$
26. $(5a-b)^2$
27. $4n^2$
28. $(3a-b)^2$
29. $(b-m)^2$
30. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)^2$
31. $\left(\sqrt{ax}+2\right)^2$
32. $\left(a^{\frac{3}{2}}-5\right)^2$
33. $\left(x^{\frac{1}{6}}+3\right)^2$
34. $\left(4x^{\frac{1}{4}}-1\right)^2$
35. $\left(m^{\frac{1}{3}}+2\right)^2$
36. $\left(\sqrt[3]{m}-3\right)^2$

**EJERCICIO 43**

1. $(x+2)(x+1)$
2. $(m-6)(m-5)$
3. $(n-4)(n-3)$
4. $(y-8)(y-7)$
5. $(x+6)(x+1)$
6. $(x+4)(x+3)$
7. $(a+6)(a+4)$
8. $(b-5)(b-2)$
9. $(m-5)(m-4)$
10. $(y+3)(y+1)$
11. $(x-4)(x-1)$
12. $(n+4)(n+2)$
13. $(a-18)(a+2)$
14. $(y+6)(y-5)$
15. $(x-9)(x+2)$
16. $(x-10y)(x-8y)$
17. $(a-10b)(a+5b)$
18. $(m-10n)(m+3n)$
19. $(x+8y)(x-7y)$
20. $(m^2+4)(m-1)(m+1)$
21. $(y-2)(y+2)(y^2-2)$
22. $(n+4)(n-4)(n-2)(n+2)$
23. $(a-6)(a+6)(a-1)(a+1)$
24. $(x^2-10)(x^2+9)$
25. $(ab+4)(ab-3)$
26. $(5y+7)(5y+6)$
27. $(y^3-7)(y^3+2)$
28. $(m-7n)(m+3n)$
29. $(5-b)(1+b)$
30. $(z^5+5)(z^5-4)$
31. $(y^2+12x)(y^2-5x)$
32. $(a-b+8)(a-b-3)$
33. $(x^2y^2-11)(x^2y^2+9)$
34. $(m^2n^2+12)(m^2n^2-11)$
35. $(n-18)(n-16)$
36. $(y+25)(y-22)$
37. $(c-44)(c+22)$
38. $(a+21)(a+12)$
39. $(x+33)(x+11)$
40. $(t-54)(t-45)$
41. $(x+8)(3-x)$
42. $(4-x)(x+3)$
43. $(x+8)(5-x)$
44. $(7-x)(x+6)$
45. $(8-3x)(3x+2)$
46. $(2x+9)(1-2x)$
47. $(7-8x)(8x+11)$
48. $(13-5x)(5x+11)$
49. $\left(x^a-9\right)\left(x^a-4\right)$
50. $\left(b^{2x}+9\right)\left(b^{2x}-8\right)$
51. $\left(y^{3a}+64\right)\left(y^{3a}+1\right)$
52. $\left(x^{4a}+2\right)\left(1-x^a\right)\left(1+x^a\right)\left(1+x^{2a}\right)$
53. $\left(9-x^{a+2}\right)\left(x^{a+2}+5\right)$
54. $(x-7)(x-3)$
55. $2(x-9)(2x+1)$
56. $(5x+y+7)(5x+y-6)$
57. $6a(6a-5)$
58. $(x+3y+11)(2-x-3y)$
59. $4(4x+7)(1-x)$
60. $(x+3y)(4y-x)$

**EJERCICIO 44**

1. $(5m-2)(m+3)$
2. $(3a+1)(a-2)$
3. $(3y+2)(2y+1)$
4. $(2x-1)(x+2)$
5. $(4n+3)(n+3)$
6. $(4x+1)(5x-1)$
7. $(7a+5)(a-7)$
8. $(y+2)(2y+1)$
9. $(4x+1)(5x+2)$
10. $(3m+2)(5m-6)$
11. $(2z+5)(10z-3)$
12. $(b+10)(2b+9)$
13. $(2y^2+3)(3y^2-2)$
14. $(2m^2-7)(7m^2+2)$
15. $(3ab-5)(2ab+5)$
16. $(3y+b)(5y-2b)$
17. $(n-3m)(6n+5m)$
18. $(3x+5)(6-x)$
19. $(4b^2+5)(3-2b^2)$
20. $(5x-3y)(6x+7y)$
21. $(2a^4+5)(5a^4+2)$
22. $(2a-15b)(3a+b)$
23. $(3x^2-2)(-2x^2-3)$
24. $(3x^5-10)(10x^5+3)$
25. $(2m-n)(3m-4n)$
26. $(2ax-7y)(3ax+5y)$
27. $(3a-2b)(8a+7b)$
28. $(xy+2)(4xy-5)$
29. $(a^2b-3c)(5a^2b+2c)$
30. $(m+10n)(2m-11n)$

**Ejercicio 45**

1. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{1}{4}\right)$
2. $\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(2x-\frac{1}{3}\right)$
3. $\left(3x+\frac{3}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{4}\right)$
4. $\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(5m+\frac{1}{2}\right)$
5. $\left(m+\frac{1}{3}\right)\left(4m-\frac{1}{5}\right)$
6. $\left(\frac{a}{6}+\frac{1}{9}\right)\left(a+\frac{3}{4}\right)$
7. $\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}y\right)$
8. $\frac{1}{25}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(3x+\frac{5}{4}\right)$
9. $\frac{1}{24}\left(x-3y\right)\left(x-\frac{4}{3}y\right)$
10. $\left(\sqrt{x}+5\right)\left(2\sqrt{x}+3\right)$
11. $\left(3\sqrt{x}-2\right)\left(4\sqrt{x}+1\right)$
12. $\left(5\sqrt{x}+4\right)\left(3\sqrt{x}-7\right)$
13. $\left(x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$
14. $\left(2x^{\frac{1}{3}}+5\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}-8\right)$
15. $\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}-1\right)$
16. $\left(\sqrt{x+y}-2\right)\left(5\sqrt{x+y}+4\right)$
17. $\left(3x^{\frac{2}{3}}-8y^{\frac{1}{2}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}}+5y^{\frac{1}{2}}\right)$
18. $\left(2x^{\frac{2}{3}}+3y^{\frac{2}{3}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}}-5y^{\frac{2}{3}}\right)$

**Ejercicio 46**

1. $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
2. $(x+3)(x^2-3x+9)$
3. $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$
4. $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$
5. $(2a+3b^2)(4a^2-6ab^2+9b^4)$
6. $(4a-9)(16a^2+36a+81)$
7. $(8-3a^3)(64+24a^3+9a^6)$
8. $(x^2-2y^4)(x^4+2x^2y^4+4y^8)$
9. $(1-6m)(1+6m+36m^2)$
10. $(a-5)(a^2+5a+25)$
11. $(3m+4n^3)(9m^2-12mn^3+16n^6)$
12. $(7x-8y^2)(49x^2+56xy^2+64y^4)$
13. $(a^2+5b^4)(a^4-5a^2b^4+25b^8)$
14. $(2x^2+9)(4x^4-18x^2+81)$
15. $(3m^2+7n^3)(9m^4-21m^2n^3+49n^6)$
16. $\left(x^{\frac{1}{9}}+y^{\frac{1}{9}}\right)\left(x^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{9}}y^{\frac{1}{9}}+y^{\frac{2}{9}}\right)$
17. $\left(a^{\frac{1}{4}}-2b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+4b^{\frac{1}{2}}\right)$
18. $\left(x^{\frac{1}{2}}+5y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x-5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+25y^3\right)$
19. $(x^{a+1}-y^{2a})(x^{2a+2}+x^{a+1}y^{2a}+y^{4a})$
20. $(3y-x)(7x^2+3xy+3y^2)$
21. $(x+y)(x^2-4xy+7y^2)$
22. $(-2n)(27m^2+18mn+4n^2)$
23. $-(a+2b)(7a^2+19ab+13b^2)$
24. $\frac{1}{216}\left(5x-y\right)\left(7x^2+5xy+19y^2\right)$

**Ejercicio 47**

1. $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$
2. $(a-2)(a^6+2a^5+4a^4+8a^3+16a^2+32a+64)$
3. $(3-2x)(81+54x+36x^2+24x^3+16x^4)$
4. $(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
5. $(m-n)(m^4+m^3n+m^2n^2+mn^3+n^4)$
6. $(x-ab)(x^6+x^5ab+x^4a^2b^2+x^3a^3b^3+x^2a^4b^4+xa^5b^5+a^6b^6)$
7. $(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4)$
8. $(xy+5)(x^4y^4-5x^3y^3+25x^2y^2-125xy+625)$
9. $(x-1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
10. $(x+2)(x^8-2x^7+4x^6-8x^5+16x^4-32x^3+64x^2-128x+256)$

**Ejercicio 48**

1. $(m+2n+1)(m-2n+1)$
2. $(y+z-3)(y-z-3)$
3. $(x-y+5)(x+y-5)$
4. $(m^2-n^3-3)(m^2+n^3+3)$
5. $(7m^2-5m+3n)(7m^2+5m-3n)$
6. $(m+a-x-3)(m+a+x+3)$
7. $(1-a-3n)(1+a+3n)$
8. $(m-n+1)(m+n+3)$
9. $(1-y+b)(1+y-b)$
10. $(5p+m+1)(5p-m-1)$
11. $(m-n+2)(m+n+10)$
12. $(x+y+4a+3b^5)(x+y-4a-3b^5)$
13. $(10-3y+m-ap)(10-3y-m+ap)$
14. $(a+5b+m+3n)(a+5b-m-3n)$
15. $(2m-7n-3a-5b)(2m-7n+3a+5b)$

**Ejercicio 49**

1. $(x-2)(x-1)$
2. $(x-5)(x+4)$
3. $(m-5)(m-2)$
4. $(x-8)(x+6)$
5. $(a-10)(a+4)$
6. $(n+9)(n-6)$
7. $(3x+4)(x+2)$
8. $(3m+2)(2m+1)$

9. $(3a-4)(a+1)$
10. $(3x+4)(2x-3)$
11. $(n^2+n+1)(n^2-n+1)$
12. $(a^2-2a-1)(a^2+2a-1)$
13. $(m^4-2m^2n^2+4n^4)(m^4+2m^2n^2+4n^4)$
14. $(x^2+5x-10)(x^2-5x-10)$
15. $(8a^2-6a+7)(8a^2+6a+7)$
16. $(a^2b^2-ab+11)(a^2b^2+ab+11)$
17. $(6m^2-5mn-7n^2)(6m^2+5mn-7n^2)$
18. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
19. $(a^2-ab-3b^2)(a^2+ab-3b^2)$
20. $(2m^4+5m^2n^2-7n^4)(2m^4-5m^2n^2-7n^4)$

### EJERCICIO 50

1. $x(x-7)(x+4)$
2. $3(a-2)(a+1)$
3. $3m(m-1)(m+1)$
4. $(y^2+1)(y-2)(y+2)$
5. $(m-1)^2(m+1)$
6. $a(2x+1)(3x-2)$
7. $x(x^2+1)(x-1)$
8. $2a(2x+1)(2x-1)$
9. $a(a^2+2)(a-1)(a+1)$
10. $(2+m)(2-m)(4-2m+m^2)(4+2m+m^2)$
11. $(x-4)(x-3)(x+4)(x+3)$
12. $(a-b)(a^2-ab+b^2)(a+b)^2$
13. $a(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
14. $a(x+1)^3$
15. $(a^3+2)(a^2+3a+9)(a-3)$
16. $(a+1)(a-1)(a^2-a+1)$
17. $4m^2(y-1)(y^2+y+1)$
18. $3mn(p-2)(p+3)$
19. $(4+a)(4-a)(16+a^2)$
20. $(a-b)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)$
21. $2(2x+1)(2x-1)(x^2+1)$
22. $5m(xy+2)(y-1)(y+1)$
23. $(a+3)(a-3)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$
24. $x(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
25. $(a-1)^2(a-b)(a+b)$
26. $4a(a^2-a+1)(a^2+a+1)$
27. $(m-1)(m+2)(m-2)$
28. $y(y+2)(y+6)(y-2)(y-6)$
29. $m(m^2+1)(m-1)(m+1)$
30. $-m(3m-y)^2$

### EJERCICIO 51

1. $(b-1)^2(b+1)$
2. $(w-1)(w+1)(w+2)$
3. $(x-3)(x-2)(x+1)$
4. $(x-4)(x+2)(x+3)$
5. $(x-1)(2x-1)(2x+3)$
6. $(m+2)(m^2+1)$
7. $(y+1)(3y+2)(2y-3)$
8. $(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)$
9. $(x-4)(x+5)(3x+1)$
10. $(m+5)(m+4)(m^2-3m+7)$
11. $(n-2)^2(n+1)^2$
12. $(x-2)^2(x+1)(x-1)$
13. $(x-1)^2(x+2)(x-3)$
14. $(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)^2$
15. $(a-6)(a+2)(a+5)(a^2-a+3)$
16. $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)(2x-1)$
17. $(x-3)(x-2)(x-1)(x^2+2x+4)$
18. $(x-2)(x-1)(x+3)(2x-1)(3x+5)$
19. $(n-3)(n+3)(n-2)(n+2)(n-1)(n+1)$
20. $(x-5)(x-1)(x+1)(2x+7)(x^2+1)$

## CAPÍTULO 5

### EJERCICIO 52

| | MCD | mcm |
|---|---|---|
| 1. | $7x^2y^3z^2$ | $210x^2y^5z^4$ |
| 2. | $24m^2y^2$ | $1\,440m^4y^5$ |
| 3. | $2xy$ | $40x^3y^3z^2$ |
| 4. | $13abc$ | $156\,a^2b^2c^2$ |
| 5. | $15mn^x$ | $2\,100m^4n^{x+2}$ |
| 6. | $11x^a\,y^b$ | $132x^{a+2}\,y^{b+2}$ |
| 7. | $6a^2(x-1)^2$ | $360\,a^5(x-1)^4$ |
| 8. | $9(a-b)(x+y)$ | $135(a-b)^2(x+y)^2$ |
| 9. | $6$ | $360(2x+1)^2(x-7)(x+8)^2$ |
| 10. | $19a(1+b)$ | $228\,a^4(1+b)^3$ |
| 11. | $x+1$ | $xy(x+1)$ |
| 12. | $m-1$ | $(m-1)(m+1)(m^2+m+1)$ |
| 13. | $m+n$ | $m^2n(m+n)$ |
| 14. | $x-y$ | $(x-y)^2(x+y)$ |
| 15. | $x-2$ | $3xy(x-2)(x+2)(x+1)$ |
| 16. | $3a-1$ | $a(3a-1)^2(9a^2+3a+1)$ |
| 17. | $m-4$ | $m(m-4)(m+3)(m+2)(m-5)$ |
| 18. | $a(a-1)$ | $12a^2(a-1)$ |
| 19. | $2b+1$ | $(2b+1)(6b+1)(b-3)$ |
| 20. | $y-3$ | $(y-3)(y+2)(y-1)(2y+1)(2y+3)$ |

### EJERCICIO 53

1. $\frac{2a+2b}{3ab}$
2. $\frac{2a^2b}{a-2b}$
3. $\frac{a+3}{2a}$
4. $\frac{2m^2-6m-8}{5-3m}$
5. $-\frac{m^2n}{n+m}$
6. $\frac{2}{x+2}$
7. $-\frac{x+2y}{x+y}$
8. $\frac{x+13}{x+6}$
9. $\frac{n-2}{n+1}$
10. $\frac{2x+3y}{3x+y}$
11. $\frac{x(2y-x)}{5x+y}$
12. $\frac{3x+4y}{x-3y}$
13. $\frac{b(m-n)}{m+n}$
14. $-\frac{x^2+2x+4}{x+4}$
15. $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$
16. $\frac{y^2+3xy+9x^2}{y+2x}$
17. $\frac{x-1}{x-2}$
18. $\frac{x-y}{x+2y}$
19. $\frac{1}{x+y}$
20. $\frac{a-d}{2ab}$
21. $\frac{y-2}{3a+2}$
22. $\frac{3x}{w-z}$
23. $\frac{w+2}{y-x}$
24. $\frac{p+1}{2-p}$
25. $-1$
26. $\frac{x+1}{x+3}$
27. $\frac{x-1}{x-4}$
28. $\frac{y-2}{y+2}$
29. $\frac{4-y}{y(y+1)}$
30. $\frac{(2-a)(a+4)}{a-3}$

**EJERCICIO 54**

1. $\frac{4x-3}{4x}$ 3. $\frac{3n-1}{2n}$ 5. $\frac{4}{n}$ 7. $\frac{x^2+1}{2x}$ 9. 1

2. $\frac{a^2-6}{a}$ 4. $\frac{19m-9}{4n}$ 6. $\frac{3y-5}{2y}$ 8. 5

**EJERCICIO 55**

1. $\frac{7}{20}$
2. $\frac{7x+9}{6x}$
3. $\frac{3x^2-7x-8}{18x^2}$
4. $\frac{4x^2+7x-18}{12x^2}$
5. $-\frac{h}{(x+h+2)(x+2)}$
6. $-\frac{2h}{(x+h-1)(x-1)}$
7. $-\frac{4xh+2h^2}{\left((x+h)^2-3\right)(x^2-3)}$
8. $\frac{2xh+h^2}{\left((x+h)^2+1\right)(x^2+1)}$
9. $\frac{x}{x-3}$
10. $\frac{3x}{x^2-1}$
11. $\frac{x}{x-2}$
12. $\frac{5x+1}{(x^2-1)(x-1)}$
13. $\frac{7x^2-20x+3}{(x^2-9)(x+3)}$
14. $\frac{5x^2-12x}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$
15. $\frac{9x^5+12x^3}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$
16. $-\frac{14x}{(3x^2+2)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}$
17. $\frac{2x^3-24x}{3(5-x^2)^{\frac{2}{3}}(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$
18. $\frac{8x^2}{(16x^4-9x^2)^{\frac{2}{3}}}$
19. $\frac{x^2-3x-40}{(x+4)(x+8)(x-3)}$
20. $\frac{2x^3+2x^2-5x+34}{(x+3)(x-2)(x+4)}$
21. $\frac{4}{x+4}$
22. $\frac{4}{2x+5}$
23. $\frac{3m}{m^2-mn+n^2}$
24. $\frac{2x^2+27xy-5y^2}{(x+5y)(x-2y)(x-y)}$
25. $\frac{5a}{18(a+b)}$
26. $\frac{rs}{r^2-s^2}$

**EJERCICIO 56**

1. $\frac{8}{7ab^2x^2}$
2. $\frac{3}{y}$
3. $\frac{y^2}{8bx}$
4. $\frac{16ax}{3b^2}$
5. $\frac{b}{4xy}$
6. $\frac{m+1}{4}$
7. $\frac{b(b-3)}{b-6}$
8. 1
9. $\frac{x}{6}$
10. $\frac{7}{2}$
11. $\frac{5}{2x}$
12. $\frac{x+3}{x-5}$
13. $-\frac{x+6}{x+5}$
14. $\frac{4x+3}{3x+4}$
15. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-9x+18}$
16. $\frac{x+6}{4x+1}$
17. $\frac{x(x+3)}{2x+1}$
18. $\frac{x-3}{a-1}$
19. $2\left(\frac{x-5}{x-3}\right)$
20. $\frac{n+4}{n-4}$

**EJERCICIO 57**

1. $\frac{3y}{4x^2}$
2. $\frac{a^2b^4}{x^4}$
3. $\frac{3}{x^2(2x+3)^2}$
4. $6x^3(2x^3+1)^{\frac{1}{3}}$
5. $\frac{4(x+y)}{3}$
6. $\frac{x^2+1}{x^2}$
7. $\frac{x-9}{x+9}$
8. $\frac{x+1}{x-1}$
9. $\frac{x^2-6x+5}{x^2+x-12}$
10. $\frac{x^2-11x+30}{3x^2-14x+8}$
11. $\frac{2x-1}{2x-5}$
12. $\frac{x+4}{x}$
13. $\frac{1}{2x-1}$
14. $\frac{x+11}{x^2-7x}$
15. $\frac{x^2-2x-35}{x^2-8x}$
16. $\frac{1}{a+3}$
17. $\frac{5x+1}{2x^2+3x}$
18. $\frac{b}{a+b}$
19. $\frac{x^2+6x+8}{x^2+6x+9}$
20. $\frac{n}{n^2+2}$
21. $\frac{a^2+ab}{a-b}$
22. $\frac{x^2-1}{x^3+2}$

**EJERCICIO 58**

1. $\frac{1}{x-7}$
2. $\frac{a+1}{a^2+a+1}$
3. $\frac{a+1}{a-1}$
4. $\frac{t+1}{t}$
5. $\frac{2(x-4)}{3(x+3)}$
6. $\frac{x}{6x^2-7x+2}$
7. $\frac{6x^2+9}{2x^2-x-3}$
8. $\frac{x-3}{x-10}$
9. $\frac{(2x-3)^2}{x(2x+3)}$
10. $\frac{(x-5)^2(x+3)^2}{(x-2)^2(x-1)^2}$
11. $\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+3)}$
12. $\frac{2x^2-x-25}{x^2-25}$

**EJERCICIO 59**

1. $\frac{x}{x+1}$
2. $\frac{n-1}{2n-1}$
3. $\frac{y}{2y-3}$
4. $\frac{m+3}{m-5}$

5. $y^2 + y + 1$

6. $\frac{b+a}{b-a}$

7. $x$

8. $\frac{n-3}{n^2+4n}$

9. $\frac{a-4b}{a-3b}$

10. $\frac{1}{y(y-x)}$

11. $ab - b^2$

12. $a - 2b$

13. $\frac{x+2}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$

14. $\frac{x^3-10x}{(x^2-5)^{\frac{3}{2}}}$

15. $\frac{-2}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}(3x-1)^{\frac{4}{3}}}$

16. $\frac{1-5x^2}{3x^{\frac{2}{3}}(5x^2+1)^{\frac{4}{3}}}$

## Capítulo 6

### Ejercicio 60

1. $x = 3$
2. $y = 10$
3. $z = -1$
4. $x = -2$
5. $x = 4$
6. $y = 3$
7. $x = \frac{8}{3}$
8. $x = -\frac{4}{5}$
9. $w = -2$
10. $z = -\frac{11}{7}$
11. $x = 5$
12. $x = 2$
13. $y = -3$
14. $z = -8$
15. $w = -14$
16. $x = -\frac{1}{2}$
17. $x = \frac{1}{2}$
18. $y = -2$
19. $x = 6$
20. $x = \frac{11}{10}$
21. $y = -3$
22. $x = 14$
23. $x = \frac{11}{23}$
24. $z = 3$
25. $y = -\frac{9}{13}$
26. $x = \frac{1}{3}$
27. $z = \frac{23}{17}$
28. $y = \frac{17}{21}$
29. $x = -\frac{13}{21}$
30. $z = \frac{1}{19}$
31. $x = -4$
32. $x = 3$
33. $x = -2$
34. $x = -\frac{2}{3}$
35. $w = -1$
36. $z = \frac{7}{20}$
37. No tiene solución
38. Todos los reales
39. Todos los reales
40. No tiene solución

### Ejercicio 61

1. $x = 3$
2. $x = \frac{21}{11}$
3. $x = -\frac{9}{2}$
4. $x = \frac{23}{8}$
5. $x = \frac{41}{32}$
6. $w = -\frac{3}{7}$
7. $y = -5$
8. $y = 2$
9. $y = 1$
10. $w = 19$
11. $x = \frac{1}{5}$
12. $x = \frac{1}{2}$
13. $x = -\frac{7}{3}$
14. $x = -\frac{1}{9}$
15. $x = \frac{4}{3}$
16. $x = -1$
17. $x = \frac{20}{7}$
18. $x = 0$
19. $x = \frac{2}{3}$
20. $x = -\frac{155}{8}$

### Ejercicio 62

1. $x = 18$
2. $x = \frac{4}{5}$
3. $x = -\frac{9}{4}$
4. $x = -6$
5. $x = -\frac{9}{2}$
6. $x = \frac{5}{8}$
7. $x = -\frac{8}{5}$
8. $x = 6$
9. $x = 8$
10. $x = \frac{10}{3}$
11. $x = -8$
12. $x = \frac{27}{11}$
13. $x = \frac{25}{13}$
14. $x = \frac{1}{3}$
15. $z = \frac{6}{5}$
16. $x = \frac{46}{51}$
17. $z = -\frac{1}{23}$
18. $x = \frac{3}{7}$
19. $x = -\frac{5}{4}$
20. $x = -\frac{7}{11}$
21. $x = \frac{9}{11}$
22. $x = -\frac{14}{31}$
23. $x = -\frac{7}{12}$
24. $y = 2$
25. $x = 1$
26. $x = 35$
27. $x = \frac{8}{5}$
28. $z = -\frac{28}{3}$
29. $x = \frac{1}{9}$
30. $x = -\frac{1}{2}$
31. $z = \frac{28}{3}$
32. $y = 6$

### Ejercicio 63

1. $x = 7, x = -9$
2. $y = -1, y = 4$
3. $m = \frac{4}{3}, m = -4$
4. $x = 3, x = -\frac{13}{5}$
5. $y = 0, y = 4$
6. $m = -3, m = -2$
7. $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{5}{2}$
8. $m = 1$
9. $x = -\frac{4}{7}, x = 0$
10. $x = 7, x = 1$
11. $x = -\frac{5}{3}, x = -\frac{7}{3}$
12. $x = 18, x = -2$
13. $x = -\frac{1}{5}, x = \frac{9}{7}$
14. $x = -4, x = 5$
15. $x = -\frac{4}{5}, x = \frac{4}{11}$
16. $x = \frac{3}{2}$
17. $x = 4, x = \frac{2}{3}$
18. $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$
19. $x = \frac{2}{5}, x = 2$
20. $x = \frac{59}{8}, x = \frac{53}{8}$
21. $x = -9, x = 3$

### Ejercicio 64

1. $x = a$
2. $y = \frac{a+1}{2}$
3. $x = b - a$
4. $y = \frac{b+1}{a+1}$
5. $x = \frac{mn}{n+m}$
6. $x = m + n$
7. $x = b - a$
8. $y = m$
9. $z = 2m$
10. $z = 0$

### EJERCICIO 65

1. 103,104,105
2. 234 y 217
3. 90,92, 94
4. 13, 15 17
5. 68 y 32
6. 28 y 70
7. 18 y 12
8. 12 y 8
9. 80
10. 12
11. 7 y 3
12. 6 y 5
13. 8
14. 24 y 12
15. 30 y 10
16. 20, 15 y 10
17. 55 y 5
18. 15 y 8
19. 14 y 6
20. 32 y 24
21. 35
22. 64
23. 15
24. 45
25. 72
26. 38
27. 54
28. 24
29. 97
30. 96
31. 124
32. 264
33. 436

### EJERCICIO 66

1. Andrés: 35 años, Carlos: 31 años, Rodolfo: 24 años
2. 24 años
3. Luz: 11 años, María: 14 años, Tania: 17 años
4. Dentro de 6 años
5. Carlos: 30 años, Mauricio: 10 años
6. Bárbara: 8 años, Patricia 16 años
7. 7 años
8. Omar: 16 años, Alejandra: 36 años
9. 8 años
10. 20 años
11. Guillermo: 48 años, Patricia: 36 años
12. Joaquín: 10 años, Julián: 20 años, Camilo: 30 años
13. Antonio: 25 años, Ivan: 15 años
14. 18 años
15. Juan Carlos: 15 años, Daniel 20 años

### EJERCICIO 67

1. 48 litros
2. 40 litros
3. 40 gramos
4. 180 litros
5. 10 litros
6. 0.6 litros
7. 6 onzas
8. 10 litros
9. 25 ml al 4%, 50 ml al 1%
10. 50 ml al 5%, 50 ml al 2%
11. 10 litros al 30%, 20 litros al 3%
12. 60 onzas al 30%, 90 onzas al 80%
13. 1 000 litros al 56%, 1 400 litros al 80%
14. 92% y 62%

### EJERCICIO 68

1. 180 monedas
2. 7 de $500, 5 de $1 000, 4 de $200
3. 20 de $5, 10 de $10
4. 100 de 50¢, 300 de $1
5. 6 monedas
6. 8 de $200, 7 de $100, 6 de $50
7. 12 de $10, 36 de $5, 46 de $2
8. 30 monedas
9. 6 de $5, 12 de $2
10. 60 monedas
11. 8 billetes

### EJERCICIO 69

1. $600
2. chamarra: $800
   pantalón: $400
   blusa: $120
3. $3 600
4. 185 000, 80 000, 167 000
5. $200
6. escritorio: $2 500
   computadora: $12 600
7. 10 problemas correctos
8. $5 200
9. $360
10. 20 horas extras
11. 20 kg de $9.30
    10 kg de $12
12. 4 de adulto y 2 de niño
13. 8 000 de $60 y 4 000 de $80
14. 4 kg de $100
    8 kg de $70
    8 kg de $105

### EJERCICIO 70

1. 1 hora 12 minutos
2. 2 horas 24 minutos
3. 16 horas
4. 2 horas 40 minutos
5. $1\frac{11}{13}$ horas
6. 3 horas
7. 4 horas
8. $25\frac{5}{7}$ minutos
9. $7\frac{11}{12}$ horas
10. 16 horas 30 minutos

### Ejercicio 71

1. 36 segundos
2. 25 segundos
3. 10 minutos
4. 12:18 pm
5. 108 metros
6. 16 segundos
7. 1.5 km
8. 14:34 pm
9. 8:37 am
10. 20:36 pm

### Ejercicio 72

1. 62°
2. 45°
3. ancho: 12 cm, largo: 36 cm
4. ancho: 24 metros, largo: 58 metros
5. ancho: 4 metros, largo: 36 metros
6. 6, 7 y 10 metros
7. 8 cm
8. 10 y 4 cm
9. radio: $\frac{15}{\pi}$, largo: 11.25 cm
10. 6 metros
11. ancho: 9 metros, largo: 18 metros
12. ancho: 6 metros, largo: 23 metros
13. radio: 15 metros
14. ancho: 3 unidades, largo: 8 unidades
15. base: 6 unidades, altura: 4 unidades
16. $h=\frac{64-3\pi}{8}$
17. 12 unidades
18. ancho: 60 cm, largo: 160 cm

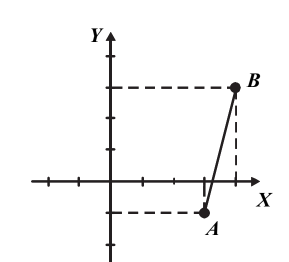
### Ejercicio 73

1. $n=\frac{P\ v}{r\ t}$
2. $\ell=\frac{P-2\omega}{2}$
3. $m=\frac{y-b}{x}$
4. $r=\frac{a\,\square\,s}{\ell\,\square\,s}$
5. $F=\frac{9}{5}C+32$
6. $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$
7. $b=\frac{2A}{h}-B$
8. $x_2=\frac{y_2-y_1+mx_1}{m}$
9. $h=x\pm\sqrt{r^2-(y-k)^2}$
10. $F=\frac{B^2+C^2-4A^2r^2}{4A}$
11. $d=\frac{u-a}{n\ -1}$
12. $r=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$
13. $P_0=\frac{P}{e^{kt}}$
14. $V_0=\sqrt{{V_f}^2-2ad}$
15. $m=\frac{Fr^2}{\text{GM}}$
16. $i=\sqrt[t]{\frac{M}{C}}-1$
17. $m_1=\frac{m_2-tg\alpha}{1+\text{m}_2\text{tg}\alpha}$
18. $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4a(y-c)}}{2a}$
19. $p'=\frac{pf}{f\ -\ p}$
20. $t=\frac{-v\pm\sqrt{2da+v^2}}{a}$

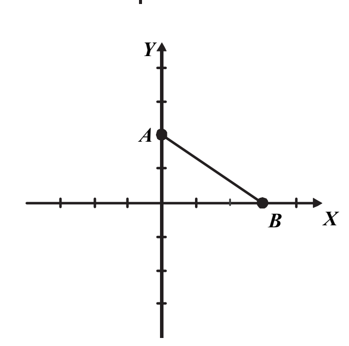
## Capítulo 7

### Ejercicio 74

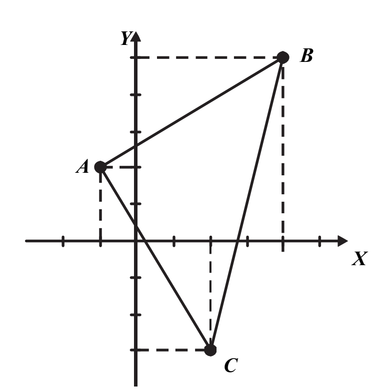
1.



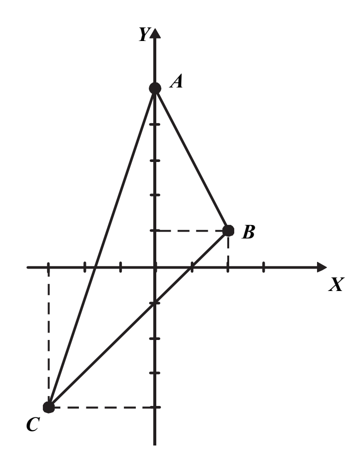

2.



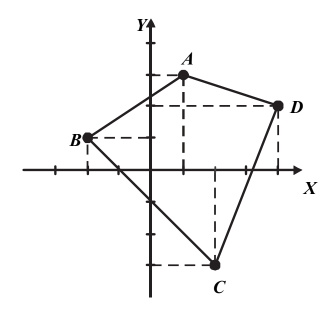

3.




4.



5.

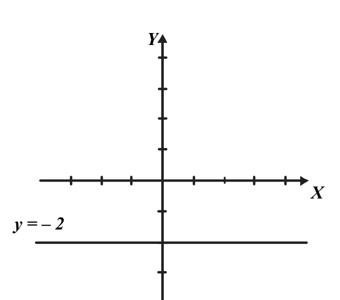



## EJERCICIO 75

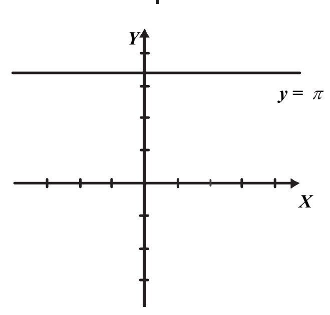
1. $m = 1$
2. $m = -12$
3. $m = \frac{8}{9}$
4. $m = -\frac{22}{27}$
5. $m = \frac{5}{14}$

## EJERCICIO 76

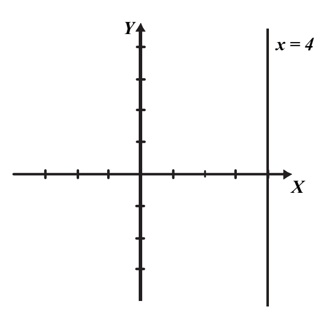
1.



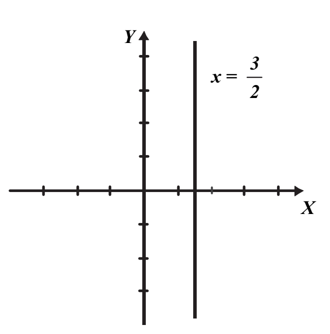

2.



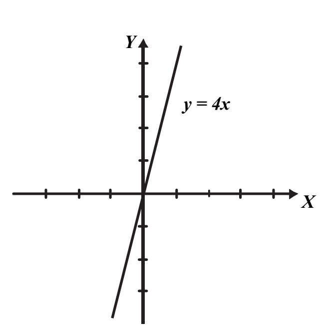

3.



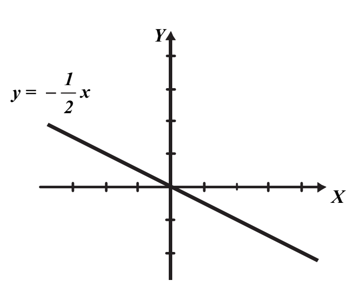

4.



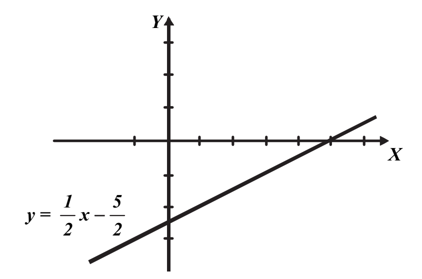

5.




6.

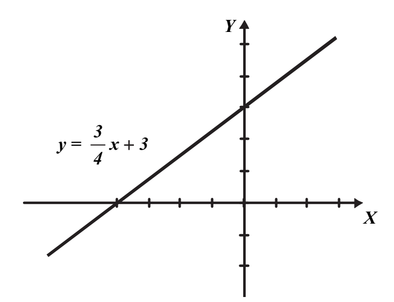



7.

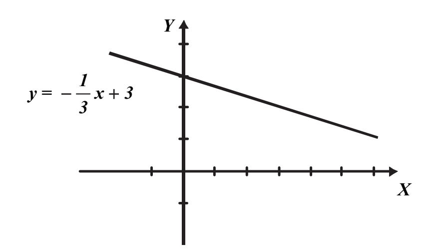



8.

9.

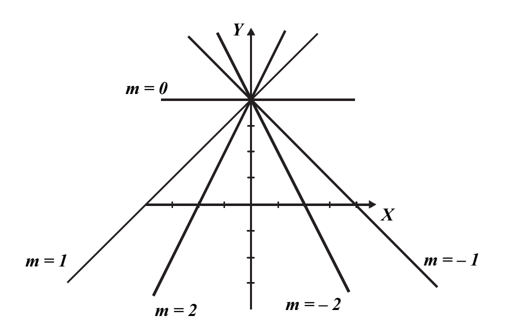



10.

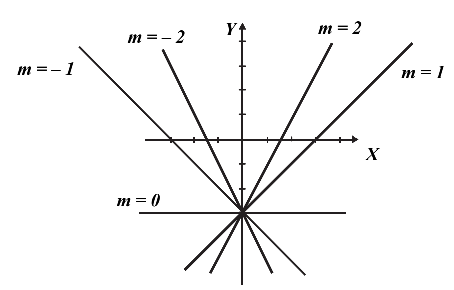



**EJERCICIO 77**

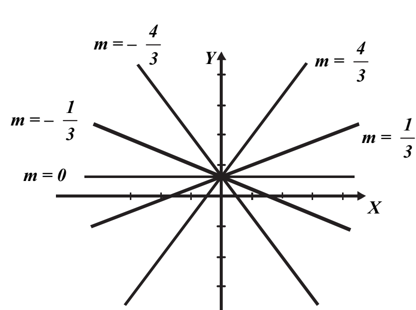
1.



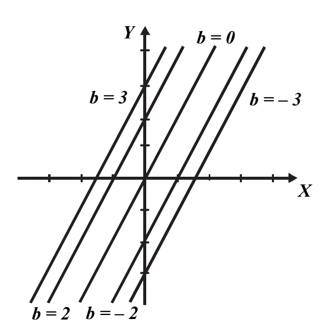

2.



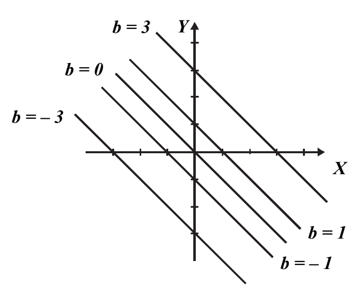

3.



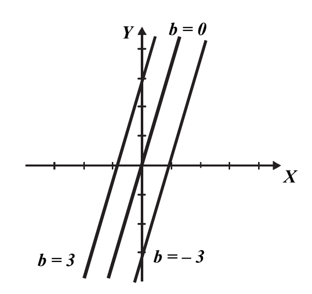

4.




5.




6.




**EJERCICIO 78**

1. $S = 40t$

2. a) $P = \frac{7}{3}t + 3.5$
   b) $P = 24.5$ kg
   c) $t = 10$ años 6 meses

3. $C = \frac{19}{30}T + \frac{1681}{3}$

4. a) $G = \frac{11}{20}I + 1\,800$
   b) $U = \frac{9}{20}I - 1\,800$
   c) $R = \$4\,000$

5. a) C = F = – 40º
   b) C = 160º y F = 320º

## CAPÍTULO 8

**EJERCICIO 79**

1. $(2,-3),(7,0)$ son solución

2. $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ es solución

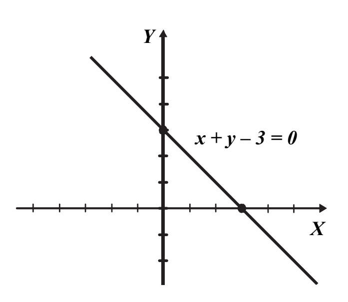
3. $(3,-4)$, $(-3,-12)$ son solución

4. $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ es solución

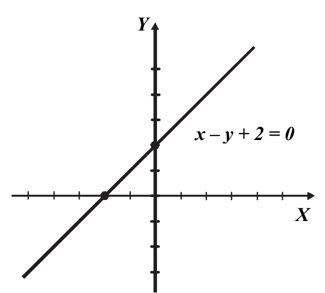
5. $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right)$ es solución

**EJERCICIO 80**

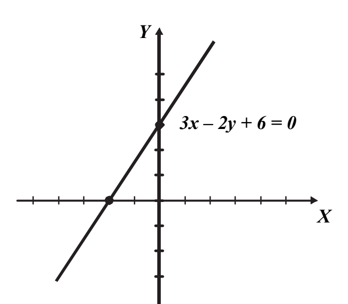
1.



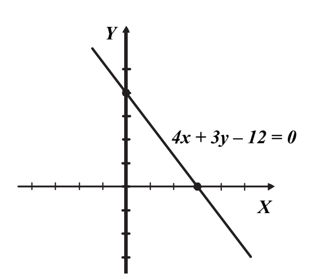

2.



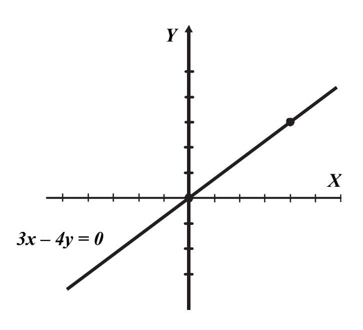

3.



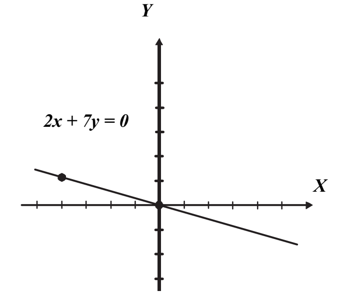

4.



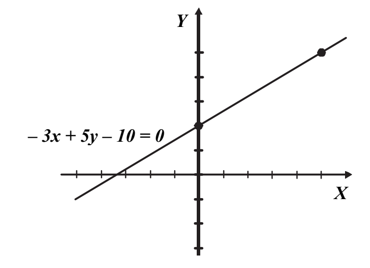

5.



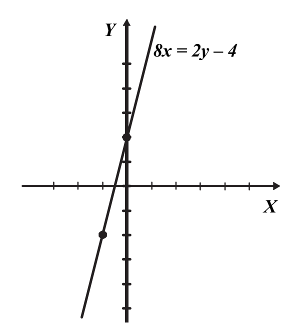

6.



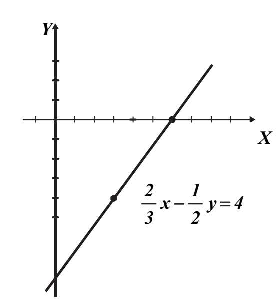

7.



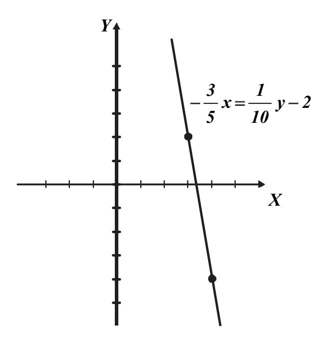

8.




9.

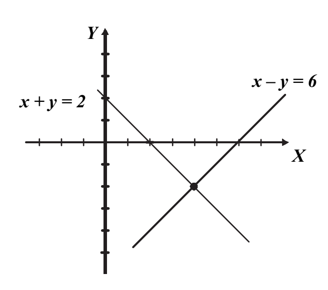



10.

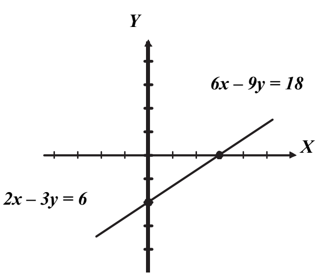


## Ejercicio 81

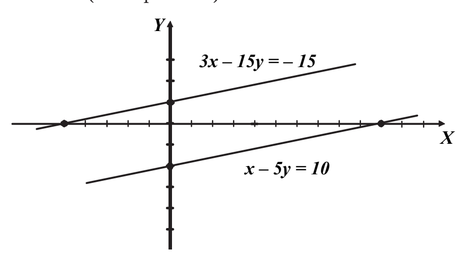
1. $(4,-2)$



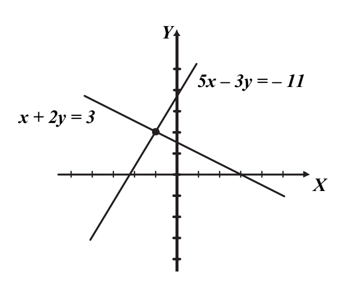

2. Conjunto infinito de soluciones (rectas coincidentes)



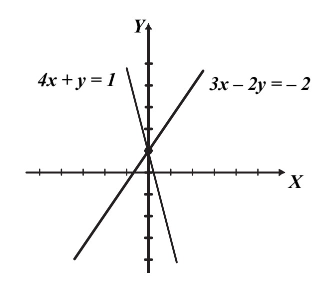

3. Conjunto vacío (rectas paralelas)



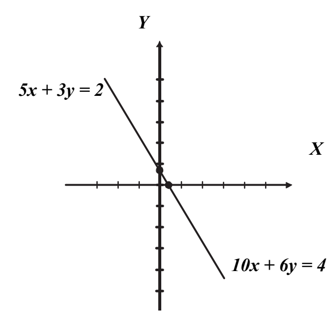

4. $(-1,2)$



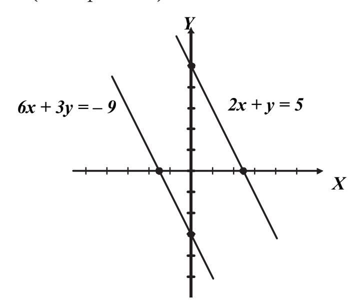

5. $(0,1)$



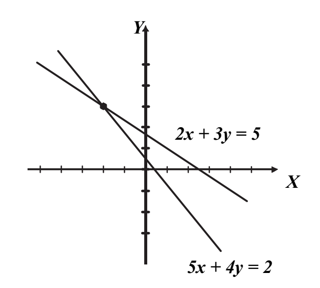

6. Conjunto infinito de soluciones (rectas coincidentes)




7. Conjunto vacío (rectas paralelas)




8. $(-2,3)$




## Ejercicio 82

1. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} m=-1 \\ n=4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} u=\frac{2}{3} \\ v=\frac{1}{4} \end{cases}$

10. Conjunto infinito de soluciones

11. No hay solución

12. No hay solución

## Ejercicio 83

1. $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} m=-3 \\ n=-4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} r=-1 \\ t=1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} p=\frac{3}{2} \\ q=\frac{4}{3} \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=8 \\ y=-2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} p=-4 \\ q=0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x=12 \\ y=9 \end{cases}$
9. Conjunto infinito de soluciones
10. No hay solución
11. Conjunto infinito de soluciones
12. No hay solución

## Ejercicio 84

1. $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} m=\frac{3}{2} \\ n=\frac{1}{2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} p=-1 \\ q=1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$
8. $\begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ n=\frac{1}{5} \end{cases}$
9. $\begin{cases} u=\frac{5}{6} \\ v=-\frac{2}{3} \end{cases}$
10. Conjunto infinito de soluciones
11. No hay solución
12. No hay solución

## Ejercicio 85

1. 23
2. 62
3. 0
4. 39
5. $\frac{9}{4}$
6. $\frac{73}{30}$
7. $2ab-a^2$
8. $n^2-3mn$
9. $-\frac{7}{9}$
10. $\frac{a+b}{a}$
11. $\frac{x-2}{x+5}$

## Ejercicio 86

1. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} m=-2 \\ n=-3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=-7 \\ y=-1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} p=2 \\ q=3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{7}{2} \end{cases}$
7. $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} m=\frac{9}{5} \\ n=-\frac{1}{3} \end{cases}$
9. Conjunto infinito de soluciones
10. No hay solución
11. No hay solución
12. Conjunto infinito de soluciones

## Ejercicio 87

1. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} m=-2 \\ n=-2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} m=3 \\ n=5 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$
12. $\begin{cases} p=5 \\ q=-1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x=3 \\ y=-7 \end{cases}$
15. $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$
16. $\begin{cases} m=\frac{1}{3} \\ n=\frac{1}{2} \end{cases}$
17. $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$
18. $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$
19. $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$
20. $\begin{cases} x=\frac{1}{10} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases}$
21. $\begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases}$
22. $\begin{cases} x=a^2 \\ y=b^2 \end{cases}$
23. $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$
24. $\begin{cases} x=\sqrt{a} \\ y=\sqrt{b} \end{cases}$

## Ejercicio 88

1. $\begin{cases} 180 \\ 45 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 140° \\ 40° \end{cases}$
3. $\begin{cases} 80 \\ 50 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} \end{cases}$
5. $\begin{cases} \text{\$80 por adulto} \\ \text{\$50 por niño} \end{cases}$
6. 5 monedas de $10
7. $\begin{cases} \text{Lados iguales} = 19 \text{ cm} \\ \text{Base} = 10 \text{ cm} \end{cases}$
8. $\begin{cases} \text{Agenda} = \$750 \\ \text{Traductor} = \$550 \end{cases}$
9. $\begin{cases} \text{Hermano} = 15 \text{ años} \\ \text{Antonio} = 5 \text{ años} \end{cases}$
10. $\begin{cases} 73 \\ 65 \end{cases}$
11. $\begin{cases} \text{Carlos tenía \$300} \\ \text{Gabriel tenía \$200} \end{cases}$
12. $\begin{cases} \text{Primera parte} = 350 \\ \text{Segunda parte} = 200 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 14 \\ 70 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 7 \\ 45 \end{cases}$
15. $\begin{cases} \text{Alejandra tiene} = \$120 \\ \text{Beatriz tiene} = \$50 \end{cases}$
16. Lancha: 10 km/h
Corriente: 1 km/h
17. $\begin{cases} \text{25 gallinas} \\ \text{19 borregos} \end{cases}$
18. $\begin{cases} \text{Gallinas} = \$30 \\ \text{Borregos} = \$300 \end{cases}$
19. $\begin{cases} \text{Álgebra L.} = \$120 \\ \text{Geometría A.} = \$90 \end{cases}$
20. $\begin{cases} \text{12.5 lt de la de 30\%} \\ \text{37.5 lt de la de 6\%} \end{cases}$
21. $\begin{cases} \text{Veracruz} = 0.75 \text{ kg} \\ \text{Chiapas} = 0.25 \text{ kg} \end{cases}$

## Ejercicio 89

1. $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} d=6 \\ e=-2 \\ f=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{5} \\ z=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} m=-3 \\ n=-2 \\ r=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \\ z=4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} m=7 \\ n=3 \\ r=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$

## Ejercicio 90

1. $\begin{cases} \text{Paleta}=\$2 \\ \text{Helado}=\$4 \\ \text{Dulce}=\$1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{Camisa}=\$300 \\ \text{Pantalón}=\$500 \\ \text{Playera}=\$400 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{Pares de calcetas}=\$50 \\ \text{Pantalón}=\$550 \\ \text{Playera}=\$120 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \text{Centenas}=8 \\ \text{Decenas}=6 \\ \text{Unidades}=2 \\ \text{Número}=862 \end{cases}$

## Ejercicio 91

1. $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}$
2. $\frac{7}{3x-7}+\frac{5}{2x-3}$
3. $\frac{1}{5x-4}-\frac{1}{5x+4}$
4. $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-5}$
5. $-\frac{3}{x-7}-\frac{1}{x-4}$
6. $\frac{8}{2x-1}-\frac{6}{2x+1}$
7. $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+2}$
8. $\frac{3}{2x+5}-\frac{2}{3x-1}$
9. $\frac{3}{4-x}-\frac{2}{x+3}$
10. $\frac{1}{2x+7}+\frac{5}{x-2}$
11. $\frac{1}{3x-2}-\frac{3}{(3x-2)^2}$
12. $\frac{2}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-3}$
13. $\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}$
14. $\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{(x-2)^2}$
15. $\frac{5}{x}+\frac{4}{2x-1}+\frac{1}{x-3}$
16. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x+2}$
17. $\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{3x-2}-\frac{5}{x}$
18. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-2}$
19. $\frac{2}{x+1}-\frac{6}{2x+1}+\frac{3}{x-2}$
20. $\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^3}$
21. $\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}$
22. $\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}$

## Ejercicio 92

1. $\frac{3}{x}+\frac{x+1}{x^2-3}$
2. $\frac{1}{x+1}+\frac{x-2}{3x^2+1}$
3. $\frac{1}{x-2}+\frac{x-1}{x^2+1}$
4. $\frac{2}{x^2+5}-\frac{1}{x^2-7}$
5. $\frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+x+1}$
6. $\frac{x+1}{x^2+5}-\frac{7x}{x^2+3}$
7. $\frac{1}{x}-\frac{x+3}{x^2-2}+\frac{x+1}{x^2+3}$
8. $\frac{5}{x-3}+\frac{1}{x^2-2x-1}$
9. $\frac{x-3}{2x^2-7}+\frac{5x-1}{x^2+5}$
10. $\frac{x-2}{x^2+5x-3}-\frac{8}{x}$
11. $\frac{3x-1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{2x-4}$

12. $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{\left(x^2-3\right)^2}+\frac{1}{x^2-3}$

13. $\frac{x}{x^2+x-1}+\frac{2x+1}{\left(x^2+x-1\right)^2}$

14. $\frac{x-3}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{5}{x^2+1}$

15. $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{\left(x^2-2\right)^2}-\frac{1}{x^2-2}$

16. $\frac{x+1}{x^2+3x+4}-\frac{1}{\left(x^2+3x+4\right)^2}+\frac{1}{x}$

17. $\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{x^2+1}$

18. $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}$

19. $\frac{1}{\left(x^2-2\right)^2}+\frac{3x+1}{x^2-2}-\frac{1}{x^2+1}$

20. $\frac{5x+17}{3\left(x^2-x+1\right)^2}+\frac{14-34x}{9\left(x^2-x+1\right)}+\frac{16}{9\left(x+1\right)}+\frac{4}{x-1}$

## Capítulo 9

### Ejercicio 93

1. $27x^6$
2. $16x^2y^2$
3. $\frac{16}{625}a^{16}$
4. $-216x^6y^9$
5. $-32a^{30}$
6. $\frac{49}{16}m^{-4}$
7. $\frac{32a^5}{b^5}$
8. $16a^4x^4$
9. $-15y^3$
10. $xy^7$
11. $x$
12. $-mn$
13. $a^8$
14. $\frac{9}{m^6}$
15. $\frac{3a^2}{b}$
16. $\frac{m^5}{n^3}$
17. $\frac{3}{17a^4b}$
18. $\frac{x^4}{y}$
19. $-\frac{1}{243}m^{10}$
20. $16x^4$
21. $-9$
22. $2$
23. $\frac{5}{x^3}$
24. $-\frac{1}{36x^2}$
25. $\frac{a^3}{b^2}$
26. $\frac{1}{b^{12}}$
27. $\frac{1}{z^3}$
28. $(x+2y)^6$
29. $108a^9$
30. $\frac{y^9}{12x^4}$
31. $-\frac{2}{x^9}$
32. $1$
33. $a^2b^2$
34. $72a^{13}$

### Ejercicio 94

1. $x^9y^8z^6$
2. $\frac{y}{x^{\frac{3}{4}}}$
3. $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$
4. $\frac{1}{4z^4}$
5. $\frac{2x^2}{y^4}$
6. $c$
7. $6x^2y^5$
8. $16ab^2$
9. $\frac{y^{12}}{4x^{10}z^{14}}$
10. $1$
11. $\left(x+3y\right)^{\frac{7}{6}}$
12. $\frac{y^{12}}{64x^3}$
13. $\frac{a^3b^2}{c}$
14. $\frac{y^6}{x^7}$
15. $\frac{y^2}{x^{10}z^5}$
16. $\frac{c^4}{a^2b^4}$
17. $\frac{9ab^{12}}{8}$
18. $m^3n^7$
19. $16y^{20}$
20. $x^2+y^2$
21. $(x-2y)^2$
22. $\frac{b^3-a^3}{a^3+b^3}$
23. $\frac{1}{y-x}$
24. $\frac{y}{y+1}$
25. $\frac{y^6-x^4}{x^4y^6}$
26. $x+y$
27. $\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$

### Ejercicio 95

1. $27-54x+36x^2-8x^3$
2. $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$
3. $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
4. $1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{4}+\frac{x^3}{8}$
5. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$
6. $16-32x+24x^2-8x^3+x^4$
7. $x^{10}+5x^8y^2+10x^6y^4+10x^4y^6+5x^2y^8+y^{10}$
8. $\frac{x^5}{32}-\frac{5x^4}{16}+\frac{5x^3}{4}-\frac{5x^2}{2}+\frac{5x}{2}-1$
9. $\frac{1}{81}-\frac{2x}{27}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{16}$
10. $x^9+15x^6y^3+75x^3y^6+125y^9$
11. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{10}}+\dots$
12. $\frac{1}{8x^3}+\frac{3}{16x^4}+\frac{3}{16x^5}+\frac{5}{32x^6}+\frac{15}{128x^7}+\dots$
13. $\frac{1}{x^4}+\frac{4}{x^5}+\frac{10}{x^6}+\frac{20}{x^7}+\frac{35}{x^8}+\dots$
14. $(3x)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3(3x)^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{9(3x)^{\frac{5}{3}}}+\frac{5}{81(3x)^{\frac{8}{3}}}-\frac{10}{243(3x)^{\frac{11}{3}}}+\dots$
15. $x^{\frac{4}{3}}+\frac{8x^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{8}{9x^{\frac{2}{3}}}-\frac{32}{81x^{\frac{5}{3}}}+\frac{80}{243x^{\frac{8}{3}}}+\dots$
16. $\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}+\frac{3}{2x^{\frac{7}{4}}}+\frac{21}{8x^{\frac{11}{4}}}+\frac{77}{16x^{\frac{15}{4}}}+\frac{1155}{128x^{\frac{19}{4}}}+\dots$

## Ejercicio 96

1. $127\,575x^5$
2. $\frac{35}{8}x^4$
3. $-439\,040x^3y^3$
4. $\frac{22}{729(8x)^{\frac{14}{3}}}$
5. $-253\,125\,000x^3$
6. $\frac{1792}{x^9}$
7. $\frac{1}{x^5}$
8. $\frac{729}{512x^{\frac{5}{2}}}$

## Ejercicio 97

1. $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$
2. $2\,187 - 10\,206y + 20\,412y^2 - 22\,680y^3 + 15\,120y^4 - 6\,048y^5 + 1344y^6 - 128y^7$
3. $x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1$
4. $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$
5. $3\,125m^5 - 6\,250m^4n + 5\,000m^3n^2 - 2\,000m^2n^3 + 400mn^4 - 32n^5$
6. $a^8 + 16a^7b + 112a^6b^2 + 448a^5b^3 + 1120a^4b^4 + 1792a^3b^5 + 1792a^2b^6 + 1024ab^7 + 256b^8$
7. $x^{12} + 30x^{10}y + 375x^8y^2 + 2\,500x^6y^3 + 9\,375x^4y^4 + 18\,750x^2y^5 + 15\,625y^6$
8. $\frac{x^7}{128} + \frac{7x^5}{64} + \frac{21x^3}{32} + \frac{35x}{16} + \frac{35}{8x} + \frac{21}{4x^3} + \frac{7}{2x^5} + \frac{1}{x^7}$
9. $x^3 + 3x^2y - 6x^2 + 3xy^2 - 12xy + 12x + y^3 - 6y^2 + 12y - 8$
10. $\frac{x^{10}}{y^5} - \frac{5x^7}{y^2} + 10x^4y - 10xy^4 + \frac{5y^7}{x^2} - \frac{y^{10}}{x^5}$
11. $x^{12} - 12x^{11} + 66x^{10} - 220x^9 + 495x^8 - 792x^7 + 924x^6 - 792x^5 + 495x^4 - 220x^3 + 66x^2 - 12x + 1$
12. $\frac{32}{x^5} + \frac{40}{x^4} + \frac{20}{x^3} + \frac{5}{x^2} + \frac{5}{8x} + \frac{1}{32}$

# Capítulo 10

## Ejercicio 98

1. $m^{\frac{5}{2}}$
2. $x^{\frac{2}{7}}$
3. $y^{\frac{4}{3}}$
4. $a^{\frac{2}{5}}$
5. $b^{\frac{11}{2}}$
6. $(5x)^{\frac{1}{2}}$
7. $(2x)^{\frac{5}{6}}$
8. $(3y^2)^{\frac{3}{4}}$
9. $(2xy)^{\frac{9}{2}}$
10. $(x^2y)^{\frac{2}{9}}$
11. $(x^4y^4)^{\frac{1}{8}}$
12. $(x^6 + y^6)^{\frac{1}{3}}$
13. $(x^7 - y^7)^{\frac{1}{2}}$
14. $(x^2 + y^2)^{\frac{4}{3}}$
15. $(x + 2y)^{\frac{11}{5}}$
16. $a^{\frac{9}{5}} - b^{\frac{3}{7}}$
17. $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$
18. $m^{\frac{7}{4}}n^{\frac{3}{5}}$
19. $m^{\frac{1}{2}}(n + p)^{\frac{3}{2}}$
20. $a^{\frac{2}{3}}m^{\frac{13}{3}}n^{\frac{7}{4}}$

## Ejercicio 99

1. $\sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[7]{5^4}$
3. $\sqrt[3]{m^2}$
4. $\sqrt{(3y)^{11}}$
5. $\sqrt[4]{(2xy^2)^3}$
6. $\sqrt{x^3y}$
7. $7\sqrt[5]{y^2}$
8. $3\sqrt[5]{a^3}\,\sqrt[7]{b^8}$
9. $\frac{3}{4}\sqrt[5]{z^2}\,\sqrt[4]{y}$
10. $\sqrt[5]{m^2} - \sqrt[3]{n}$
11. $\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b}$
12. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y}$
13. $\sqrt[5]{(2x + y)^4}$
14. $\sqrt{m + n}$
15. $\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}$
16. $\sqrt[7]{(m^{-1} - n^{-2})^3}$

## Ejercicio 100

1. 27
2. 2
3. 3
4. 14
5. 4
6. $\frac{9}{4}$
7. 6
8. $-8$
9. $-4$
10. $2xy^2$
11. $3m^2n^3$
12. $2x^4$
13. $2x^3y^5$
14. $2m^3n$
15. $\frac{5}{y^{2n}}$
16. $5m^{2-x}n^{4y-3}$
17. $2(1 + x)$
18. $|x - y|$
19. $\frac{3x}{2}, -\frac{3x}{2}$
20. $\frac{|x + 2y|}{|xy|}$

## Ejercicio 101

1. $x\sqrt{x}$
2. $3xy^3\sqrt{3y}$
3. $8mnz^2\sqrt{m}$
4. $3mn^5\sqrt[3]{m^2}$
5. $xyz^2\sqrt[3]{x^2y}$
6. $5xy^2\sqrt[4]{x}$
7. $15a^2b\sqrt{2b}$
8. $15p^2q^3\sqrt{q}$
9. $6xy\sqrt[4]{3xz}$
10. $10bc\sqrt[4]{5a^3b^3}$
11. $6mn^2\sqrt[5]{3m^3n^2}$
12. $2x^2yz^3\sqrt[3]{xy^2}$
13. $-6m^3n^3\sqrt[4]{8mn^2}$
14. $a^2\sqrt{2a}$
15. $5a\sqrt[5]{ab^4}$
16. $\frac{4}{3}mn^3\sqrt[3]{20mp^2}$
17. $xy\sqrt[3]{y}$
18. $\frac{2}{x}\sqrt[4]{x}$
19. $\frac{3x}{y}\sqrt{x}$
20. $\frac{2ab^2}{m}\sqrt[3]{\frac{2a}{3m^2}}$
21. $\frac{xy}{2z^3}\sqrt[4]{x^3y}$
22. $\frac{2ab}{15d^2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{cd}}$
23. $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$
24. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{5}{x^2}}$
25. $3m\sqrt{m - 2n}$
26. $|4x^2 + 5y^3|\sqrt{x}$
27. $3ab\sqrt[3]{a^4 - 2ab}$
28. $|m - n|\sqrt{m - n}$
29. $3(x^2 - y^2)\sqrt[5]{(x^2 - y^2)^2}$
30. $\frac{1}{\sqrt[3]{(2 - m)^2}}; -\frac{1}{\sqrt[3]{(2 - m)^2}}$

**Ejercicio 102**

1. $\sqrt{45}$
2. $\sqrt{175}$
3. $\sqrt[3]{128}$
4. $\sqrt{\frac{25}{8}}$
5. $\sqrt[5]{\frac{32}{81}}$
6. $\sqrt{x^3}$
7. $\sqrt[3]{8x^5}$
8. $\sqrt[4]{m^{13}n^5}$
9. $\sqrt[4]{x^5y^9}$
10. $\sqrt{50a^5b^6c^3}$
11. $\frac{1}{\sqrt[3]{4a}}$
12. $\sqrt[3]{\frac{4a^2}{5b^2}}$
13. $\sqrt[4]{\frac{27y^7}{128x^2}}$
14. $\sqrt{3ax^2}$
15. $\sqrt[3]{4x}$
16. $\sqrt{4a^3b+4a^2b^2+ab^3}$
17. $\sqrt{\frac{9}{a+b}}$
18. $\sqrt{\frac{x+1}{(x-1)^3}}$
19. $\sqrt[3]{\frac{x^2+2x+4}{x^2-4x+4}}$
20. $\sqrt{2a^3x}$

**Ejercicio 103**

1. $5\sqrt{5}$
2. $-6\sqrt[3]{3}$
3. $0$
4. $8\sqrt{7}-\sqrt{5}$
5. $-3\sqrt{3}-7\sqrt{2}$
6. $\frac{5}{4}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$
7. $-\frac{5}{8}\sqrt{6}$
8. $-4\sqrt[3]{m}$
9. $3\sqrt{x}$
10. $\frac{5}{3}\sqrt[4]{xy}$
11. $4\sqrt{7}$
12. $27\sqrt{2}$
13. $-17\sqrt{3}$
14. $8\sqrt{5}+7\sqrt{2}$
15. $-2\sqrt{3}$
16. $\sqrt{2}-10\sqrt{5}$
17. $47\sqrt{5}-50\sqrt{11}$
18. $-2\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{5}$
19. $9\sqrt{7}a^2$
20. $8a\sqrt{b}$
21. $11x\sqrt[3]{3x}$
22. $-14x^2\sqrt[4]{2}$
23. $3ay\sqrt{x}$
24. $\frac{11}{6}ab\sqrt{2b}+\frac{13}{4}ab\sqrt{3b}$
25. $\frac{17}{12}a^2b\sqrt{c}$
26. $-\frac{23}{24}a^2b\sqrt[4]{2ab}$
27. $10x\sqrt{y}-7x^2\sqrt{2y}$
28. $-xy^2\sqrt{xy}-x^2y\sqrt{3x}$
29. $x\sqrt{2y}+4y\sqrt{3x}$
30. $-2ab\sqrt{2c}+16ac\sqrt{3b}$
31. $-2x\sqrt[3]{y^2}-3y\sqrt[3]{4x}$
32. $10ab\sqrt[4]{5a^2b^3}-6a^2b^3\sqrt[4]{3ab^2}$
33. $\frac{1}{3}a\sqrt{5a}-\frac{1}{3}b\sqrt{3ab}$
34. $\frac{19}{20}x\sqrt[3]{y}+\frac{5}{12}xy\sqrt[3]{xy^2}$
35. $-\frac{1}{9}a^3b\sqrt{\frac{2a}{b}}+\frac{2}{3}ab^3\sqrt{\frac{5a}{3}}$
36. $6\sqrt{a-2}$
37. $-x\sqrt{x+2}$
38. $10xy\sqrt{x-3y}$

**Ejercicio 104**

1. $3\sqrt{2}$
2. $5\sqrt{6}$
3. $2\sqrt[3]{9}$
4. $27\sqrt{10}$
5. $xy^2$
6. $xy\sqrt[3]{xy^2}$
7. $\frac{2}{15}x^3$
8. $18a^2b\sqrt{2b}$
9. $2xy^3\sqrt{3xy}$
10. $a^4\sqrt{a}$
11. $2a^2\sqrt[4]{a}$
12. $-8ab^2\sqrt[3]{6b}$
13. $6a\sqrt{a}$
14. $8x\sqrt[4]{x^3}$
15. $-6a^3b^3\sqrt{2b}$
16. $\frac{3a}{5x}\sqrt{\frac{2a}{x}}$
17. $\frac{2x}{am^2}\sqrt{3}$
18. $6-4\sqrt{6}$
19. $5-\sqrt[3]{25}$
20. $\frac{8}{3}x^2\sqrt{2}-x$
21. $19-8\sqrt{3}$
22. $95$
23. $2m-3n\sqrt{2m}-4n^2$
24. $x-y$
25. $|x+y|\sqrt{x-y}$
26. $\sqrt{x^2-y}$
27. $|1-x|$
28. $\sqrt[3]{3}(x-y)$
29. $|x+y|\sqrt{x-y}$
30. $1$

**Ejercicio 105**

1. $\sqrt[6]{18}$
2. $x\sqrt{x}$
3. $\sqrt[16]{x^{15}}$
4. $xy\sqrt[6]{108x^3y^2}$
5. $3x^2y\sqrt[4]{x^3}$
6. $a\sqrt[4]{4ab^3}$
7. $x\sqrt[6]{72x}$
8. $\sqrt[6]{2x^5y^5}$
9. $a\sqrt[12]{a}$
10. $x\sqrt[6]{x^5}$
11. $y\sqrt[6]{y}$
12. $\frac{1}{y}\sqrt[3]{2xy}$
13. $\frac{3}{2}\sqrt[9]{8mn^2}$
14. $\frac{3}{2}x^2\sqrt[10]{16xy^4}$
15. $\sqrt[12]{x^4y^3z^2}$

**Ejercicio 106**

1. $n\sqrt{m}$
2. $xy^2\sqrt[6]{xy}$
3. $3a^3b^2c$
4. $4y\sqrt{x}$
5. $3x^2y\sqrt[3]{3y^2}$
6. $6ab$
7. $\frac{2a^3}{5b^4}$
8. $9m^2x^2$
9. $\frac{3n^6}{4m^2}$
10. $\frac{2}{3zw^2}$
11. $\frac{5z^2}{3}$
12. $\frac{2u^3v^2}{5}$
13. $\frac{4a^2}{3b^2}$
14. $\frac{3x^3}{2y^4}$
15. $\frac{2p^4}{3m^3n^2}$
16. $\frac{2n^2}{p^2}$
17. $\frac{3}{2x}\sqrt[18]{y^{13}}$
18. $\frac{5}{2}y^2z$
19. $-\frac{5n}{4m^2}\sqrt[3]{n^2}$
20. $\frac{y^4x^4}{2}$

## Ejercicio 107

1. $\frac{1}{\sqrt[6]{6}}$
2. $\sqrt[3]{\frac{4}{y}}$
3. $\sqrt[6]{\frac{2y^2}{3}}$
4. $8\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$
5. $\sqrt[15]{\frac{32a}{b}}$
6. $2\sqrt[6]{\frac{9}{8a}}$
7. $a\sqrt[9]{a}$
8. $a\sqrt[6]{108ab^4}$
9. $\frac{1}{\sqrt[6]{xy}}$
10. $\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$
11. $\sqrt[6]{\frac{4x}{y^4}}$
12. $\sqrt[n^2+n]{x}$
13. $\sqrt[n^2+n]{x+1}$
14. $\sqrt[6]{x-1}$
15. $\sqrt[12]{(a-b)^5}$

## Ejercicio 108

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
3. $\frac{\sqrt[3]{300}}{6}$
4. $3\sqrt[3]{x}$
5. $2x\sqrt{3xy}$
6. $\frac{1}{xy}\sqrt[4]{8x^3y^3}$
7. $\frac{3}{2}\sqrt[5]{16a^4}$
8. $\frac{1}{b}\sqrt[3]{3a^2b^2}$
9. $\frac{1}{4x^2}\sqrt{6xy}$
10. $\frac{2}{5ab}\sqrt[4]{25a^3b^2}$
11. $\frac{1}{11}\left(1+2\sqrt{3}\right)$
12. $\frac{2}{7}\left(3+\sqrt{2}\right)$
13. $\frac{5x+\sqrt{5x}}{1-5x}$
14. $\sqrt{3}-2$
15. $\frac{1}{10}\left(4-\sqrt{6}\right)$
16. $\sqrt{3a}+\sqrt{2b}$
17. $(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)$
18. $\frac{2xy\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{x+y}$
19. $-\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)$
20. $\sqrt[3]{9a^2}-\sqrt[3]{3ab}+\sqrt[3]{b^2}$

## Ejercicio 109

1. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
2. $\frac{10}{\sqrt{2}}$
3. $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$
4. $\frac{x}{\sqrt[6]{x^5}}$
5. $\frac{1}{2y\sqrt[3]{x^2y^2}}$
6. $\frac{1}{3\sqrt[4]{x^3}}$
7. $\frac{3}{2\sqrt{6x}}$
8. $\frac{1}{2\sqrt[3]{4x}}$
9. $\frac{2}{x\sqrt[5]{2x^2}}$
10. $\frac{x}{2y\sqrt{3x}}$
11. $\frac{7}{7-2\sqrt{7}}$
12. $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$
13. $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$
14. $-\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$
15. $\frac{x-y}{x+3\sqrt{xy}+2y}$
16. $\frac{1}{2\left(\sqrt{5x}+\sqrt{6y}\right)}$
17. $\frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$
18. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}$
19. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}$
20. $-\frac{1}{(y+2)\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{2y}+\sqrt[3]{4}\right)}$

# Capítulo 11

## Ejercicio 110

1. $4i$
2. $6i$
3. $7i$
4. $11i$
5. $25i$
6. $2\sqrt{2}i$
7. $5\sqrt{2}i$
8. $3\sqrt{6}i$
9. $5\sqrt{5}i$
10. $9\sqrt{2}i$
11. $\frac{2}{7}\sqrt{3}i$
12. $\frac{5}{2}\sqrt{3}i$
13. $3+6i$
14. $2-4\sqrt{7}i$
15. $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{5}i$
16. $\frac{4}{5}-2\sqrt{2}i$

## Ejercicio 111

1. $9i$
2. $3+i$
3. $-9i$
4. $11i$
5. $6\sqrt{6}i$
6. 0
7. $-4\sqrt{2}i+3\sqrt{3}i$
8. $\frac{1}{2}\sqrt{3}i+\frac{5}{2}\sqrt{2}i$
9. $11-i$
10. 7
11. 0
12. 0
13. $5\sqrt[4]{i}$
14. $\frac{23}{12}x\sqrt{\sqrt{xi}}$

## Ejercicio 112

1. $-1$
2. $-i$
3. $-3i$
4. $-1$
5. $i$
6. $i$
7. $-i$
8. $3i-2$
9. $4i$
10. 1
11. $3i-2$
12. 0
13. $-1$
14. Si $n$ es par: 0
    Si $n$ es impar: $-i$
15. 0

## Ejercicio 113

1. $-9$
2. $-12\sqrt{3}i$
3. $-4\sqrt{3}i$
4. $-2$
5. $-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}i$
6. $-\frac{18}{5}$
7. $-60$
8. $-6-3\sqrt{6}$
9. $4i$
10. 3
11. $\frac{2}{5}$
12. $\sqrt{2}-4$
13. $\frac{9}{10}i$
14. $\frac{6}{5}$
15. 0
16. 0
17. $\frac{1}{4}$
18. $-i^n$
19. $2i$
20. $-i$

## Ejercicio 114

1. $(2,3)$
2. $-1+5i$
3. $(0,7)$
4. $\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{4}\right)$
5. $(5,-2)$
6. $\frac{1}{2}-\frac{6}{7}i$
7. $-2i$
8. $\left(-\frac{1}{3},0\right)$
9. 3
10. $\left(5,-\frac{2}{11}\right)$
11. $\frac{5}{2}-8i$
12. $(1,-1)$

## Ejercicio 115

1. $(10, 1)$
2. $(1, 0)$
3. $(-2, -5)$
4. $(5, -6)$
5. $\left(\frac{31}{20},-\frac{1}{3}\right)$
6. $(0,1)$
7. $\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)$
8. $\left(\sqrt{2},-5\right)$
9. $\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$

10. $7 - i$
11. $6$
12. $0$
13. $-1 + 11i$
14. $3i$
15. $11 - \frac{7}{2}i$
16. $4 - 10i$
17. $1$
18. $-\frac{1}{2} + \frac{19}{6}i$
19. $4 - 3i$
20. $16 - 4i$
21. $2 + 3i$
22. $4 + 5i$

## Ejercicio 116

1. $-17 + 6i$
2. $5 + i$
3. $6 + 4i$
4. $1 - 3i$
5. $-3 + 4i$
6. $-1 + 2\sqrt{6}i$
7. $\frac{13}{6}i$
8. $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
9. $6 + 18i$
10. $-2 + 10i$
11. $-\frac{14}{3} + 4i$
12. $i$
13. $-8 - 6i$
14. $\frac{39}{400} - \frac{1}{5}i$
15. $32 - 126i$
16. $4$
17. $-5 + 13i$
18. $-3 + 4i$

19. $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$

$$= \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$$

20. $(1+i)^n \cdot (1-i)^n = (1-i^2)^n = (1+1)^n$

$$= \left[\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)\right]^n$$

21. $w^{2n} = (1+i)^{2n} = \left[(1+i)^2\right]^n = (2i)^n$ si $n$ es par,

entonces $n = 2k$ con $k \in Z$, sustituyendo:

$$(2i)^n = (2i)^{2k} = (4i^2)^k = (-4)^k = (-1\cdot 4)^k$$

$$= (-1)^k \cdot (4)^k$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}}(2)^{2k}$$

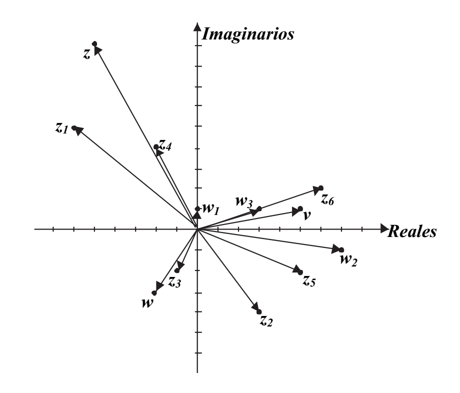
$$= (-1)^{\frac{n}{2}}(2,0)^n$$

22. $w^{2n} = (1+i)^{2n} = \left[(1+i)^2\right]^n = (2i)^n = (0,2)^n$

## Ejercicio 117

1. $\frac{i-2}{5}$
2. $\frac{5-12i}{13}$
3. $-3 - i$
4. $\frac{-1-2\sqrt{6}i}{5}$
5. $\frac{-4-\sqrt{2}i}{2}$
6. $1 + i$
7. $\frac{3+i}{2}$
8. $\frac{-1+8i}{5}$
9. $\frac{-2+3i}{2}$
10. $\frac{-13-9i}{5}$
11. $\frac{-2+11i}{25}$
12. $\frac{-129-107i}{10}$
13. $\frac{4\sqrt{2}-4i}{3}$
14. $-i$

## Ejercicio 118




## Ejercicio 119

1. $\sqrt{13}$
2. $\sqrt{41}$
3. $\sqrt{41}$
4. $3$
5. $\sqrt{5}$
6. $\sqrt{85}$
7. $\frac{3}{2}$
8. $\sqrt{5}$
9. $\sqrt{2}$
10. $\sqrt{\frac{79}{3}}$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{13}$
12. $\sqrt{11}$
13. $5 - 4i$
14. $-5$
15. $1 - i$
16. $-5i$
17. $-\frac{1}{2}i$
18. $(2, -1)$
19. $(0, 3)$
20. $-\frac{3}{7} + \frac{2}{5}i$
21. $-2 - 6i$
22. $(-1, 1)$
23. $-2 - \frac{11}{4}i$
24. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

25 a 30. No se incluye la solución

31. $3 + 2i$
32. $2 - 4i$
33. $1 + 8i$
34. $2 - 9i$
35. $4$
36. $11$
37. $-4 + 6i$
38. $7 - 6i$
39. $1 + \frac{2}{3}i$
40. $\frac{5}{6}i$
41. $\frac{17-7i}{13}$
42. $\frac{2+i}{5}$
43. $1$
44. $\frac{5}{12}$
45. $\frac{i}{4}$

# Capítulo 12

## Ejercicio 120

1. $x_1 = -4, x_2 = -1$
2. $x_1 = -9, x_2 = 3$
3. $x_1 = -6, x_2 = -5$
4. $y_1 = 3 + i, y_2 = 3 - i$
5. $w_1 = -5, w_2 = 8$
6. $z_1 = 15, z_2 = -2$
7. $x_1 = 6, x_2 = 4$
8. $x_1 = -20, x_2 = 12$
9. $x_1 = -1 + 2i, x_2 = -1 - 2i$
10. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$

11. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2$
12. $w_1 = \frac{3}{2}, w_2 = -\frac{1}{5}$
13. $x_1 = 3, x_2 = -\frac{2}{3}$
14. $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i, x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$
15. $x_1 = -b, x_2 = -\frac{1}{4}b$
16. $w_1 = -\frac{3}{7}a,\ w_2 = 5a$
17. $x_1 = -5b, x_2 = 2b$
18. $x_1 = -\frac{5}{b}, x_2 = \frac{6}{b}$
19. $y_1 = -\frac{2b}{a}, y_2 = -\frac{b}{a}$
20. $y_1 = \frac{10}{7}a, y_2 = \frac{a}{2}$

**Ejercicio 121**

1. $x_1 = 3, x_2 = 5$
2. $x_1 = 3, x_2 = -2$
3. $x_1 = -4, x_2 = -2$
4. $x_1 = 5, x_2 = -3$
5. $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{5}{2}$
6. $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$
7. $y_1 = -\frac{3}{5}, y_2 = 1$
8. $x_1 = 3 - \sqrt{7}, x_2 = 3 + \sqrt{7}$
9. $x_1 = -1 - \sqrt{6}, x_2 = -1 + \sqrt{6}$
10. $x_1 = 2 - i, x_2 = 2 + i$
11. $x_1 = -\frac{1}{2} - 2i,\ x_2 = -\frac{1}{2} + 2i$
12. $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}i,\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i$
13. $w_1 = 0, w_2 = 5$
14. $z_1 = 0, z_2 = -\frac{5}{2}$
15. $y_1 = 0, y_2 = \frac{a}{3}$
16. $x_1 = 0, x_2 = \frac{b}{a}$
17. $x_1 = -5, x_2 = 5$
18. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$
19. $x_1 = -\frac{b}{a}i, x_2 = \frac{b}{a}i$
20. $w_1 = -\frac{4}{a}, w_2 = \frac{4}{a}$

**Ejercicio 122**

1. Reales y diferentes
2. Complejas
3. Complejas
4. Reales e iguales
5. Reales y diferentes
6. Complejas
7. Reales y diferentes
8. Complejas
9. Reales y diferentes
10. Reales e iguales
11. Complejas
12. Reales e iguales

**Ejercicio 123**

1. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 10 \end{cases}$
5. $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y_1 = \frac{5}{3} \\ y_2 = 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$
8. $\begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$
11. $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$
12. $\begin{cases} z_1 = \frac{7}{5} \\ z_2 = 2 \end{cases}$
13. $\begin{cases} w_1 = -\frac{1}{2} \\ w_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$
14. $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{2}{7} \end{cases}$
15. $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$
16. $\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{2}b \\ x_2 = \frac{2}{3}b \end{cases}$
17. $\begin{cases} x_1 = \frac{ab}{2} \\ x_2 = 2ab \end{cases}$
18. $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a} \\ x_2 = \frac{3}{a} \end{cases}$
19. $\begin{cases} x_1 = -\frac{3b}{a} \\ x_2 = \frac{2b}{a} \end{cases}$
20. $\begin{cases} z_1 = 2\sqrt{3} \\ z_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$
21. $\begin{cases} x_1 = -3\sqrt{3} \\ x_2 = 5\sqrt{3} \end{cases}$
22. $\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{7} \\ x_2 = 5\sqrt{7} \end{cases}$
23. $\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{15} \end{cases}$
24. $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$
25. $\begin{cases} w_1 = -\frac{1}{3} \\ w_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$

**Ejercicio 124**

1. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{5}{7} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -8 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

**Ejercicio 125**

1. $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} w_1 = -10 \\ w_2 = 10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 8 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y_1 = -\sqrt{3} \\ y_2 = \sqrt{3} \end{cases}$
6. $\begin{cases} x_1 = -\frac{a}{4} \\ x_2 = \frac{a}{4} \end{cases}$
7. $\begin{cases} z_1 = -\frac{6}{5} \\ z_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$
8. $\begin{cases} y_1 = -6 \\ y_2 = 6 \end{cases}$
9. $\begin{cases} w_1 = -\sqrt{7} \\ w_2 = \sqrt{7} \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$
11. $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$
12. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} y_1 = -4i \\ y_2 = 4i \end{cases}$
14. $\begin{cases} w_1 = -5i \\ w_2 = 5i \end{cases}$
15. $\begin{cases} x_1 = -i \\ x_2 = i \end{cases}$

**Ejercicio 126**

1. 27 y 15
2. 30 y 12
3. 3, 5 y 7
4. 12, 14 y 16
5. $\frac{1}{5}$ y 5
6. 5 y 20
7. $\begin{cases} \text{largo} = 200 \text{ m} \\ \text{base} = 125 \text{ m} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{largo} = 250 \text{ m} \\ \text{base} = 100 \text{ m} \end{cases}$
8. $\begin{cases} \text{altura} = 10 \text{ m} \\ \text{base} = 30 \text{ m} \end{cases}$
9. 3, 4 y 5
10. 96 $m^3$
11. $\begin{cases} \text{altura} = 18 \text{ m} \\ \text{base} = 54 \text{ m} \end{cases}$
12. $\begin{cases} \text{Alejandro} = 8 \text{ años} \\ \text{Alfredo} = 4 \text{ años} \end{cases}$
13. 7
14. $\begin{cases} \text{árboles} = 15 \\ \text{filas} = 13 \end{cases}$
15. $r = 4$ cm
16. $\begin{cases} \text{largo} = 17 \text{ cm} \\ \text{ancho} = 16 \text{ cm} \end{cases}$
17. 39 años
18. 5 segundos
19. 7.5 segundos
20. $\begin{cases} \text{primera llave} = 8 \text{ h} \\ \text{segunda llave} = 24 \text{ h} \end{cases}$
21. $20
22. 8, 6 y 10 unidades

**Ejercicio 127**

1. $V(2, -2)$ $x_1 = 1, x_2 = 3$
2. $V\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{2}\right)$ $x_1 = -2, x_2 = 3$
3. $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{81}{4}\right)$ $x_1 = -4, x_2 = 5$
4. $V(-2, -7)$ $x_1 = -\sqrt{7} - 2, x_2 = \sqrt{7} - 2$
5. $V(-1, 4)$ $x_1 = -1 + 2i, x_2 = -1 - 2i$
6. $V(1, 0)$ $x_1 = 1, x_2 = 1$
7. $V(2, 9)$ $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$
8. $V(5, 0)$ $x_1 = 5, x_2 = 5$
9. $V(0, -9)$ $x_1 = 3i, x_2 = -3i$
10. $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ $x_1 = 0, x_2 = 3$

**Ejercicio 128**

1. 50 y 50
2. – 10 y 10
3. 20 y 20
4. 55 y 55
5. 72 pies
6. 19 cm y 19 cm
7. 500 ejemplares
8. 20 pelotas
9. 35 cajas
10. $\begin{cases} 56.5 \text{ cm} \\ 43.5 \text{ cm} \end{cases}$

**Ejercicio 129**

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \cdot x_2 = -25 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -12 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{14}{9} \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7a \\ x_1 \cdot x_2 = 12a^2 \end{cases}$

**Ejercicio 130**

1. $x^2 - 9 = 0$
2. $x^2 + 7x = 0$
3. $x^2 + 16 = 0$
4. $x^2 - 5x + 4 = 0$
5. $x^2 + 8x + 15 = 0$
6. $x^2 + 4x + 29 = 0$
7. $2x^2 - 5x + 2 = 0$
8. $20x^2 + 19x + 3 = 0$
9. $x^2 + 2bx - 3b^2 = 0$
10. $x^2 - 7ax + 10a^2 = 0$

**Ejercicio 131**

1. $x = 49$
2. $x = -8$
3. $x = \frac{13}{2}$
4. $x = 5$
5. $x = 5$
6. $x = 2$
7. $x = 3$
8. $x = 7$
9. $x = -1$
10. $x = 1$
11. $x = 4$
12. $x = 1$
13. $x = \frac{1}{256}$
14. $x = 1$
15. $x = 3$
16. $x = -2, -7$
17. $x = -1, 1$
18. $x = 9$

**Ejercicio 132**

1. (0, 0), (4, 4)
2. (0, 3), (3, 0)
3. (3, – 3), ( – 3, 3)
4. (2, 4), ( – 2, – 4)
5. ( – 3, – 5), (5, 3)
6. (3, 2), ( – 3, – 1)
7. (4, 3), (4, – 3), ( – 4, 3), ( – 4, – 3)
8. $\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
9. $\left(2, 4\sqrt{2}\right), \left(2, -4\sqrt{2}\right), \left(-2, 4\sqrt{2}\right), \left(-2, -4\sqrt{2}\right)$
10. (7, – 7), ( – 7, 7), $\left(2\sqrt{7}, \sqrt{7}\right), \left(-2\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right)$
11. (4, 2), ( – 4, – 2), (5, 1), ( – 5, – 1)
12. $(5, 1), (-5, -1), \left(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right)$
13. (1, 1),( – 1, – 1), ( – 2, 0), (2, 0)
14. (3, 2), ( – 3, – 2), (4$i$, $i$), ( – 4$i$, – $i$)
15. $\left(\frac{\sqrt{30}}{5}, \frac{2\sqrt{30}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{30}}{5}, -\frac{2\sqrt{30}}{5}\right), (2, -3), (-2, 3)$
16. (3, 6), ( – 3, – 6)
17. $(2, 1), (-2, -1), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$
18. ( – 2, 1), (2, – 1)
19. $(1.\ 0)(-1, 0), \left(\frac{5\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right), \left(-\frac{5\sqrt{17}}{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$
20. ( – 1, – 4), (2, – 7), (1, 4), ( – 2, 7)

# CAPÍTULO 13

**EJERCICIO 133**

1. $(3,\infty)$
2. $(-\infty,3)$
3. $(-\infty,-4)$
4. $(-\infty,-1]$
5. $(-\infty,-7)$
6. $\left[-\frac{8}{7},\infty\right)$
7. $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
8. $(-\infty,2)$
9. $(-\infty,10]$
10. $(-\infty,5]$
11. $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$
12. $\left(-\infty,\frac{8}{53}\right]$
13. $\left(\frac{4}{5},\infty\right)$
14. $\left(-\infty,-\frac{1}{23}\right)$
15. $(2,\infty)$
16. $(6,\infty)$
17. $[-21,\infty)$
18. $[6,\infty)$
19. $(-\infty,-6]$
20. $\left[-\frac{19}{28},\infty\right)$
21. $\left(\frac{18}{5},\infty\right)$
22. $(-\infty,13]$
23. $(-2,3)$
24. $\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$
25. $[-3,-1]$
26. $[-9,-1)$
27. $(-3,3)$
28. $[-23,-10)$
29. $(-2,4)$
30. $[-4,1)$
31. $(-1000,100)$
32. $\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$
33. $[-16,8)$
34. $\left(-\frac{21}{2},\frac{11}{2}\right)$
35. $\left(-\frac{1}{2},\frac{19}{2}\right]$
36. $\left[-\frac{10}{3},\frac{32}{3}\right]$
37. $(-14,-2)$
38. $[-2,4]$
39. $\left[\frac{9}{2},\frac{19}{2}\right]$
40. $\left(\frac{14}{9},\frac{8}{3}\right)$

**EJERCICIO 134**

1. $(-3,3)$
2. $[-4,4]$
3. $(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$
4. $(-\infty,-6)\cup(6,\infty)$
5. $\left[0,\frac{1}{3}\right]$
6. $(-\infty,0)\cup(5,\infty)$
7. $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$
8. $(-\infty,-4)\cup(5,\infty)$
9. $\left(-\frac{1}{2},3\right)$
10. $\left[-\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$
11. $(-\infty,-4)\cup(-1,\infty)$
12. $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{3}{4},\infty\right)$
13. $\left(-\frac{2}{3},1\right)$
14. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[3,\infty)$

**EJERCICIO 135**

1. $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$
2. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$
3. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$
4. $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$
5. $(-\infty,3)$
6. $[-3,2)$
7. $(-\infty,-1]\cup(3,\infty)$
8. $(-1,3)\cup(11,\infty)$
9. $\left[-9,-\frac{1}{3}\right)\cup(4,\infty)$
10. $(-\infty,-2)\cup(2,4]$
11. $(-4,-2)\cup(1,\infty)$
12. $(-\infty,-2)\cup\left[\frac{3}{2},4\right)$
13. $(-\infty,-6)\cup(1,4]$

**EJERCICIO 136**

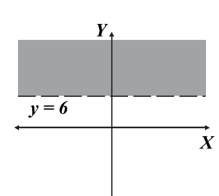
1. $[-2,-1]\cup[2,4]$
2. $[2,\infty)\cup\{-2\}$
3. $(-\infty,-2)\cup(-1,1)$
4. $(-\infty,-4)$
5. $(-3,0)\cup(3,\infty)$
6. $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$

**EJERCICIO 137**

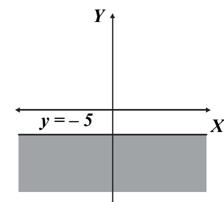
1. $(-\infty,-7]\cup[7,\infty)$
2. $(-7,7)$
3. $(-\infty,1)\cup(9,\infty)$
4. $\left[-\frac{9}{5},3\right]$
5. $(-\infty,3)\cup(5,\infty)$
6. $\phi$
7. $[-9,10]$
8. $(-\infty,-4)\cup(20,\infty)$
9. $[2,18]$
10. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right]$
11. $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$
12. $(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$
13. $\phi$
14. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$
15. $\left(-\frac{4}{3},0\right)\cup(0,4)$
16. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$
17. $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$

**EJERCICIO 138**

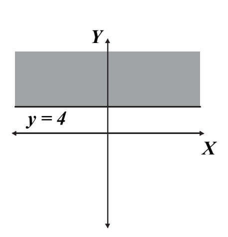
1.



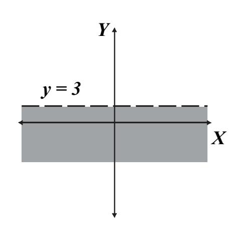

2.



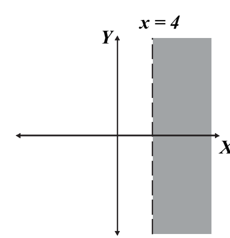
3.



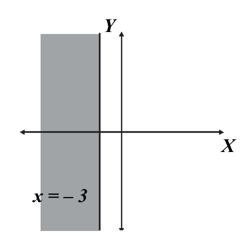

4.



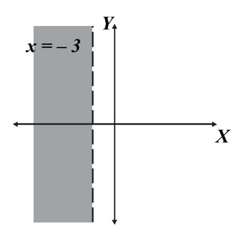

5.



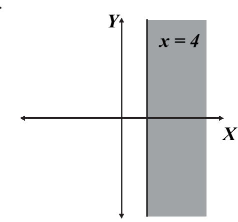

6.



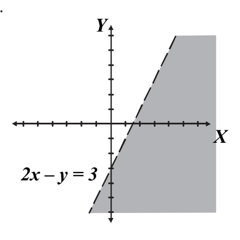

7.



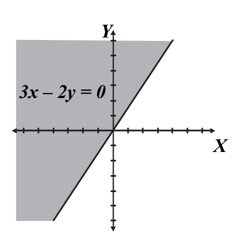

8.



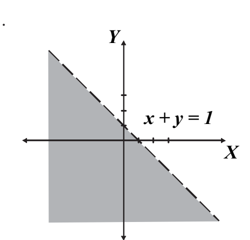

9.



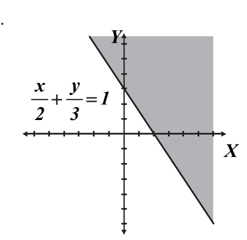

10.




11.

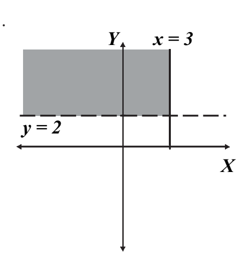



12.

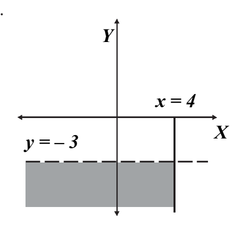



## EJERCICIO 139

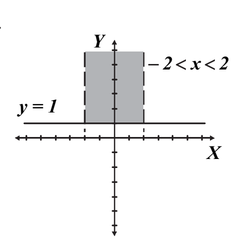
1.



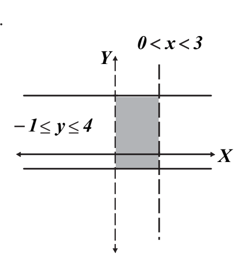

2.



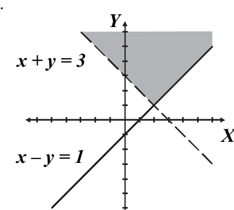

3.



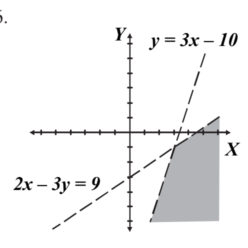

4.



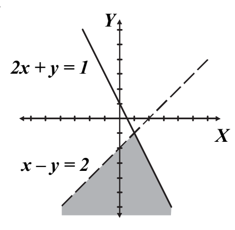

5.



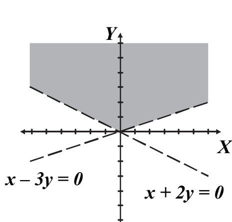

6.



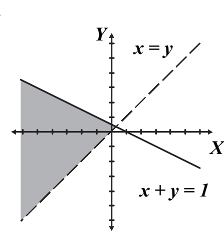

7.



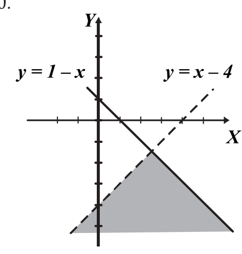

8.




9.




10.



# Capítulo 14

## Ejercicio 140

1. $8 = 2^3$
2. $16 = x^4$
3. $81 = 3^4$
4. $\frac{1}{36} = 6^{-2}$
5. $9 = \left(\sqrt{3}\right)^4$
6. $343 = 7^x$
7. $\sqrt{6} = (a)^{\frac{1}{2}}$
8. $x - 1 = 3^2$
9. $625 = w^4$
10. $128 = (x-1)^7$
11. $243 = (3x)^5$
12. $256 = (2x-1)^8$
13. $\log_{17} a = 2$
14. $\log_5 625 = 4$
15. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
16. $\log_N \frac{1}{16} = 2$
17. $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{4}{9}\right) = 2$
18. $\log_2 (x+3) = 4$
19. $\log_2 256 = x$
20. $\log_{(x-2)} 8 = 3$
21. $\log_x z = w$
22. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$
23. $\log_5 125 = -3x$
24. $\log_{(3x+2)} 441 = 2$

## Ejercicio 141

1. $x = 5$
2. $x = 4$
3. $y = 3$
4. $b = \frac{1}{5}$
5. $x = 4$
6. $a = 343$
7. $x = 81$
8. $m = 8$
9. $y = \frac{1}{32}$
10. $N = 8$
11. $w = 3$
12. $x = \frac{4}{9}$
13. $b = 2$
14. $x = 2$
15. $x = 3$
16. $a = -\frac{2}{5}$
17. $x = -6$
18. $y = -\frac{1}{4}$
19. $x = -3$

## Ejercicio 142

1. $4\log_a 7$
2. $-\frac{3}{2}\log_6 3$
3. $\frac{7}{3} + \frac{1}{3}\log_e x$
4. $\log 5 + \log x + 2\log y$
5. $3\log_3 x + 2\log_3 y + \log_3 z$
6. $8 + 2\ln 3 + 4\ln x$
7. $3\log(x+y) + \log(x-z)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} 7 - 2\log_{\frac{1}{2}} x$
9. $\ln x + 2\ln y - 3 - 4\ln z$
10. $\log_5 3 + 3\log_5 x + 6\log_5 (1-2x) - \log_5 2 - y\log_5 x - \log_5 (x^2 - y^2)$
11. $\frac{1}{2}\log_4 3 + \log_4 x + 2\log_4 y$
12. $2\log(x+y) + \frac{5}{2}\log z$
13. $\frac{1}{3}\log x - \frac{1}{2}\log y$
14. $\frac{3}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{2}{3}\log c - \frac{1}{3}\log d$
15. $\frac{1}{2}\log_2 (x+y) - 4\log_2 (x-y)$
16. $2\log x - \frac{1}{3}\log(x-3) - 2\log(x+z)$
17. $\frac{1}{2}\log(x+3) + \frac{1}{2}\log(y-5) - 2\log(x+6) - \frac{1}{4}\log(y-2)$
18. $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{2}{5}\ln(x+1) + \frac{7}{30}\ln(x-1)$
19. $\ln 25x^2$
20. $\log \frac{m^3}{n^2}$
21. $\log_7 \sqrt[6]{x^3 y^2}$
22. $\ln 8e^{4x}$
23. $\log n^4 \sqrt[5]{m^2}$
24. $\log_2 3 \cdot 4^x$
25. $\log_b \frac{1}{\sqrt[12]{(x+1)^8 (x+2)^3}}$
26. $\log \frac{3y}{x}$
27. $\log_2 \frac{x}{yz}$
28. $\log_4 \frac{4}{m^2 - 1}$
29. $\log \frac{x^{\frac{1}{8}} y^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{4}}}$
30. $\ln \frac{5ey}{x^7}$
31. $\ln \frac{e^{2-x}(x+y)^3}{(x-y)^3}$
32. $\log \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^2}{(x+2)^{\frac{4}{5}}}$
33. $\log_2 \sqrt{\frac{2x^{14}}{y^3}}$
34. $\log \frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{2}}}{10x^{\frac{1}{6}}}$
35. $\log \frac{10^{x^2+x+1}(x+1)^3}{x^2}$
36. $\ln \left(\frac{9m^2 p}{7xy^3}\right)^2$

## Ejercicio 143

1. $x = 1$
2. $x = -20$
3. $x = 9,\ x = -\frac{27}{5}$
4. $x = 17$
5. $x = 6,\ x = -6$
6. $x = 13$
7. $x = 40$
8. $x = 25$
9. $x = 17,\ x = 7$
10. $x = \frac{9}{2}$
11. $x = 8,\ x = \frac{22}{9}$
12. $x = -1$
13. $x = 0,\ x = -35$
14. $x = 6$
15. $x = 3$
16. $x = 12,\ x = \frac{7}{11}$

17. $x = 5$

18. $x = 6$

19. $x = 7$

20. $x = 4$

21. $x = \dfrac{e+1}{e-1}$

22. $x = 4e$

23. $x = 4$

24. $x = \dfrac{2\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}-1}$

25. $x = \dfrac{e^e+3}{2-e^e}$

26. $x = \dfrac{1}{e}$

## EJERCICIO 144

1. $x = 4$
2. $x = \dfrac{3\log 2}{\log 3}$
3. $x = 0$
4. $x = \dfrac{1}{2}$
5. $x = 1.20557$
6. $x = 2$
7. $x = 3$
8. $x = 2$
9. $x = -1$
10. $x = 3$
11. $x = \dfrac{2\log 2 + 3\log 5}{2\log 5}$
12. $x = -1.72683$
13. $x = -\dfrac{7}{3}$
14. $x = \dfrac{7}{3}$
15. $x = -4$
16. $x = \dfrac{2}{5}$
17. $x = \dfrac{5}{3}$
18. $x = \dfrac{5}{2}$
19. $x = -\dfrac{1}{2}$
20. $x = \sqrt{6}$ , $x = -\sqrt{6}$
21. $x = 3$, $x = -1$
22. $x = 2$
23. $x = -\dfrac{3}{2}$
24. $x = -1$, $x = -2$
25. $x = -1$
26. $x = 2$
27. $x = \dfrac{\log 2}{2\log 2 - \log 3}$
28. $x = 0$, $x = 2$
29. $x = \dfrac{2\log 7 + \log 5}{2\log 7 - \log 5}$
30. $x = 0$
31. $y = \ln 11 - \ln 13$
32. $x = 2$, $x = 1$
33. $x = \ln \sqrt[3]{2}$
34. $x = 0$
35. $x = \ln\left(1-\sqrt{e}\right)$
36. $x = \ln\sqrt{5}$

## EJERCICIO 145

1. pH = 4.7212
2. pH = 3.2218
3. $1 \times 10^{-9}$
4. 4.3010
5. 0.9 segundos
6. 3 500 micrómetros
7. 59.46%
8. 6.4321 años
9. 1 38.62 años
10. 18 321 habitantes
11. 3.5 horas
12. 29.15 años
13. $T = 64.762$°C
14. $T = 94.84$°C
15. $t = 133.9$ min

# CAPÍTULO 15

## EJERCICIO 146

1. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$
2. 9.9, 9.99, 9.999, 9.9999, 9.99999
3. $2, \dfrac{5}{4}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{17}{16}, \dfrac{26}{25}$
4. $\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{7}, 2$
5. $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{24}, \dfrac{3}{40}$
6. $-1, 4, -9, 16, -25$
7. 0, 0, 2, 6, 12
8. $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{4}{5}, -\dfrac{5}{6}$
9. 1, 2, 3, 4, 5
10. $1, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{8}{5}, \dfrac{5}{3}$
11. 2, 5, 11, 23, 47
12. $\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}$
13. $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{7}{3}, -\dfrac{10}{3}$
14. $27, -9, 3, -1, \dfrac{1}{3}$
15. $-1, -1, -2, -6, -24$
16. $-2, 4, 16, 256, 65\,536$
17. $4, 2, 1, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt[4]{3}}$
18. $3, 1, -1, 1, -1$

## EJERCICIO 147

1. 48
2. 165
3. $\dfrac{617}{140}$
4. 126
5. $\sqrt{7}-1$
6. 18
7. $-\dfrac{11}{2}$
8. 21
9. $n^2$
10. $\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$
11. $c = 3$
12. $c = 1$
13. $c = 3$
14. $c = 2, -\dfrac{20}{13}$

## EJERCICIO 148

1. Sí es
2. No es
3. Sí es
4. No es
5. Sí es
6. Sí es
7. $a_8 = 23$
8. $a_{11} = \dfrac{7}{2}$
9. $a_{15} = \dfrac{103}{12}$
10. $a_{10} = 55$
11. $a_{16} = \dfrac{27}{4}$
12. $a_7 = 48$
13. $a_{12} = -5$
14. $a_{18} = 454$
15. $a_{13} = -27$
16. $a_{17} = \dfrac{11}{4}$
17. $a_1 = 7$
18. $r = -2$
19. $n = 9$
20. $r = -\dfrac{1}{4}$
21. $a_{11} = -28$
22. $a_1 = -15$
23. $n = 10$
24. $a_1 = 7$

25. $a_1 = -\frac{17}{6}$
26. $n = 10$
27. $r = \frac{1}{4}$
28. $a_5 = -\frac{15}{4}$
29. $a_7 = 8n - 5$
30. $a_4 = \frac{20n-7}{6}$

**EJERCICIO 149**

1. $S_8 = 176$
2. $S_9 = 9$
3. $S_8 = 31$
4. $S_9 = 648$
5. $S_{13} = -78$
6. $S_{12} = 450$
7. $S_{11} = 0$
8. $S = 40\,600$
9. $S = \frac{n(n+1)}{2}$
10. $S = n(n+1)$
11. $S = n^2$
12. $n = 12$
13. $n = 10$
14. $a_1 = -9$
15. $a_1 = 2$, $a_n = 100$

**EJERCICIO 150**

1. 365 lugares
2. 518 ladrillos
3. $1 375
4. 9 rollos
5. 18 filas

**EJERCICIO 151**

1. $27\frac{1}{2}, 34, 40\frac{1}{2}, 47, 53\frac{1}{2}$
2. $6\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}, 11, 12\frac{1}{2}, 14, 15\frac{1}{2}$
3. $1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}$
4. $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}$
5. $-2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0$
6. $\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{11}{6}$
7. Promedio = 8.24

**EJERCICIO 152**

1. 8 años
2. 9.8 de calificación
3. Promedio = 9
4. Promedio $= \frac{a_1 + a_n}{2}$
5. 7 hileras *y* constan de 80, 76, 72, 68, 64, 60, 56 tejas
6. 8 hileras de 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82 *y* 86 tejas

**EJERCICIO 153**

1. Sí es
2. Sí es
3. No es
4. No es
5. No es
6. Sí es
7. $a_6 = -81$
8. $a_9 = \frac{128}{2187}$
9. $a_5 = -80$
10. $a_7 = \frac{5}{128}$
11. $a_{10} = -\frac{1}{2187}$
12. $a_8 = \frac{1}{16}$
13. $a_{12} = \frac{32}{243}$
14. $a_9 = m^{24}$
15. $a_{10} = n^{14}$
16. $a_7 = \frac{n^3}{n+1}$
17. $a_{13} = 2^{27x-16}$
18. $a_9 = a_1 r^{16}$
19. $a_1 = 2$
20. $a_2 = 4$
21. $r = \frac{1}{3}$
22. $r = \frac{3}{4}$
23. $n = 5$
24. $n = 8$
25. $n = 9$
26. $a_1 = \frac{1}{4}$
27. $a_4 = \frac{1}{m^4}$
28. $a_{11} = 2^{\frac{23}{6}x-9}$

**EJERCICIO 154**

1. $9, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -1$

   $9, 3, 1, -1$
2. 4 096 células
3. 3, 5, 7
4. 6 células
5. 30 388 bacterias
6. $a_t = 25\,000(1.05)^{3t}$
7. $339 814.7
8. 67 392 bebés
9. 4 $cm^2$

**EJERCICIO 155**

1. $S_6 = -\frac{364}{27}$
2. $S_7 = \frac{2059}{486}$
3. $S_9 = -855$
4. $S_{10} = \frac{989\,527}{2187}$
5. $S_{15} = \frac{32\,767}{8}$
6. $S_{18} = 524\,286$
7. $S_{12} = 1\,092 + 364\sqrt{3}$
8. $S_{10} = 31 - 31\sqrt{2}$
9. $S_{12} = \frac{n^{21} - n}{n-1}$
10. $S_9 = 511 \cdot 2^{x-2}$
11. $S_n = \frac{a_1(r^{2n} - 1)}{r^2 - 1}$
12. $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$
13. $n = 8$
14. $r = \frac{1}{2}$
15. $a_1 = 27$
16. $a_n = \frac{1}{64}$
17. $a_1 = -2$
18. $r = \frac{3}{2}$
19. $n = 7$

**EJERCICIO 156**

1. 5 461 triángulos
2. 127 personas
3. 65 761.7 ton.
4. 34 316.76 partos
5. 1.01 % por año, 110.4 millones

**EJERCICIO 157**

1. $S = -4$
2. $S = \frac{9}{4}$
3. $S = 9$
4. $S = \frac{27}{4}$
5. $S = \frac{23}{8}$
6. $r = \frac{3}{5}$
7. $r = \frac{1}{3}$
8. $S = \frac{4}{3}$ $cm^2$
9. $S = 2\,048$ $cm^2$

**EJERCICIO 158**

1. 1, 2, 4, 8, 16
2. 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$
3. – 6, –12, – 24, – 48
4. 6, 24, 96, 384, 1 536
5. 6, $6\sqrt{3}$ , 18
6. $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{32}{27}, \frac{128}{81}$
7. – 64, – 32, – 16, – 8, – 4, – 2
8. $\frac{(x-1)^3}{3}, \frac{(x-1)^4}{9}, \frac{(x-1)^5}{27}$
9. $a$, 2, $\frac{4}{a}$
10. 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$
11. $3\sqrt{6}$
12. $-4\sqrt{2}$
13. $5\sqrt{5}$
14. 12
15. $\sqrt[3]{36}$
16. $8\sqrt[3]{2}$
17. $3\sqrt{3}$
18. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

**EJERCICIO 159**

1. \$25 937.4
2. \$64 390.28
3. \$49 783.2
4. \$43 346.6
5. \$13 324.4
6. \$18 824.8
7. \$1 292.2
8. \$8 723.2
9. \$8 682.5
10. \$188 542
11. \$17 483
12. $\begin{cases}\text{2.5\% trimestral}\\ \text{10\% anual}\end{cases}$
13. 14.86%
14. 7%
15. 11.1 años
16. 9 955 habitantes
17. 3 años
18. \$655 446.5
19. 3%
20. \$12 244.5

**EJERCICIO 160**

1. \$55 700.19
2. \$3 652.26
3. 25%
4. 8%
5. \$156 738.56
6. 20%
7. 10 años de vida útil

# CAPÍTULO 16

**EJERCICIO 161**

1. $a = 2, b = -1$
2. $x = -2, y = 4, z = 0$
3. $q = 2, r = 1, t = 1,$
4. $x = 7, y = 1, z = -2$

**EJERCICIO 162**

1. $A+B=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

2. $A+B=\begin{bmatrix}-4 & 7 & 4\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}8 & -7 & -2\end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix}26 & -21 & -5\end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\end{bmatrix}$

3. $A+B=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 3 & -6\\ 3 & 4\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}6 & -12\\ -1 & 6\\ 1 & -10\end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix}20 & -43\\ -2 & 18\\ 5 & -33\end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix}4 & -14\\ 2 & 0\\ 4 & -6\end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix}3 & -9 & 3\\ 1 & -4 & 8\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 7 & -8 & -6\end{bmatrix}, A-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix}5 & 6 & -16\\ 25 & -30 & -17\end{bmatrix}, 2A-0B=\begin{bmatrix}4 & -6 & -2\\ 8 & -12 & 2\end{bmatrix}$

5. $A+B=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{16}{3} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{3} & -2 & 10\\ \frac{23}{3} & 1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}\frac{7}{5} & \frac{14}{3} & \frac{1}{8}\\ -\frac{1}{3} & 8 & -6\\ \frac{19}{3} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$

   $A-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, 4A-3B=\begin{bmatrix}\frac{23}{5} & 19 & \frac{1}{2}\\ -1 & 27 & -16\\ 26 & -\frac{8}{5} & \frac{9}{2}\end{bmatrix}$

   $2A-0B=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & 10 & \frac{1}{4}\\ 0 & 6 & 4\\ 14 & \frac{2}{5} & 0\end{bmatrix}$

6. $\{\ a=7, b=2, c=2, d=5, v=-3, w=4$
7. $\{\ n=-3, w=-10, x=3, y=6$
8. $\{\ v=4, w=-2, x=3, y=7, z=2$

**EJERCICIO 163**

1. $AB=\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -5 & -7\end{bmatrix}$
2. $AB=\begin{bmatrix}5 & -5\end{bmatrix}$
3. $BA=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -5 & 0\\ -6 & 1\end{bmatrix}$
4. $AB=\begin{bmatrix}-7 & -7 & -4\\ -5 & -5 & -8\end{bmatrix}$
5. $AB=\begin{bmatrix}-8 & -8\\ -2 & -4\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -8 & -8\end{bmatrix}$
6. $AB=\begin{bmatrix}12 & -7\\ -5 & 2\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 8 & 13\end{bmatrix}$
7. $AB=\begin{bmatrix}-1 & 25\\ -1 & 7\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -3\\ 7 & 5 & 3\end{bmatrix}, A(BC)=\begin{bmatrix}74 & 98\\ 20 & 26\end{bmatrix}$
8. $AB=\begin{bmatrix}11 & 3\\ 4 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}, A(B-2C)=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix}, A(BC)=\begin{bmatrix}17 & -3\\ 8 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

**EJERCICIO 164**

1. $\det A = 22$
2. $\det B = 8$
3. $\det C = -50$
4. $\det D = 43$
5. $\det E = 122$

**EJERCICIO 165**

1. $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14}\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

2. $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

3. $C^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

4. $D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{6}{7} & \frac{2}{7}\\ -\frac{12}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}6 & 2\\ -12 & 3\end{bmatrix}$

5. $E^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}$

6. $F^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{24} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{8}\end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}-3 & 18 & -3\\ 6 & -12 & 6\\ 5 & -14 & -3\end{bmatrix}$

7. $G^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{1}{17} & -\frac{11}{34} & -\frac{4}{17}\\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{4}{17}\end{bmatrix}=\frac{1}{34}\begin{bmatrix}-10 & 4 & 6\\ 2 & -11 & -8\\ 2 & 6 & -8\end{bmatrix}$

8. $H^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\\ -2 & 6 & 18\\ -2 & 6 & 8\end{bmatrix}$

9. $J^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{43}{6} & \frac{49}{6} & -\frac{19}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{67}{6} & -\frac{79}{6} & \frac{31}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{16}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}43 & 49 & -19 & 1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -67 & -79 & 31 & -1\\ -32 & -38 & 14 & -2\end{bmatrix}$

**EJERCICIO 166**

1. $\begin{cases}x=5\\ y=-2\end{cases}$

2. $\begin{cases}m=-4\\ n=2\end{cases}$

3. $\begin{cases}a=11\\ b=-10\end{cases}$

4. $\begin{cases}a=4\\ b=-3\\ c=2\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=5\\ y=2\\ z=-1\end{cases}$

6. $\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=-2\end{cases}$

## CAPÍTULO 17

**EJERCICIO 167**

1. $(x-1)$ y $(x-5)$
2. $(x+1)$ y $(2x+3)$
3. $(x+2)(3x-2)$ y $(x-2)$
4. $(x+1)$ y $(x+3i)$
5. $(x+2i)$ y $(x-2i)$
6. $(x),(x+1-i)$ y $(x+2+3i)$
7. Residuo $-72$
8. Residuo $-\frac{9}{2}$
9. Residuo $\frac{273}{2}$
10. Residuo 12
11. Residuo 264
12. Residuo $-240$
13. $k=2$
14. $k=3$, $k=-6$
15. $k=6$, $k=\frac{46}{3}$
16. $k=4$, $k=-\frac{167}{73}$
17. $k=4$, $k=-\frac{1}{3}$
18. Todos son raíces
19. Todos son raíces
20. Ninguno es raíz
21. $x=-1$, $x=\frac{11}{2}$
22. $x=2+i$, $x=-\frac{3}{5}$
23. $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{3}$
24. $x=2i$, $x=-2i$
25. $x=4$, $x=\frac{3}{5}$
26. $f(x)=x^3+4x^2-5x$
27. $f(x)=x^3+4x^2-9x-36$
28. $f(x)=3x^3-x^2+48x-16$
29. $f(x)=8x^3+2x^2-43x-30$
30. $f(x)=x^4-5x^3-13x^2+133x-260$
31. $f(x)=6x^4-5x^3+7x^2-5x+1$
32. $f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$
33. $f(x)=x^3-x^2-x+1$
34. $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$
35. $f(x)=x^4-6x^2+8x-3$
36. $f(x)=x^4-4x^3+16x-16$
37. $f(x)=x^5+2x^4-x-2$
38. $x=-1$, $x=1$, $x=5$
39. $x=5$, $x=4$, $x=3$
40. $x=1\frac{1}{5}$, $x=-\frac{2}{3}$, $x=4$
41. $x=-\frac{5}{2}$, $x=-2+i$, $x=-2-i$
42. $x=2$, $x=-3$, $x=7$, $x=0$
43. $x=-4i$, $x=4i$, $x=-2$, $x=3$
44. $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{5}{2}$, $x=-1+i$, $x=-1-i$
45. $x=-i$, $x=i$, $x=-4$, $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$

# Solución a los ejercicios de geometría y trigonometría

## CAPÍTULO 2

### EJERCICIO 1

1. 40.1708º
2. 61.7058º
3. 1.03416º
4. 73.6777º
5. 9.1525º
6. 98.3791º
7. 40º 19' 12"
8. 61º 14' 24"
9. 18º 15' 18"
10. 29º 24' 39"
11. 19º 59' 24"
12. 44º 00' 36"

### EJERCICIO 2

1. $\frac{7}{6}\pi$ *rad* = 3.665 *rads*
2. $\frac{5}{3}\pi$ *rad* = 5.236 *rads*
3. $\frac{5}{4}\pi$ *rad* = 3.927 *rads*
4. $\frac{5}{2}\pi$ *rad* = 7.854 *rads*
5. $\frac{2}{5}\pi$ *rad* = 1.256 *rads*
6. $\frac{5}{9}\pi$ rad = 1.745 *rads*
7. $\frac{1}{6}\pi$ *rad* = 0.523 *rad*
8. $\frac{11}{6}\pi$ *rad* = 5.759 *rads*
9. $\frac{2}{3}\pi$ *rad* = 2.094 *rads*
10. $\frac{3}{4}\pi$ *rad* = 2.356 *rads*
11. $\frac{4523}{18000}\pi$ *rad* = 0.789 *rad*
12. $\frac{1283}{1800}\pi$ *rad* = 2.239 *rads*
13. $\frac{2711}{3240}\pi$ *rad* = 2.628 *rads*
14. $\frac{33601}{14400}\pi$ *rad* = 7.330 *rads*

### EJERCICIO 3

1. 120º
2. 330º
3. 135º
4. 240º
5. 1260º
6. 20º
7. 468º
8. 15º
9. 90º
10. 270º
11. 9º 38' 34"
12. 64º 10' 37"
13. 360º
14. 28º 38' 52"

### EJERCICIO 4

1. 55º 46' 50"
2. 40º 13' 15"
3. 49º 19' 33"
4. 59º 19' 45"
5. 108º 7' 48"
6. 75º 44' 22"
7. 246º 34' 15"
8. 875º 11'40"
9. 383º 51' 21"
10. 227º 3' 18"
11. 4º 33' 11"
12. 15º 41' 18"
13. 3º 21' 41"
14. 13º 15' 18"

### EJERCICIO 5

1. Suplementarios
2. Complementarios
3. Conjugados
4. Conjugados
5. Conjugados
6. Complementarios
7. Suplementarios
8. Complementarios
9. Conjugados
10. Suplementarios
11. 10º
12. 57º
13. 80º
14. 30º
15. 18º
16. 20º
17. 36º
18. 120º
19. *a)* $\angle COB = 30º$, $\angle BOA = 60º$
    *b)* $\angle AOB = 45º$, $\angle BOC = 30º$, $\angle COD = 15º$
    *c)* $\angle AOB = 50º$, $\angle DOB = 130º$
    *d)* $\angle AOB = 65º$, $\angle BOC = 45º$, $\angle COD = 70º$
    *e)* $\angle AOB = 30º$, $\angle BOC = 90º$, $\angle COD = 60º$
    *f)* $\angle AOB = \angle COD = 45º$, $\angle BOC = 55º$, $\angle DOE = 35º$
    *g)* $\angle AOB$ (convexo) = 134º, $\angle AOB$ (cóncavo) = 226º
    *h)* $\angle AOB$ (convexo) = 50º, $\angle AOB$ (cóncavo) = 310º

### EJERCICIO 6

1. 135º
2. 115º.
3. $\theta = 25º$, $\alpha = 30º$
4. O63º 18'S, S26º 42'O
5. 22º 30'
6. 115°
7. 292° 30'
8. 12:30 *h*
9. 48 $\pi$ *rad*
10. 3:40 *h*

## CAPÍTULO 3

### EJERCICIO 7

1. $x = 60º$, $\angle a = 60º$, $\angle b = 120º$
2. $x = 46.5º$, $\angle a = \angle b = \angle e = 46.5º$, $\angle c = \angle d = \angle f = 133.5º$
3. $x = 40º$, $\angle a = \angle b = \angle e = 80º$, $\angle c = \angle d = \angle f = 100º$
4. $\angle a = \angle c = 137º$, $\angle b = 43º$
5. $\angle a = \angle c = \angle d = \angle g = 47º$, $\angle b = \angle e = \angle f = 133º$
6. $x = 25º$
7. $x = 26º$, $\angle a = 128º$, $\angle b = 52º$
8. $\angle 10 = \angle 4 = \angle 7 = 70º$, $\angle 1 = \angle 13 = \angle 16 = 110º$
9. $x = 115º$, $y = 65º$
10. $x = 40º$, $y = 110º$
11. $x = 80º$, $y = 60º$
12. $R = 120º$
13. $\angle a = \angle c = \angle e = \angle f = 126º$, $\angle b = \angle d = 54º$
14. $\angle n = \angle z = 50º$, $\angle m = \angle s = \angle y = \angle r = 130º$
15. $\angle x = \angle q = \angle p = \angle k = 35º$, $\angle y = \angle r = \angle s = 145º$
16. $\angle q = \angle z = \angle y = 60º$, $\angle r = \angle w = \angle p = 120º$
17. *a*), *b*), *d*) y *f*)

## CAPÍTULO 4

### EJERCICIO 8

1. 105°, 110°
2. 10°, 80°
3. 80°, 80°, 20°
4. 55°, 41°
5. 118º, 38º y 24º; 68º, 70º y 42º
6. $\theta = 54º$ y $\beta = 72º$
7. $\angle A = 35º$, $\angle B = 95º$, $\angle C = 50º$
8. $ABC = 69º$, $BCA = 73º$, $BAC = 38º$, $ACD = 107º$, $CDA = 35º$, $CAD = 38º$

**EJERCICIO 9**

1. Teorema II (*LAL*) $x = 85°$ $y = 12$
2. Teorema III (*ALA*) $x = 13$ $y = 19.8$
3. Teorema I (*LLL*) $x = 32°$ $y = 62°$

**EJERCICIO 10**

1 a 8. No se incluye la solución por ser demostraciones.

**EJERCICIO 11**

1. $a = 36º$, $b = 8º$ 4. $x = 25$, $y = 14$
2. $x = 15$, $y = 45$ 5. $a = 12º$, $b = 25º$
3. $x = 15º$, $y = 20º$

**EJERCICIO 12**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $x = 3$ | 4. $x = 7, x = 0$ | 7. $x = \pm 6y$ | 10. $x = 3$ |
| 2. $x = 7.2$ | 5. $x = \pm\ 4\sqrt{2}$ | 8. $x = \pm 5$ | |
| 3. $x = \pm 9$ | 6. $x = 2$ | 9. $x = \pm 4$ | |

**EJERCICIO 13**

1. $a' = 3$, $c' = 5$
2. $a = 30$, $b' = 16$
3. Lados 12 y 22; $x = 11$, $y = 36$
4. Lados 8 y 4; $x = 7$, $y = 5$
5. Lados 8 y 6; $u = 3$, $t = 10$
6. Lados 10 y 9; $x = 5$, $y = 3$

**EJERCICIO 14**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $x = 10$ | 4. $x = \frac{12}{5}$ | 7. $x = 4$ | 10. $x = 30$ |
| 2. $x = \frac{9}{2}$ | 5. $x = \frac{25}{3}$ | 8. $x = \frac{27}{22}$ | |
| 3. $x = 6$ | 6. $x = 16$ | 9. $x = 10$ | |

**EJERCICIO 15**

| | | |
|---|---|---|
| 1. 68 *m* | 3. 160 *m* | 5. *a*) 28 *m* |
| 2. 481.6 *m* | 4. 15 *m* | *b*) 120 *m* |

**EJERCICIO 16**

| | | |
|---|---|---|
| 1. $c = 25$ | 8. $b = 5\sqrt{2}$ | 15. Acutángulo |
| 2. $c = \sqrt{41}$ | 9. $c = 3\sqrt{5}\ m$ | 16. Rectángulo |
| 3. $c = 4\sqrt{5}$ | 10. $b = 5\ m$ | 17. Rectángulo |
| 4. $c = 7\sqrt{2}$ | 11. $c = \sqrt{421}\ cm$ | 18. Obtusángulo |
| 5. $b = 16$ | 12. $a = 5\sqrt{7}\ dm$ | 19. Rectángulo |
| 6. $a = 2\sqrt{7}$ | 13. Obtusángulo | 20. Acutángulo |
| 7. $c = 8$ | 14. Rectángulo | 21. Rectángulo |

22. *a*) $2\sqrt{15}$, *b*) $5\sqrt{13}$, *c*) $2\sqrt{10}$, *d*) $6\sqrt{21}$ *e*) $\frac{40}{3}$, *f*) $\frac{91\sqrt{218}}{218}$, *g*) $\frac{169}{60}\sqrt{30}$

**EJERCICIO 17**

| | |
|---|---|
| 1. $100\sqrt{73}\ m$ | 6. $\sqrt{91}\ m$ |
| 2. $2\sqrt{5}\ m$ | 7. $5\ cm$ |
| 3. $40\ cm$ | 8. $8\sqrt{3}\ cm$ |
| 4. $5\sqrt{3}\ cm$ | 9. $9\sqrt{2}\ km$ |
| 5. $4\sqrt{2}\ m$ | 10. $5\sqrt{2}\ cm$ |

11. $\frac{2\sqrt{2}}{3}m$, $\frac{m}{3}$

12. $2\sqrt{\frac{4m^2 - n^2}{15}}$, $2\sqrt{\frac{4n^2 - m^2}{15}}$ y $2\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{5}}$

## CAPÍTULO 5

**EJERCICIO 18**

1. $\angle A = \angle C = 140°$, $\angle B = 40°$
2. $\angle DCA = 40°$, $\angle CAD = 60°$, $\angle DAB = \angle DCB = 100°$, $\angle D = \angle B = 80°$
3. $\angle ADC = \angle B = 110°$, $\angle A = \angle C = 70°$
4. $x = 30°$, $z = 120°$, $y = 60°$
5. $x = 127°$, $y = 53°$
6. $x = 120°$, $y = 55°$, $z = 125°$
7. $x = 60°$, $y = 120°$, $z = 60°$
8. $x = 15°$, $y = 70°$, $z = 110°$

**EJERCICIO 19**

1 a 6. No se incluye la solución por ser demostraciones.

**EJERCICIO 20**

| | | |
|---|---|---|
| 1. $x = 4\ cm$ | 4. $\angle NPO = 24º$ | 7. $\overline{MN} = 20\ u$ |
| 2. 4 y 8 $u$ | 5. $x = 20º$, y = 68º | 8. $\overline{AB} = a$, $\overline{IJ} = b$ |
| 3. 41 $u$ | 6. $\overline{AB} = 11\ cm$ | 9. $\overline{AE} = 5$ |

## CAPÍTULO 6

**EJERCICIO 21**

1. $d = 8$
2. Icoságono
3. $d = 7$
4. Dodecágono
5. Nonágono
6. *a*) 170, *b*) 54, *c*) 27, *d*) 9, *e*) 90, *f*)14, *g*) 104, *h*) 135, *i*) 44
7. Heptágono
8. Hexadecágono
9. Heptadecágono
10. Nonadecágono
11. Heptágono
12. Undecágono
13. Pentágono
14. Tridecágono
15. Dodecágono
16. Octágono
17. Icoságono

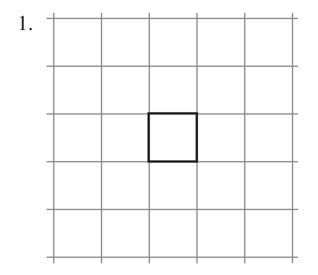
**Ejercicio 22**

1. *a*) 120°, *b*) 135°, *c*) 150°, *d*) 162°, *e*) 160°, *f*) 171° 25'42"
2. *a*) 540°, *b*) 1 440°, *c*) 2 340°, *d*) 1 080°, *e*) 1 980°, *f*) 6 300°
3. Nonágono (nueve lados)
4. Heptágono (siete lados)
5. Hexadecágono (16 lados)
6. Undecágono (11 lados)
7. Hexágono (seis lados)
8. Hexadecágono (16 lados)
9. Nonágono (nueve lados)
10. Dodecágono (12 lados)
11. Octágono (ocho lados)
12. Triángulo
13. Hexágono (seis lados)
14. Pentadecágono (15 lados)
15. Nonágono (nueve lados)
16. Pentágono (cinco lados)
17. 54°, 129.6°, 129.6°, 108° y 118.8°
18. 110°, 100°, 115°, 135° y 80°
19. 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210° y 240°
20. $\angle A = 70°$, $\angle B = 65°$, $\angle C = 10°$, $\angle D = 110°$ y $\angle E = 105°$
21. $\angle A = 54°$, $\angle B = 64°$, $\angle C = 116°$, $\angle D = 64°$, $\angle E = 17°$ y $\angle F = 45°$

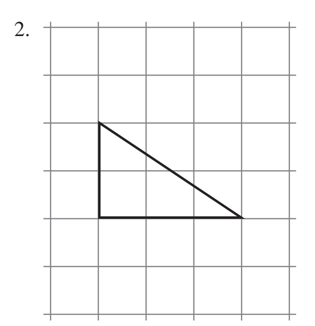
## Capítulo 7

**Ejercicio 23**

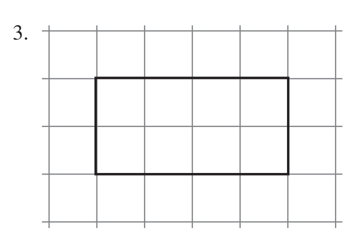
1.



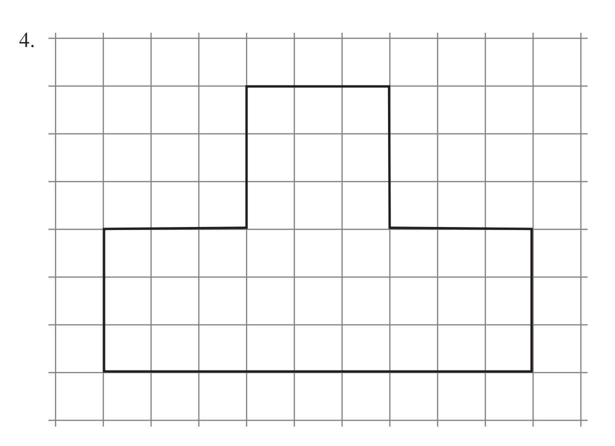
2.



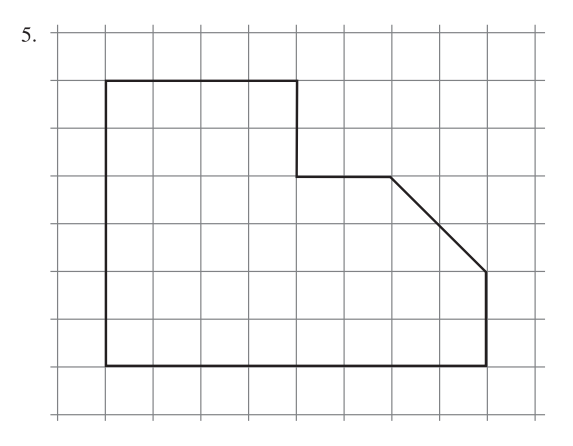
3.



4.

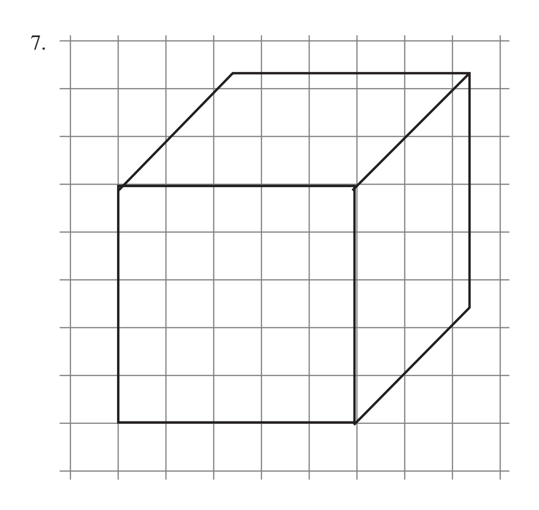


5.

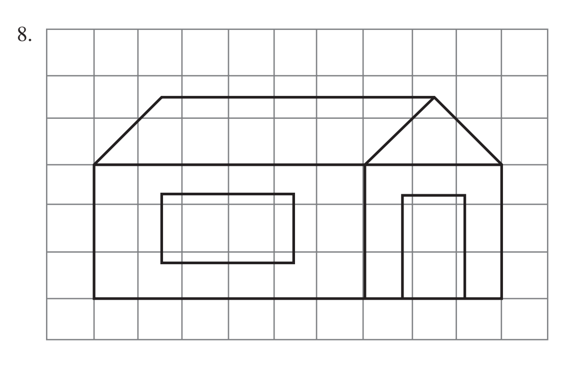


6.

7.

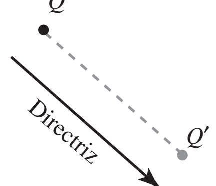


8.

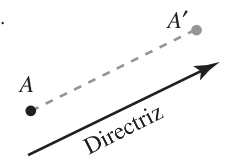


**Ejercicio 24**

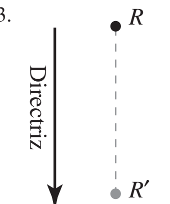
1.



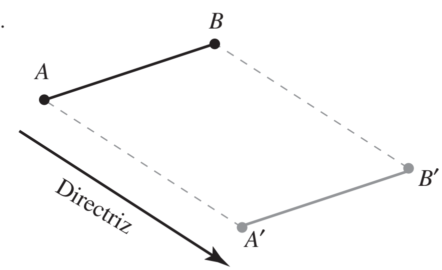

2.



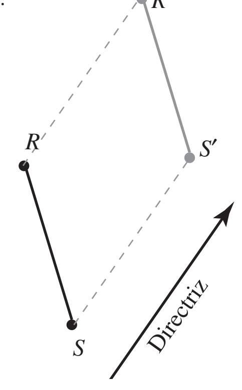

3.



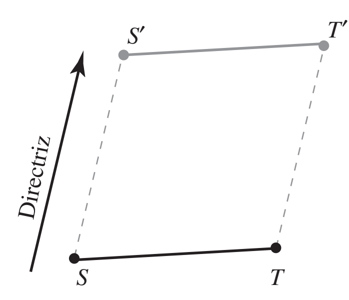

4.



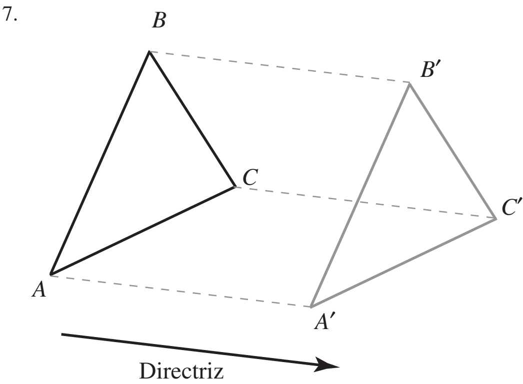

5.



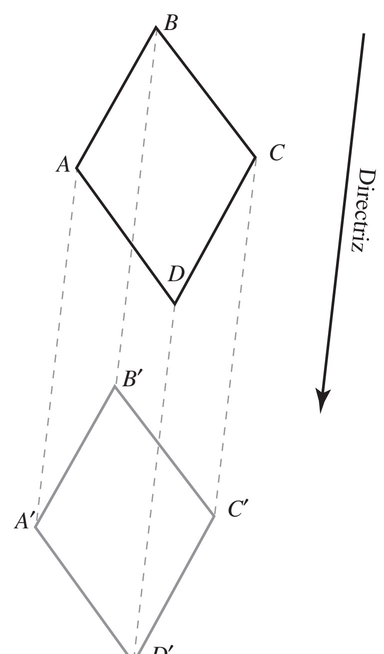

6.

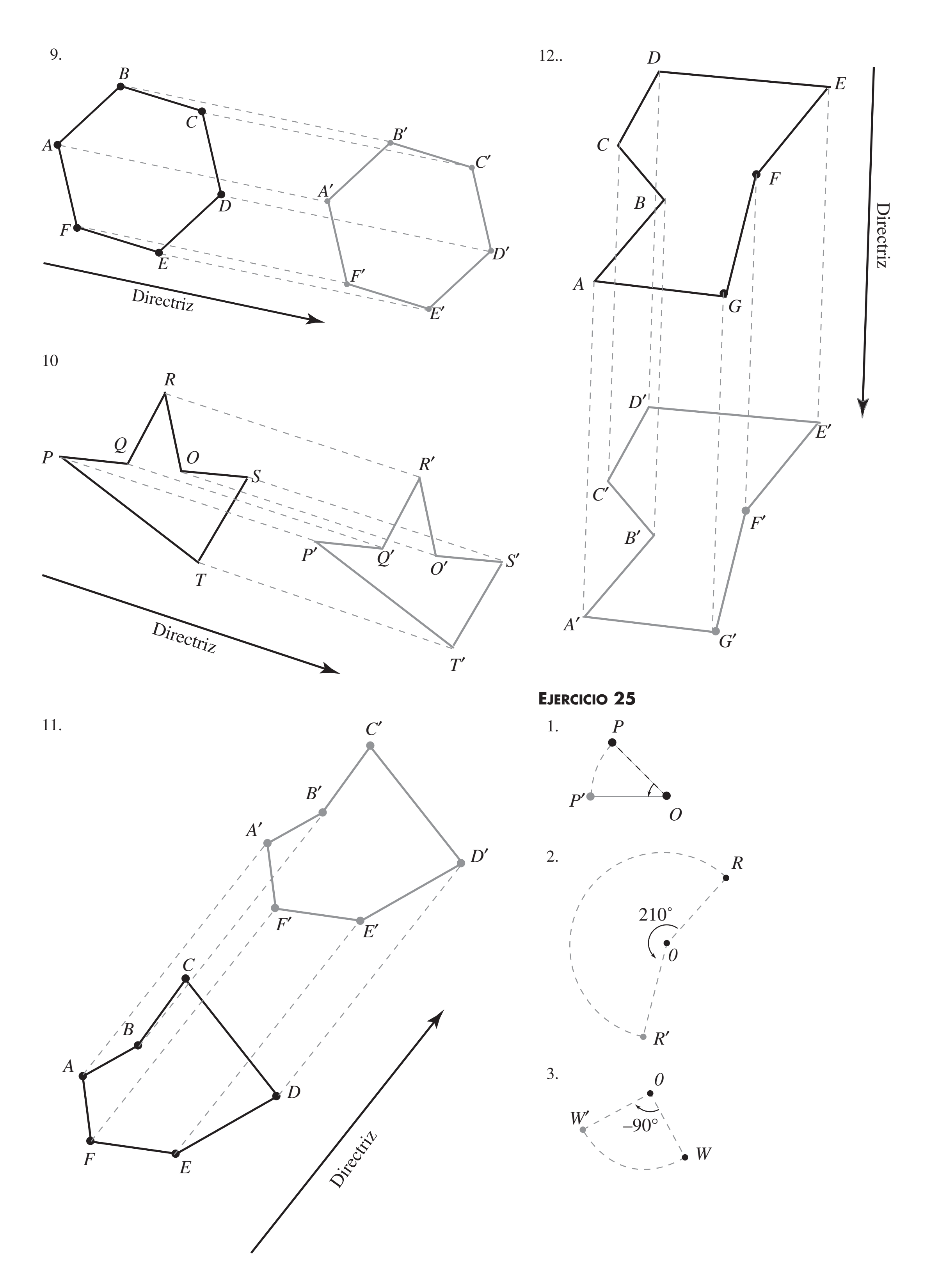


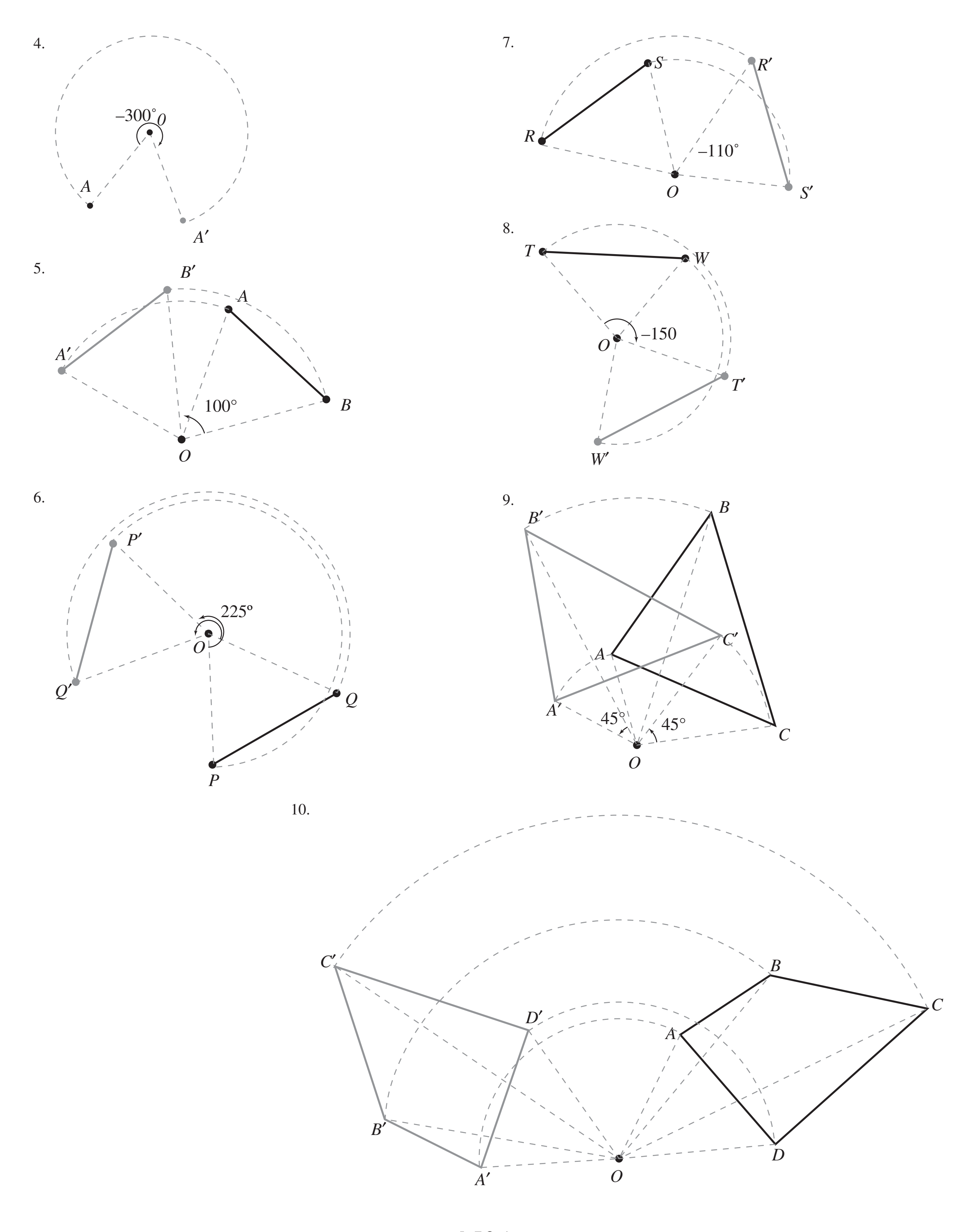

7.



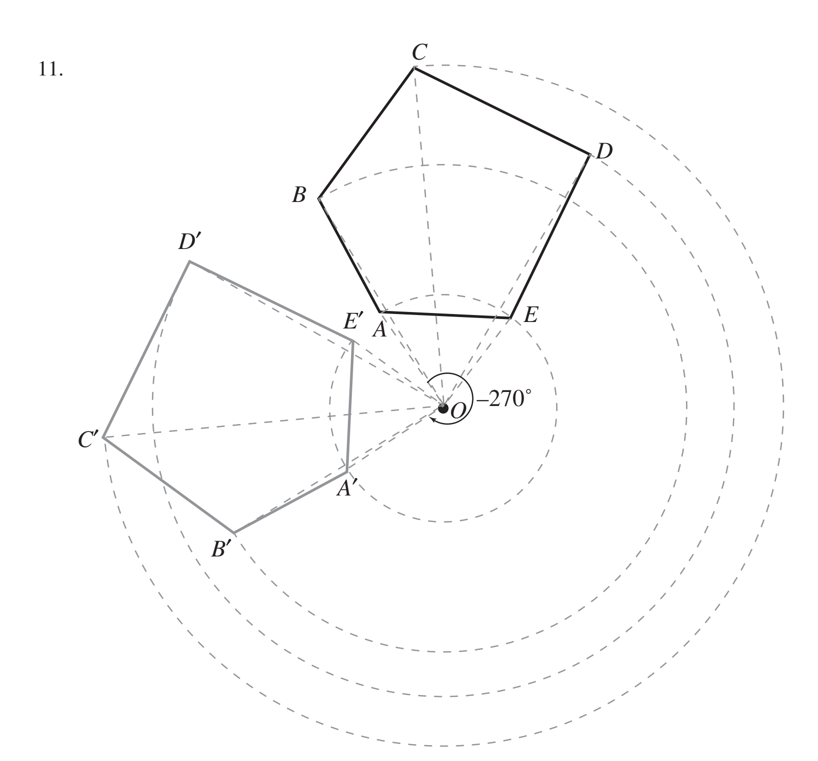

8.



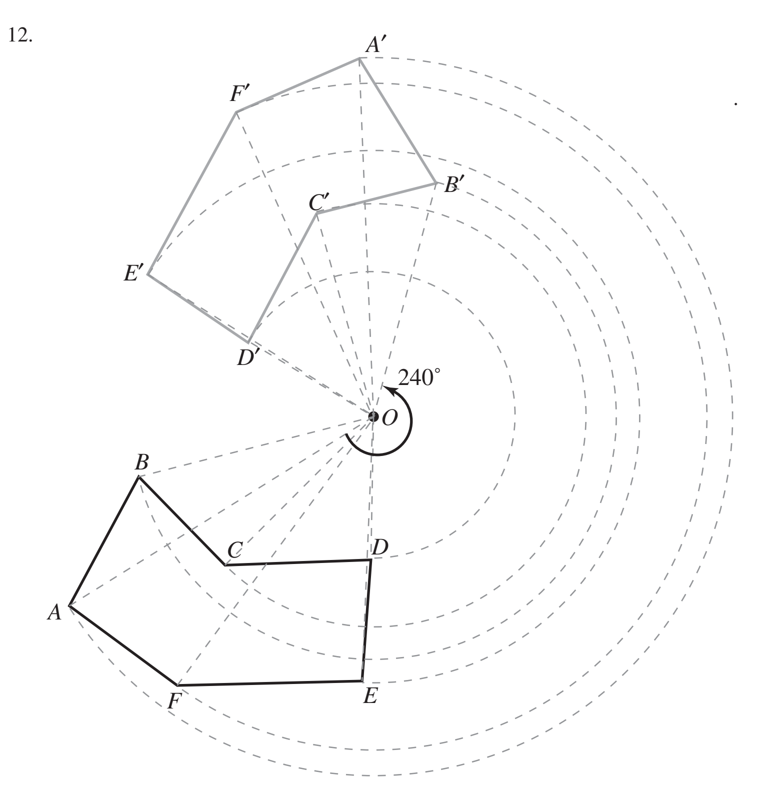

9.
A B C D E F
A′ B′ C′ D′ E′ F′
Directriz
10
P Q R O S T
P′ Q′ R′ O′ S′ T′
Directriz
11.
A B C D E F
A′ B′ C′ D′ E′ F′
Directriz
12..
A B C D E F G
A′ B′ C′ D′ E′ F′ G′
Directriz
Ejercicio 25
1.
P P′ O
2.
R R′ 0
210°
3.
0 W W′
–90°


4.
–300°
O
A
A′
5.
B′
A
A′
100°
B
O
6.
P′
225°
O
Q′
Q
P
7.
S
R′
R
–110°
O
S′
8.
T
W
O
–150
T′
W′
9.
B′
B
C′
A
A′
45°
45°
C
O
10.
C′
B
C
D′
A
B′
A′
O
D

11.

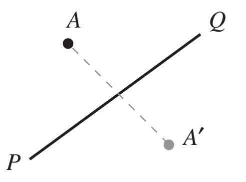



12.

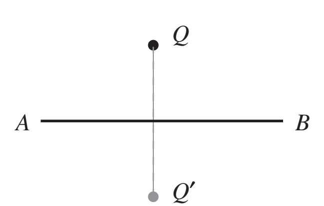


**EJERCICIO 26**

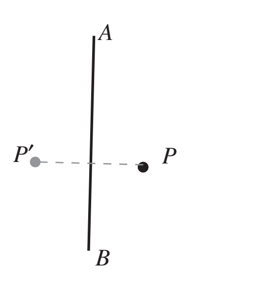
1.



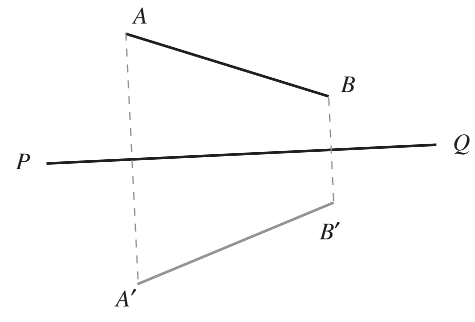

2.



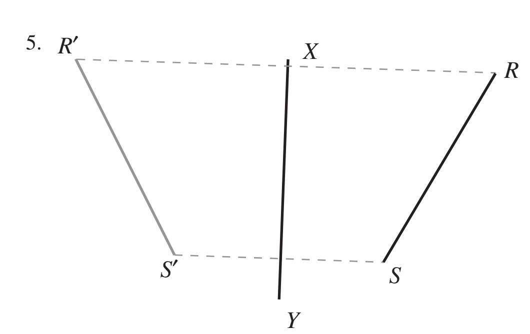

3.



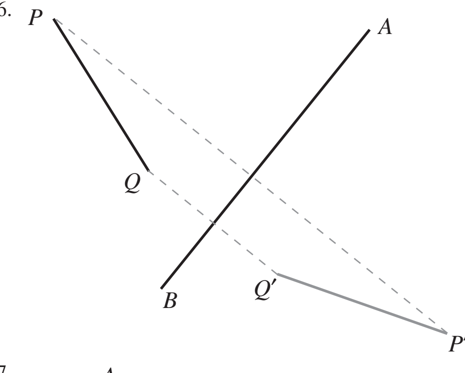

4.



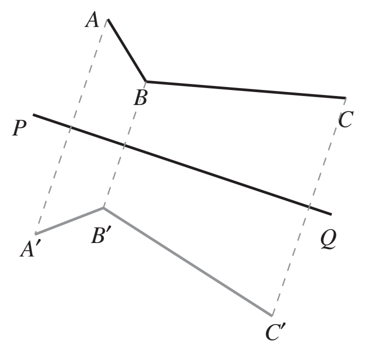

5.



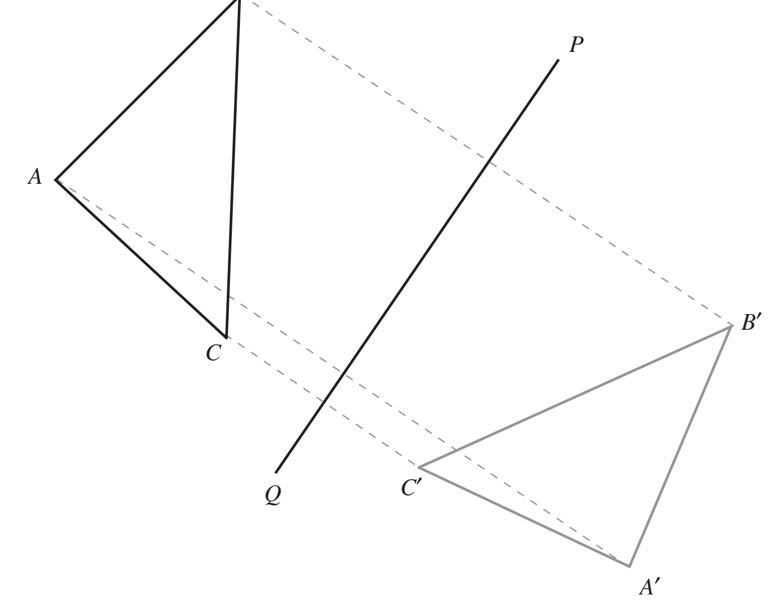

6.

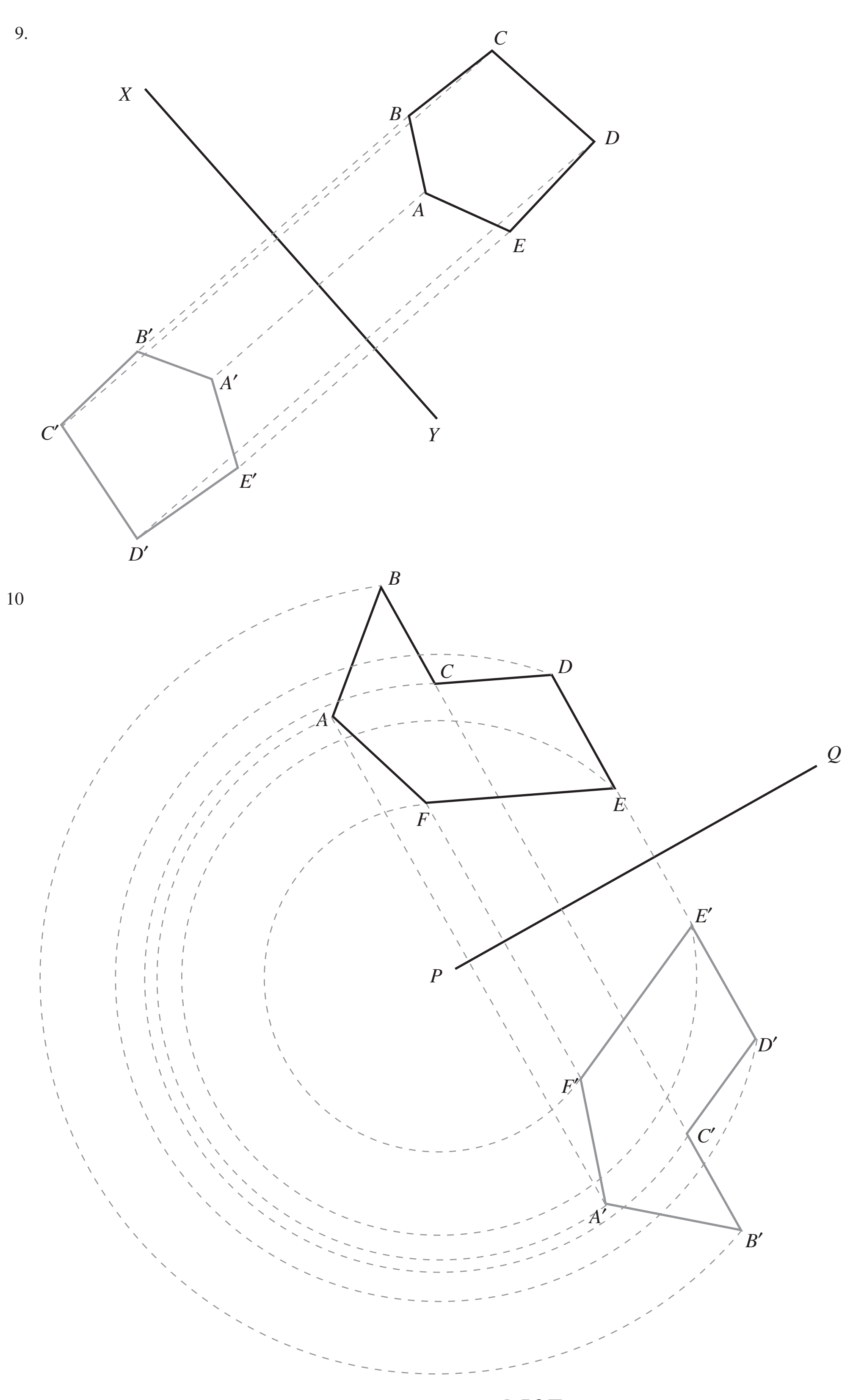



7.

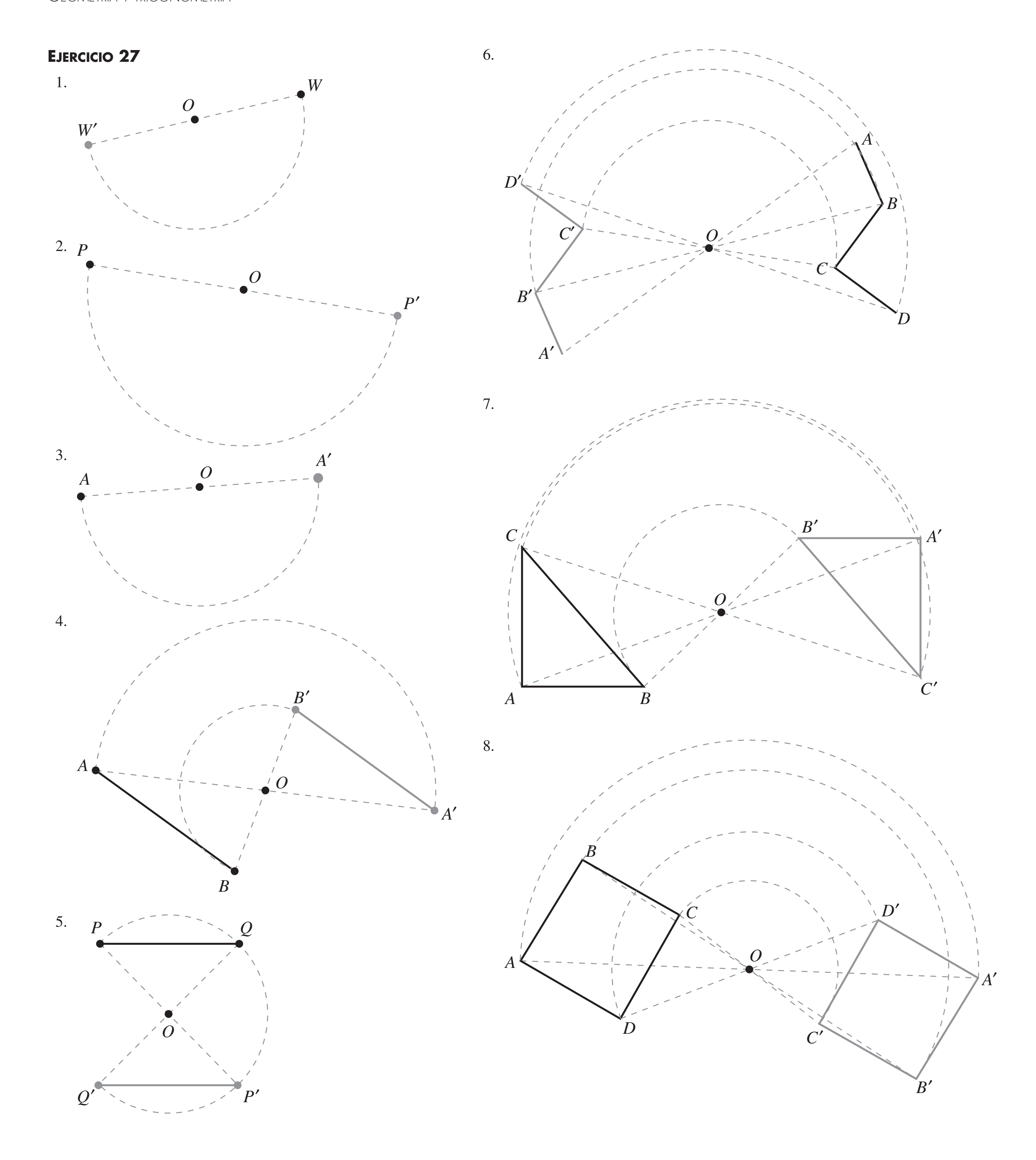



8.

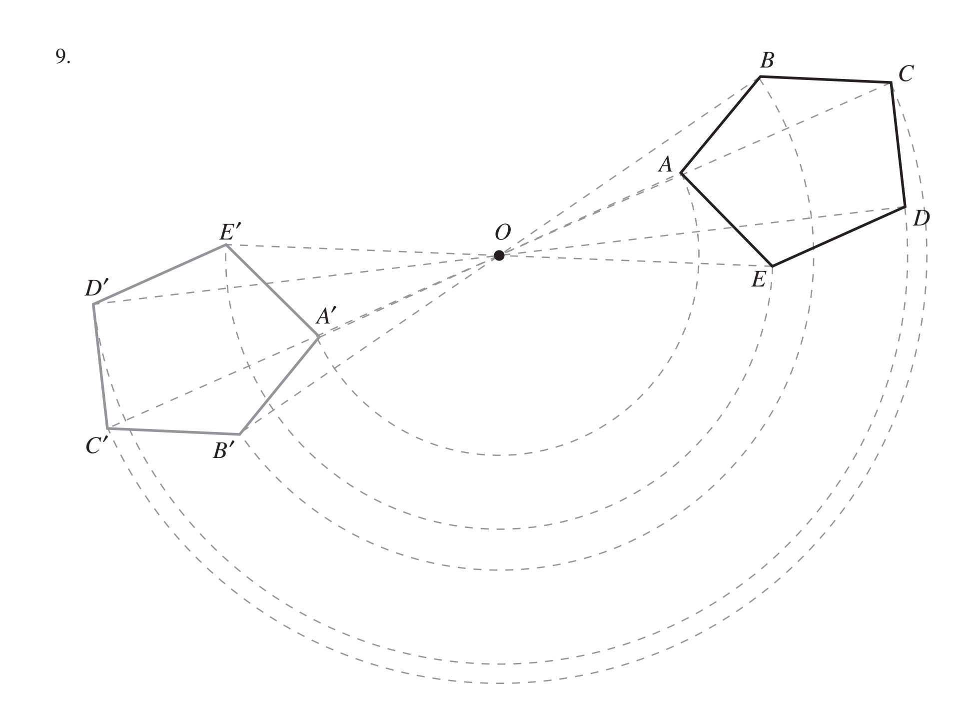



9.
C
X
B
D
A
E
B′
A′
C′
Y
E′
D′
10
B
D
C
A
Q
F
E
E′
P
D′
F′
C′
A′
B′

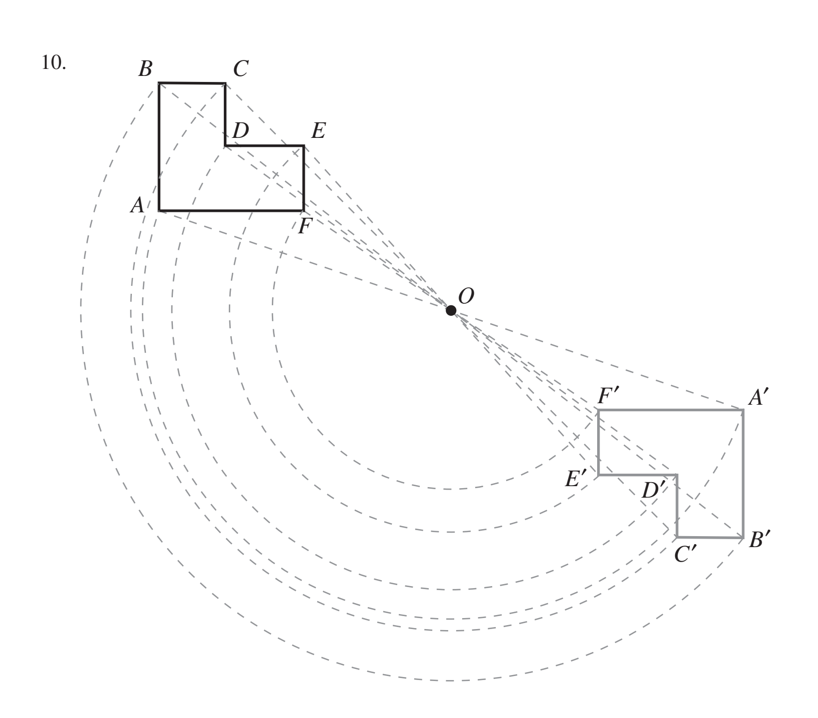
**EJERCICIO 27**



9.




10.



## CAPÍTULO 8

### EJERCICIO 28

1. $\angle ABC = 30°$, $\angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 104°$, $\overset{\frown}{AD} = 116°$
2. $\angle a = 75°$, $\angle b = 50°$, $\angle c = 55°$, $\angle d = 55°$, $\angle e = 50°$, $\angle f = 75°$
3. $\angle ABC = 27.5° = 27°30'$
4. $\angle ABC = 85°$, $\angle DBA = 95°$
5. $\angle A = 105°$, $\angle B = 95°$, $\angle C = 75°$, $\angle D = 85°$
6. *a)* $\angle A = 30°$, *b)* $\angle A = 40°$
7. $\angle a = 60°$, $\angle b = 15°$, $\angle c = 25°$, $\angle d = 30°$, $\angle e = 50°$
8. *a)* $\angle A = 15°$, *b)* $\angle A = 40°$, *c)* $\angle A = 30°$, *d)* $\widehat{a} = 35°$
   *e)* $\widehat{c} = 120°$, *f)* $\widehat{c} - \widehat{a} = 140°$, *g)* $\widehat{a} = 70°$, *h)* $\widehat{a} = 40°$
9. $\angle u = 120°$, $\angle x = 60°$, $\angle y = 30°$, $\angle w = 60°$, $\angle z = 90°$
10. $\angle a = 90°$, $\angle b = 90°$, $\angle c = 90°$, $\angle d = 90°$, $\angle e = 25°$, $\angle f = 25°$,
    $\angle g = 65°$, $\angle h = 65°$, $\angle i = 40°$

### EJERCICIO 29

1. *a)* 10.8, *b)* 7.8, *c)* 9.4
2. *a)* 10.09, *b)* 16.2, *c)* 17.29

### EJERCICIO 30

1. Exteriores
2. Tangentes exteriores
3. Interiores
4. Secantes
5. Tangentes interiores
6. Tangentes exteriores
7. $3r$
8. $2u$
9. $2\sqrt{3}\ u$
10. 5 *cm*
11. $\overline{C_1C_3} = \frac{7}{18}R$, $\overline{C_1C_2} = \frac{1}{6}R$
12. $r$
13. $\frac{\sqrt{5}}{2}R$

## CAPÍTULO 9

### EJERCICIO 31

1. $P = 8.4\ m$, $A = 4.25\ m^2$
2. $P = 24.9\ m$, $A = 29.4\ m^2$
3. $P = 38.6\ m$, $A = 82.5\ m^2$
4. $P = 52.5\ m$, $A = 118.12\ m^2$
5. $P = 40.0\ m$, $A = 110\ m^2$
6. $P = 65.4\ m$, $A = 37.375\ m^2$
7. $P = 36\ cm$, $A = 81\ cm^2$
8. $P = 10\ m$, $A = 6\ m^2$
9. $A = 150\ m^2$
10. $A = (x^2 - 3x + 2)m^2$
11. $A = 63\ dm^2$
12. $A = 17.5\ dm^2$
13. $A = 900\pi\ cm^2$
14. $A = 81\pi\ cm^2$
15. $A = 400\ cm^2$
16. $ 2.6/$m^2$
17. $ 725.5
18. Altura = 36 *m*, base = 27 *m*
19. Altura = 10 *m*
20. 80 círculos, $1280\pi\ cm^2$
21. *a)* $12\sqrt{14}\ u^2$, *b)* $2\sqrt{255}\ u^2$,
    *c)* $\frac{15}{4}\sqrt{15}\ u^2$
22. $x = 9$, $A = 98\ m^2$
23. *a)* $2\pi\ cm^2$, *b)* $\frac{1}{6}\pi\ cm^2$,
    *c)* $\frac{9}{4}\pi\ cm^2$, *d)* $\frac{32}{3}\pi\ cm^2$
24. *a)* $(\pi - 2)cm^2$
    *b)* $\frac{3}{2}\ (\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\ )cm^2$
    *c)* $16(\pi - 2)cm^2$

### EJERCICIO 32

1. *a)* $\overline{TS} = 24\ cm$, *b)* $\overline{BC} = 13\ cm$, *c)* $P = 44\ cm$, $A = 14\sqrt{11}\ cm^2$
2. $A = 84\ cm^2$
3. $A = 2r^2(4 - \pi)$
4. $A = 3\pi r^2$
6. $A = 25(2\sqrt{3} - \pi)dm^2$
7. $A_s = 25(4 - \pi)\ cm^2$
8. $A_s = 100\pi\ dm^2$
9. $A_s = 64(4 - \pi)\ mm^2$
10. $A_s = 4(10 + \pi)\ dm^2$
11. $A_s = 196(4 - \pi)\ cm^2$
12. $A_s = 1\,152(\pi - 2)\ mm^2$
    $P = 96\pi\ mm$
13. $A_s = 32(6 - \pi)mm^2$
14. $A_s = 128(\pi - 2)\ mm^2$
15. $A_s = 256(4 - \pi)\ cm^2$
16. *a)* $A = 3\sqrt{3}\ dm^2$
    *b)* $A = 256\sqrt{3}\ dm^2$
17. $A_s = 36\pi\ cm^2$
18. $A_s = \frac{1}{8}\pi\ cm^2$
19. $A_s = 2\ cm^2$,
    $P = 2(1 + \pi)cm$
20. $A_s = \frac{5}{2}\pi\ cm^2$
    $P = (6 + 4\pi)cm$

## CAPÍTULO 10

### EJERCICIO 33

1. $A_T = 4\sqrt{3}\ cm^2$, $V_T = \frac{2}{3}\sqrt{2}\ cm^3$
2. $A_T = 3\sqrt{3}\ cm^2$, $V_T = \frac{\sqrt{6}}{4}\ cm^3$
3. $A_T = 72\ cm^2$, $V_T = 24\sqrt{3}\ cm^3$
4. $A_T = 150\ cm^2$, $V_T = 125\ cm^3$
5. $A_T = 72\sqrt{3}\ cm^2$, $V_T = 72\sqrt{2}\ cm^3$

6. $A_T = 6\sqrt{3}\ cm^2,\ V_T = \sqrt{6}\ cm^3$
7. $A_T = \left(60\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right) cm^2,\ V_T = (350 + 150\sqrt{5})cm^3$
8. $A_T = \left(12\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right) cm^2,\ V_T = (30 + 14\sqrt{5})cm^3$
9. $A_T = 15\sqrt{3}\ cm^2,\ V_T = \left(\frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{4}\right) cm^3$
10. $A_T = 250\sqrt{3}\ dm^2,\ V_T = \left(\frac{1875\sqrt{2}+625\sqrt{10}}{6}\right) dm^3$
11. $A_T = 9\sqrt{3}\ cm^2$
12. $V_T = \frac{27\sqrt{6}}{4}\ cm^3$
13. $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$
14. $V_T = 2\sqrt{2}\ cm^3$
15. $L = \sqrt[3]{2}\ m,\ A_T = 6\sqrt[3]{4}\ m^2$
16. $h = 6\sqrt{2}\ cm,\ A_T = 72\sqrt{3}\ cm^2$
17. $V_T = \frac{4}{3}\ cm^3$
18. $V_T = 36\ cm^3$
19. $V_T = \frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{10}}{6}\ cm^3$
20. $V_T = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt[4]{75}\sqrt{A_t^{\,3}}}{180}$

**EJERCICIO 34**

1. $A_L = 50\ cm^2,\ A_T = 62\ cm^2,\ V_T = 30\ cm^3$
2. $A_L = 72\ cm^2,\ A_T = (72+8\sqrt{3})cm^2,\ V_T = 24\sqrt{3}cm^3$
3. $A_L = 16\ cm^2,\ A_T = 18\ cm^2,\ V_T = 4\ cm^3$
4. $A_L = 97.5\ cm^2,\ A_T = \frac{195+75\sqrt{3}}{2}\ cm^2,\ V_T = \frac{975}{8}\sqrt{3}\ cm^3$
5. $A_L = \left(16\sqrt{2}+8\right) cm^2,\ A_T = \left(24\sqrt{2}+8\right) cm^2,\ V_T = 16\ cm^3$
6. $A_L = 16\ cm^2,\ A_T = 24\ cm^2,\ V_T = 8\ cm^3$
7. $A_L = 64\sqrt{3}\ cm^2,\ A_T = \left(64\sqrt{3}+24\right) cm^2,\ V_T = 96\ cm^3$
8. $A_L = 400\ cm^2,\ A_T = 400\left(2+\sqrt{2}\right) cm^2,\ V_T = 1000\left(1+\sqrt{2}\right) cm^3$
9. $A_L = 1200\ cm^2,\ A_T = 300\left(4+\sqrt{5}\right) cm^2,\ V_T = 3000\sqrt{3}\ cm^3$
10. $A_L = 16\sqrt{3}\ cm^2$
11. $V_T = 27u^3$
12. $A_L = 48\ cm^2$
13. $V_T = \frac{21}{4}\ cm^3$
14. $A_T = \frac{180+25\sqrt{3}}{2}\ cm^2$
15. $V_T = \frac{81}{2}\ cm^3$
16. $A_L = 16\left(1+\sqrt{2}\right) cm^2$
17. $V_T = \frac{\sqrt{6A_t^{\,3}}}{36}$
18. $V_T = \frac{\sqrt{A_L^{\,3}}}{8}$
19. $V_T = \frac{27\sqrt{2}}{4}\ cm^3$
20. $A_L = 3\sqrt[3]{3V_t^2}$

**EJERCICIO 35**

1. $A_L = 3\sqrt{55}\ cm^2,\ A_T = \left(9+3\sqrt{55}\right) cm^2,\ V_T = 12\ cm^3$
2. $A_L = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ cm^2,\ A_T = \sqrt{3}\ cm^2,\ V_T = \frac{\sqrt{2}}{12}\ cm^3$
3. $A_L = 12\sqrt{7}\ cm^2,\ A_T = \left(12\sqrt{7}+7\sqrt{3}\right) cm^2,$
   $V_T = \frac{35\sqrt{3}}{3}\ cm^3$
4. $A_L = 38.4\ cm^2,\ A_T = 64\ cm^2,\ V_T = 81.92\ cm^3$
5. $A_L = 30\pi\ cm^2,\ A_T = 48\pi\ cm^2,\ V_T = 45\pi\ cm^3$
6. $A_L = 32\pi\ cm^2,\ A_T = 64\pi\ cm^2,\ V_T = 64\pi\ cm^3$
7. $A_L = 7\sqrt{150}\ \pi\ cm^2,\ A_T = \left(7\sqrt{150}+49\right)\pi\ cm^2,$
   $V_T = 147\pi\ cm^3$
8. $A_L = 4\sqrt{17}\ \pi\ cm^2,\ A_T = \left(4+4\sqrt{17}\right)\pi\ cm^2,$
   $V_T = \frac{32}{3}\pi\ cm^3$
9. $A_L = \frac{15\sqrt{3}}{4}\pi\ cm^2,\ A_T = \frac{5}{4}\left(5+3\sqrt{3}\right)\pi\ cm^2$
   $V_T = \frac{25\sqrt{3}}{6}\pi\ cm^3$
10. $A_L = 3\pi\ cm^2,\ A_T = 4\pi\ cm^2,\ V_T = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\ cm^3$
11. $V_T = 12\ cm^3$
12. $V_T = 8\ cm^3$
13. $V_T = 12\sqrt{46}\ cm^3$
14. $V_T = \frac{560}{3}\ cm^3$
15. $A_B = 24\sqrt{3}\ cm^2$
16. $V_T = 24\pi\ cm^3$

17. $A_L = 70\pi\ cm^2$
18. $V_T = 12\pi\ cm^3$
19. $A_T = 48\pi\ cm^2$
20. $A_T = \frac{1}{2}\sqrt[3]{18\left(1+\sqrt{5}\right)^3 \pi V_T^{\,2}}$

**EJERCICIO 36**

1. $A = 64\pi\ cm^2,\ V = \frac{256}{3}\pi\ cm^3$
2. $V = 180\sqrt{5}\ \pi\ cm^3$
3. $V = 6\pi\ cm^3$
4. $V = 270\pi\ cm^3$
5. $A = 60\pi\ cm^2$
6. $A = 96\pi\ cm^2$
7. $V = \frac{28}{3}\pi\ cm^3$
8. $V = \frac{52}{3}\pi\ cm^3$
9. $V = 339\pi\ cm^3$,
   $A = 72\pi\ cm^2$
10. $V = \frac{211}{216}\pi\ cm^3$
11. $A = \frac{200}{3}\pi\ cm^2$
12. $n = 120º$
13. $V = 72\sqrt{3}\ \pi\ cm^3$
14. $r = \frac{9}{2}\ cm,\ A = 9\pi\ cm^2$
    $V = \frac{243}{2}\pi\ cm^3$

## CAPÍTULO 11

**EJERCICIO 37**

Inciso 1)

*a)*

$sen\ A = \frac{2\sqrt{14}}{9}$ $cos\ A = \frac{5}{9}$ $tan\ A = \frac{2\sqrt{14}}{5}$

$ctg\ A = \frac{5\sqrt{14}}{28}$ $sec\ A = \frac{9}{5}$ $csc\ A = \frac{9\sqrt{14}}{28}$

$sen\ B = \frac{5}{9}$ $cos\ B = \frac{2\sqrt{14}}{9}$ $tan\ B = \frac{5\sqrt{14}}{28}$

$ctg\ B = \frac{2\sqrt{14}}{5}$ $sec\ B = \frac{9\sqrt{14}}{28}$ $csc\ B = \frac{9}{5}$

*b)*

$sen\ M = \frac{10\sqrt{149}}{149}$ $cos\ M = \frac{7\sqrt{149}}{149}$ $tan\ M = \frac{10}{7}$

$ctg\ M = \frac{7}{10}$ $sec\ M = \frac{\sqrt{149}}{7}$ $csc\ M = \frac{\sqrt{149}}{10}$

$sen\ N = \frac{7\sqrt{149}}{149}$ $cos\ N = \frac{10\sqrt{149}}{149}$ $tan\ N = \frac{7}{10}$

$ctg\ N = \frac{10}{7}$ $sec\ N = \frac{\sqrt{149}}{10}$ $csc\ N = \frac{\sqrt{149}}{7}$

*c)*

$sen\ A = \frac{2}{3}$ $cos\ A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $tan\ A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$ctg\ A = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $sec\ A = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ $csc\ A = \frac{3}{2}$

$sen\ B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $cos\ B = \frac{2}{3}$ $tan\ B = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$ctg\ B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $sec\ B = \frac{3}{2}$ $csc\ B = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

*d)*

$sen\ M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos\ M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tan\ M = 1$

$ctg\ M = 1$ $sec\ M = \sqrt{2}$ $csc\ M = \sqrt{2}$

$sen\ N = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos\ N = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tan\ N = 1$

$ctg\ N = 1$ $sec\ N = \sqrt{2}$ $csc\ N = \sqrt{2}$

Inciso 2)

*a)*

$sen\ \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $cos\ \theta = \frac{1}{5}$ $tan\ \theta = 2\sqrt{6}$

$ctg\ \theta = \frac{\sqrt{6}}{12}$ $sec\ \theta = 5$ $csc\ \theta = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

$sen\ \alpha = \frac{1}{5}$ $cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $tan\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$

$ctg\ \alpha = 2\sqrt{6}$ $sec\ \alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12}$ $csc\ \alpha = 5$

*b)*

$sen\ A = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $cos\ A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $tan\ A = \frac{3}{2}$

$ctg\ A = \frac{2}{3}$ $sec\ A = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $csc\ A = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$sen\ B = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $cos\ B = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $tan\ B = \frac{2}{3}$

$ctg\ B = \frac{3}{2}$ $sec\ B = \frac{\sqrt{13}}{3}$ $csc\ B = \frac{\sqrt{13}}{2}$

*c)*

$sen\ N = \frac{1}{2}$ $cos\ N = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tan\ N = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$ctg\ N = \sqrt{3}$ $sec\ N = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $csc\ N = 2$

$sen\ M = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ M = \frac{1}{2}$ $tan\ M = \sqrt{3}$

$ctg\ M = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $sec\ M = 2$ $csc\ M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

*d)*

$sen\ \theta = \frac{\sqrt{33}}{6}$ $cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $tan\ \theta = \sqrt{11}$

$ctg\ \theta = \frac{\sqrt{11}}{11}$ $sec\ \theta = 2\sqrt{3}$ $csc\ \theta = \frac{2\sqrt{33}}{11}$

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{33}}{6}$ $tan\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$

$ctg\ \alpha = \sqrt{11}$ $sec\ \alpha = \frac{2\sqrt{33}}{11}$ $csc\ \alpha = 2\sqrt{3}$

*e)*

$sen\ \beta = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $cos\ \beta = \frac{\sqrt{10}}{4}$ $tan\ \beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$

$ctg\ \beta = \frac{\sqrt{15}}{3}$ $sec\ \beta = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ $csc\ \beta = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$ $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$

$ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$ $sec\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ $csc\ \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

*f)*

$sen\ A = \frac{4\sqrt{29}}{29}$ $cos\ A = \frac{\sqrt{377}}{29}$ $tan\ A = \frac{4\sqrt{13}}{13}$

$ctg\ A = \frac{\sqrt{13}}{4}$ $sec\ A = \frac{\sqrt{377}}{13}$ $csc\ A = \frac{\sqrt{29}}{4}$

$sen\ B = \frac{\sqrt{377}}{29}$ $cos\ B = \frac{4\sqrt{29}}{29}$ $tan\ B = \frac{\sqrt{13}}{4}$

$ctg\ B = \frac{4\sqrt{13}}{13}$ $sec\ B = \frac{\sqrt{29}}{4}$ $csc\ B = \frac{\sqrt{377}}{13}$

## Ejercicio 38

1.

$sen\ \alpha = -\frac{5}{13}$ $cos\ \alpha = \frac{12}{13}$ $tan\ \alpha = -\frac{5}{12}$

$ctg\ \alpha = -\frac{12}{5}$ $sec\ \alpha = \frac{13}{12}$ $csc\ \alpha = -\frac{13}{5}$

2.

$sen\ \alpha = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$ $cos\ \alpha = -\frac{7\sqrt{65}}{65}$ $tan\ \alpha = \frac{4}{7}$

$ctg\ \alpha = \frac{7}{4}$ $sec\ \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{7}$ $csc\ \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{4}$

3.

$sen\ \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $cos\ \beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $tan\ \beta = \frac{3}{2}$

$ctg\ \beta = \frac{2}{3}$ $sec\ \beta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $csc\ \beta = \frac{\sqrt{13}}{3}$

4.

$sen\ \omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos\ \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tan\ \omega = -1$

$ctg\ \omega = -1$ $sec\ \omega = \sqrt{2}$ $csc\ \omega = -\sqrt{2}$

5.

$sen\ \alpha = -\frac{2}{3}$ $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $tan\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $sec\ \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$ $csc\ \alpha = -\frac{3}{2}$

6.

$sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{77}}{11}$ $cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ $tan\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

$ctg\ \alpha = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$ $sec\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{2}$ $csc\ \alpha = -\frac{\sqrt{77}}{7}$

7.

$sen\ \beta = \frac{2\sqrt{22}}{13}$ $cos\ \beta = -\frac{9}{13}$ $tan\ \beta = -\frac{2\sqrt{22}}{9}$

$ctg\ \beta = -\frac{9\sqrt{22}}{44}$ $sec\ \beta = -\frac{13}{9}$ $csc\ \beta = \frac{13\sqrt{22}}{44}$

8.

$sen\ \omega = -\frac{\sqrt{65}}{65}$ $cos\ \omega = \frac{8\sqrt{65}}{65}$ $tan\ \omega = -\frac{1}{8}$

$ctg\ \omega = -8$ $sec\ \omega = \frac{\sqrt{65}}{8}$ $csc\ \omega = -\sqrt{65}$

9.

$sen\ \delta = \frac{5}{13}$ $cos\ \delta = -\frac{12}{13}$ $tan\ \delta = -\frac{5}{12}$

$ctg\ \delta = -\frac{12}{5}$ $sec\ \delta = -\frac{13}{12}$ $csc\ \delta = \frac{13}{5}$

10.

$sen\ \beta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ $cos\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $tan\ \beta = \sqrt{2}$

$ctg\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $sec\ \beta = -\sqrt{3}$ $csc\ \beta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

11.

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ \alpha = -\frac{1}{2}$ $tan\ \alpha = -\sqrt{3}$

$ctg\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $sec\ \alpha = -2$ $csc\ \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

12.

$sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$ $tan\ \alpha = -\sqrt{3}$

$ctg\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $sec\ \alpha = 2$ $csc\ \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**EJERCICIO 39**

Inciso 1)

*a*) – *sen* 30° = –*cos* 60°

*b*) –*tan* 15° = –*ctg* 75°

*c*) *cos* 80° = *sen* 10°

*d*) *csc* 60° = *sec* 30°

*e*) *sec* 2° = *csc* 88°

*f*) –*sen* 60° 37’ 25” = –*cos* 29° 22’ 35”

*g*) –*ctg* 45° = –*tan* 45°

*h*) *tan* 74° 46’ 24” = *ctg* 15° 13’ 36”

*i*) –*cos* 84° 35’ = –*sen* 5° 25’

*j*) *sec* 39° 11’ 48” = *csc* 50° 48’ 12”

*k*) *csc* 53° = *sec* 37°

*l*) –*ctg* 48° = –*tan* 42°

*m*) *cos* 38° 54’ = *sen* 51° 6’

*n*) –*sen* 28° 35’ 24” = –*cos* 61° 24’ 36”

Inciso 2)

*a*) –*sen* 160°

*b*) –*ctg* 140°

*c*) *sec* 240°

*d*) *cos* 280°

*e*) –*tan* 345°

*f*) –*csc* 90°

*g*) *cos* 225° 15’ 46”

*h*) –*ctg* 176° 45’ 23”

*i*) *sec* 108° 32’

*j*) –*sen* 228°15’

Inciso 3)

*a*) –*sen* 20°

*b*) –*ctg* 20°

*c*) *cos* 80°

*d*) *tan* 45°

*e*) –*csc* 81° 27’ 48”

*f*) –*sec* 50°

*g*) –*sen* 55°

*h*) –*tan* 76° 34’ 42”

*i*) *cos* 68° 45’ 24”

*j*) *ctg* 20°

*k*) –*sec* 40°

*l*) –*csc* 31° 26’ 19”

Inciso 4)

*a*) 0.3090

*b*) 0.9657

*c*) 1.1034

*d*) 0.1219

*e*) 0.7536

*f*) 1.0187

*g*) 0.9261

*h*) 3.8208

*i*) 1.0170

*j*) 0.4975

## CAPÍTULO 12

**EJERCICIO 40**

| Grados | Radianes | sen | cos | tan | csc | sec | ctg |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 | No existe | 1 | No existe |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | No existe | 1 | No existe | 0 |
| 120° | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-2$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 135° | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $-1$ |
| 150° | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{3}$ |
| 180° | $\pi$ | 0 | $-1$ | 0 | No existe | $-1$ | No existe |
| 210° | $\frac{7\pi}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-2$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 225° | $\frac{5\pi}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $-\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | 1 |
| 240° | $\frac{4\pi}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-2$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ | $-1$ | 0 | No existe | $-1$ | No existe | 0 |
| 300° | $\frac{5\pi}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 315° | $\frac{7\pi}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $-1$ |
| 330° | $\frac{11\pi}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-2$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{3}$ |
| 360° | $2\pi$ | 0 | 1 | 0 | No existe | 1 | No existe |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 5. $\frac{3}{16}$ | 9. 1 | 13. –1 |
| 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 6. $\frac{1}{8}$ | 10. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | 14. 0 |
| 3. $\frac{3}{2}$ | 7. 9 | 11. 2 | 15. 2 |
| 4. 0 | 8. $\sqrt{2}$ | 12. 1 | |

16 a 20. No se incluye la solución por ser demostraciones.

## CAPÍTULO 13

### EJERCICIO 41

1. Amplitud: 2, Periodo: $\frac{2}{3}\pi$

   Desplazamiento de fase: $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

2. Amplitud: 2, Periodo: $\frac{1}{2}\pi$

   Desplazamiento de fase: 0, $\frac{1}{2}\pi$

3. Amplitud: $\frac{4}{3}$, Periodo: $3\pi$

   Desplazamiento de fase: $-\frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi$

4. Amplitud: 5, Periodo: $8\pi$

   Desplazamiento de fase: $-2\pi, 6\pi$

5. Amplitud: 4

   Periodo: $2\pi$

   Desplazamiento de fase: $\frac{3\pi}{4}, \frac{11}{4}\pi$

6. Amplitud: 3

   Periodo: $\pi$

   Desplazamiento de fase: 0, $\pi$

7. Amplitud: $\frac{3}{2}$

   Periodo: $\frac{2}{5}\pi$

   Desplazamiento de fase: $-\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{10}$

8. Amplitud: $\frac{1}{3}$

   Periodo: $8\pi$

   Desplazamiento de fase: $-\frac{4\pi}{3}, \frac{20\pi}{3}$

9. Amplitud: 1

   Periodo: $6\pi$

   Desplazamiento de fase: 0, $6\pi$

10. Periodo: $\frac{\pi}{2}$

    Asíntotas verticales: $\ldots, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \ldots$

    Desplazamiento de fase: no existe

11. Periodo: $\pi$

    Asíntotas verticales: $\ldots, -\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \ldots$

    Desplazamiento de fase: $-\frac{\pi}{4}$ a la izq.

12. Periodo: $\frac{\pi}{3}$

    Asíntotas verticales: $\ldots, -\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \ldots$

    Desplazamiento de fase: $\frac{\pi}{9}$ a la der.

13. Periodo: $2\pi$

    Asíntotas verticales: $\ldots, \pi, 3\pi, \ldots$

    Desplazamiento de fase: $2\pi$ a la der.

14. Periodo: $4\pi$

    Asíntotas verticales: $\ldots, 0, 4\pi, \ldots$

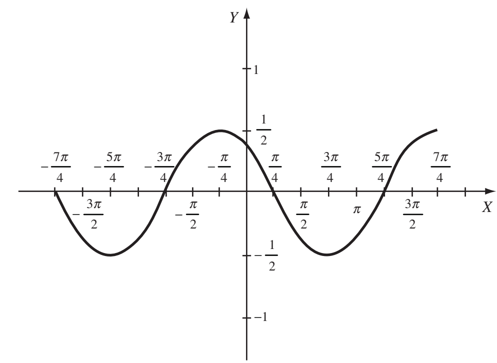
    Desplazamiento de fase: $2\pi$ a la der.

15. Periodo: $\pi$

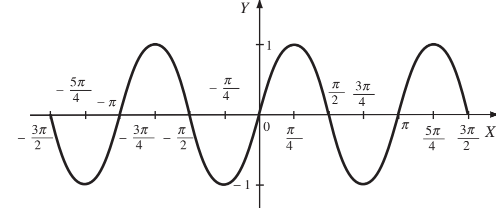
    Asíntotas verticales: $\ldots, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$

    Desplazamiento de fase: $\pi$ a la der.

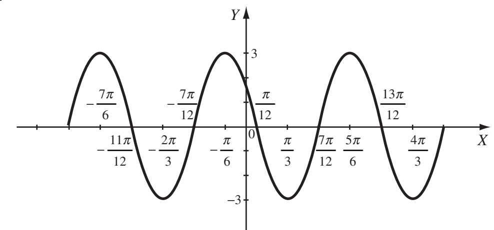
16.



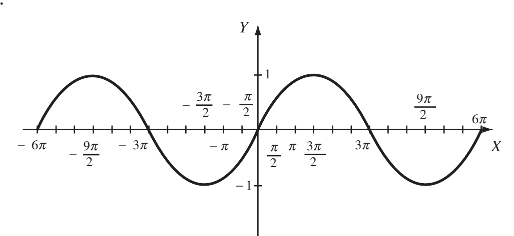

17.



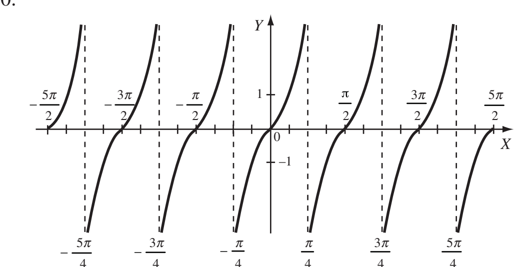
18.



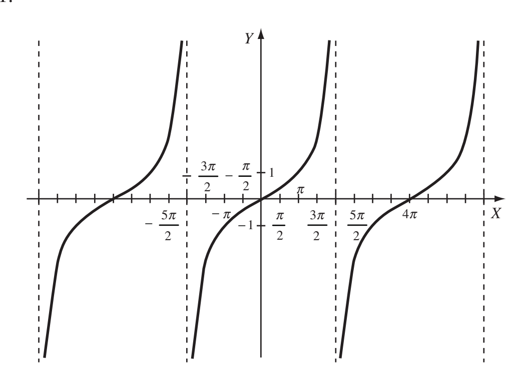

19.



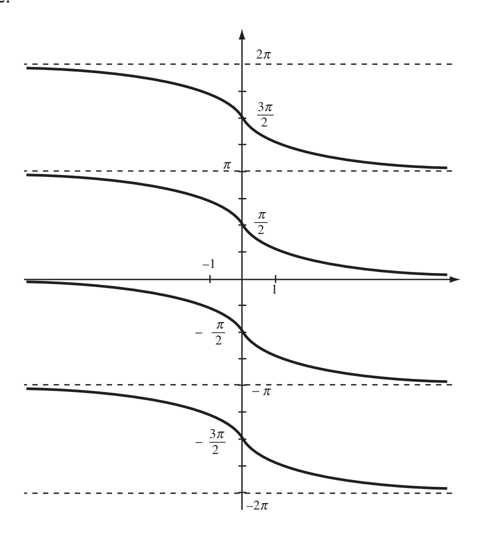

20.



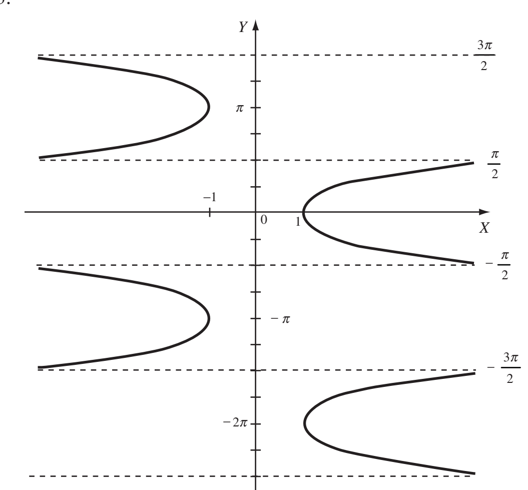

21.



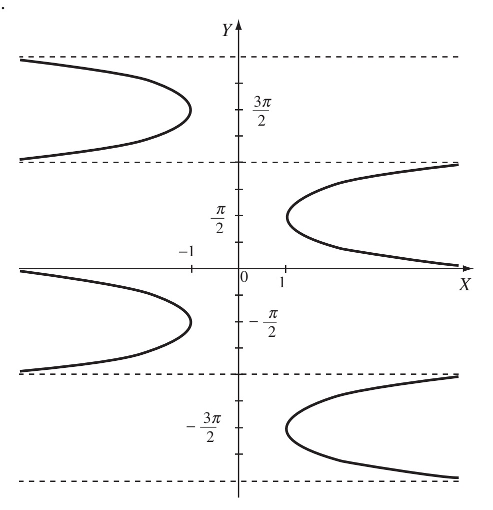

22.



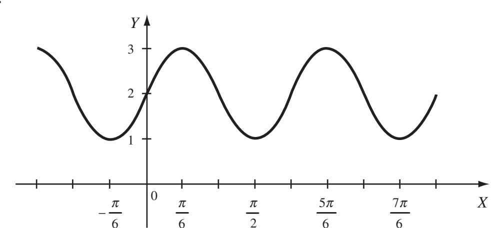

23.



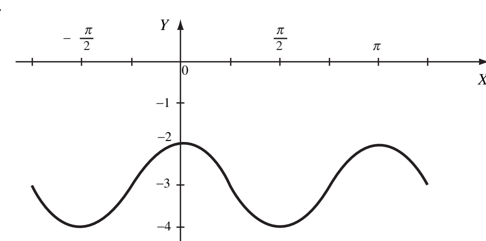

24.



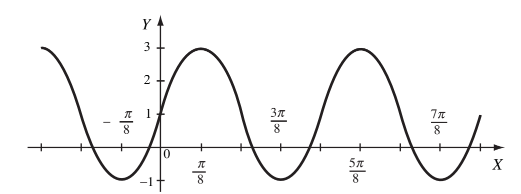
25.



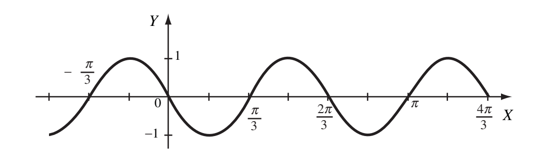

26.




27.




28.




## CAPÍTULO 14

### EJERCICIO 42

1 a 32. No se incluye la solución por ser demostraciones.

### EJERCICIO 43

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
3. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
4. $-1$
5. $-\sqrt{2}$
6. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $-\sqrt{3}$
8. $-\sqrt{2}$
9. $1$
10. $1$
11. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}sen\,\theta+cos\,\theta\right)$
12. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(sen\,x-cos\,x\right)$
13. $sen\,\beta$
14. $\frac{1}{tan\,x}=cot\,x$
15. $\frac{2}{\sqrt{3}cos\,\alpha-sen\,\alpha}$
16. $\frac{1-tan\,\beta}{1+tan\,\beta}$
17. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}sen\,x-\cos x\right)$
18. $-sec\,2\omega$
19. $-tan\,\alpha$
20. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(sen\,\theta+cos\,\theta\right)$

### EJERCICIO 44

1. $-\left(2+\sqrt{3}\right)$
2. $2-\sqrt{3}$
3. $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$
4. $-\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$
5. $2+\sqrt{3}$
6. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
7. $\sqrt{3}-2$
8. $-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
9. $\sqrt{2}-\sqrt{6}$
10. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
11. $sen\,(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{13}}{65}$, $cos\,(\alpha+\beta)=-\frac{18\sqrt{13}}{65}$,

    $tan\,(\alpha+\beta)=-\frac{1}{18}$
12. $sen\,(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

    $tan\,(\alpha-\beta)=-\left(2+\sqrt{3}\right)$
13. Funciones del ángulo $(\alpha+\beta)$

    $sen(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{9}\left(2+\sqrt{10}\right), cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$

    $tan(\alpha+\beta)=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}, ctg(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2}$,

    $sec(\alpha+\beta)=-\left(\sqrt{15}+2\sqrt{6}\right), csc(\alpha+\beta)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{30}$

    Funciones del ángulo $(\alpha-\beta)$

    $sen\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}\left(2-\sqrt{10}\right), cos\left(\alpha-\beta\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)$

    $tan\left(\alpha-\beta\right)=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\ , ctg\left(\alpha-\beta\right)=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2}$

    $sec\left(\alpha-\beta\right)=\sqrt{15}-2\sqrt{6}\ , csc\left(\alpha-\beta\right)=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{30}$

14 a 34. No se incluye la solución por ser demostraciones.

**EJERCICIO 45**

1.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\pi}{8}$

$sen\ \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{3}{8}\pi$

$sen\ \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{5}{8}\pi$

$sen\ \frac{5}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{5}{8}\pi = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{5}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{5}{8}\pi = -\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{5}{8}\pi = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{5}{8}\pi = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{7}{8}\pi$

$sen\ \frac{7}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{7}{8}\pi = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{7}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{7}{8}\pi = -\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{7}{8}\pi = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{7}{8}\pi = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

2.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$ $\quad ctg\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{31-8\sqrt{15}}$

$cos\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$ $\quad sec\ \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

$tan\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{31+8\sqrt{15}}$ $\quad csc\ \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $2\alpha$

$sen\ 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ $\quad ctg\ 2\alpha = -\frac{7\sqrt{15}}{15}$

$cos\ 2\alpha = \frac{7}{8}$ $\quad sec\ 2\alpha = \frac{8}{7}$

$tan\ 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$ $\quad csc\ 2\alpha = -\frac{8\sqrt{15}}{15}$

3.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\beta}{2}$

$sen\ \frac{\beta}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad ctg\ \frac{\beta}{2} = -\frac{2}{3}$

$cos\ \frac{\beta}{2} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\quad sec\ \frac{\beta}{2} = -\frac{\sqrt{13}}{2}$

$tan\ \frac{\beta}{2} = -\frac{3}{2}$ $\quad csc\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo $2\beta$

$sen\ 2\beta = \frac{120}{169}$ $\quad ctg\ 2\beta = -\frac{119}{120}$

$cos\ 2\beta = -\frac{119}{169}$ $\quad sec\ 2\beta = -\frac{169}{119}$

$tan\ 2\beta = -\frac{120}{119}$ $\quad csc\ 2\beta = \frac{169}{120}$

4.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\omega}{2}$

$sen\ \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad ctg\ \frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{39}}{3}$

$cos\ \frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad sec\ \frac{\omega}{2} = -\frac{4\sqrt{13}}{13}$

$tan\ \frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{39}}{13}$ $\quad csc\ \frac{\omega}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo $2\omega$

$sen\ 2\omega = -\frac{5\sqrt{39}}{32}$ $\quad ctg\ 2\omega = \frac{7\sqrt{39}}{195}$

$cos\ 2\omega = -\frac{7}{32}$ $\quad sec\ 2\omega = -\frac{32}{7}$

$tan\ 2\omega = \frac{5\sqrt{39}}{7}$ $\quad csc\ 2\omega = -\frac{32\sqrt{39}}{195}$

5.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{98+28\sqrt{7}}}{14}$ $\quad ctg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{33-12\sqrt{7}}}{3}$

$cos\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{98-28\sqrt{7}}}{14}$ $\quad sec\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{42+12\sqrt{7}}}{3}$

$tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{33+12\sqrt{7}}}{3}$ $\quad csc\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{42-12\sqrt{7}}}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo $2\alpha$

$sen\ 2\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$ $\quad ctg\ 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{12}$

$cos\ 2\alpha = \frac{1}{7}$ $\quad sec\ 2\alpha = 7$

$tan\ 2\alpha = -4\sqrt{3}$ $\quad csc\ 2\alpha = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$

6.

Funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$

$sen\ \alpha = \frac{2}{3}$ $\quad cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad tan\ \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\beta}{2}$

$sen\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{578+136\sqrt{17}}}{34}$ $\quad ctg\ \frac{\beta}{2} = -\sqrt{33-8\sqrt{17}}$

$cos\ \frac{\beta}{2} = -\frac{\sqrt{578-136\sqrt{17}}}{34}$ $\quad sec\ \frac{\beta}{2} = -\sqrt{34+8\sqrt{17}}$

$tan\ \frac{\beta}{2} = -\sqrt{33+8\sqrt{17}}$ $\quad csc\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{34-8\sqrt{17}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\beta$

$sen\ \beta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ $\quad ctg\ \beta = 4$

$cos\ \beta = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\quad sec\ \beta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$

$tan\ \beta = \frac{1}{4}$ $\quad csc\ \beta = -\sqrt{17}$

8.

Funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$

$sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad tan\ \alpha = 2$ $\quad sec\ \alpha = \sqrt{5}$

$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad ctg\ \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad csc\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

9.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\beta}{2}$

$sen\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad tan\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad sec\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$cos\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad ctg\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{2}$ $\quad csc\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\beta$

$sen\ \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad tan\ \beta = 2\sqrt{2}$ $\quad sec\ \beta = 3$

$cos\ \beta = \frac{1}{3}$ $\quad ctg\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad csc\ \beta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

10.

Funciones trigonométricas del ángulo $\omega$

$sen\ \omega = -\frac{3}{5}$ $\quad ctg\ \omega = -\frac{4}{3}$

$cos\ \omega = \frac{4}{5}$ $\quad sec\ \omega = \frac{5}{4}$

$tan\ \omega = -\frac{3}{4}$ $\quad csc\ \omega = -\frac{5}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo $2\omega$

$sen\ 2\omega = -\frac{24}{25}$ $\quad ctg\ 2\omega = -\frac{7}{24}$

$cos\ 2\omega = \frac{7}{25}$ $\quad sec\ 2\omega = \frac{25}{7}$

$tan\ 2\omega = -\frac{24}{7}$ $\quad csc\ 2\omega = -\frac{25}{24}$

Funciones trigonométricas del ángulo $4\omega$

$sen\ 4\omega = -\frac{336}{625}$ $\quad ctg\ 4\omega = \frac{527}{336}$

$cos\ 4\omega = -\frac{527}{625}$ $\quad sec\ 4\omega = -\frac{625}{527}$

$tan\ 4\omega = \frac{336}{527}$ $\quad csc\ 4\omega = -\frac{625}{336}$

11 a 25. No se incluye la solución por ser demostraciones.

**EJERCICIO 46**

1. $\frac{1}{2}\left[sen\left(2\alpha\right)+sen\left(2\beta\right)\right]$

2. $\frac{1}{2}\left[sen\left(105°\right)+sen\left(15°\right)\right]$

3. $-\frac{1}{2}\left[cos\left(2y\right)-cos\left(2\beta\right)\right]$

4. $\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right]$

5. $\frac{1}{2}\left[sen\left(120°\right)+sen\left(45°\right)\right]$

6. $-\frac{1}{2}\left[cos\left(45°\right)-cos\left(30°\right)\right]$

7. $\frac{1}{2}\left[sen\left(2x\right)-sen\left(2\alpha\right)\right]$

8. $\frac{1}{2}\left[cos\left(\pi\right)+cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right]$

9. $\frac{1}{2}\left[sen\left(45°\right)-sen\left(30°\right)\right]$

10. $\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)+cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right]$

11. $-2\left[cos\left(4\alpha\right)-cos\left(2\alpha\right)\right]$

12. $\frac{5}{2}\left[sen\left(8\alpha\right)+sen\left(4\alpha\right)\right]$

13. $\frac{1}{2}\left[sen\left(90°\right)-sen\left(4°\right)\right]$

14. $\frac{1}{2}\left[cos\frac{1}{3}(2\alpha+5\beta)+cos\frac{1}{3}(2\alpha-5\beta)\right]$

15. $\frac{3}{2}\left[sen\left(\frac{19}{2}\alpha\right)+sen\left(\frac{17}{2}\alpha\right)\right]$

16. $\frac{2}{cos\frac{\pi}{2}+cos\frac{\pi}{6}}$

17. $\frac{sen3\alpha+sen\alpha}{sen3\alpha-sen\alpha}$

18. $\frac{2}{sen\pi-sen\frac{\pi}{2}}$

19. $\frac{\cos2\alpha-\cos2x}{\cos2\alpha+\cos2x}$

20. $\frac{1}{2}\left[sen\left(4\alpha\right)+sen\left(2\beta\right)\right]$

**EJERCICIO 47**

1 a 14. No se incluye la solución por ser demostraciones.

**EJERCICIO 48**

1. $2\left[sen\left(120°\right)\cdot cos\left(45°\right)\right]$

2. $2\left[cos\left(\frac{5}{2}\beta\right)cos\left(\frac{9}{2}\beta\right)\right]$

3. $2\left[sen\left(180°\right)cos\left(60°\right)\right]$

4. $-2\left[sen\left(4\theta\right)sen\left(\theta\right)\right]$

5. $2\left[cos\left(45°\right)cos\left(7°31'\right)\right]$

6. $2\left[cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)sen\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right]$

7. $2\left[cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)cos\left(\frac{1}{36}\pi\right)\right]$

8. $2\left[cos\left(30°\right)sen\left(5°\right)\right]$

9. $-2\left[\text{sen}\left(\frac{5}{12}\pi\right)\text{sen}\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right]$

10. $2\left[cos\left(\beta\right)cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right]$

11. $2\left[sen\left(\frac{7}{24}\pi\right)cos\left(\frac{1}{24}\pi\right)\right]$

12. $2\left[sen\left(\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right)cos\left(\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\right)\right]$

13. $-2\left[sen\left(\alpha\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

14. $2\left[sen\left(\beta\right)cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$

15. $2\left[sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)\right]$

16. $-2\left[sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$

**EJERCICIO 49**

1 a 12. No se incluye la solución por ser demostraciones.

**EJERCICIO 50**

1. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$
2. $\frac{\pi}{2}$, 36° 52' 11"
3. $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{23}{12}\pi$
4. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
5. $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$
6. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
7. 0, $\pi$, $2\pi$
8. 0, $\pi$, $2\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$
9. 0, $2\pi$, 152° 44', 207° 15'
10. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
11. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
12. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$
13. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
14. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
15. $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$
16. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$
17. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
18. 0, $\pi$, $2\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$
19. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
20. 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\pi$, $2\pi$
21. 0, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\pi$, $2\pi$
22. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
23. $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$
24. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
25. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
26. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$
27. $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$
28. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$
29. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$
30. $\frac{1}{3}\pi$, $\pi$, $\frac{5}{3}\pi$

## CAPÍTULO 15

**EJERCICIO 51**

1. $c = \sqrt{145}$, $A = 44° \ 54'$, $\angle C = 45° \ 6'$
2. $a = 2.11$, $c = 3.39$, $\angle C = 58°$
3. $c = 5.23$, $b = 7.24$, $\angle A = 43° \ 40'$
4. $b = 52.55$, $\angle A = 38° \ 11' \ 40''$, $\angle C = 51° \ 48' \ 20''$
5. $c = 13$, $b = 13\sqrt{2}$, $\angle C = 45°$
6. $a = 13.28$, $c = 18.28$, $\angle A = 36°$
7. $a = 12.51$, $\angle A = 33° \ 46' \ 46''$, $\angle C = 56° \ 13' \ 14''$
8. $a = 25.71$, $c = 22.9$, $\angle C = 41° \ 48'$
9. $a = 82.68$, $b = 100.36$, $\angle A = 55° \ 28'$
10. $c = 7.87$, $\angle A = 66° \ 39' \ 17''$, $\angle C = 23° \ 20' \ 43''$
11. $b = 22.36$, $c = 18.86$, $\angle C = 57° \ 33'$
12. $c = \sqrt{13}$, $\angle A = 29° \ 1' \ 1''$, $\angle C = 60° \ 58' \ 59''$
13. $a = 15.27$, $c = 17.19$, $\angle A = 41° \ 37'$
14. $b = 7.9$, $\angle A = 71° \ 33' \ 54''$, $\angle C = 18° \ 26' \ 5''$
15. $a = 6.28$, $b = 14.44$, $\angle C = 64° \ 11'$
16. $\angle A = 26° \ 33' \ 54''$, $\angle C = 63° \ 26' \ 6''$

17. $a = 5, b = 13, c = 12, \angle A = 22° \, 37' \, 11'', \angle C = 67° \, 22' \, 48''$

18. $a = 4, b = 5, c = 3, \angle A = 53° \, 7' \, 49'', \angle C = 36° \, 52' \, 11''$

19. $\angle A = \angle C = 45°$

20. $\angle A = 19° \, 28' \, 16'', \angle C = 70° \, 31' \, 44''$

**Ejercicio 52**

1. 288.4 *m*
2. 4.2 *m*
3. 38° 44′ 4″, 1.65*m*
4. $\left(10\sqrt{2}+1\right) m$
5. 54° 8′
6. 52.07 *m*
7. 11.25 *m*
8. a) 53.6 *m* , b) 59.1 *m*, c) 22.6 *m*
9. 53° 7′, 3 *m*
10. 21° 47′, 14 *dm*
11. $L = \frac{\pi R}{90}\left[180 - \cos^{-1}\left(\frac{R-r}{l}\right)\right] + \frac{\pi r}{90}\cos^{-1}\left(\frac{R-r}{l}\right) + 2\sqrt{l^2 - \left(R-r\right)^2}$
12. sí

## Capítulo 16

**Ejercicio 53**

1. $a = 20.9, c = 14.7, \angle A = 79° \, 1'$
2. $b = 52.4, a = 47.7, \angle B = 79° \, 16'$
3. $b = 21.03, a = 46.9, \angle C = 67° \, 44'$
4. $b = 86.21, c = 66.87, \angle B = 76° \, 39'$
5. $a = 23.35, c = 25.23, \angle A = 67°$
6. $b = 17.09, c = 22.3, \angle C = 99°$
7. $c = 9.43, \angle B = 57° \, 58' \, 51'', \angle C = 90° \, 1' \, 8''$
8. $a = 19.8, \angle A = 118° \, 23' \, 35'', \angle B = 26° \, 21' \, 24''$
9. $c = 15.11, \angle A = 40° \, 5' \, 50'', \angle C = 83° \, 19' \, 9''$
10. $b = 11.4, \angle A = 46° \, 14' \, 25'', \angle B = 66° \, 24' \, 34''$
11. $\angle A = 31° \, 48' \, 52'', \angle B = 34° \, 12' \, 58'', \angle C = 113° \, 58' \, 10''$
12. $\angle A = 27° \, 25' \, 16'', \angle B = 44° \, 1' \, 54'', \angle C = 108° \, 32' \, 50''$
13. $\angle A = 52° \, 17' \, 24'', \angle B = 44° \, 33' \, 55'', \angle C = 83° \, 8' \, 41''$
14. $\angle A = 48° \, 20' \, 58'', \angle B = 36° \, 42' \, 37'', \angle C = 94° \, 56' \, 23''$
15. $c = 15.3, \angle A = 46° \, 39' \, 8'', \angle B = 65° \, 20' \, 52''$
16. $b = 37.07, \angle A = 47° \, 7' \, 45'', \angle C = 56° \, 52' \, 15''$
17. $a = 46.05, \angle B = 34° \, 5' \, 24'', \angle C = 110° \, 54' \, 36''$
18. $c = 15.65, \angle A = 41° \, 52' \, 18'', \angle B = 82° \, 7' \, 42''$

**Ejercicio 54**

1. $\overline{AB} = 369.95 \, m$
2. 1.76 *cm*
3. 30.34 *km*
4. 19.4 *km*
5. 8.03 *m*
6. 4.7 *cm*
7. 322.92 *km*
8. 307.4 *m*
9. 29.07 *km*
10. 180.37 *m*
11. 29.7 *cm*

12 a 13. No se incluye la solución por ser demostraciones.

## Capítulo 17

**Ejercicio 55**

1. $z = \sqrt{17} cis 345° \, 37' \, 49''$
2. $z = 2 cis \, 30°$
3. $z = 2\sqrt{2} \, cis \, 135°$
4. $z = 5 cis \, 0°$
5. $z = 3 cis \, 270°$
6. $z = \frac{5}{6} \, cis \, 53° \, 7' \, 48''$
7. $z = cis \, 315°$
8. $z = cis \, 150°$
9. $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{26} \, cis \, 75°$
10. $z_2 \cdot z_4 = \sqrt{26} \, cis \, 165°$
11. $z_1 \cdot z_3 = 2\sqrt{2} \, cis \, 105°$
12. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2\sqrt{26} \, cis \, 135°$
13. $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4 = 4 cis \, 240°$
14. $\frac{z_1}{z_4} = cis \, 270°$
15. $\frac{z_2}{z_4} = \frac{\sqrt{26}}{2} \, cis \, 255°$
16. $\frac{z_1}{z_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, cis \, 345°$
17. $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{\sqrt{26}}{2} \, cis \, 15°$
18. $\frac{z_2}{z_1 \cdot z_4} = \frac{\sqrt{13}}{2} \, cis \, 210°$

19. $\dfrac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_4} = \sqrt{13}\ cis\ 270º$

20. $\dfrac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z_4} = 2\sqrt{13}\ cis\ 0^c$

21. $z^2 = 9cis\ 240º$

22. $z^4 = 81cis\ 100º$

23. $z^3 = 125cis\ 45º$

24. $z_1 = 4cis\ 30º$, $z_2 = 4cis\ 210º$

25. $z_1 = 2cis\ 20º$, $z_2 = 2cis\ 80º$, $z_3 = 2cis\ 140º$, $z_4 = 2cis\ 200º$

$z_5 = 2cis\ 260º$, $z_6 = 2cis\ 320º$

26. $z_1 = cis\ 60º$, $z_2 = cis\ 180º$, $z_3 = cis\ 300º$

27. $(z \cdot z_1)^2 = 36cis\ 120º$

28. $z_1 = 2cis\ 30º$, $z_2 = 2cis\ 150º$, $z_3 = 2cis\ 270º$

29. $28cis\ 100º$

30. $z_1 = 4cis\ 10º$, $z_2 = 4cis\ 130º$, $z_3 = 4cis\ 250º$

# Solución a los ejercicios de geometría analítica

## CAPÍTULO 1

### EJERCICIO 1

1. $3u$
2. $4u$
3. $5\sqrt{3}u$
4. $\frac{5}{2}u$
5. $\frac{5}{4}u$
6. $1u$
7. $\frac{13}{24}u$
8. $\frac{17}{5}u$
9. $5a$
10. $\frac{13}{12}a$
11. $\overline{AB} = 7u$
12. $\overline{DC} = \frac{5}{4}u$
13. $\overline{AD} = \frac{5}{2}u$
14. $\overline{BA} = -7u$
15. $\overline{CB} = \frac{13}{4}u$
16. $\overline{DA} = -\frac{5}{2}u$
17. $\overline{DB} = \frac{9}{2}u$
18. $\overline{CA} = -\frac{15}{4}u$
19. $\overline{BC} = -\frac{13}{4}u$
20. $\overline{CD} = -\frac{5}{4}u$

### EJERCICIO 2

1. $r = \frac{1}{3}$
2. $r = \frac{1}{4}$
3. $r = 1$
4. $r = -\frac{7}{2}$
5. $r = -\frac{4}{35}$
6. $r = \frac{3}{5}a$
7. $r = \frac{7}{3}$
8. $r = -\frac{7}{9}$
9. $x = -\frac{14}{3}$
10. $x = \frac{27}{4}$
11. $x = -\frac{5}{2}$
12. $x = \frac{5}{2}$
13. $x = -\frac{17}{20}$
14. $x = -\frac{23}{40}$

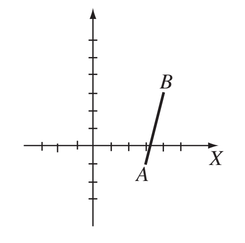
### EJERCICIO 3

1. 1
2. $\frac{11}{2}$
3. $-5$
4. $-\frac{7}{12}$
5. $\frac{5}{12}$
6. $-\frac{7}{24}$
7. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
8. $-\frac{5}{24}a$
9. $-\frac{7}{4}$
10. $-\frac{3}{2}$

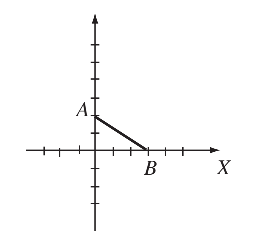
## CAPÍTULO 2

### EJERCICIO 4

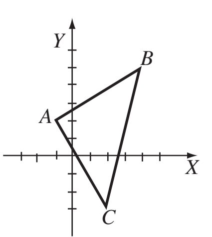
1.



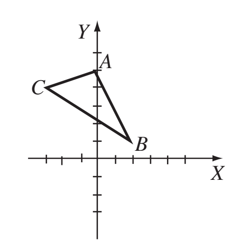

2.



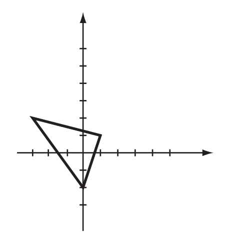

3.



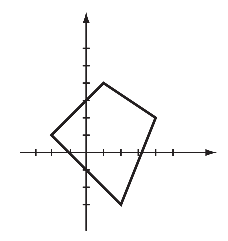

4.




5.



6.



### EJERCICIO 5

1. $10u$
2. $\sqrt{5}u$
3. $5\sqrt{2}u$
4. $4\sqrt{2}u$
5. $8u$
6. $\frac{\sqrt{181}}{6}u$
7. $\frac{5}{4}u$
8. $\frac{\sqrt{5}}{4}u$
9. $\frac{\sqrt{17}}{2}u$
10. $1u$
11. $28.72u$
12. $15.64u$
13. $25.10u$
14. $12u$
15. Es triángulo isósceles, debido a que $d_{AC} = d_{BC}$.
16. Perímetro = 40.96 $u$; Área = 133.517 $u^2$
17. Ordenada ($y = 11$, $y = 1$), puntos (– 4, 11) y (– 4,1)
18. $P(4, 6)$ y $P\left(-\frac{84}{13}, -\frac{126}{13}\right)$
19. sí
20. no
21. sí
22. no

### EJERCICIO 6

1. $r = -\frac{1}{2}$
2. $r = -\frac{4}{3}$
3. $r = \frac{1}{2}$
4. $r = -2$
5. $r = -\frac{1}{10}$
6. $r = \frac{2}{7}$
7. $P(6, -5)$
8. $P(5, 0)$
9. $P\left(\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right)$
10. $P\left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right)$
11. $P\left(4, -\frac{9}{2}\right)$
12. $P(-a, 3b)$
13. $r = -\frac{5}{2}$
14. $P\left(\frac{19}{5}, \frac{37}{5}\right)$
15. $P(3, 7)$
16. $r = 2$
17. $P(2, 1)$
18. $P\left(5, -\frac{11}{2}\right)$
19. $P_2\left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right)$
20. $P\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)$

21. $r=1;\ x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$
22. Los puntos de trisección son:

$$A\left(\frac{x_1+2x_2}{3},\frac{y_1+2y_2}{3}\right)$$

$$B\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

**EJERCICIO 7**

1. $Pm\left(\frac{5}{2},2\right);\ P_t:\ \left(\frac{8}{3},3\right)$ y $\left(\frac{7}{3},1\right)$
2. $Pm\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right);\ P_t$: (1, 5) y (2, 6)
3. $Pm$ (4, 7); $P_t$: $\left(\frac{7}{3},\frac{17}{3}\right)$ y $\left(\frac{17}{3},\frac{25}{3}\right)$
4. $Pm\left(8,-\frac{11}{2}\right);\ P_t$: (7, – 6) y (9, – 5)
5. $Pm\left(\frac{5}{12},\frac{3}{2}\right);\ P_t:\ \left(\frac{4}{9},\frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{7}{18},\frac{5}{3}\right)$
6. $Pm\left(\frac{11}{24},-\frac{1}{2}\right);\ P_t:\ \left(\frac{7}{18},0\right)$ y $\left(\frac{19}{36},-1\right)$
7. $P_2$(– 5, – 5)
8. (– 1, 1), (7, 9) y (– 3, 5)

**EJERCICIO 8**

1. $3u^2$
2. $15u^2$
3. $28.5u^2$
4. $10u^2$
5. $6u^2$
6. $a^2u^2$
7. $31u^2$
8. $17u^2$
9. $19u^2$
10. $50.5u^2$

## CAPÍTULO 3

**EJERCICIO 9**

1. $\frac{2}{5}$
2. $-\frac{7}{5}$
3. $-\frac{1}{8}$
4. $\frac{4}{3}$
5. $-\frac{2}{3}$
6. 0
7. No existe
8. $-\frac{17}{5}$
9. $-\frac{5}{72}$
10. $\frac{b}{a}$
11. 45°
12. 135°
13. 30°
14. 35° 15’
15. 90°
16. 0° o 180°
17. Son colineales
18. Son colineales
19. Son colineales
20. No son colineales
21. Son colineales
22. No son colineales
23. Son colineales
24. Son colineales
25. $x=\frac{2}{3}$
26. $x=4$
27. $y=-3+\sqrt{3}$
28. $y=-6$

**EJERCICIO 10**

1. Son perpendiculares
2. Los lados opuestos son paralelos y de igual pendiente

$$m_{BC}=m_{AD}=\frac{2}{5}\ \text{y}\ m_{CD}=m_{AB}=3$$

3. Las rectas son paralelas

$$m_{AB}=m_{CD}=-\frac{5}{3}$$

4. En un triángulo rectángulo los catetos son perpendiculares.

$$m_{AB}\cdot m_{AC}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$$

5. En un cuadrado los lados opuestos son paralelos y los lados adyacentes son perpendiculares.

$$m_{AB}=m_{CD}=4,\ m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{4}\ \text{y}\ m_{AC}\cdot m_{BD}=-1$$

6. $x=5$
7. $m_{AB}=m_{CD}=-2;\ m_{BC}=m_{AD}=\frac{2}{7}$

**EJERCICIO 11**

1. $\alpha$ = 57° 5’ 41”
2. 26° 33’ 54”, 116° 33’ 54”
   36° 52’ 11”
3. 63° 26’ 5”, 63° 26’ 5” y
   53° 7’ 48”
4. Un ángulo de 90°
   los restantes de 45°
5. 63° 26’ 5” y 26° 33’ 54”
6. $\alpha$ = 131° 49’ 12”
7. 130° 14’ 10”; 49° 45’ 50”
8. 117° 16’ 36”
9. $m_1=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10. $x=8$
11. $m_1=-\frac{1}{7},\ m_2=7$
12. $-2+\sqrt{3}\ ;\ 2+\sqrt{3}$

## CAPÍTULO 4

### EJERCICIO 12

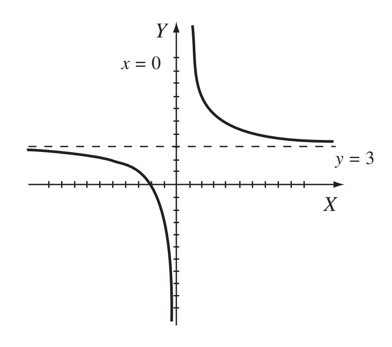
1. Intersecciones con los ejes: (– 2, 0)

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq 0\}$ ; $\{y \in R \mid y \neq 3\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 3$, Vertical: $x = 0$

   Gráfica



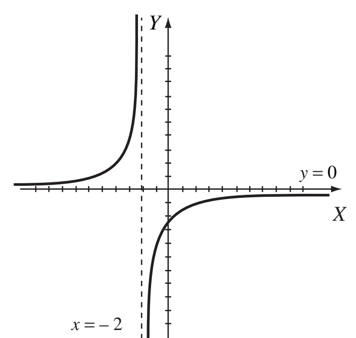

2. Intersecciones con los ejes: (0, – 2)

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq -2\}$ ; $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 0$, Vertical: $x = -2$

   Gráfica



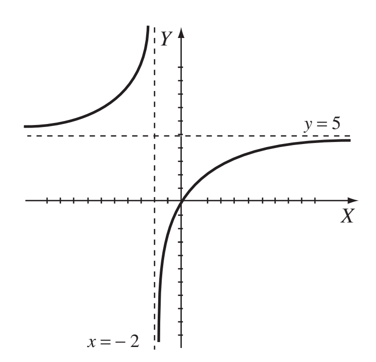

3. Intersecciones con los ejes: (0, 0)

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq -2\}$ ; $\{y \in R \mid y \neq 5\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 5$, Vertical: $x = -2$

   Gráfica



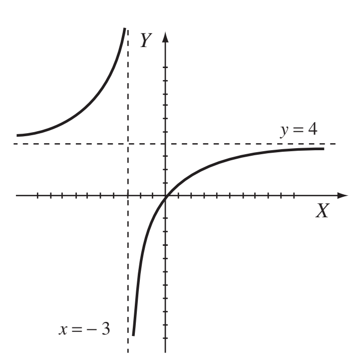

4. Intersecciones con los ejes: (0, 0)

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq -3\}$ ; $\{y \in R \mid y \neq 4\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 4$, Vertical: $x = -3$

   Gráfica



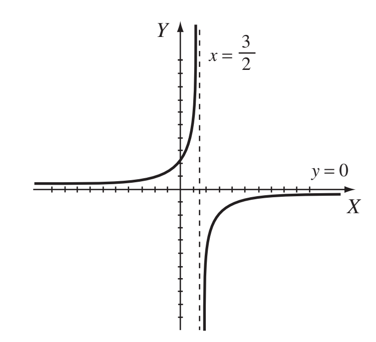

5. Intersecciones con los ejes: (0, 2)

   Simetría: No existe

   Extensión: $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{3}{2}\right\}$ ; $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 0$, Vertical: $x = \frac{3}{2}$

   Gráfica



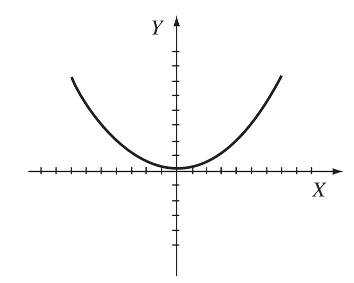

6. Intersecciones con los ejes: (0, 0)

   Simetría: Sólo con el eje $Y$

   Extensión: $\{x \in R\}$ ; $\{y \in R \mid y \geq 0\}$

   Asíntotas: No existen

   Gráfica



7. Intersecciones con los ejes: Eje $X \rightarrow (-4, 0), (4, 0)$

   Eje $Y \rightarrow (0, 2), (0, -2)$

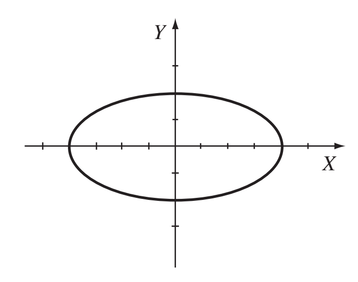
   Simetría: Es simétrica con ambos ejes y con el origen

   Extensión: $\{x \in R \mid -4 \leq x \leq 4\}$

   $\{y \in R \mid -2 \leq y \leq 2\}$

   Asíntotas: No existen

   Gráfica



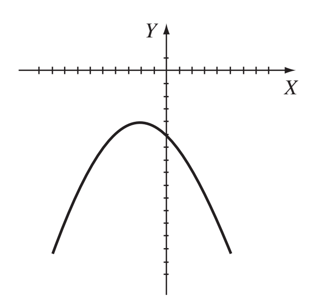

8. Intersecciones con los ejes: $(0, -5)$

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R\}$ ; $\{y \in R \mid y \leq -4\}$

   Asíntotas: No existen

   Gráfica



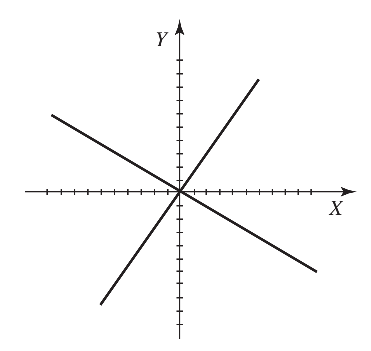

9. Intersecciones con los ejes: $(0, 0)$

   Simetría: Sólo respecto al origen

   Extensión: $\{x \in R\}$ ; $\{y \in R\}$

   Asíntotas: No existen

   Gráfica



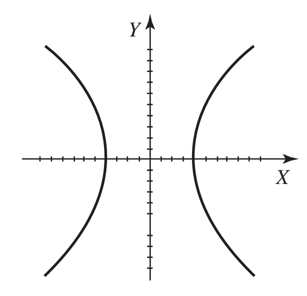

10. Intersecciones con los ejes: Eje $X \rightarrow (-4, 0), (4, 0)$

    Simetría: Es simétrica con los ejes y con el origen

    Extensión: $\{x \in R \mid x \leq -4 \text{ o } x \geq -4\}$; $\{y \in R\}$

    Asíntotas: No hay horizontales o verticales

    Gráfica



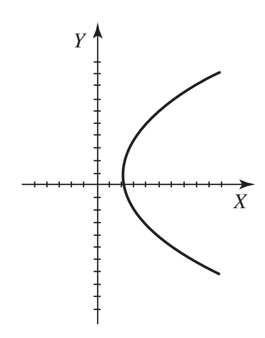

11. Intersecciones con los ejes: $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$

    Simetría: No existe

    Extensión: $\{x \in R \mid x \geq 2\}$; $\{y \in R\}$

    Asíntotas: No existen

    Gráfica




12. Intersecciones con los ejes: $(0, 0)$ y $(6, 0)$

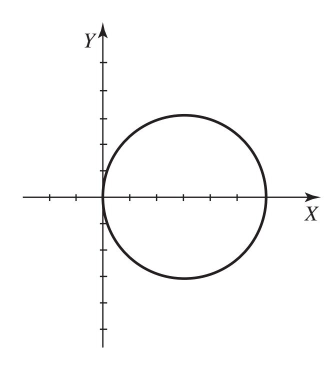
    Simetría: Sólo con el eje $X$

    Extensión: $\{x \in R \mid 0 \leq x \leq 6\}$

    $\{y \in R \mid -3 \leq y \leq 3\}$

    Asíntotas: No existen

    Gráfica



**EJERCICIO 13**

1. $y - x = 2$
2. $xy = 1$
3. $x - 2y = 0$
4. $x^2 + y^2 = 25$
5. $7x - 3y + 4 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
7. $x^2 + 10y + 25 = 0$
8. $2x + y + 5 = 0$
9. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 51 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
11. $21x^2 - 12xy + 16y^2 + 60x + 60y - 600 = 0$
12. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
13. $28y^2 - 36x^2 - 63 = 0$; $36x^2 - 28y^2 + 63 = 0$
14. $16x^2 + 7y^2 - 112 = 0$
15. $7x^2 - 9y^2 - 28x + 90y - 260 = 0$

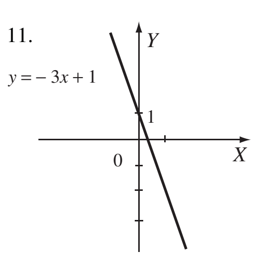
## CAPÍTULO 5

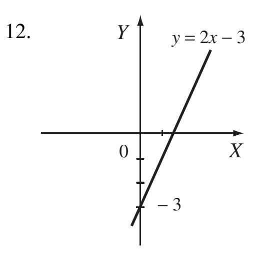
**EJERCICIO 14**

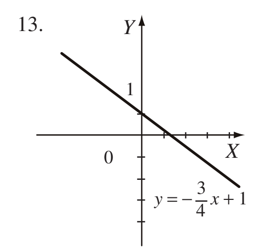
1. $2x + 5y - 14 = 0$
2. $2x - y + 3 = 0$
3. $2y - 1 = 0$
4. $2x + 2y + 1 = 0$
5. $3x - 5y + 11 = 0$
6. $4x - 3y + 6 = 0$
7. $x - 3 = 0$
8. $8x - 4y - 7 = 0$
9. $3x + 2y - 2 = 0$
10. $3x + 5y - 12 = 0$
11. $3x + 2y - 5 = 0$
12. $\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$
13. $x + y - 4 = 0$
14. $x - 3 = 0$
15. $x + 4 = 0$
16. $3x - 2y - 12 = 0$
17. $x + 4y + 2 = 0$
18. $2x + y = 0$
    $3x - 4y + 11 = 0$
    $5x + 2y - 25 = 0$
    $y = 0$
19. $2x + y - 4 = 0$
20. $6x + 5y - 82 = 0$
21. $2x - 3y + 8 = 0$
22. $4x - 7y + 10 = 0$
    $7x - 5y - 26 = 0$
    $3x + 2y + 22 = 0$
23. $4x - 6y - 5 = 0$
24. $10x - 3y - 4 = 0$
25. $2x - 3y - 7 = 0$
26. $2x + 11y + 5 = 0$
    $5x - 16y - 31 = 0$
27. (8, 6), (– 2, – 8), (– 6, – 2)
28. (–3, 0), (3, 2), (4, –2)
29. (–3, 2), (–1, –2)
    (7, 0), (5, 4)
30. $120x - y = 0$
31. $3t - 2v + 4 = 0$
32. $x + 40y - 600 = 0$
33. $120x - y + 1\,200 = 0$
34. $9T_C - 5T_F + 160 = 0$

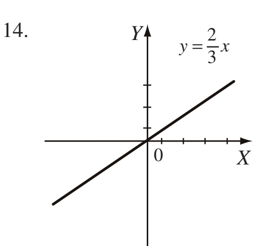
**EJERCICIO 15**

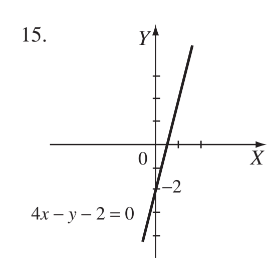
1. $y = -x + 4$; $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1$
2. $y = \dfrac{2}{5}x + 1$; $\dfrac{x}{-5/2} + \dfrac{y}{1} = 1$
3. $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$; $\dfrac{x}{-8} + \dfrac{y}{8/3} = 1$
4. $y = 2x$
5. $y = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{1/2} = 1$
6. $y = \dfrac{3}{4}x - 3$; $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$
7. $y = -\dfrac{3}{5}x + 2$; $\dfrac{x}{10/3} + \dfrac{y}{2} = 1$
8. $y = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{5}{3}$; $\dfrac{x}{-10} + \dfrac{y}{-5/3} = 1$
9. $y = \dfrac{6}{5}x + 12$; $\dfrac{x}{-10} + \dfrac{y}{12} = 1$
10. $y = -x\ ctg\ w + p\ csc\ w$; $\dfrac{x}{p\ sec\ w} + \dfrac{y}{p\ csc\ w} = 1$

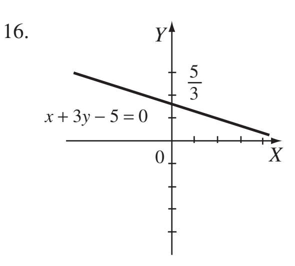
11.


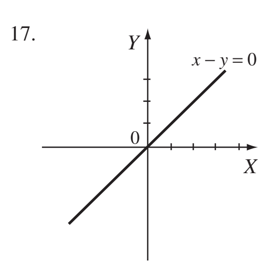

12.


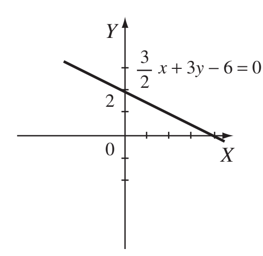

13.



14.



15.


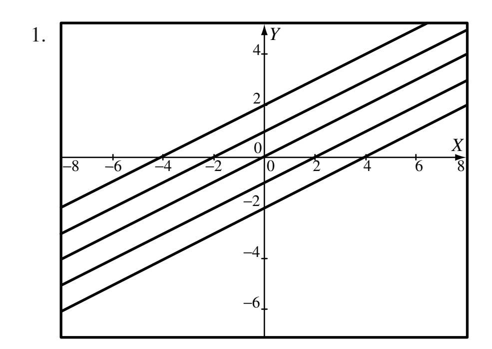

16.


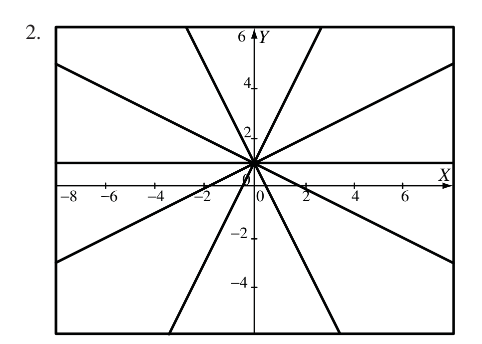

17.


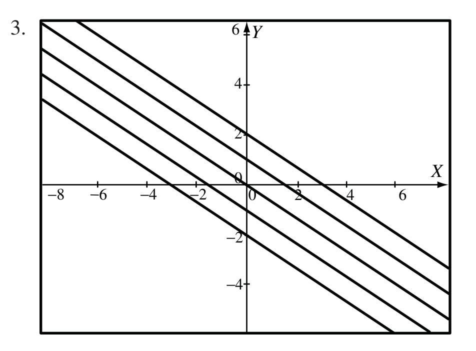

18.


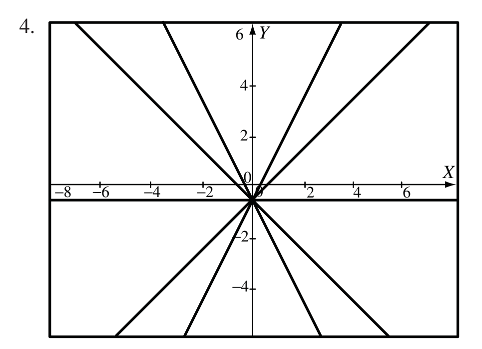
19. $x + y + 5 = 0$
20. $y = 2x + 4$
21. $y = -3x + 11$
22. $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{6}$
23. $y = 5x + 5$
24. $5x - 3y + 20 = 0$
25. $4x + y - 15 = 0$
26. $x - y + 1 = 0$
27. $6x + 4y + 5 = 0$
28. $3x - 2y - 6 = 0$
29. 161° 33' 54''
30. 36° 1' 38''
    102° 20' 20''
    41° 38'
31. (20, 13)
32. *a)* $y = 50x + 30\,000$
    *b)* $70 000.00
33. *a)* $4m/s^2$
    *b)* $31m/s$
34. *a)* $C = 30x + 6\,000$
    *b)* $1 000.00
    *c)* no
    *d)* 120 platillos
35. $\frac{x}{5} + \frac{y}{-5} = 1$
36. $\frac{x}{8} + \frac{y}{-4} = 1$
37. $\frac{x}{-\frac{4}{3}} + \frac{y}{-\frac{4}{5}} = 1$
38. $\frac{x}{-\frac{7}{4}} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$
39. $\frac{x}{6/5} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} = 1$

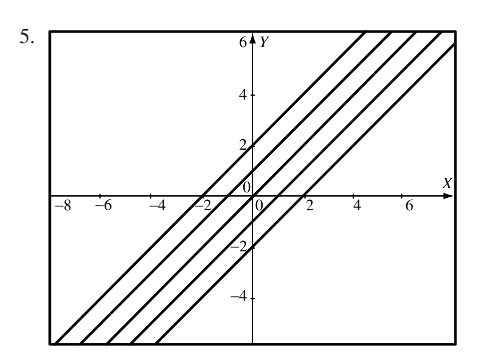
**EJERCICIO 16**

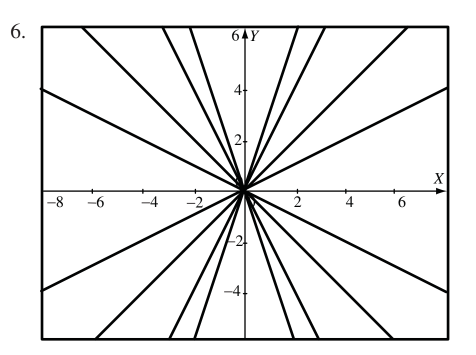
1.



2.



3.


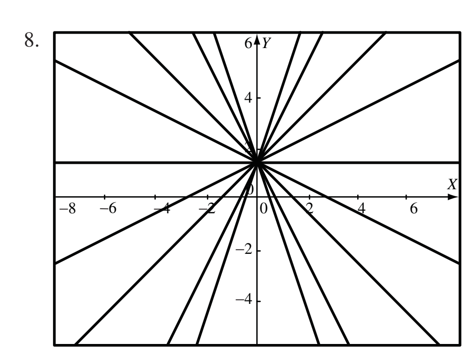

4.



5.


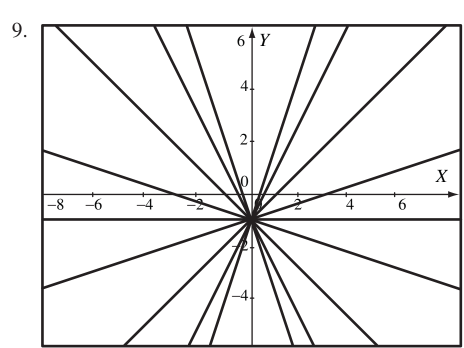

6.


7.

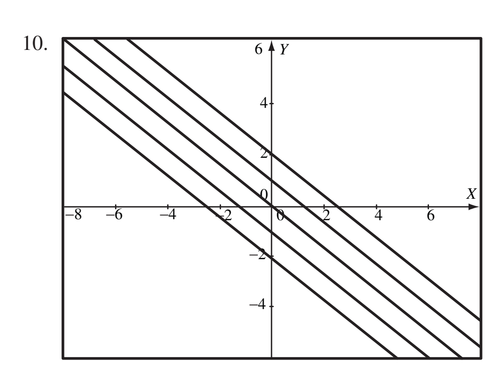
8.




9.




10.




## EJERCICIO 17

1. $\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{5}{\sqrt{13}}=0$
2. $-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}=0$
3. $\frac{5x}{\sqrt{34}}+\frac{3y}{\sqrt{34}}=0$
4. $\frac{-x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{7}{\sqrt{10}}=0$
5. $-\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-1=0$
6. $\frac{\sqrt{5}x}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{1}{3}=0$
7. $\sqrt{3}x+y-8=0$
8. $x+y-2=0$
9. $x+\sqrt{3}y-6=0$
10. $x-\sqrt{3}y+2=0$
11. $x+\sqrt{3}=0$
12. $\sqrt{3}x-y+10=0$
13. $x+y+6=0$
14. $x-\sqrt{3}y-8\sqrt{3}=0$
15. $\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}y}{2}-2=0$
16. $\frac{2x}{\sqrt{29}}+\frac{5y}{\sqrt{29}}-\frac{12}{\sqrt{29}}=0$
17. $-\frac{3x}{\sqrt{10}}-\frac{y}{\sqrt{10}}-\frac{7}{\sqrt{10}}=0$
18. $\theta=60°$, $\theta'=120°$
19. $3x-4y-12=0$

    $3x+4y+12=0$

## EJERCICIO 18

1. $\frac{23\sqrt{53}}{53}$
2. $\frac{9}{5}$
3. $5\sqrt{2}$
4. $\frac{49}{13}$
5. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
6. 1
7. $\frac{32\sqrt{17}}{17}$
8. 10
9. $\frac{9\sqrt{10}}{5}$
10. $5u^2$
11. $r=\frac{7}{5}$
12. $K_1=2$

    $K_2=\frac{1}{2}$
13. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$
14. $-\frac{6}{5}$
15. $\frac{14}{5}$
16. $\frac{11\sqrt{29}}{29}$
17. $-\frac{7}{10}$
18. $-\frac{27\sqrt{2}}{8}$
19. $3x-4y-10=0$

    $3x-4y+20=0$
20. $y=-\sqrt{17}+\frac{7}{4}$

    $y=\sqrt{17}+\frac{7}{4}$
21. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$
22. $\frac{11\sqrt{5}}{15}$
23. $x-y-3-3\sqrt{2}=0$

    $x-y-3+3\sqrt{2}=0$
24. $2x-y-1=0$

    $2x+y-7=0$

**Ejercicio 19**

1. $2x - y + 3 = 0$
2. $4x - 6y + 13 = 0$
3. $x + 3y - 9 = 0$
4. $y + 6 = 0$
5. $2x - 6y - 11 = 0$; $6x + 2y - 1 = 0$
6. $99x - 27y + 50 = 0$; $21x + 77y - 80 = 0$
7. $y - 2 = 0$; $7x - y - 5 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $(1, 2)$
8. $2x + y - 6 = 0$; $x - 6y - 10 = 0$; $3x - 5y - 16 = 0$; $\left(\frac{46}{13}, -\frac{14}{13}\right)$
9. $2x + y - 3 = 0$; $3x - 5y + 16 = 0$; $x - 6y + 19 = 0$; $\left(-\frac{1}{13}, \frac{41}{13}\right)$
10. $11x + 4y - 27 = 0$; $7x - y - 16 = 0$; $4x + 5y - 11 = 0$; $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$
11. $\left(5\sqrt{5} - \sqrt{34}\right)x + \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{34}\right)y - \left(4\sqrt{5} + 7\sqrt{34}\right) = 0$

    $\left(\sqrt{37} + 6\sqrt{5}\right)x + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{37}\right)y + \left(7\sqrt{37} - 23\sqrt{5}\right) = 0$

    $\left(5\sqrt{37} + 6\sqrt{34}\right)x + \left(3\sqrt{37} + \sqrt{34}\right)y - \left(4\sqrt{37} + 23\sqrt{34}\right) = 0$

    $(1.5965, 2.2438)$
12. $55x + 47y - 144 = 0$

## Capítulo 6

**Ejercicio 20**

1. $x^2 + y^2 - 16 = 0$
2. $4x^2 + 4y^2 - 3 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
4. $3x^2 + 3y^2 + 3x + 4y = 0$
5. $x^2 + y^2 - 13 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 31 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 35 = 0$
8. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 25 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$
10. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$
12. $3x^2 + 3y^2 + 13x - 65 = 0$
13. $4x^2 + 4y^2 + 41y + 66 = 0$
14. $x^2 + y^2 + 4y = 0$
15. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$
16. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$
17. $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 144 = 0$
18. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 59 = 0$
19. $2x^2 + 2y^2 + 15x - 11y - 51 = 0$
20. $17x^2 + 17y^2 - 88x + 58y - 544 = 0$
21. $9x^2 + 9y^2 - 43x + 9y - 140 = 0$
22. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$
23. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
24. $3x^2 + 3y^2 + 8x + 10y - 43 = 0$
25. $3x^2 + 3y^2 - x + 7y - 10 = 0$
26. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 5 = 0$
27. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 29 = 0$

**Ejercicio 21**

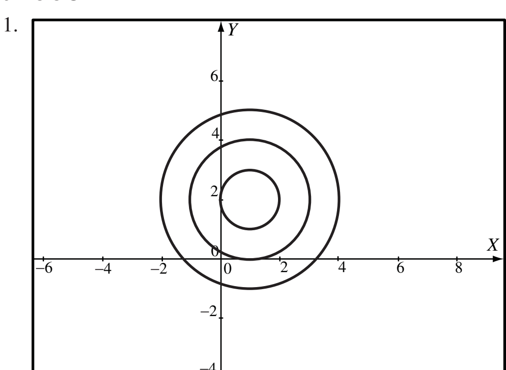
1. $C(-1, -1)$, $r = 2$
2. $C(3, -4)$, $r = \sqrt{5}$
3. Punto, $C(-3, -1)$, $r = 0$
4. Imaginaria con $C(2, -1)$ y $r = \sqrt{-9}$
5. $C(-7, 4)$, $r = 5$
6. $C(0, 4)$, $r = 3$
7. $C(-2, 0)$, $r = 1$
8. $C\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{7}$
9. $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $r = \frac{1}{2}$
10. $C\left(\frac{1}{5}, 3\right)$, $r = \frac{4}{5}$
11. $C\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}\right)$, $r = \frac{5}{12}$
12. $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $r = 3$
13. $x - 3y + 8 = 0$

    $79x + 3y - 568 = 0$
14. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$
15. $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 19 = 0$

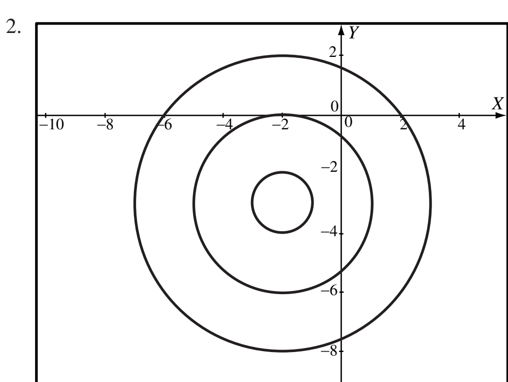
    $x^2 + y^2 + 4y - 9 = 0$
16. $x^2 + y^2 + 10x - 4 = 0$
17. $k = 5$, $k = -\frac{19}{17}$
18. $(-5, 3)$ y $(1, 9)$
19. $(2, 2)$
20. No existe intersección
21. $(3, 5)$ y $(4, 4)$
22. $(4, -1)$ y $(6, -3)$

## Ejercicio 22

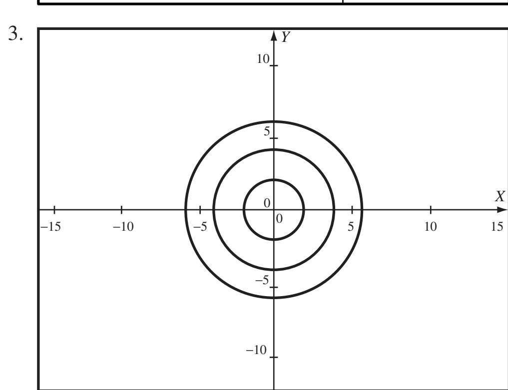
1.



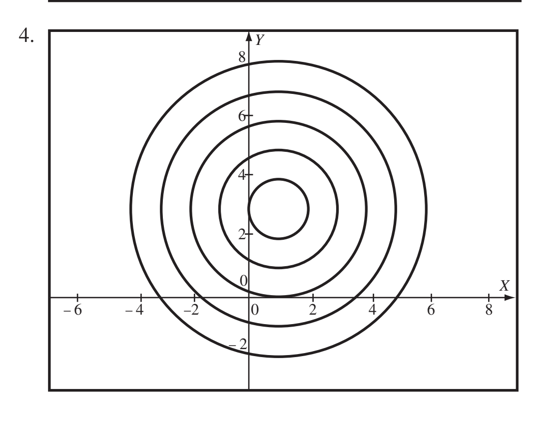

2.



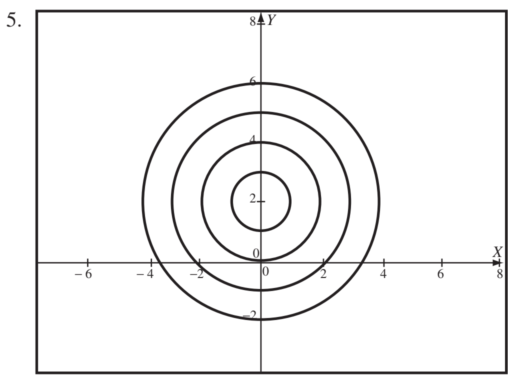

3.



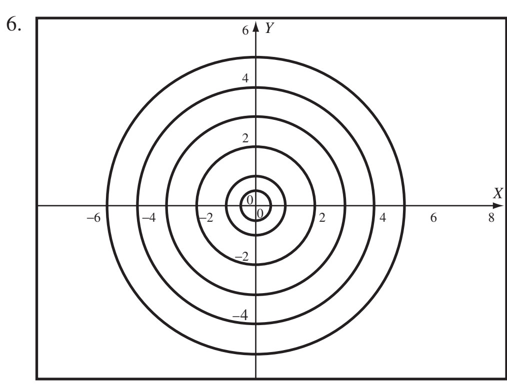

4.



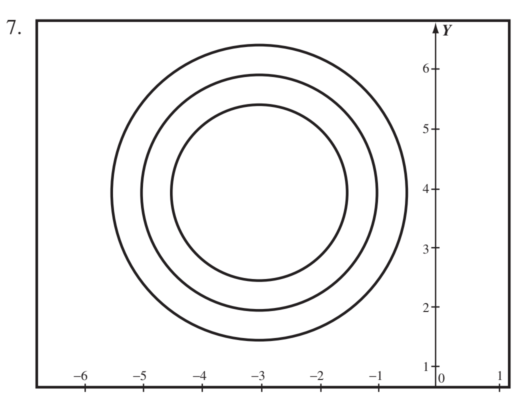

5.



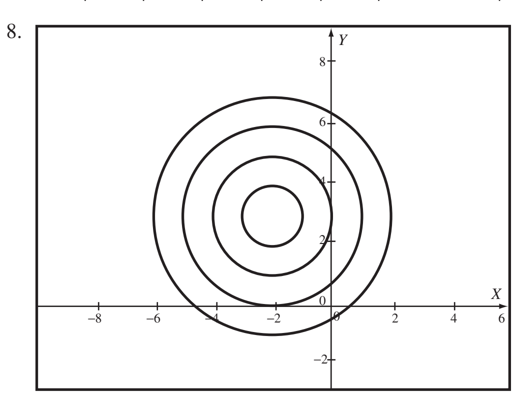

6.



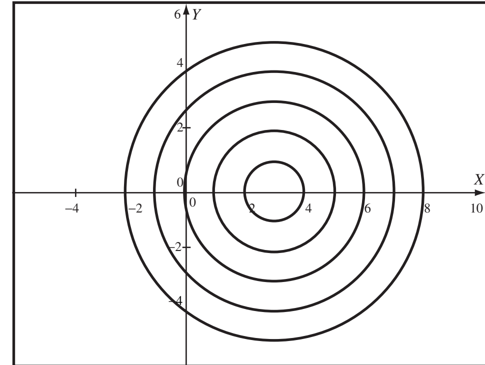

7.



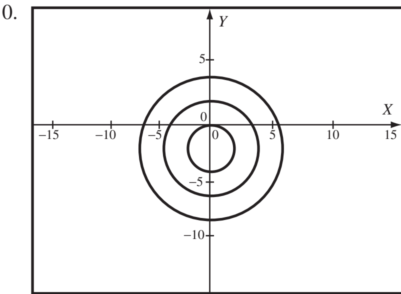

8.



9.




10.




11. $(x-1)^2+(y-1)^2=p^2$
12. $(x+1)^2+(y+3)^2=p^2$
13. $(x+2)^2+(y-3)^2=p^2$
14. $(x-1)^2+(y-0)^2=p^2$

## CAPÍTULO 7

### EJERCICIO 23

1. (2, 2)
2. (9, 1)
3. (– 1, 4)
4. (– 10, – 4)
5. (– 8, 7)
6. $y'^2-8x'=0$
7. $x'^2-4y'=0$
8. $x'^2+y'^2-9=0$
9. $x'^2+y'^2-25=0$
10. $y'^2-12x'=0$
11. $9x'^2+16y'^2-144=0$
12. $4x'^2+5y'^2-20=0$
13. $9x'^2+4y'^2-72=0$
14. $x'^2-2y'^2-2=0$
15. $4x'^2-9y'^2-36=0$
16. $y'=x'^3$
17. $y'^2=x'^3-1$

### EJERCICIO 24

1. $x'^2-8y'=0$
2. $y'^2-16x'=0$
3. $x'^2+y'^2-8=0$
4. $x'^2+y'^2-4=0$
5. $9x'^2+4y'^2-36=0$
6. $16x'^2+16y'^2-9=0$
7. $25x'^2-16y'^2+400=0$
8. $y'^3-x'=0$

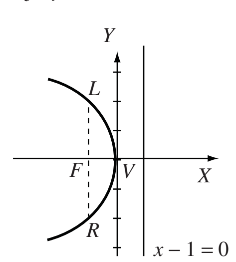
## CAPÍTULO 8

### EJERCICIO 25

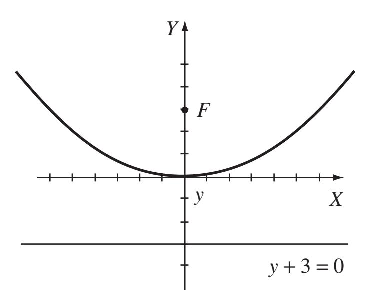
1. $y^2+8x=0$
2. $x^2+4y=0$
3. $y^2-12x+2y+1=0$
4. $x^2-16y=0$
5. $x^2-4x+4y-16=0$
6. $y^2+12x-4y+52=0$
7. $x^2-2xy+y^2+8x-4y+2=0$
8. $9x^2-12xy+4y^2-48x+32y+64=0$

### EJERCICIO 26

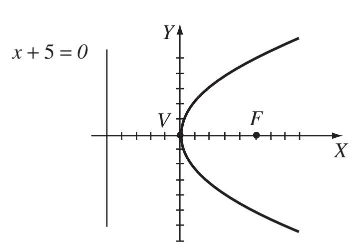
1. Foco: $F(-1, 0)$, Directriz: $x-1=0$, $LR=4$,
   Eje: $y=0$



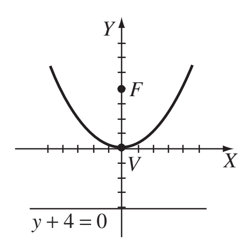

2. Foco: $F(0, 3)$, Directriz: $y+3=0$, $LR=12$,
   Eje: $x=0$



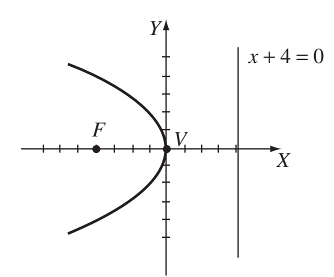

3. Foco: $F(5, 0)$, Directriz: $x+5=0$, $LR=20$,
   Eje: $y=0$



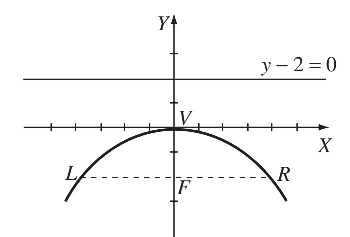
4. Foco: $F(0, 4)$, Directriz: $y + 4 = 0$, $LR = 16$,
Eje: $x = 0$



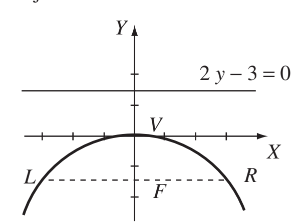

5. Foco: $F(-4, 0)$, Directriz: $x - 4 = 0$, $LR = 16$,
Eje: $y = 0$



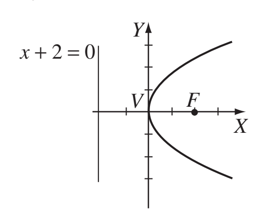

6. Foco: $F(0, -2)$, Directriz: $y - 2 = 0$, $LR = 8$,
Eje: $x = 0$



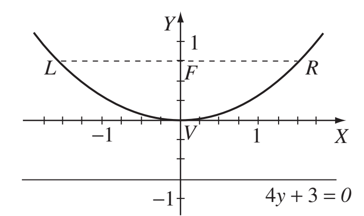

7. Foco: $F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, Directriz: $2y - 3 = 0$, $LR = 6$,
Eje: $x = 0$



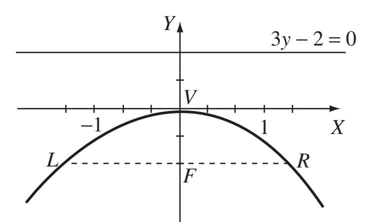

8. Foco: $F(2, 0)$, Directriz: $x + 2 = 0$, $LR = 8$,
Eje: $y = 0$



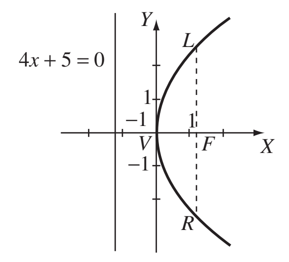

9. Foco: $F\left(0, \frac{3}{4}\right)$, Directriz: $4y + 3 = 0$, $LR = 3$,
Eje: $x = 0$



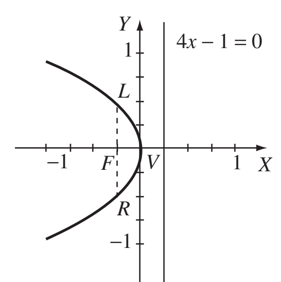

10. Foco: $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$, Directriz: $3y - 2 = 0$, $LR = \frac{8}{3}$,
Eje: $x = 0$



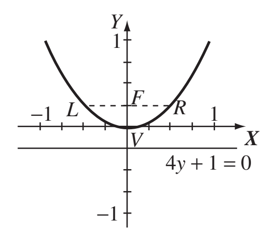

11. Foco: $F\left(\frac{5}{4}, 0\right)$, Directriz: $4x + 5 = 0$, $LR = 5$,
Eje: $y = 0$




12. Foco: $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, Directriz: $4x - 1 = 0$, $LR = 1$,
Eje: $y = 0$



13. Foco: $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$, Directriz: $4y+1=0$, $LR=1$
Eje: $x=0$




14. $y^2+20x=0$
15. $x^2-24y=0$
16. $y^2-8x=0$
17. $x^2+4y=0$
18. $y^2+2x=0$
19. $3x^2+28y=0$
20. $x^2-8y=0$
21. $y^2+24x=0$
22. $x^2+10y=0$
23. $y^2+6x=0$
24. $3y^2-16x=0$
25. $x^2-y=0$
26. $y^2+18x=0$
27. $x^2+4y=0$
28. $3y^2-16x=0$
29. $3x^2+16y=0$
30. $3\sqrt{13}$ unidades
31. $5\sqrt{2}$ unidades
32. $2x^2-y=0$, $y^2-4x=0$
33. $y^2+3x=0$, $y^2-3x=0$
34. $y^2-12x=0$
35. $x^2-8y=0$

**Ejercicio 27**

$V$: Vértice, $F$: Foco, $LR$: Lado recto, $D$: Directriz

1. $V(1, 5)$, $F(4, 5)$, $LR=12$, $D$: $x+2=0$, Eje: $y=5$
2. $V(6, -2)$, $F(6, -6)$, $LR=16$, $D$: $y-2=0$, Eje: $x=6$
3. $V(-2, -4)$, $F(-7, -4)$, $LR=20$, $D$: $x-3=0$, Eje: $y=-4$
4. $V(-1, 5)$, $F(-1, 4)$, $LR=4$, $D$: $y-6=0$, Eje: $x=-1$
5. $V(-2, 0)$, $F(0, 0)$, $LR=8$, $D$: $x+4=0$, Eje: $y=0$
6. $V(0, 2)$, $F(0, 8)$, $LR=24$, $D$: $y+4=0$, Eje: $x=0$
7. $V(-4, 2)$, $F\left(-4,\frac{7}{2}\right)$, $LR=6$, $D$: $2y-1=0$, Eje: $x=-4$
8. $V\left(\frac{4}{5},-3\right)$, $F\left(\frac{41}{20},-3\right)$, $LR=5$, $D$: $20x+9=0$, Eje: $y=-3$
9. $V\left(\frac{3}{2},2\right)$, $F\left(\frac{3}{2},3\right)$, $LR=4$, $D$: $y-1=0$, $x=\frac{3}{2}$
10. $V\left(2,-\frac{1}{4}\right)$, $F\left(\frac{19}{8},-\frac{1}{4}\right)$, $LR=\frac{3}{2}$, $D$: $x=\frac{13}{8}$, Eje: $y=-\frac{1}{4}$
11. $V\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $LR=4$, $D$: $2y+5=0$, Eje: $x=\frac{1}{2}$
12. $V(3, -1)$, $F\left(\frac{10}{3},-1\right)$, $LR=\frac{4}{3}$, $D$: $3x-8=0$, Eje: $y=-1$
13. $V\left(0,\frac{1}{4}\right)$, $F\left(0,\frac{3}{4}\right)$, $LR=2$, $D$: $4y+1=0$, $E$: $x=0$
14. $V(1, 0)$, $F\left(\frac{21}{16},0\right)$, $LR=\frac{5}{4}$, $D$: $16x-11=0$, $E$: $y=0$
15. $y^2+20x-8y-24=0$
16. $x^2-6x+16y+25=0$
17. $y^2-8x-4y+28=0$
18. $x^2+10x-12y+49=0$
19. $y^2-2x+8y+20=0$
20. $3x^2+18x-28y-29=0$
21. $y^2+24x-12y-60=0$
22. $x^2-8x-16y+32=0$
23. $y^2+8y-20x+36=0$
24. $x^2+28y-28=0$
25. $y^2+14x-4y+25=0$
26. $x^2-14x-10y+54=0$
27. $x^2-2x-8y-23=0$
28. $x^2+6x-24y+129=0$
$x^2+6x+24y-111=0$
29. $y^2+24x-4y-116=0$
30. $x^2-6x+24y-87=0$
31. (4, 8), (7, −4)

**Ejercicio 28**

1. $y^2-x+2y+1=0$
2. $y^2-4x=0$
3. $3y^2-x+7=0$
4. $y^2-x-4=0$
5. $x^2-4x-y+3=0$
6. $x^2-y+1=0$
7. $2x^2+3x-y+1=0$
8. $x^2+6x-2y+5=0$

**Ejercicio 29**

1. 8 *m*
2. 62.5 *cm*
3. 18.75 *cm*
4. 27.71 *cm*
5. $x-y-2=0$
6. $x-4y+24=0$
7. $2x-y-9=0$
8. $x-2y+2=0$
9. $x-3y-3=0$
10. $2x-3y-16=0$

## Capítulo 9

**Ejercicio 30**

1. $5x^2+9y^2-180=0$
2. $5x^2+9y^2-45=0$
3. $49x^2+24y^2-1176=0$
4. $25x^2+16y^2+100x-128y-44=0$
5. $9x^2+25y^2-18x+100y-791=0$

**EJERCICIO 31**

1. $V(\pm 2, 0)$, $F(\pm 1, 0)$, $B(0, \pm\sqrt{3})$, $LR = 3$, $e = \frac{1}{2}$,

$\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 2$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{3}$

2. $V(0, \pm 3)$, $F(0, \pm 2)$, $B(\pm\sqrt{5}, 0)$, $LR = \frac{10}{3}$, $e = \frac{2}{3}$,

$\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 4$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{5}$

3. $V(0, \pm 2\sqrt{3})$, $F(0, \pm\sqrt{7})$, $B(\pm\sqrt{5}, 0)$, $LR = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{21}}{6}$, $\overline{V_1V_2} = 4\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{7}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{5}$

4. $V(\pm 8, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{15}, 0)$, $B(0, \pm 2)$, $LR = 1$, $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$\overline{V_1V_2} = 16$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{15}$ y $\overline{B_1B_2} = 4$

5. $V(\pm 5, 0)$, $F(\pm 4, 0)$, $B(0, \pm 3)$, $LR = \frac{18}{5}$, $e = \frac{4}{5}$,

$\overline{V_1V_2} = 10$, $\overline{F_1F_2} = 8$ y $\overline{B_1B_2} = 6$

6. $V(0, \pm 4)$, $F(0, \pm 2\sqrt{3})$, $B(\pm 2, 0)$, $LR = 2$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{V_1V_2} = 8$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{3}$ y $\overline{B_1B_2} = 4$

7. $V(0, \pm\frac{5}{2})$, $F(0, \pm\frac{5\sqrt{5}}{6})$, $B(\pm\frac{5}{3}, 0)$, $LR = \frac{20}{9}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\overline{V_1V_2} = 5$, $\overline{F_1F_2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ y $\overline{B_1B_2} = \frac{10}{3}$

8. $V(0, \pm 1)$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\pm\frac{1}{2}, 0)$, $LR = \frac{1}{2}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{V_1V_2} = 2$, $\overline{F_1F_2} = \sqrt{3}$, $\overline{B_1B_2} = 1$

9. $V(0, \pm\sqrt{3})$, $F(0, \pm 1)$, $B(\pm\sqrt{2}, 0)$, $LR = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2} = 2$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{2}$

10. $V(0, \pm\frac{1}{3})$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{7}}{12})$, $B(\pm\frac{1}{4}, 0)$, $LR = \frac{3}{8}$,

$e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\overline{V_1V_2} = \frac{2}{3}$, $\overline{F_1F_2} = \frac{\sqrt{7}}{6}$ y $\overline{B_1B_2} = \frac{1}{2}$

11. $V(\pm 4, 0)$, $F(\pm 3, 0)$, $B(0, \pm\sqrt{7})$, $LR = \frac{7}{2}$, $e = \frac{3}{4}$,

$\overline{V_1V_2} = 8$, $\overline{F_1F_2} = 6$, $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{7}$

12. $V(\pm 1, 0)$, $F(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $LR = 1$,

$e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{V_1V_2} = 2$, $\overline{F_1F_2} = \sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2} = \sqrt{2}$

13. $V(0, \pm\sqrt{5})$, $F(0, \pm\sqrt{3})$, $B(\pm\sqrt{2}, 0)$, $LR = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{15}}{5}$, $\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{3}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{2}$

14. $V(0, \pm 2\sqrt{2})$, $F(0, \pm\sqrt{6})$, $B(\pm\sqrt{2}, 0)$, $LR = \sqrt{2}$,

$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{V_1V_2} = 4\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{6}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{2}$

15. $V(\pm 3, 0)$, $F(\pm\sqrt{6}, 0)$, $B(0, \pm\sqrt{3})$, $LR = 2$, $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{6}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{3}$

16. $V(0, \pm 2\sqrt{3})$, $F(0, \pm 2\sqrt{2})$, $B(\pm 2, 0)$, $LR = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\overline{V_1V_2} = 4\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{2}$ y $\overline{B_1B_2} = 4$

**EJERCICIO 32**

1. $5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$
2. $7x^2 + 9y^2 - 63 = 0$
3. $x^2 + 5y^2 - 5 = 0$
4. $49x^2 + 24y^2 - 1176 = 0$
5. $3x^2 + y^2 - 3 = 0$
6. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$
7. $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$
8. $4x^2 + 13y^2 - 52 = 0$
9. $9x^2 + 14y^2 - 126 = 0$
10. $3x^2 + 2y^2 - 12 = 0$
11. $5x^2 + y^2 - 5 = 0$
12. $65x^2 + 16y^2 - 1040 = 0$
13. $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
14. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
15. $16x^2 + 7y^2 - 448 = 0$

16. $12x^2+16y^2-3=0$
17. $8x^2+9y^2-72=0$; $9x^2+8y^2-72=0$
18. $9x^2+4y^2-36=0$
19. $x^2+4y^2-16=0$
20. $9x^2+13y^2-117=0$
21. $x^2+4y^2-9=0$
22. $x^2+2y^2-2=0$; $2x^2+y^2-2=0$

**Ejercicio 33**

1. $C(2, 1)$, $V_1(2, 5)$, $V_2(2, -3)$, $F_1(2, 1+\sqrt{7})$, $F_2(2, 1-\sqrt{7})$

   $B_1(5, 1)$, $B_2(-1, 1)$, $LR=\frac{9}{2}$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\overline{V_1V_2}=8$,

   $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7}$, $\overline{B_1B_2}=6$

2. $C\left(\frac{2}{3},1\right)$, $V_1\left(\frac{8}{3},1\right)$, $V_2\left(-\frac{4}{3},1\right)$, $F_1\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{3},1\right)$,

   $F_2\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{3},1\right)$, $B_1\left(\frac{2}{3},2\right)$, $B_2\left(\frac{2}{3},0\right)$, $LR=1$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

   $\overline{V_1V_2}=4$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{3}$, $\overline{B_1B_2}=2$

3. $C(-5, 1)$, $V_1(-2, 1)$, $V_2(-8, 1)$, $F_1(-5+\sqrt{6}, 1)$,

   $F_2(-5-\sqrt{6}, 1)$, $B_1(-5, 1+\sqrt{3})$, $B_2(-5, 1-\sqrt{3})$,

   $LR=2$, $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{6}$, $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{3}$

4. $C(0, 2)$, $V_1(0, 7)$, $V_2(0, -3)$, $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -1)$, $B_1(4, 2)$,

   $B_2(-4, 2)$, $LR=\frac{32}{5}$, $e=\frac{3}{5}$, $\overline{V_1V_2}=10$, $\overline{F_1F_2}=6$, $\overline{B_1B_2}=8$

5. $C(5, -2)$, $V_1(9, -2)$, $V_2(1, -2)$, $F_1(5+\sqrt{15}, -2)$,

   $F_2(5-\sqrt{15}, -2)$, $B_1(5, -1)$, $B_2(5, -3)$, $LR=\frac{1}{2}$,

   $e=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\overline{V_1V_2}=8$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{15}$, $\overline{B_1B_2}=2$

6. $C(2, 3)$, $V_1(2, 9)$, $V_2(2, -3)$, $F_1(2, 3+3\sqrt{3})$,

   $F_2(2, 3-3\sqrt{3})$, $B_1(5, 3)$, $B_2(-1, 3)$, $LR=3$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

   $\overline{V_1V_2}=12$, $\overline{F_1F_2}=6\sqrt{3}$, $\overline{B_1B_2}=6$

7. $C\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$, $V_1\left(-\frac{5}{2},\frac{15}{4}\right)$, $V_2\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right)$,

   $F_1\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}+\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}-\sqrt{5}\right)$, $B_1\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$,

   $B_2\left(-\frac{9}{2},\frac{3}{4}\right)$, $LR=\frac{8}{3}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\overline{V_1V_2}=6$,

   $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$

8. $C(1, 2)$, $V_1(4, 2)$, $V_2(-2, 2)$, $F_1(1+\sqrt{5}, 2)$, $F_2(1-\sqrt{5}, 2)$,

   $B_1(1, 4)$, $B_2(1, 0)$, $LR=\frac{8}{3}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\overline{V_1V_2}=6$,

   $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$

9. $C\left(-\frac{7}{3},\frac{3}{4}\right)$, $V_1\left(-2,\frac{3}{4}\right)$, $V_2\left(-\frac{8}{3},\frac{3}{4}\right)$,

   $F_1\left(\frac{-28+\sqrt{7}}{12},\frac{3}{4}\right)$, $F_2\left(\frac{-28-\sqrt{7}}{12},\frac{3}{4}\right)$, $B_1\left(-\frac{7}{3},1\right)$,

   $B_2\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{2}\right)$, $LR=\frac{3}{8}$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\overline{V_1V_2}=\frac{2}{3}$,

   $\overline{F_1F_2}=\frac{\sqrt{7}}{6}$, $\overline{B_1B_2}=\frac{1}{2}$

10. $C\left(-\frac{5}{3},-\frac{7}{2}\right)$, $V_1\left(-\frac{5}{3},\frac{-7+2\sqrt{3}}{2}\right)$,

    $V_2\left(-\frac{5}{3},\frac{-7-2\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_1\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{2}\right)$, $F_2\left(-\frac{5}{3},-\frac{9}{2}\right)$,

    $B_1\left(\frac{-5+3\sqrt{2}}{3},-\frac{7}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{-5-3\sqrt{2}}{3},-\frac{7}{2}\right)$,

    $LR=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2}=2$,

    $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{2}$

11. $C(-3, 2)$ $V_1(0, 2)$, $V_2(-6, 2)$ $F_1(-1, 2)$, $F_2(-5, 2)$,

    $B_1(-3, 2+\sqrt{5})$, $B_2(-3, 2-\sqrt{5})$, $LR=\frac{10}{3}$, $e=\frac{2}{3}$,

    $\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=4$, $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{5}$

12. $C\left(-\frac{5}{2},\frac{4}{3}\right)$, $V_1\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$, $V_2\left(-\frac{11}{2},\frac{4}{3}\right)$,

$F_1\left(\frac{-5+2\sqrt{5}}{2},\frac{4}{3}\right)$, $F_2\left(\frac{-5-2\sqrt{5}}{2},\frac{4}{3}\right)$,

$B_1\left(-\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right)$, $B_2\left(-\frac{5}{2},-\frac{2}{3}\right)$, $LR=\frac{8}{3}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$

13. $C\left(-\frac{1}{2},\frac{12}{5}\right)$, $V_1\left(\frac{9}{2},\frac{12}{5}\right)$, $V_2\left(-\frac{11}{2},\frac{12}{5}\right)$

$F_1\left(\frac{-1+2\sqrt{21}}{2},\frac{12}{5}\right)$, $F_2\left(\frac{-1-2\sqrt{21}}{2},\frac{12}{5}\right)$,

$B_1\left(-\frac{1}{2},\frac{22}{5}\right)$, $B_2\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$, $LR=\frac{8}{5}$, $e=\frac{\sqrt{21}}{5}$,

$\overline{V_1V_2}=10$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{21}$, $\overline{B_1B_2}=4$

14. $C(0,-1)$, $V_1(1,-1)$, $V_2(-1,-1)$, $F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$,

$F_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$, $B_1\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, $LR=\frac{1}{2}$,

$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{V_1V_2}=2$, $\overline{F_1F_2}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1B_2}=1$

15. $C(-2,0)$, $V_1(-2,2)$, $V_2(-2,-2)$, $F_1(-2,1)$, $F_2(-2,-1)$,

$B_1\left(-2+\sqrt{3},0\right)$, $B_2\left(-2-\sqrt{3},0\right)$, $LR=3$,

$e=\frac{1}{2}$, $\overline{V_1V_2}=4$, $\overline{F_1F_2}=2$, $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{3}$

16. $C\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$, $V_1\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{3}\right)$, $V_2\left(-\frac{3}{2},-\frac{11}{3}\right)$,

$F_1\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}+\sqrt{7}\right)$, $F_2\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}-\sqrt{7}\right)$, $B_1\left(\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$,

$B_2\left(-\frac{9}{2},\frac{1}{3}\right)$, $LR=\frac{9}{2}$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\overline{V_1V_2}=8$,

$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7}$, $\overline{B_1B_2}=6$

17. $C(-1,2)$, $V_1\left(-\frac{1}{2},2\right)$, $V_2\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $F_1\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{6},2\right)$,

$F_2\left(-1-\frac{\sqrt{5}}{6},2\right)$, $B_1\left(-1,\frac{7}{3}\right)$, $B_2\left(-1,\frac{5}{3}\right)$, $LR=\frac{4}{9}$,

$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\overline{V_1V_2}=1$, $\overline{F_1F_2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\overline{B_1B_2}=\frac{2}{3}$

## Ejercicio 34

1. $\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

$x^2+4y^2-14x+16y+49=0$

2. $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

$9x^2+25y^2-54x-150y+81=0$

3. $\frac{(x+2)^2}{7}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

$16x^2+7y^2+64x+14y-41=0$

4. $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$9x^2+16y^2-72x=0$

5. $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$

$4x^2+25y^2-24x-200y+336=0$

6. $\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y-5)^2}{36}=1$

$9x^2+25y^2-108x-250y+49=0$

7. $\frac{x^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

$9x^2+5y^2+20y-25=0$

8. $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{36}=1$

$9x^2+y^2-54x+4y+49=0$

9. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

$25x^2+9y^2+200x-18y+184=0$

10. $\frac{(x+7)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$

$x^2+9y^2+14x-90y+238=0$

11. $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

$16x^2+25y^2+192x+100y+276=0$

12. $\frac{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2}{36}+\frac{\left(y+\frac{11}{2}\right)^2}{16}=1$

$144x^2+324y^2-768x+3\,564y+5\,641=0$

13. $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-7)^2}{1}=1$

$x^2+9y^2-10x-126y+457=0$

14. $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

$7x^2+16y^2+56x=0$

15. $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

$9x^2+25y^2+18x-100y-116=0$

16. $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-6)^2}{48}=1$

$3x^2+4y^2-18x-48y-21=0$

17. $\frac{(x+5)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{11}=1$

$11x^2+36y^2+110x-216y+203=0$

18. $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{12}=1$

$3x^2+y^2-12x-2y+1=0$

### EJERCICIO 35

1. Conjunto vacío
2. Punto
3. Elipse
4. Elipse
5. Elipse
6. Conjunto vacío
7. Un punto
8. Un punto
9. Conjunto vacío
10. Elipse

### EJERCICIO 36

1. $3x^2+8y^2+18x+8y-21=0$
2. $9x^2+4y^2-36x-16y+16=0$
3. $4x^2+y^2-32x-4y+64=0$
4. $x^2+9y^2-18y=0$
5. $4x^2+25y^2-16x-84=0$
6. $x^2+4y^2-16=0$
7. $3x^2+y^2-3=0$
8. $9x^2+25y^2-225=0$
9. $9x^2+4y^2+18x+24y+9=0$
10. $25x^2+4y^2-100x+8y+4=0$

### EJERCICIO 37

1. 30.0588 UA
2. 0.72298 UA
3. 1.8739 años
4. 11.8578 años
5. $3x-\sqrt{3}y+6=0$
6. $3x+5y-44=0$

## CAPÍTULO 10

### EJERCICIO 38

1. $5x^2-4y^2-20=0$
2. $16x^2-9y^2-144=0$
3. $13y^2-36x^2-468=0$
4. $156y^2-100x^2-975=0$
5. $3x^2-4y^2-12=0$
6. $7x^2-9y^2-70x+72y-32=0$
7. $9y^2-16x^2-96x-36y-252=0$

### EJERCICIO 39

1. $V(\pm 9, 0)$, $F(\pm 3\sqrt{10}, 0)$, $B(0, \pm 3)$, $\overline{V_1V_2}=18$, $\overline{F_1F_2}=6\sqrt{10}$, $\overline{B_1B_2}=6$, $LR=2$, $e=\frac{\sqrt{10}}{3}$. Asíntotas: $y=\pm\frac{1}{3}x$
2. $V(\pm 1, 0)$, $F(\pm\sqrt{5}, 0)$, $B(0, \pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=2$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=8$, $e=\sqrt{5}$. Asíntotas: $y=\pm 2x$
3. $V(0, \pm 2\sqrt{2})$, $F(0, \pm\sqrt{13})$, $B(\pm\sqrt{5}, 0)$, $\overline{V_1V_2}=4\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{5}$, $LR=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $e=\frac{\sqrt{26}}{4}$. Asíntotas: $y=\pm\frac{2\sqrt{10}}{5}x$
4. $V(0, \pm 2a)$, $F(0, \pm\sqrt{5}a)$, $B(\pm a, 0)$, $\overline{V_1V_2}=4a$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}a$, $\overline{B_1B_2}=2a$, $LR=a$, $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Asíntotas: $y=\pm 2x$
5. $V(\pm\sqrt{5}, 0)$, $F(\pm 3, 0)$, $B(0, \pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{F_1F_2}=6$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=\frac{8\sqrt{5}}{5}$, $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Asíntotas: $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$
6. $V(\pm 3, 0)$, $F(\pm 5, 0)$, $B(0, \pm 4)$, $\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=10$, $\overline{B_1B_2}=8$, $LR=\frac{32}{3}$, $e=\frac{5}{3}$. Asíntotas: $y=\pm\frac{4}{3}x$
7. $V(0, \pm 1)$, $F(0, \pm\sqrt{5})$, $B(\pm 2, 0)$, $\overline{V_1V_2}=2$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=8$; $e=\sqrt{5}$. Asíntotas: $y=\pm\frac{1}{2}x$
8. $V(\pm 5, 0)$, $F(\pm\sqrt{105}, 0)$, $B(0, \pm 4\sqrt{5})$, $\overline{V_1V_2}=10$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{105}$, $\overline{B_1B_2}=8\sqrt{5}$, $LR=32$; $e=\frac{\sqrt{105}}{5}$. Asíntotas: $y=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}x$
9. $V(0, \pm 4)$, $F(0, \pm 2\sqrt{13})$, $B(\pm 6, 0)$, $\overline{V_1V_2}=8$, $\overline{F_1F_2}=4\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2}=12$, $LR=18$; $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$. Asíntotas: $y=\pm\frac{2}{3}x$
10. $V(0, \pm 2)$, $F(0, \pm 2\sqrt{2})$, $B(\pm 2, 0)$, $\overline{V_1V_2}=4$, $\overline{F_1F_2}=4\sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=4$; $e=\sqrt{2}$. Asíntotas: $y=\pm x$

11. $V(0, \pm\sqrt{5})$, $F(0, \pm\sqrt{11})$, $B(\pm\sqrt{6}, 0)$, $\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{5}$,

$\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{11}$, $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{6}$, $LR = \frac{12\sqrt{5}}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{55}}{5}$. Asíntotas: $y = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}x$

12. $V(\pm\sqrt{5}, 0)$, $F(\pm\sqrt{17}, 0)$, $B(0, \pm 2\sqrt{3})$, $\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{5}$,

$\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{17}$, $\overline{B_1B_2} = 4\sqrt{3}$, $LR = \frac{24\sqrt{5}}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{85}}{5}$. Asíntotas: $y = \pm\frac{2\sqrt{15}}{5}x$

**EJERCICIO 40**

1. $7y^2 - 9x^2 - 63 = 0$
2. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$
3. $3x^2 - 2y^2 + 12 = 0$
4. $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$
5. $4x^2 - y^2 - 4 = 0$
6. $5x^2 - 2y^2 - 40 = 0$
7. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$
8. $25y^2 - 16x^2 - 400 = 0$
9. $x^2 - 4y^2 - 36 = 0$
10. $x^2 - 3y^2 - 12 = 0$
11. $5y^2 - 6x^2 - 30 = 0$
12. $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$
13. $x^2 - 2y^2 - 12 = 0$
14. $5y^2 - 6x^2 - 30 = 0$
15. $9y^2 - 16x^2 - 256 = 0$
    $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
16. $x^2 - 9y^2 - 9 = 0$
17. $5x^2 - 6y^2 - 30 = 0$
18. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$
19. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

**EJERCICIO 41**

1. $C(-3, 4)$, $V(-3\pm 5, 4)$, $F(-3\pm\sqrt{34}, 4)$, $B(-3, 4\pm 3)$,

$\overline{V_1V_2} = 10$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{34}$, $\overline{B_1B_2} = 6$, $LR = \frac{18}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{34}}{5}$. Asíntotas: $y - 4 = \pm\frac{3}{5}(x+3)$

2. $C(-1, 0)$, $V(-1, 0\pm 2)$, $F(-1, 0\pm\sqrt{5})$, $B(-1\pm 1, 0)$,

$\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2} = 2$, $LR = 1$,

$e = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Asíntotas: $y = \pm 2(x + 1)$

3. $C(0, -2)$, $V(0\pm 3, -2)$, $F(0\pm\sqrt{13}, -2)$, $B(0, -2\pm 2)$,

$\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2} = 4$, $LR = \frac{8}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm\frac{2}{3}x$

4. $C(1, 2)$, $V(1, 2\pm\sqrt{2})$, $F(1, 2\pm\sqrt{10})$, $B(1\pm 2\sqrt{2}, 2)$,

$\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{10}$, $\overline{B_1B_2} = 4\sqrt{2}$,

$LR = 8\sqrt{2}$, $e = \sqrt{5}$. Asíntotas: $y - 2 = \pm\frac{1}{2}(x-1)$

5. $C(-1, -3)$, $V(-1, -3\pm 3)$, $F(-1, -3\pm\sqrt{13})$,

$B(-1\pm 2, -3)$, $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2} = 4$,

$LR = \frac{8}{3}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Asíntotas: $y + 3 = \pm\frac{3}{2}(x+1)$

6. $C(-2, 1)$, $V(-2\pm 4, 1)$, $F(-2\pm 5, 1)$, $B(-2, 1\pm 3)$,

$\overline{V_1V_2} = 8$, $\overline{F_1F_2} = 10$, $\overline{B_1B_2} = 6$, $LR = \frac{9}{2}$, $e = \frac{5}{4}$.

Asíntotas: $y - 1 = \pm\frac{3}{4}(x+2)$

7. $C\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $V\left(\frac{1}{2}\pm 3, 1\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{13}, 1\right)$,

$B\left(\frac{1}{2}, 1\pm 2\right)$ $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2} = 4$,

$LR = \frac{8}{3}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Asíntotas: $y - 1 = \pm\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

8. $C(-3, 0)$, $V(-3, 0\pm 2)$, $F(-3, 0\pm\sqrt{5})$, $B(-3\pm 1, 0)$,

$\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2} = 2$, $LR = 1$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Asíntotas: $y = \pm 2(x + 3)$

9. $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\pm 2\right)$, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\pm 2\sqrt{2}\right)$,

$B\left(\frac{1}{2}\pm 2, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2} = 4$,

$LR = 4$, $e = \sqrt{2}$. Asíntotas: $y - \frac{1}{2} = \pm\left(x - \frac{1}{2}\right)$

10. $C(0, -2)$, $V(0\pm 3, -2)$, $F\left(0\pm 3\sqrt{5}, -2\right)$,

$B(0, -2\pm 6)$, $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 6\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2} = 12$,

$LR = 24$, $e = \sqrt{5}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm 2x$

11. $C(3, -2)$, $V(3\pm 1, -2)$, $F\left(3\pm\sqrt{2}, -2\right)$,

$B(3, -2\pm 1)$, $\overline{V_1V_2} = 2$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2} = 2$,

$LR = 2$, $e = \sqrt{2}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm(x - 3)$

12. $C(2, -2)$, $V(2, -2\pm 3)$, $F\left(2, -2\pm\sqrt{10}\right)$,

$B(2\pm 1, -2)$, $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{10}$, $\overline{B_1B_2} = 2$,

$LR = \frac{2}{3}$, $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm 3(x - 2)$

13. $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, $V\left(\frac{1}{2}\pm 3,\frac{1}{3}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{13},\frac{1}{3}\right)$,

$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\pm 2\right)$, $\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{13}$,

$\overline{B_1B_2}=4$, $LR=\frac{8}{3}$, $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Asíntotas: $y-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

14. $C(4, 3)$, $V\left(4\pm 2\sqrt{2},3\right)$, $F\left(4\pm 2\sqrt{3},3\right)$,

$B(4, 3\pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=4\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2}=4\sqrt{3}$,

$\overline{B_1B_2}=4$, $LR=2\sqrt{2}$, $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Asíntotas: $y-3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-4\right)$

15. $C(-1, -3)$, $V(-1, -3\pm\sqrt{6})$, $F(-1, -3\pm\sqrt{11})$,

$B(-1\pm\sqrt{5}, -3)$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{6}$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{11}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{5}$, $LR=\frac{5}{3}\sqrt{6}$, $e=\frac{\sqrt{66}}{6}$.

Asíntotas: $y+3=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}\left(x+1\right)$

16. $C(-4, -1)$, $V(-4\pm 2, -1)$, $F(-4\pm\sqrt{7}, -1)$,

$B(-4, -1\pm\sqrt{3})$, $\overline{V_1V_2}=4$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{3}$, $LR=3$, $e=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Asíntotas: $y+1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+4\right)$

17. $C(2, 5)$, $V(2\pm 2\sqrt{3}, 5)$, $F(2\pm 3\sqrt{2}, 5)$,

$B(2, 5\pm\sqrt{6})$, $\overline{V_1V_2}=4\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2}=6\sqrt{2}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{6}$, $LR=2\sqrt{3}$, $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Asíntotas: $y-5=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-2\right)$

18. $C(-7, -1)$, $V(-7\pm\sqrt{2}, -1)$, $F(-7\pm 2, -1)$,

$B(-7, -1\pm\sqrt{2})$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2}=4$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{2}$, $LR=2\sqrt{2}$, $e=\sqrt{2}$.

Asíntotas: $y+1=\pm 1(x+7)$

19. $C(-7, -1)$, $V(-7\pm 1, -1)$, $F(-7\pm\sqrt{3}, -1)$,

$B(-7, -1\pm\sqrt{2})$, $\overline{V_1V_2}=2$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{3}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{2}$, $LR=4$, $e=\sqrt{3}$.

Asíntotas: $y+1=\pm\sqrt{2}\left(x+7\right)$

20. $C(-1, 5)$, $V(-1\pm\sqrt{3}, 5)$, $F(-1\pm\sqrt{7}, 5)$,

$B(-1, 5\pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7}$,

$\overline{B_1B_2}=4$, $LR=\frac{8}{3}\sqrt{3}$, $e=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Asíntotas: $y-5=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+1\right)$

**Ejercicio 42**

1. $16x^2-9y^2+18y-153=0$
2. $11y^2-25x^2+22y-200x-664=0$
3. $9x^2-16y^2-36x-64y-172=0$
4. $5y^2-4x^2-30y+8x+21=0$
5. $9x^2-16y^2-54x+64y-127=0$
6. $5x^2-4y^2+60x+24y+124=0$
7. $3x^2-y^2-12x+6y-9=0$
8. $9x^2-7y^2+18x+42y+9=0$
9. $x^2-2y^2-8x+12y-10=0$
10. $6x^2-5y^2+24x-30y+9=0$
11. $3x^2-4y^2+24x-8y+32=0$
12. $9x^2-16y^2-18x+96y-279=0$
13. $4y^2-5x^2-8y-10x-21=0$
14. $9x^2-4y^2+36x+8y-4=0$

**Ejercicio 43**

1. $k=5$
2. $k=-2$
3. $k=77$
4. $k=-\frac{1}{6}$
5. $k=1$
6. $k=1$
7. $k=64$
8. $k=-35$
9. $k=0$
10. $k=-7$
11. $k=-32$

**Ejercicio 44**

1. $5x-4y+16=0$
2. $5x+\sqrt{34}\,y+25=0$
3. $5x-4y+26=0$
4. $2x-5y-30=0$
5. $x+4y-9=0$

## CAPÍTULO 11

**EJERCICIO 45**

1. $y'^2 - \sqrt{2}\,x = 0$
2. $3x'^2 + 4y'^2 - 12 = 0$
3. $x'^2 - y'^2 + 4 = 0$
4. $x'^2 + y' = 0$
5. $x'^2 + 2y'^2 + 4x' + 4y' - 3 = 0$

**EJERCICIO 46**

1. $x'^2 - y'^2 - 1 = 0$
2. $y'^2 - 8x' = 0$
3. $x'^2 + 4y'^2 - 4x' - 8y' + 4 = 0$
4. $x'^2 - \sqrt{3}\,y' = 0$
5. $x'^2 - y'^2 - 2 = 0$
6. $4x'^2 + 9y'^2 + 8\sqrt{2}\,x' - 28 = 0$
7. $3x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}\,x' - 10\sqrt{2}\,y' + 10 = 0$
8. $6x'^2 + y'^2 - 6\sqrt{5}\,x' + 8\sqrt{5}\,y' = 0$
9. $2y'^2 - 5\sqrt{2}\,x' + 15\sqrt{2}\,y' = 0$
10. $3x'^2 - y'^2 - 24\sqrt{2}\,x + 104 = 0$

**EJERCICIO 47**

1. $y''^2 - 4x'' = 0$
2. $4x''^2 + y''^2 - 4 = 0$
3. $4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$
4. $4x''^2 - 9y''^2 - 36 = 0$
5. $x''^2 + 8y'' = 0$
6. $y''^2 + 6x'' = 0$
7. $x''^2 - y''^2 + 9 = 0$
8. $x''^2 - 12y'' = 0$
9. $4x''^2 + y''^2 - 4 = 0$

**EJERCICIO 48**

1. Parábola
2. Elipse
3. Hipérbola
4. Parábola
5. Elipse
6. Parábola
7. Elipse
8. Elipse
9. Parábola
10. Hipérbola

**EJERCICIO 49**

1. $x - y + 3 = 0$; $x + 2y = 0$
2. $3x + y + 1 = 0$
3. $x - y + 1 = 0$
4. $x + y + 3 = 0$; $4x - y + 7 = 0$
5. $3x - 2y = 0$; $x + y = 0$
6. $x + 5y - 2 = 0$
7. $P(-1, -1)$
8. $3x + 4y - 2 = 0$
9. $x + 3y - 2 = 0$; $x - 2y + 2 = 0$
10. $2x + 3y - 5 = 0$

**EJERCICIO 50**

1. $5x^2 + 9y^2 + 48x - 54y - 63 = 0$
2. $4x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 4 = 0$
3. $y^2 + 14x - 6y - 12 = 0$
4. $16x^2 - 9y^2 + 200y - 400 = 0$
5. $x^2 - 16xy + y^2 - 36x + 18y + 45 = 0$
6. $3x^2 + 4xy - 18x - 2y - 4 = 0$
7. $144x^2 + 432xy + 324y^2 + 984x - 1\,332y - 1\,127 = 0$
8. $2xy + a^2 = 0$
9. $7y^2 - 24xy - 6y + 144x - 225 = 0$
10. $x^2 + 4y^2 - 6\sqrt{3}\,ax + 11a^2 = 0$

**EJERCICIO 51**

1. $x = \pm\frac{25}{3}$
2. $y = \pm\frac{16}{\sqrt{7}}$
3. $x = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$
4. $x = \pm\frac{4}{\sqrt{29}}$
5. $y = \pm\frac{16}{5}$
6. $y = \pm\frac{25}{\sqrt{34}}$
7. $y = -2\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$
8. $x = -3\pm\frac{25}{\sqrt{41}}$
9. $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $y = 1\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$

**EJERCICIO 52**

1. $3x + 4y - 25 = 0$
2. $9x + 4y - 31 = 0$
3. $5x - 4y - 21 = 0$
4. $6x - 5y + 31 = 0$
5. $12x - 5y - 38 = 0$
6. $x - 4y + 17 = 0$
7. $3x - 5y + 18 = 0$
8. $y - 2 = 0$
9. $x - y - 7 = 0$
10. $16x + 25y + 41 = 0$

**EJERCICIO 53**

1. $3x - 2y + 13 = 0$; $3x - 2y - 13 = 0$
2. $2x - 3y + 3\sqrt{5} = 0$; $2x - 3y - 3\sqrt{5} = 0$
3. $x - 6y + 14 = 0$
4. $x + 2y + 1 = 0$
5. $x + 4y - 3 = 0$, $x + 4y + 9 = 0$

**EJERCICIO 54**

1. $x - y + 2 = 0$; $x + 2y + 8 = 0$
2. $y = 0$, $2x + y + 8 = 0$
3. $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$ ; $\sqrt{3}x + 3y - 6 = 0$
4. $3x - 5y + 18 = 0$; $5x + 3y - 38 = 0$
5. $2x - y + 1 = 0$; $x + y - 4 = 0$

## CAPÍTULO 12

### EJERCICIO 55

1. $A\left(3\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$
2. $R\left(2,-2\sqrt{3}\right)$
3. $P\left(-4,4\right)$
4. $A\left(4\sqrt{3},4\right)$
5. $B\left(5,-5\sqrt{3}\right)$
6. $C\left(0,-4\right)$
7. $Q\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$
8. $M\left(-\frac{7}{2}\sqrt{2},\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$
9. $N\left(5\sqrt{2},5\sqrt{2}\right)$
10. $S\left(-\frac{15}{2}\sqrt{3},\frac{15}{2}\right)$
11. $T\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
12. $A\left(-1,\sqrt{3}\right)$
13. $S\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$
14. $C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
15. $B\left(-\frac{3}{8}\sqrt{2+\sqrt{3}},-\frac{3}{8}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$
16. $A$(13, 67°22’48”) = (– 13, 247°22’48”)
17. $P\left(2\sqrt{13},\ 213°41’24”\right) = \left(-2\sqrt{13},\ 33°41’24”\right)$
18. $C$ (5, 323°7’48”) = (–5, 143°7’48”)
19. $B$(15, 306°52’11”) = (– 15, 126°52’11”)
20. $C$(4, 0°) = (– 4, 180°)
21. $W$(6, 270°) = (– 6, 90°)
22. $M$(5, 306°52’11’’) = (– 5, 126°52’11’’)
23. $Q$(13, 157°22’48’’) = (– 13, 337°22’48’’)
24. $D$(– 1, 135°) = (1, 315°)
25. $F$(25, 16°15’36’’) = (– 25, 196°15’36’’)
26. $Z$(1, 150°) = (– 1, 330°)
27. $Q$( $\sqrt{34}$ , 329°2’10’’) = (– $\sqrt{34}$ , 149°2’10’’)
28. $L$(3, 180°) = (– 3, 0°)
29. $J\left(\frac{\sqrt{17}}{2},\ 284°2’10”\right) = \left(-\frac{\sqrt{17}}{2},\ 104°2’10”\right)$
30. $K$ (5, 90°) = (– 5, 270°)

### EJERCICIO 56

1. $d_{AB}=\sqrt{5}\ u$
2. $d_{CD}=3\sqrt{5}\ u$
3. $d_{EF}=17\ u$
4. $d_{GH}=2\sqrt{7}\ u$
5. $d_{IJ}=\sqrt{89-40\sqrt{3}}\ u$
6. $A=36u^2$
7. $A=6u^2$
8. $A=32u^2$

### EJERCICIO 57

1. $r\ sen\ \theta+3=0$
2. $r\ cos\ \theta-5=0$
3. $\theta=60°$
4. $r=\dfrac{6}{2cos\,\theta-3sen\,\theta}$
5. $r=\dfrac{2}{sen\,\theta+cos\,\theta}$
6. $r=\dfrac{p}{cos\left(\theta-w\right)}$
7. $r=\pm 4$
8. $r+4\ cos\ \theta=0$
9. $r-2\ sen\ \theta=0$
10. $r^2-4\ r\ cos\ \theta-6\ r\ sen\ \theta-12=0$
11. $r=\dfrac{-8cos\,\theta}{sen^2\,\theta}=-8cot\,\theta\,csc\,\theta$
12. $r^2\ sen^2\ \theta-12\ r\ cos\ \theta-36=0$
13. $r=sen2\ \theta$
14. $r^2\ cos^2\ \theta-2r\ cos\ \theta-4r\ sen\ \theta-3=0$
15. $r=\dfrac{\pm 6}{\sqrt{5cos^2\theta+4}}$
16. $r=\dfrac{\pm 20}{\sqrt{16+9sen^2\theta}}$
17. $9r^2\ cos^2\ \theta+25r^2\ sen^2\ \theta-72r\ sen\ \theta-81=0$
18. $r=\dfrac{-36sen\,\theta}{4+5sen^2\,\theta}$
19. $r=\dfrac{\pm 3}{\sqrt{cos\ 2\theta}}$
20. $r=\dfrac{\pm 12}{\sqrt{25cos^2\,\theta-9}}$
21. $9r^2\ cos^2\ \theta-4r^2\ sen^2\ \theta+8r\ sen\ \theta-40=0$
22. $r=cos\ \theta\pm 1$
23. $r=\pm\sqrt{\dfrac{-8}{sen\ 2\theta}}$
24. $r=\pm\sqrt{cos\ 2\theta}$
25. $r=\frac{1}{2}sen\ 2\theta$
26. $r\ cos^2\ \theta\,(r\ sen\ \theta-2)=16sen\ \theta$
27. $r=12\ ctg\ \theta\ csc\ \theta$
28. $r=\dfrac{12}{3sen\,\theta-4cos\,\theta}$
29. $r=\dfrac{\pm 4}{\sqrt{cos^2\,\theta-4sen^2\,\theta}}$

30. $r^2 \cos^2\theta + 4r \operatorname{sen}\theta - 8 = 0$

31. $r = -3\operatorname{sen}\theta \pm 2$

32. $r = \dfrac{\pm 6}{\sqrt{4 + 5\operatorname{sen}^2\theta}}$

33. $r^2 - 2r\cos\theta = 8$

34. $r^2(3 + \operatorname{sen}^2\theta) - 6r\cos\theta - 9 = 0$

35. $r^2(4 - 9\cos^2\theta) - 8r\operatorname{sen}\theta - 6 = 0$

36. $r^2\cos^2\theta - 5r\operatorname{sen}\theta + 15 = 0$

37. $r = \dfrac{2 - 4\operatorname{ctg}\theta}{3\operatorname{sen}\theta}$

38. $r = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{\sqrt{2\cos 2\theta + 3\operatorname{sen} 2\theta}}$

39. $r = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + \tan\theta}}{\cos\theta}$

40. $\dfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}2\theta - r\operatorname{sen}\theta - 3r\cos\theta + 2 = 0$

### EJERCICIO 58

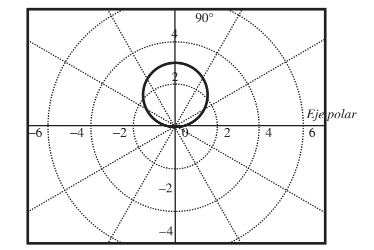
1. $y - 5 = 0$
2. $x + 8 = 0$
3. $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4y = 0$
5. $9x^2 + 5y^2 + 20y - 25 = 0$
6. $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2xy = 0$
7. $x^2 + 2y^2 - 256 = 0$
8. $y^2 - 10x - 25 = 0$
9. $4(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + x)^2$
10. $x^4 + y^4 - 15x^2 - 16y^2 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2 = 0$
11. $16(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 4x)^2$
12. $2xy - 9 = 0$
13. $x^2 - 6y - 9 = 0$
14. $y^2 + 8x - 16 = 0$
15. $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 4\left(x^2 - y^2\right)$
16. $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} = y$
17. $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$
18. $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$
19. $3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$
20. $3x^2 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$
21. $3x^2 + 4y^2 - 8x - 16 = 0$
22. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 16\left(x^2 - y^2\right)$
23. $5x^2 - 4y^2 - 36x + 36 = 0$
24. $x^2 + 4y - 4 = 0$
25. $4x^3 - y^2 = 0$
26. $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 8 = 0$
27. $x^2 + 3x - 2y + 4 = 0$
28. $y^2 - 12x = 0$
29. $x^2 - y^2 = 1$
30. $x + \sqrt{3}\,y + 8 = 0$
31. $x - \sqrt{3}\,y = 0$
32. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^3 - 3xy^2$
33. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3 - 6xy^2$
34. $\left(x^2 + y^2\right)^2\left[\sqrt{x^2 + y^2} - 5\right] = -40x^2y^2$
35. $x \tan\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} - y = 0$
36. $2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} - 9\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} + 9x = 0$
37. $2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} - 4\left(x^2 + y^2\right) + \sqrt{x^2 + y^2} - x = 0$

### EJERCICIO 59

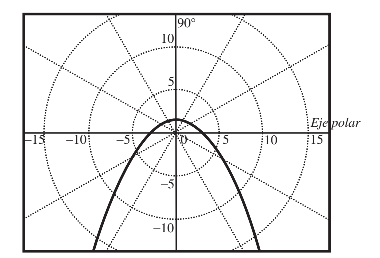
1. Parábola horizontal
2. Parábola horizontal
3. Parábola vertical
4. Parábola vertical
5. Elipse vertical
6. Hipérbola vertical
7. Elipse horizontal
8. Elipse horizontal
9. Hipérbola horizontal
10. Hipérbola horizontal
11. Hipérbola vertical
12. Parábola vertical
13. Hipérbola horizontal
14. Elipse horizontal
15. Parábola horizontal
16. Elipse horizontal
17. Elipse horizontal
18. Elipse vertical
19. Parábola vertical
20. Elipse vertical

### EJERCICIO 60

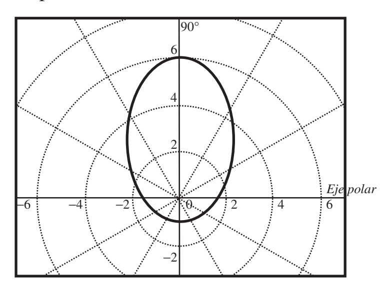
1. $r = 3\operatorname{sen}\theta$



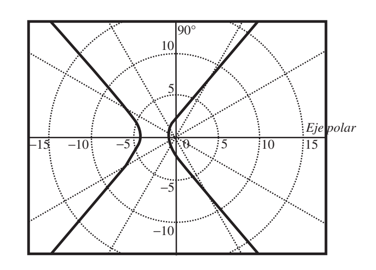
2. $r = \dfrac{3}{1 + sen\,\theta}$



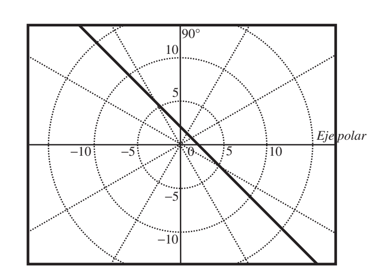

3. Elipse



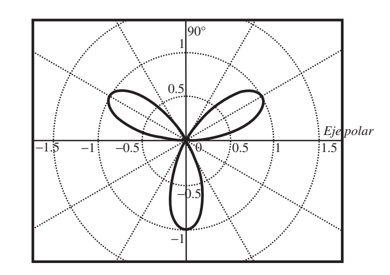

4. $\dfrac{4}{2 - 3cos\,\theta}$



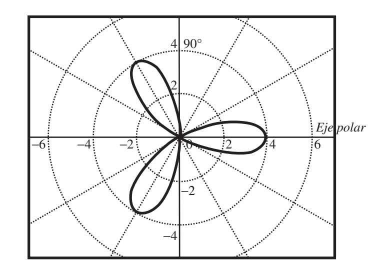

5. $r = \dfrac{2}{sen\,\theta + cos\,\theta}$



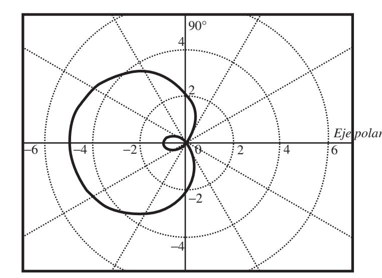

6. $r = sen\,3\theta$



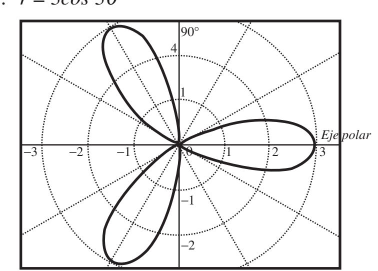

7. $r = 4cos\,3\theta$



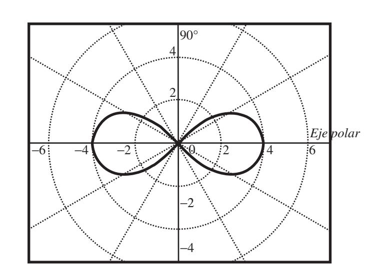

8. $r = 2 - 3cos\,\theta$



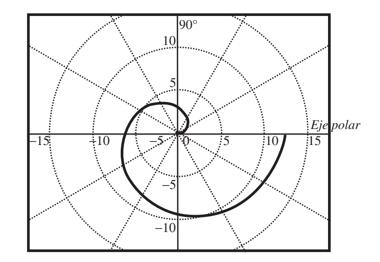

9. $r = 3cos\,3\theta$



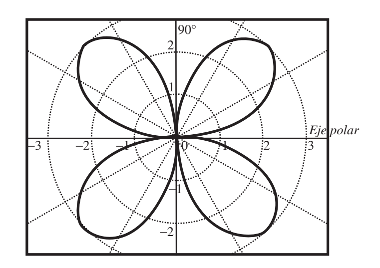

10. $r^2 = 16cos\,2\theta$



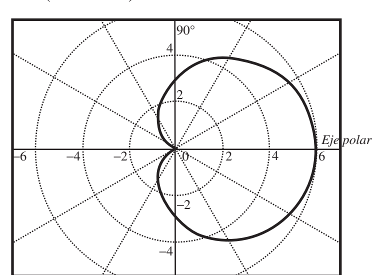
11. $r = 2\theta$



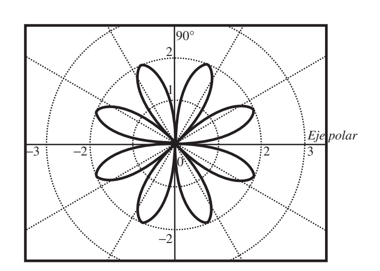

12. $r = 3sen\, 2\theta$



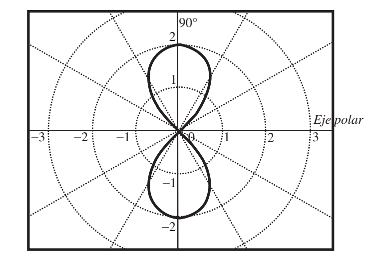

13. $r = 3(1 + cos\, \theta)$



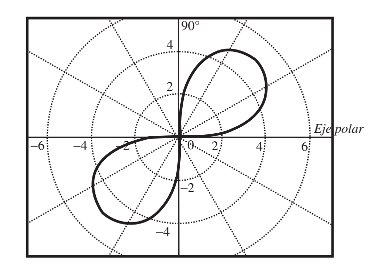

14. $r = 2sen\, 4\theta$



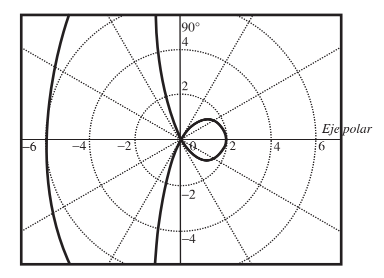

15. $r^2 = -4cos\, 2\theta$



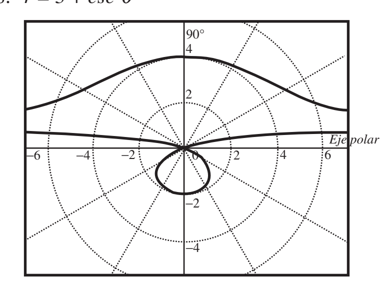

16. $r^2 = 25sen\, 2\theta$



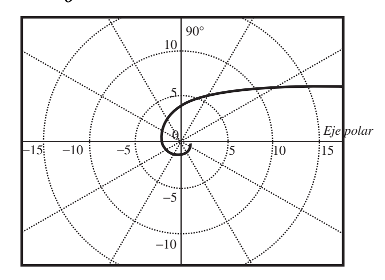

17. $r = 4 - 2sec\, \theta$



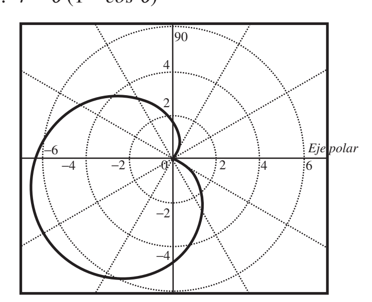

18. $r = 3 + csc\, \theta$




19. $r = \dfrac{2\pi}{\theta}$




20. $r = \theta\,(1 - cos\, \theta)$



**Ejercicio 61**

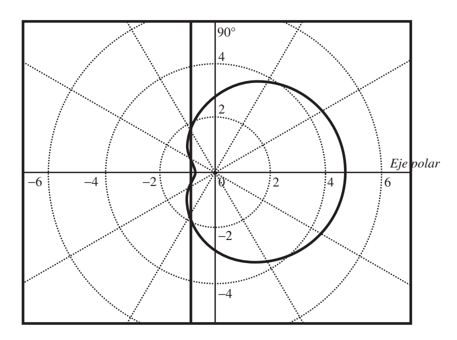
1. $r\ cos\ \theta - 5 = 0$
2. $r\ sen\ \theta + 7 = 0$
3. $r\ sen\ \theta - 5 = 0$
4. $r\ cos\ \theta + 1 = 0$
5. $r\ cos(\theta - 60º) = 5\sqrt{3}$
6. $r\ cos(\theta - 75º) = 4\sqrt{2}$
7. $r\ cos(\theta - 150º) = 2$
8. $r\ cos(\theta - 135º) = 5$

**Ejercicio 62**

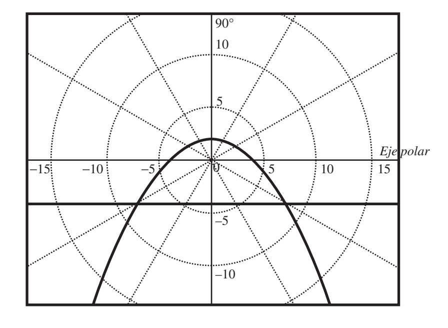
1. $r^2 - 6r\ cos(\theta - 30º) - 72 = 0$
2. $r^2 - 10r\ cos(\theta - 120º) + 24 = 0$
3. $r^2 - 20r\ cos(\theta - 45º) + 84 = 0$
4. $r - 14sen\ \theta = 0$
5. $r - 6 = 0$

**Ejercicio 63**

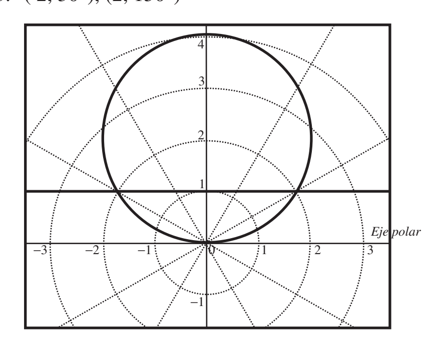
1. $(1, 30°)$, $\left(-\sqrt{3}, 60°\right)$, $\left(\sqrt{3}, 300°\right)$, $(-1, 330°)$



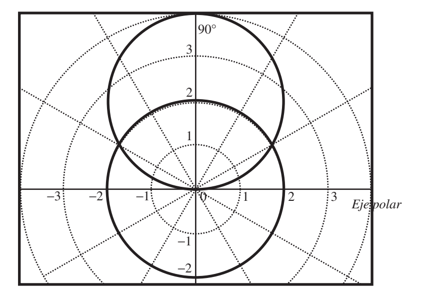

2. (8, 210°), (8, 330°)



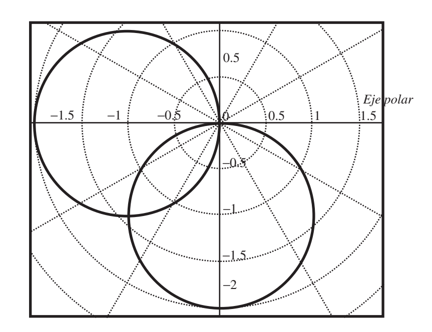

3. ( 2, 30°), (2, 150°)



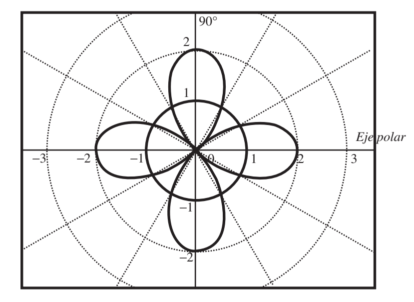

4. (2, 30°), (2, 150°)



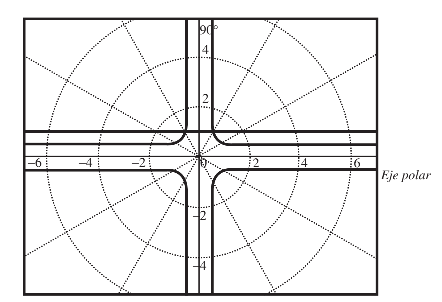

5. $(-\sqrt{2}, 45°)$, $(\sqrt{2}, 225°)$



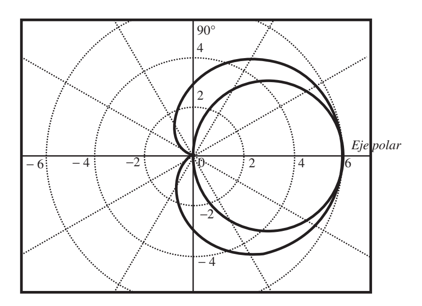

6. (1, 30°), (1, 330°), (1, 150°), (1, 210°)



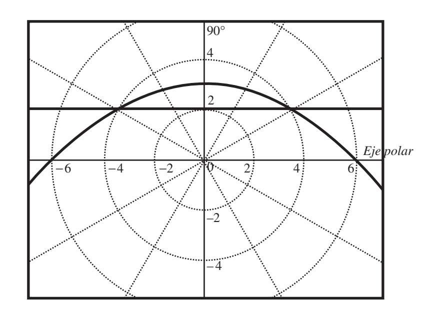
7. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 60°\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 300°\right)$



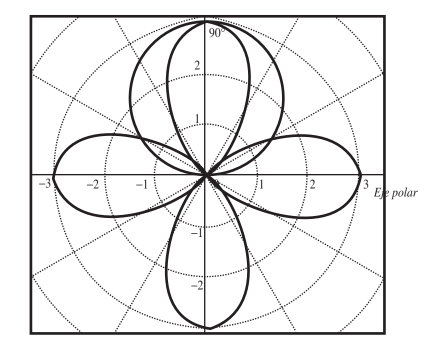

8. (6, 0°)



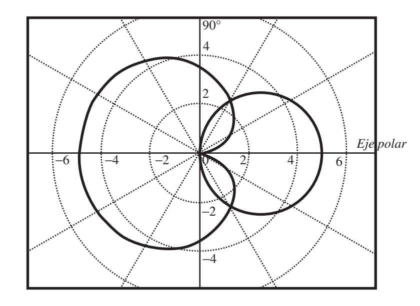

9. (4, 30°), (4, 150°)



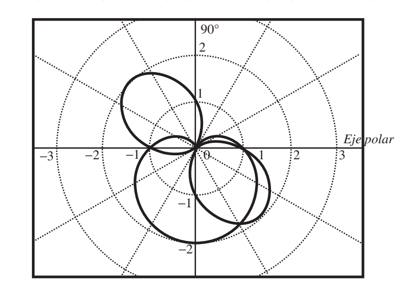

10. $\left(\frac{3}{2}, 30°\right), \left(\frac{3}{2}, 150°\right)$



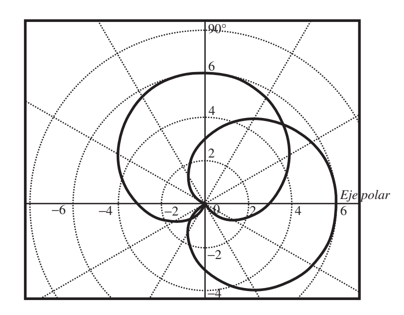

11. $\left(\frac{5}{2}, 60°\right), \left(\frac{5}{2}, 300°\right)$



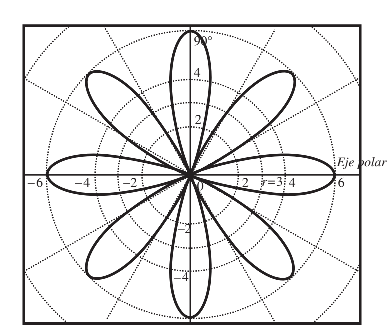

12. (1, 0°), (1, 180°), (1.8, 300°), (0.13, 60°)



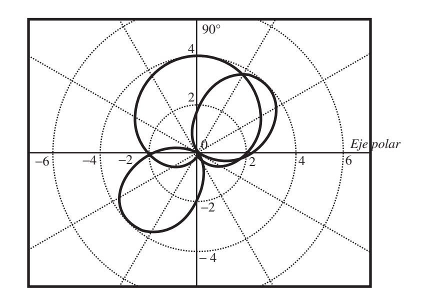

13. $\left(\frac{3}{2}\left(2+\sqrt{2}\right), 45°\right), \left(\frac{3}{2}\left(2-\sqrt{2}\right), 225°\right)$



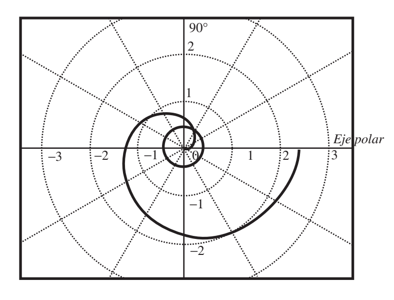

14. (3, 15°), (3, 75°), (3, 105°), (3, 165°), (3, 195°), (3, 255°), (3, 285°), (3, 345°)



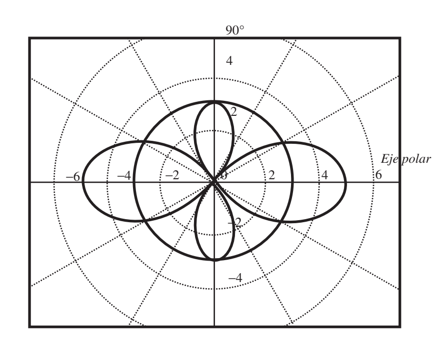
15. (2, 0°), (2, 180°), (3.7, 60°), (0.26, 300°)



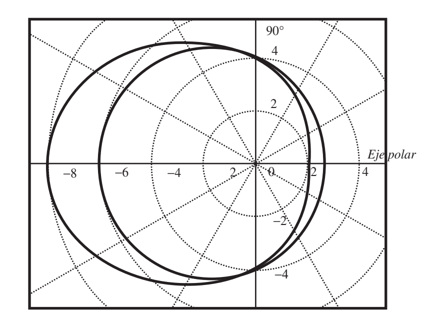

16. (2, 60°)



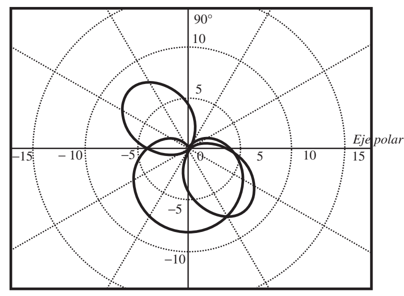

17. (3, 30°), (3, 150°), (3, 210°), (3, 330°)



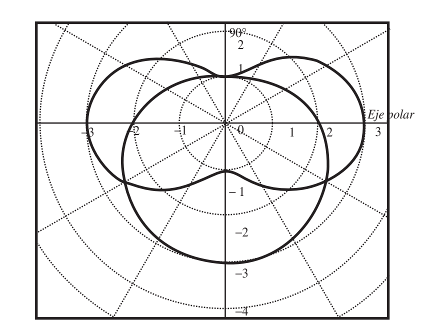

18. (4, 90°), (4, 270°)




19. (4, 0°), (4, 180°), $(4-2\sqrt{3}$ , 60°), $(4+2\sqrt{3}$ , 300°)




20. (1, 90°), (2.5, 210°), (2.5, 330°)



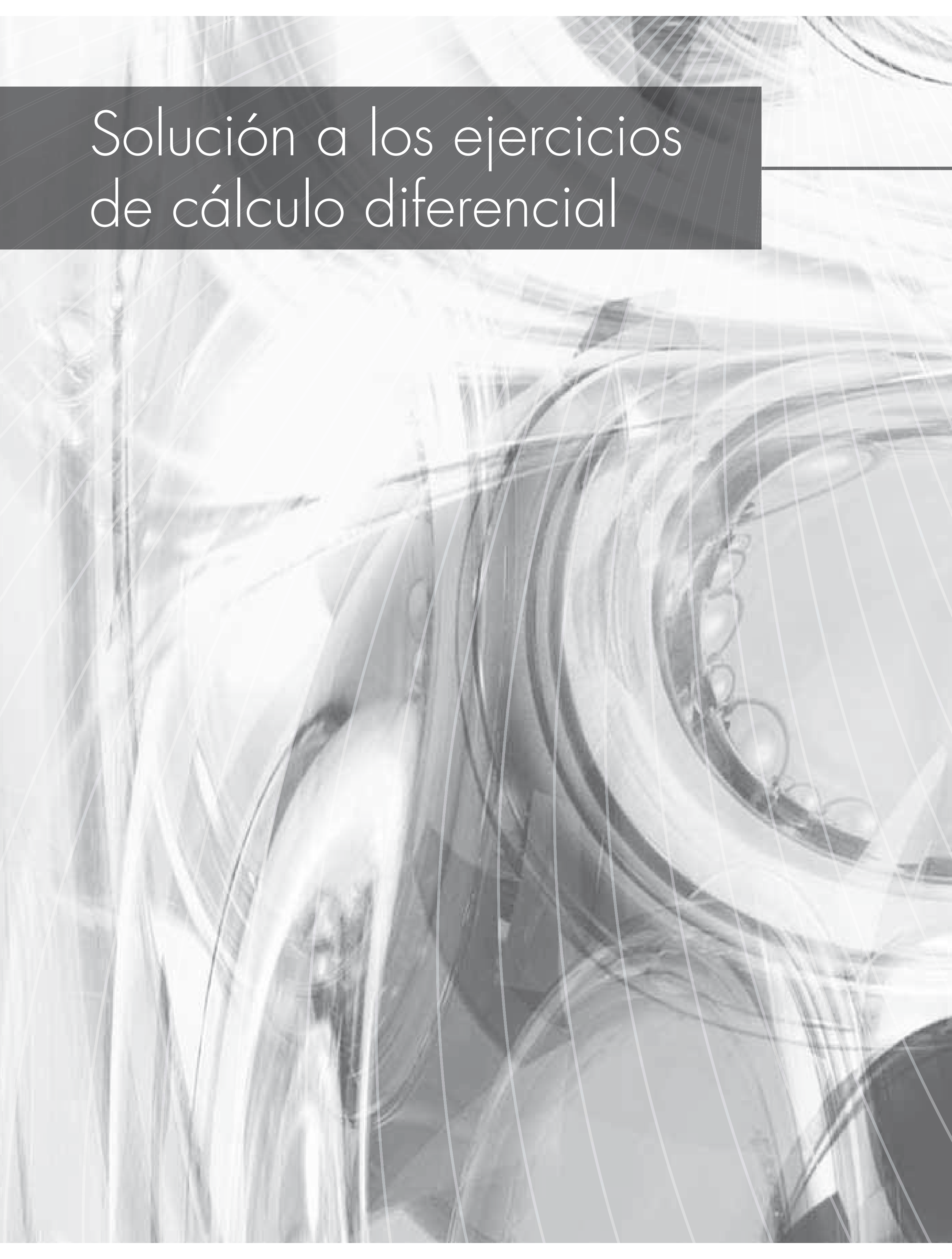

## CAPÍTULO 13

### EJERCICIO 64

1. $x - 4y = 0$
2. $\dfrac{x-b}{a} = \dfrac{y+d}{c}$
3. $2bx - ay - 2ab = 0$
4. $3x + 4y - 2 = 0$
5. $2x - y - 2 = 0$
6. $y^2 - x + 4y + 3 = 0$
7. $x^2 - 4x - y + 8 = 0$
8. $2x - y - 1 = 0$
9. $2x^3 - y + 20 = 0$
10. $y^2 - x - 1 = 0$
11. $y^2 - 16x - 2y - 31 = 0$
12. $xy^2 - 2xy + x - y = 0$
13. $x^3 - 2y - 2 = 0$
14. $3x^2 - 21xy + 18y^2 - 25 = 0$
15. $4x^2 + y^2 + x = 0$
16. $y^2 - x^2 - 4y = 0$
17. $x^2 + y^2 = 16$
18. $x^2y + x^2 - y - 4 = 0$
19. $xy = 1$, $xy = -1$
20. $\left(3y^2+2\right)^2\left(2-x\right) = 1$
21. $y = \dfrac{1}{1-3x}$
22. $y = \left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}$
23. $xy = 1$

**EJERCICIO 65**

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$
2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$
3. $x^2+y^2=4$
4. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$
5. $xy=128$
6. $x^2-y^2+1=0$
7. $4x-y+4=0$
8. $2y^2+x-1=0$
9. $x^4-4x^2+y^2=0$
10. $y=3x-4x^3$
11. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$
12. $x^2+y^2-6x-6y+17=0$
13. $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$
14. $4x^2+y^2-32x-6y+69=0$
15. $x=(y-1)(xy-x+2)$
16. $(x-1)^2-y^2=4$
17. $5x^2+4xy+8y^2-36=0$
18. $x^2-8xy+17y^2-2=0$
19. $x-y+5=0$
20. $9x^2-4y^2+16y-52=0$
21. $y^2-2xy=8$



# Solución a los ejercicios de cálculo diferencial

## CAPÍTULO 1

### EJERCICIO 1

| | | |
|---|---|---|
| 1. Función | 6. Relación | 11. Función |
| 2. Relación | 7. Función | 12. Relación |
| 3. Función | 8. Relación | 13. Función |
| 4. Relación | 9. Función | 14. Función |
| 5. Función | 10. Relación | 15. Relación |

### EJERCICIO 2

1. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$ $f(3) = 15, f(0) = -3$
2. $f(a) = a^2 - 5a + 6,$
   $f(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 - 5a - 5b + 6$
   $f(x + h) = 3x^2 + 6hx + 3h^2 + 4x + 4h - 2$
3. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 6x + 3h + 4$
4. $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ = No existe
   $f(x + h) - f(x) = \frac{4h}{(2x+2h+1)(2x+1)}$
5. $f(5) = 3, f(4) = 0, f(6) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,
   $f(3)$ = No está definida
6. $f(x + h) = \sqrt{x^2 + 2xh + h^2 - 3}$
   $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2-3}+\sqrt{x^2-3}}$
7. $\frac{f(x+b)-f(x)}{b} = -\frac{1}{(x+b+1)(x+1)}$
8. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)}+\sqrt{1-x}}$
9. $f(1) = \frac{4}{3}$, $f(0) = \frac{5}{2}$, $f(x + 5) = \frac{|x|}{x+7}$
10. $f(-1) = 2, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x^2} + 2x^2 - 3x$

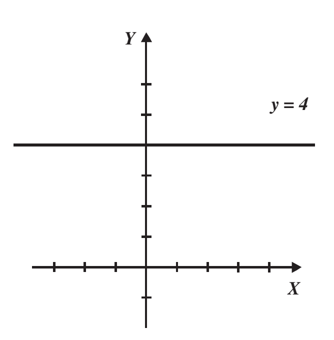
Las demostraciones de los ejercicios 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18, se dejan al estudiante.

### EJERCICIO 3

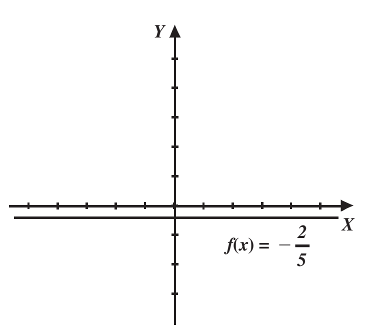
1. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
2. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
3. $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty) = \{x \in R | x \neq -3\}$
4. $(-\infty, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq 5\}$
5. $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty) = \{x \in R | x \neq -4, x \neq 4\}$
6. $(-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq 0, x \neq 5\}$
7. $(-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq 2, x \neq 5\}$
8. $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq -5, x \neq 5\}$
9. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
10. $(-\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (0, \infty) = \{x \in R | x \neq -5, x \neq 0\}$
11. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) = \{x \in R | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1\}$
12. $[-1, \infty) = \{x \geq -1\}$
13. $[6, \infty) = \{x \geq 6\}$
14. $(-\infty, 2] = \{x \leq 2\}$
15. $(-\infty, 4] = \{x \leq 4\}$
16. $(-\infty, -5] \cup [5, \infty) = \{x \in R | x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$
17. $(-\infty, -1] \cup [6, \infty) = \{x \in R | x \leq -1 \text{ o } x \geq 6\}$
18. $[-6, 6] = \{x \in R | -6 \leq x \leq 6\}$
19. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
20. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
21. $[5, \infty) = \{x \in R | x \geq 5\}$
22. $(2, \infty) = \{x \in R | x > 2\}$
23. $(-\infty, 3) = \{x \in R | x < 3\}$
24. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = \{x \in R | x \neq -2\}$
25. $(-\infty, -4] \cup (3, \infty) = \{x \in R | x \leq -4 \text{ o } x > 3\}$
26. $\left[1, \frac{3}{2}\right) = \left\{x \in R | 1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$
27. $(-2, \infty) = \{x \in R | x \geq -2\}$
28. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) = \left\{x \in R | x < \frac{5}{2}\right\}$
29. $(0, \infty) = \{x \in R | x > 0\}$
30. $(-1, 3) = \{x \in R | -1 < x < 3\}$
31. $[1, \infty) = \{y \in R | y \geq 1\}$
32. $[-4, \infty) = \{y \in R | y \geq -4\}$
33. $(-\infty, 9] = \{y \in R | y \leq 9\}$
34. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right] = \left\{y \in R | y \leq \frac{9}{4}\right\}$
35. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = \{y \in R | y \neq -2\}$
36. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) = \left\{y \in R | y \neq \frac{1}{2}\right\}$
37. $[1, \infty) = \{y \in R | y \geq 1\}$
38. $(-\infty, 0] = \{y \in R | y \leq 0\}$
39. $[0, 2] = \{y \in R | 0 \leq y \leq 2\}$
40. $(0, 1] = \{y \in R | 0 < y \leq 1\}$
41. $[0, 1) \cup (1, \infty) = \{x \in R | 0 \leq y < 1 \text{ o } y > 1\}$
42. $[0, \infty) = \{y \in R | y \geq 0\}$

**EJERCICIO 4**

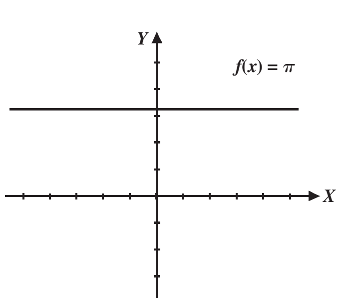
1.



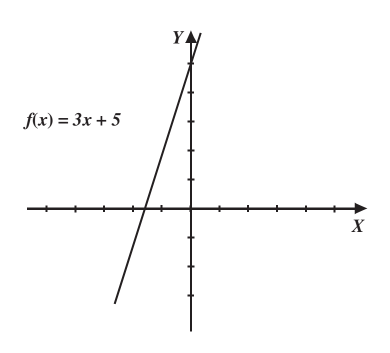

2.



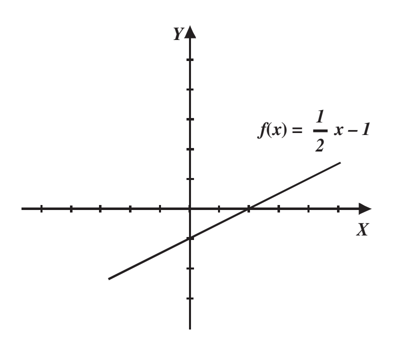

3.



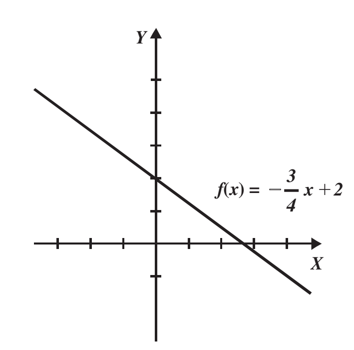

4.



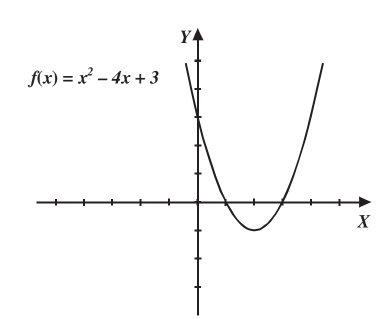

5.



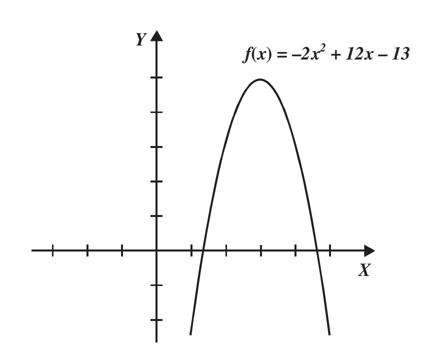

6.



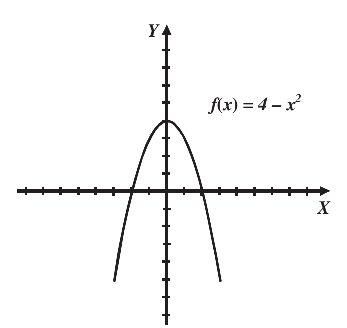

7.



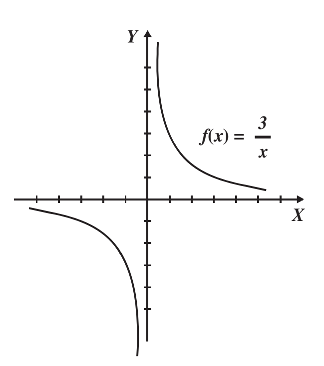

8.



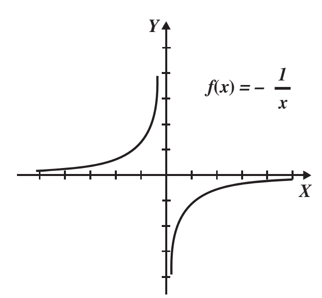
9.



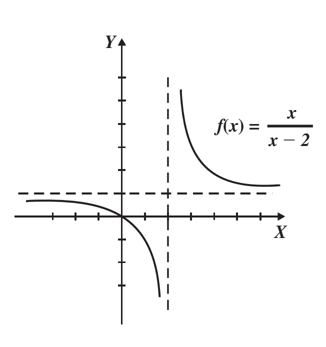

10.



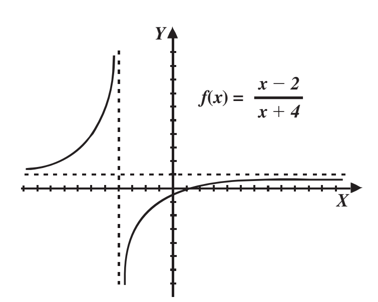

11.



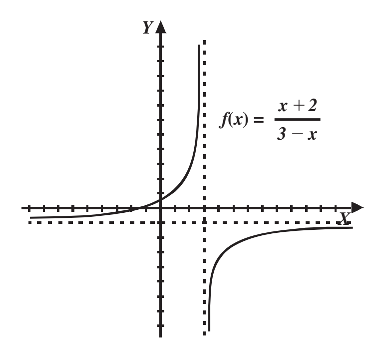

12.



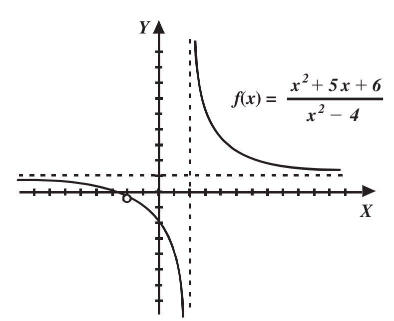

13.



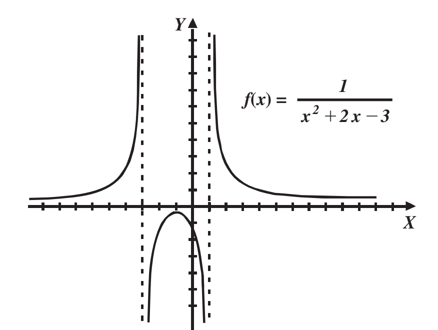

14.



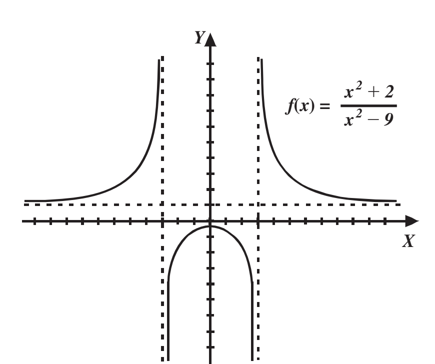

15.



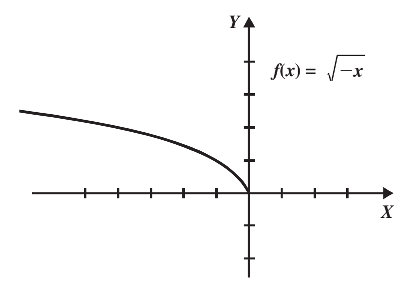

16.



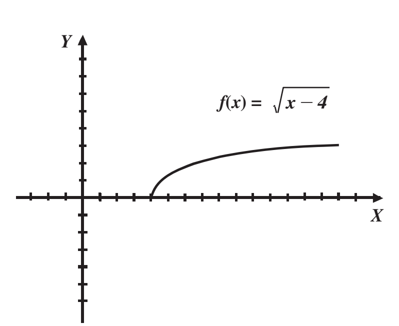
17.



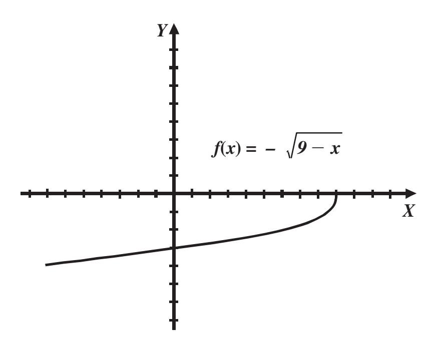

18.



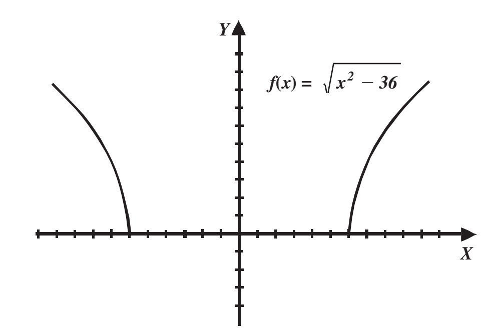

19.



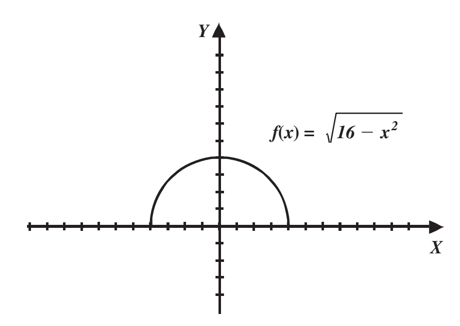

20.



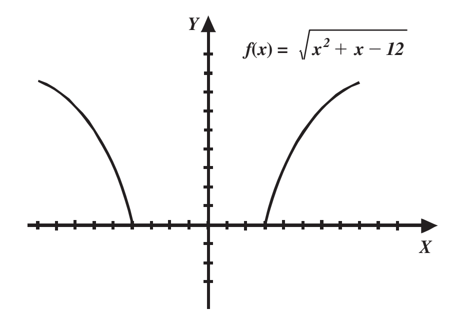

21.



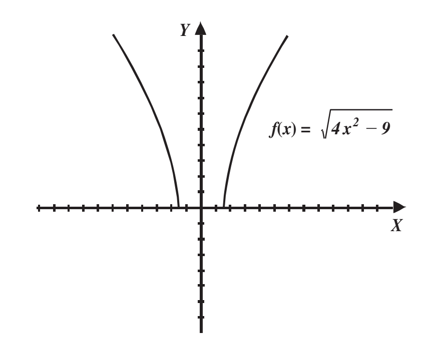

22.



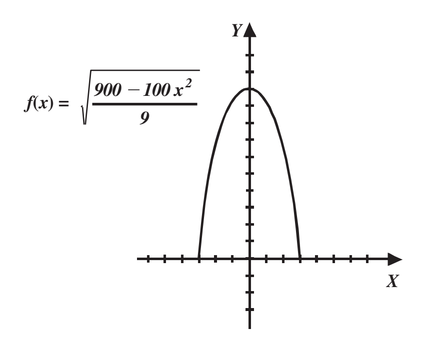

23.



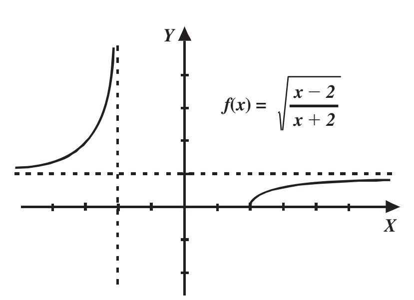

24.



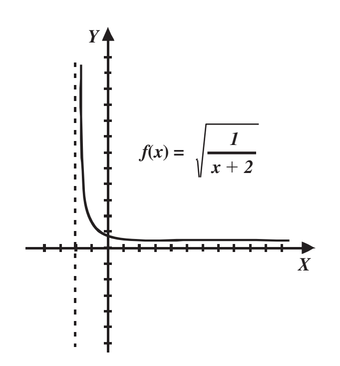
25.



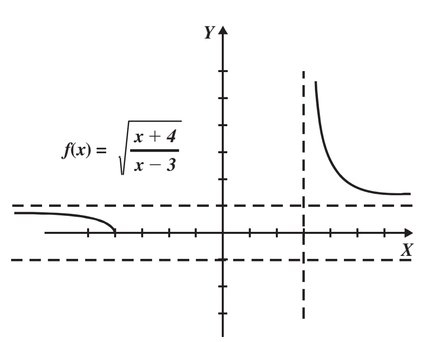

26.



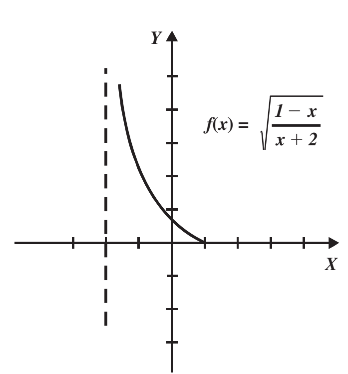

27.



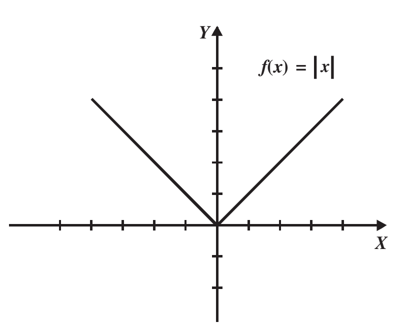

28.



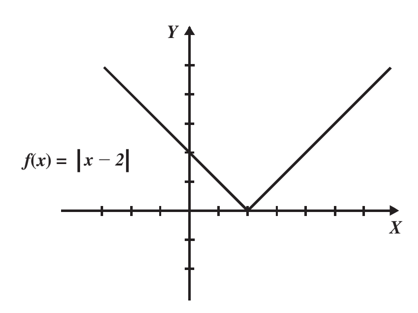

29.



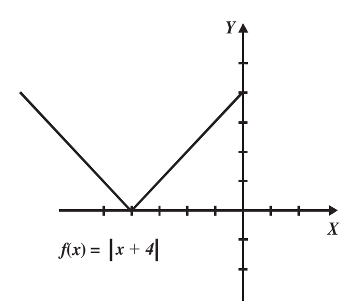

30.



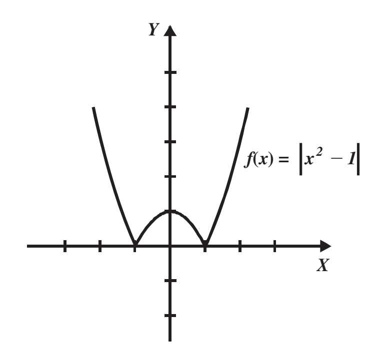

31.



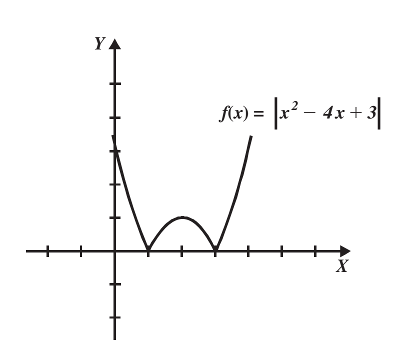

32.



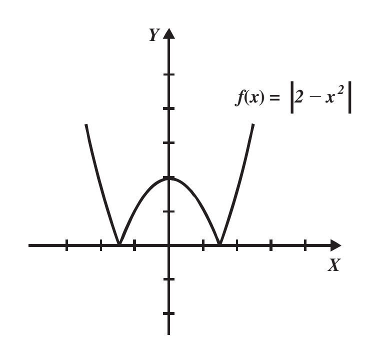
33.



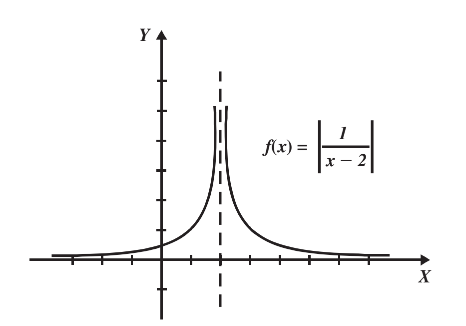

34.



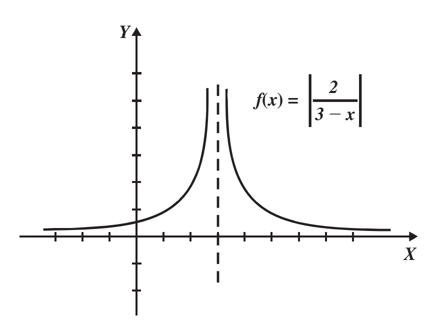

35.



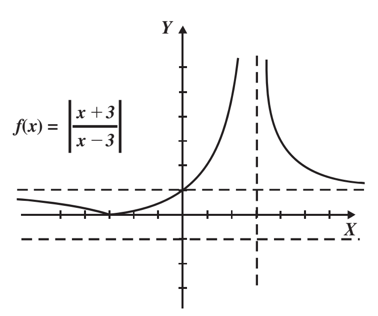

36.



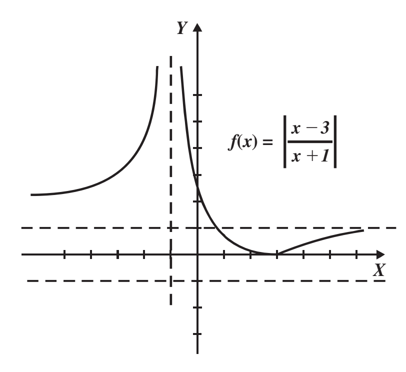

37.



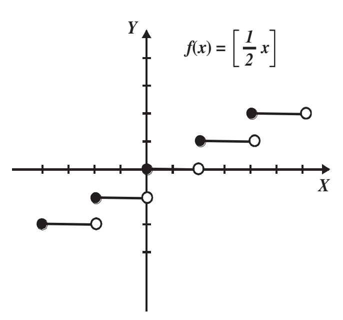

38.



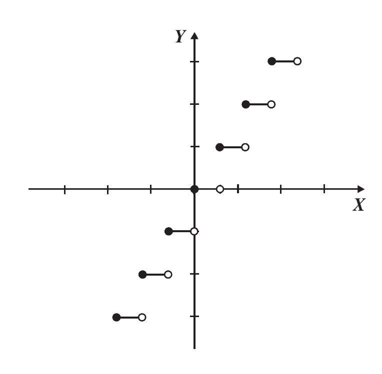

39.




40.

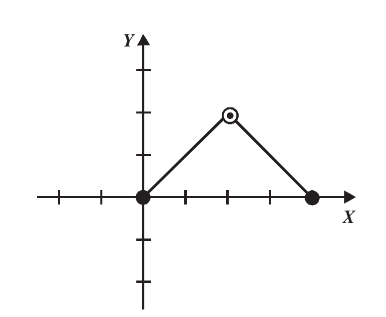


41.

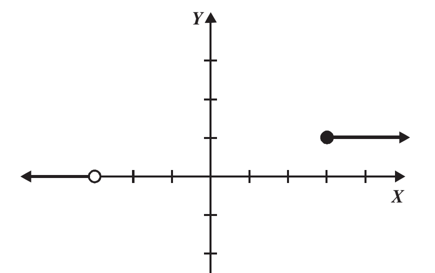



**EJERCICIO 5**

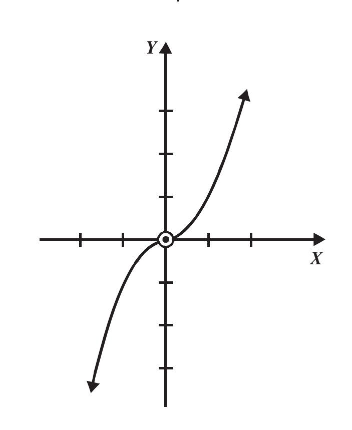
1.



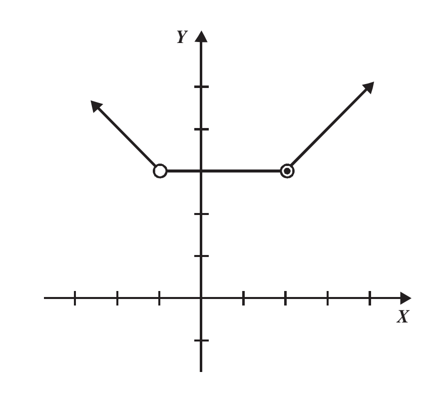

2.



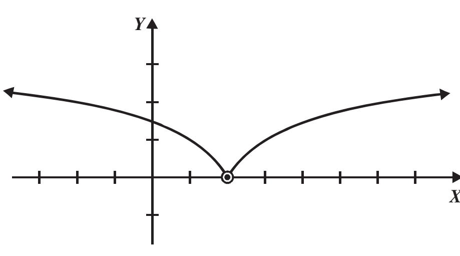

3.



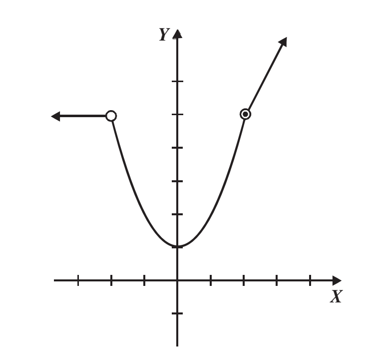

4.



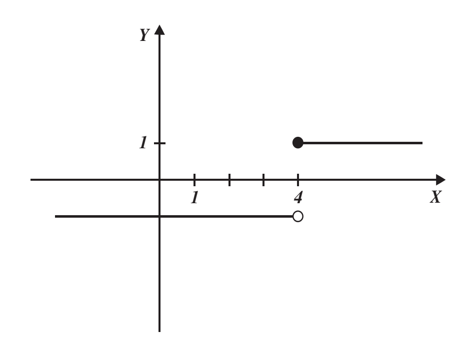

5.




6.

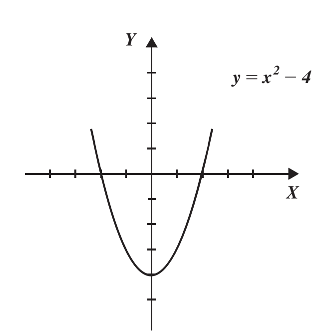



7.

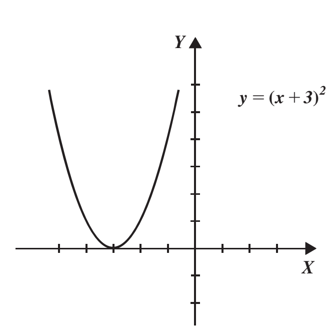


**Ejercicio 6**

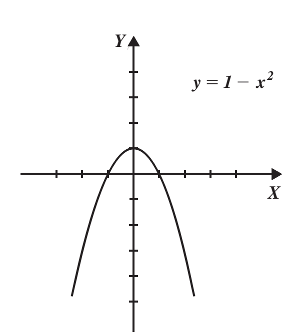
1.



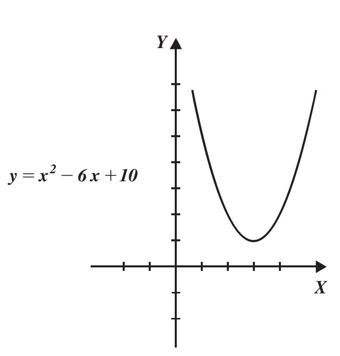

2.



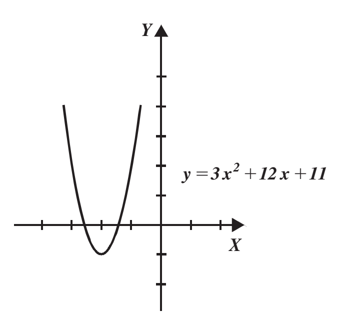

3.



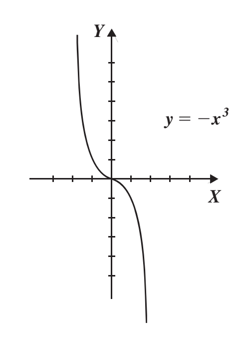

4.



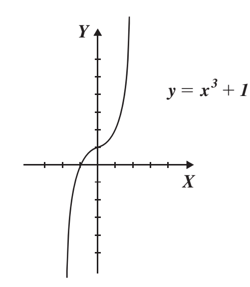

5.



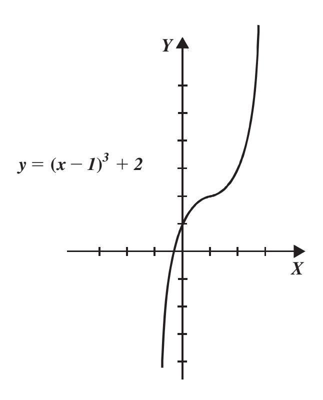

6.



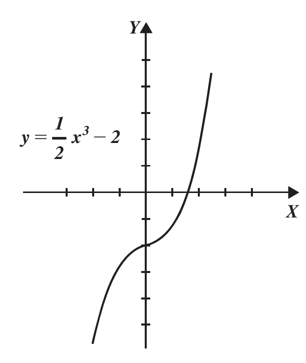

7.



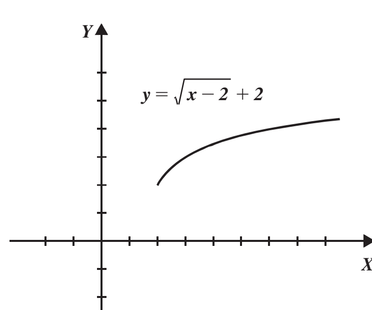

8.



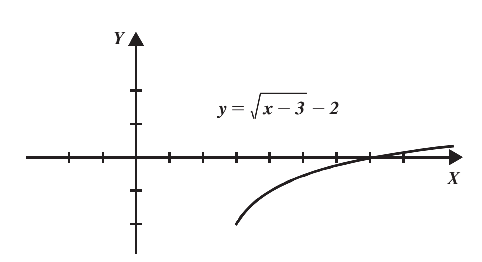
9.



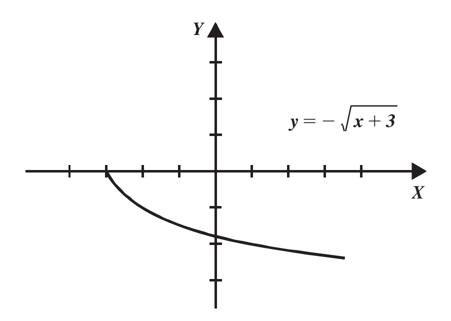

10.



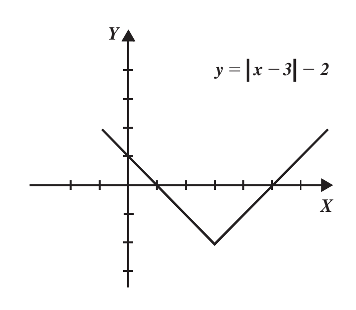

11.



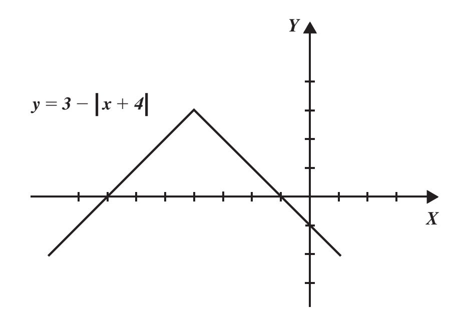

12.




13.




14.




**EJERCICIO 7**

1. Crece: $(0, \infty)$
2. Decrece: $(-\infty, 0)$
   Crece: $(0, \infty)$
3. Crece: $(-\infty, +\infty)$
4. Decrece: $(-\infty, 0)$
   Crece: $(0, \infty)$
5. Crece: $(2, \infty)$
6. Decrece: $(-\infty, -3)$
7. Decrece: $(0, \infty)$
   Crece: $(-\infty, 0)$
8. Decrece: $(-\infty, 3)$
   Crece: $(3, \infty)$
9. Decrece: $(0, 3)$
   Crece: $(-3, 0)$
10. No crece ni decrece, permanece constante

**EJERCICIO 8**

1. Biyectiva
2. Ninguna
3. Ninguna
4. Biyectiva
5. Inyectiva
6. Ninguna
7. Biyectiva
8. Inyectiva
9. Suprayectiva
10. Biyectiva

**EJERCICIO 9**

1. $f(x) + g(x) = 3$
   $f(x) - g(x) = 7$
   $f(x) \cdot g(x) = -10$
   $\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{5}{2}$
2. $f(x) + g(x) = 4x$
   $f(x) - g(x) = -10$
   $f(x) \cdot g(x) = 4x^2 - 25$
   $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-5}{2x+5}$

3. $f(x) + g(x) = 2x^2 - x - 3$
$f(x) - g(x) = -7(x + 1)$
$f(x) \cdot g(x) = x^4 - x^3 - 15x^2 - 23x - 10$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-5}{x+2}$

4. $f(x) + g(x) = \dfrac{8x+1}{6}$
$f(x) - g(x) = \dfrac{4x-7}{6}$
$f(x) \cdot g(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{6}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{6x-3}{2x+4}$

5. $f(x) + g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+4}$
$f(x) - g(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+4}$
$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x^2+x-12}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}} = \dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{x+4}$

6. $f(x) + g(x) = x + 2\sqrt{x}$
$f(x) - g(x) = x$
$f(x) \cdot g(x) = x + x\sqrt{x}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x} + 1$

7. $f(x) + g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$f(x) - g(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$
$f(x) \cdot g(x) = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2x$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

8. $D_f \cap D_g = \{-1, 3, 5\}$
$f + g = \{(-1, 12), (3, 20), (5, 23)\}$
$f - g = \{(-1, -8), (3, -8), (5, -9)\}$
$f \cdot g = \{(-1, 20), (3, 84), (5, 112)\}$
$\dfrac{f}{g} = \left\{\left(-1, \dfrac{1}{5}\right), \left(3, \dfrac{3}{7}\right), \left(5, \dfrac{7}{16}\right)\right\}$

9. $D_f \cap Dg = \{-2, -1, 0\}$
$f + g = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$
$f - g = \{(-2, -10), (-1, -7), (0, -4)\}$
$f \cdot g = \{(-2, -25), (-1, -12), (0, -3)\}$
$\dfrac{f}{g} = \left\{(-2, -1), \left(-1, -\dfrac{3}{4}\right), \left(0, -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

10. $D_f \cap D_g = \{-1, 1, 2\}$
$f + g = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 1)\}$
$f - g = \{(-1, -3), (1, 1), (2, 0)\}$
$f \cdot g = \left\{(-1, -2), (1, 0), \left(2, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$
$\dfrac{f}{g} = \left\{\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right), (2, 1)\right\}$

11. $f(x) + r(x) = 2x + 5$
12. $f(x) - s(x) = -x^2 + 4x + 13$
13. $g(x) \cdot s(x) = x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 68x - 60$
14. $\dfrac{g(x)}{r(x)} = x + 3$
15. $\dfrac{s(x)}{r(x)} = x - 5$
16. $g(x) - s(x) = 8(x + 2)$
17. $f(x) \cdot r(x) = x^2 + 5x + 6$
18. $\dfrac{f(x)}{r(x)} = \dfrac{x+3}{x+2}$
19. $\dfrac{g(x)}{s(x)} = \dfrac{x+3}{x-5}$
20. $\dfrac{g(x)}{f(x)} + \dfrac{s(x)}{r(x)} = 2x - 3$
21. $f(x) + g(x) = \dfrac{x^2+2}{x(x+2)}$
22. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-x}{x+2}$
23. $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$
24. $f(x) - h(x) = \dfrac{5-5x}{(x+2)(x-3)}$
25. $g(x) \cdot h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x}$
26. $\dfrac{f(x)}{g(x)} + h(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{(x+2)(x-3)}$
27. $\dfrac{h(x)}{f(x)} - g(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x(x-3)}$
28. $\dfrac{h(2)-f(1)}{g(3)} = -3$
29. $f(x + 1) \cdot \dfrac{1}{h(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+3}$
30. $h(x) - g(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x(x-3)}$

31. $\dfrac{h(x)}{g(x)} - \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x + 6}{x(x-1)(x-3)}$

32. $f(x) \cdot h(x) - g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x + 6}{x(x+2)(x-3)}$

33. $\dfrac{f(x) + h(x)}{g(x)} = \dfrac{x(x-1)(2x-1)}{(x+2)(x-3)}$

34. $\dfrac{1}{g(x) + h(x)} = \dfrac{x(x-3)}{x^2 - 3}$

35. $\dfrac{1}{1 - h(x)} = \dfrac{3 - x}{2}$

**EJERCICIO 10**

1. $(f \circ g)(x) = 12x^2 - 46x + 40$, $(g \circ f)(x) = 6x^2 - 10x - 7$,
   $(f \circ f)(x) = 27x^4 - 90x^3 + 24x^2 + 85x + 20$,
   $(g \circ g)(x) = 4x - 9$
2. $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$, $(g \circ g)(x) = x^4$
3. $(f \circ g)(x) = 4$, $(g \circ f)(x) = 2$, $(f \circ f)(x) = 4$, $(g \circ g)(x) = 2$
4. $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 10}$
   $(g \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
5. $(f \circ g)(x) = x + 2\sqrt{x-1}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$
   $(f \circ f)(x) = (x^2 + 2x + 2)^2$, $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$
6. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1 - x}{1 + 3x}$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$
   $(f \circ f)(x) = -\dfrac{1}{2x + 1}$, $(g \circ g)(x) = x$
7. $(f \circ g)(x) = \log(x - 4)$, $(g \circ f)(x) = \log(x - 2) - 2$
   $(f \circ f)(x) = \log[\log(x - 2) - 2]$, $(g \circ g)(x) = x - 4$
8. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{-x^2 - \sqrt{x^4 - 1}}$
   $(f \circ f)(x) = \sqrt{-\dfrac{1}{x^2}}$ no está definida
   $(g \circ g)(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$
9. $(f \circ g)(x) = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)\}$
   $(g \circ f)(x) =$ No está definida, $(f \circ f)(x) = \{(2, 8)\}$
   $(g \circ g)(x) = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$
10. $(f \circ g)(x) = \{(-2, 1), (-1, 4), (0, 9), (1, 16)\}$
    $(g \circ f)(x) = (1, 4)$, $(f \circ f)(x) = \{(1, 1), (2, 16)\}$
    $(g \circ g)(x) = \{(-2, 4)\}$
11. $(f \circ g)(x) = \{(3, 1), (-2, -3), (1, -1)\}$
    $(g \circ f)(x) = \{(0, -1), (1, 0)\}$, $(f \circ f)(x) = \{(0, 3), (-1, -1)\}$
    $(g \circ g)(x) = \{(-2, -2)\}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
13. $f(x) = \sqrt{x}$
14. $f(x) = mx + b$
15. $f(x) = x^2$
16. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
17. $f \circ g \circ h = 81x^2 - 54x + 9$
18. $f \circ g \circ h = 1 - 12x^2 + 48x^4 + 64x^6$
19. $f \circ g \circ h = \sqrt{2x - 9}$
20. $f \circ g \circ h = \text{sen}^2(x - 2)$
21. $f \circ g \circ h = \sec^2 x$
22. $f \circ g \circ h = \text{sen}\, x$

**EJERCICIO 11**

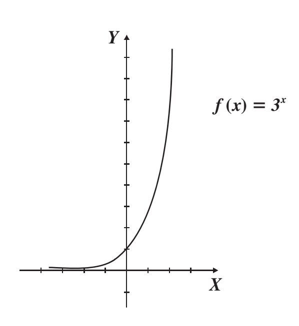
| | | |
|---|---|---|
| 1. Ninguna | 6. Ninguna | 11. Par |
| 2. Par | 7. Par | 12. Par |
| 3. Impar | 8. Par | 13. Impar |
| 4. Ninguna | 9. Ninguna | 14. Par |
| 5. Ninguna | 10. Impar | 15. Par |

**EJERCICIO 12**

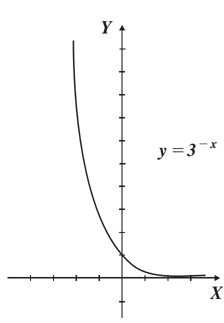
1. $f^{-1}(x) = x$
2. $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 5}{2}$
3. $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 9}$
4. No tiene inversa
5. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
6. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$
7. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
8. $f^{-1}(x) = 3 - x^2$
9. No tiene inversa
10. $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}$
11. $f^{-1}(x) = x^3 - 9$
12. $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - 3x}{2x}$
13. $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
14. $f^{-1}(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$
15. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

**Ejercicio 13**

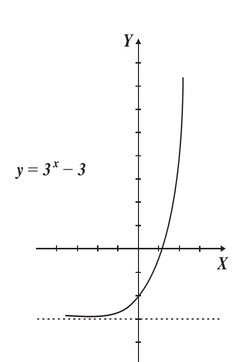
1.



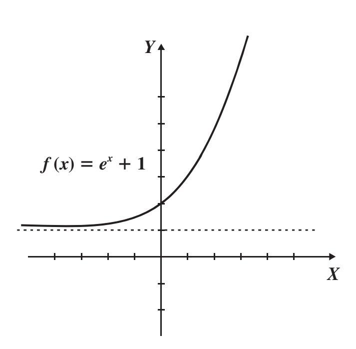

2.



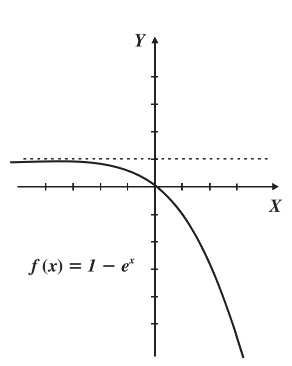

3.



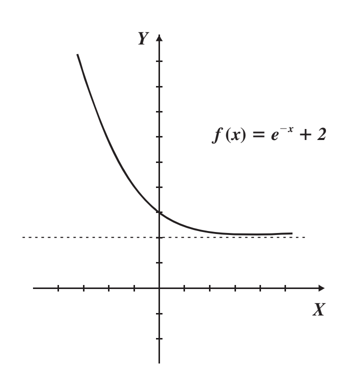

4.



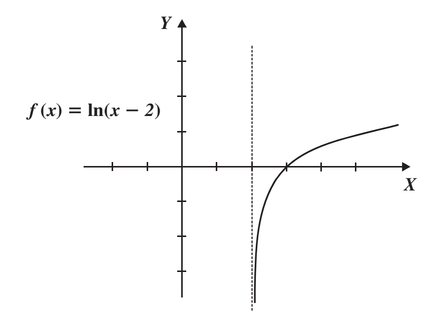

5.



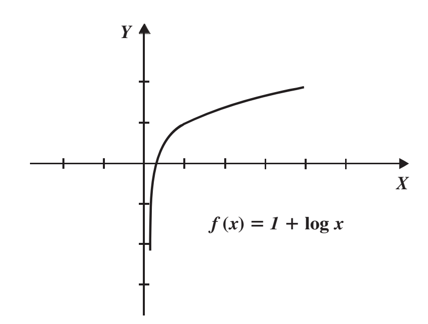

6.



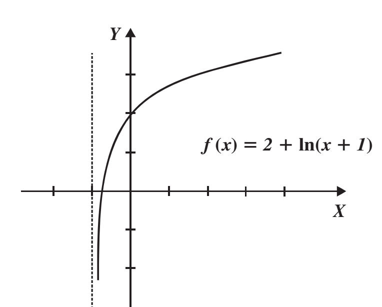

7.



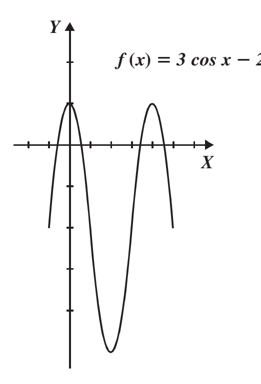

8.



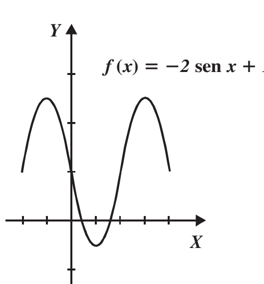
9.



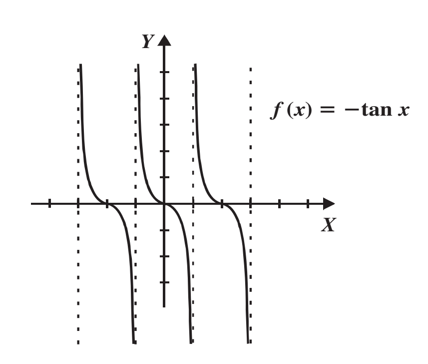

10.



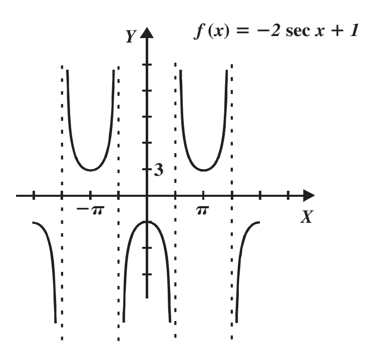

11.



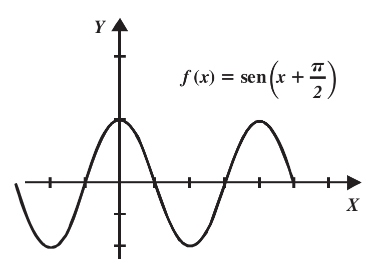

12.




13.




14.




**Ejercicio 14**

1. $V(h) = 40h$
2. $V(h) = \dfrac{4}{75}\pi h^3$
3. $P(A) = \dfrac{12\sqrt{5A}}{5}$
4. $A(d) = \dfrac{\pi d^2}{4}$
5. $V(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi x^3$
6. $A(x) = \dfrac{3}{4}(x+2)^2$
7. $V(x) = \dfrac{\pi r^2}{6}(8r + 15)$
8. $A(x) = \dfrac{\pi x^2}{3}$
9. $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$
10. $A(x) = (x-4)\left(\dfrac{540}{x} - 3\right)$
11. $d(t) = \dfrac{9}{2}\sqrt{16t^2 + 1}$
12. $d(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2 - 16}$

## Capítulo 2

### Ejercicio 15

1. $-1$
2. $0.16666 = \frac{1}{6}$
3. $-1$
4. 0
5. 1
6. 4
7. No existe
8. No existe
9. 2
10. 3

### Ejercicio 16

11. $\delta = 0.01$
12. $\delta = 0.08$
13. $\delta = 0.025$
14. $\delta = 0.4$
15. $\varepsilon = 0.18$
16. $\varepsilon = 0.0098$
17. $\varepsilon = 0.25$
18. $\varepsilon = 0.002$

### Ejercicio 17

1. 3
2. 24
3. 18
4. 0
5. 7
6. 64
7. $-3$
8. $-\frac{4}{27}$
9. 15
10. $2\sqrt{3}$
11. 32
12. 1
13. 1
14. $-\frac{5}{8}$
15. 0
16. No existe
17. 1
18. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
19. 1
20. $h$
21. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

### Ejercicio 18

1. $\frac{3}{5}$
2. No existe
3. 0
4. $\frac{a}{c}$
5. $-\frac{2}{3}$
6. $\frac{1}{2}$
7. 4
8. $\frac{1}{2h}$
9. $-\frac{1}{2}$
10. $2a$
11. 9
12. 0
13. $-\frac{1}{2}$
14. $\frac{5}{4}$
15. $\frac{1}{4}$
16. 2
17. 4
18. $-\frac{3}{7}$
19. 15
20. $\frac{9}{19}$
21. $\frac{7}{9}$
22. $-6$
23. $\frac{1}{3}$
24. $-3$
25. 3
26. $\frac{1}{12}$
27. 48
28. $\frac{1}{4}$
29. 2
30. No existe
31. $\frac{1}{2}$
32. $2\sqrt{5}$
33. $-\frac{1}{6}$
34. $\frac{24}{5}$
35. $\frac{b}{a}$
36. $\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{p^{n-1}}}$
37. $-\frac{1}{2}$
38. $\frac{5}{12}$
39. 2
40. 0
41. $-\frac{3}{20}$
42. $\frac{1}{4}$
43. $\frac{1}{4}$
44. $\frac{1}{6a\sqrt[3]{a^2}}$
45. $\frac{1}{3}$
46. $\frac{1}{8}$
47. $\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$
48. $\frac{1}{54}$
49. $\frac{1}{4}$
50. $\frac{2}{25}$

### Ejercicio 19

1. $\frac{7}{4}$
2. 2
3. 0
4. No existe
5. 3
6. $\frac{1}{2}$
7. $-\frac{1}{3}$
8. 0
9. 1
10. 0
11. $-\frac{11}{6}$
12. $-1$
13. $\frac{9}{2}$
14. 1
15. 1
16. $\frac{a_m}{b_n}$ si $m = n$

    0 si $m < n$

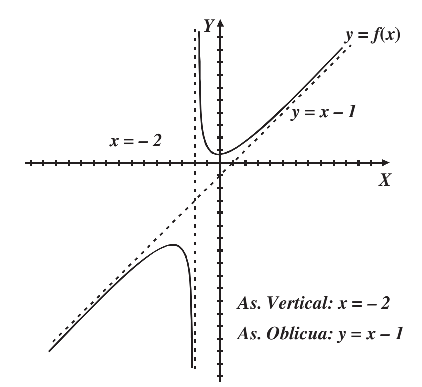
    No existe si $m > n$
17. $\frac{a}{c}$
18. $\sqrt[n]{a}$

**EJERCICIO 20**

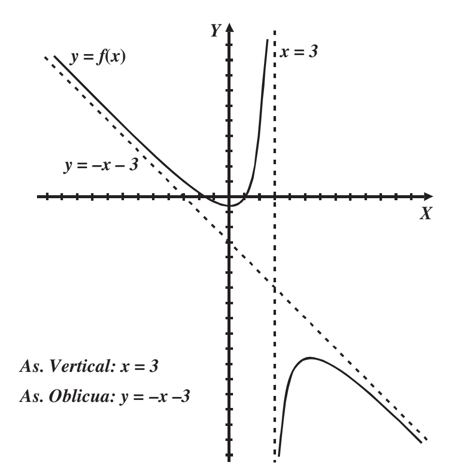
1. $y = \frac{1}{2}$
2. $y = 0$
3. No tiene asíntota horizontal
4. $y = 1, y = -1$
5. $y = 2$
6. $y = \frac{a}{c}$
7. $y = 0$
8. $y = -2$
9. No tiene asíntota horizontal
10. $y = \frac{a}{b}$

**EJERCICIO 21**

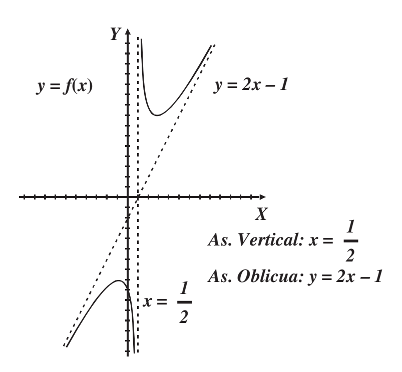
1.



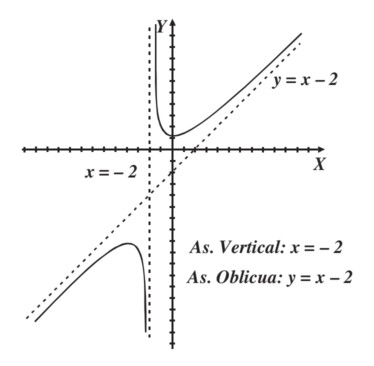

2.



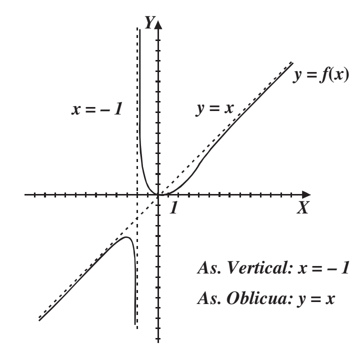

3.



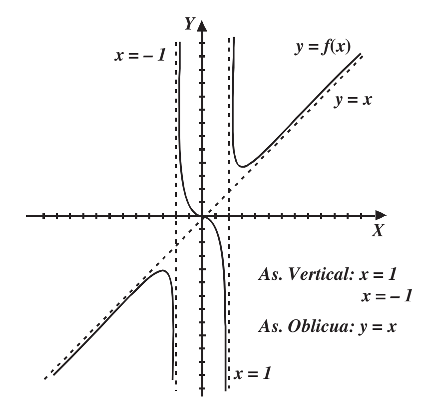

4.



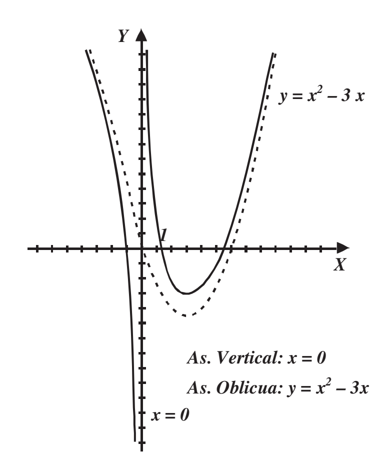

5.



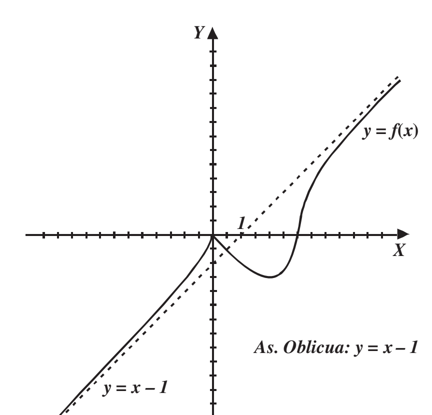

6.



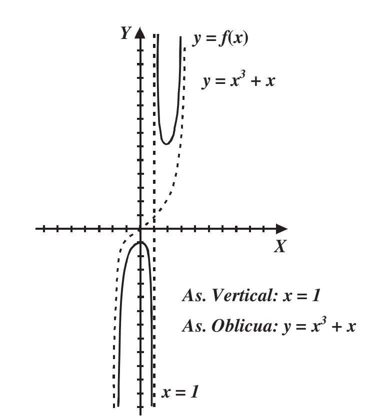
7.




8.




9.




### EJERCICIO 22

1. *a*) 11, *b*) 9, *c*) No existe
2. *a*) $-1$, *b*) $-1$, *c*) $-1$, *d*) $-6$, *e*) $-4$, *f*) No existe
3. *a*) 0, *b*) 2, *c*) No existe, *d*) $-\frac{2}{3}$, *e*) $-\frac{2}{3}$, *f*) $-\frac{2}{3}$
4. *a*) 1, *b*) 4, *c*) 4, *d*) 4, *e*) 16
5. *a*) 4, *b*) 4, *c*) 4, *d*) 8, *e*) 3, *f*) No existe
6. $-7$
7. 1
8. 3
9. 2
10. No existe el límite

### EJERCICIO 23

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
3. $-2$
4. $-1$
5. $-\frac{1}{2}$
6. 2
7. $-4\sqrt{3}$
8. 0
9. 1
10. No existe

### EJERCICIO 24

1. $-2$
2. $\frac{3}{4}$
3. $-\frac{1}{2}$
4. 0
5. $-\frac{1}{2}$
6. 0
7. 0
8. $\sqrt{2}$
9. $-1$
10. $-\sec^3(3)$
11. $-2$
12. $\frac{1}{2^m}$
13. 1
14. 0
15. $\frac{1}{2}$
16. 0
17. 9
18. 0
19. $\frac{n^2 - m^2}{4}$
20. 0

## CAPÍTULO 3

### EJERCICIO 25

1. Es continua en $x = 0$
2. No es continua en $x = 2$
3. No es continua en $x = -\frac{3}{2}$
4. Es continua en $x = 3$
5. Continuidad removible en $x = 2$
6. No es continua en $x = 2\pi$
7. Es continua en $x = 2$
8. No es continua en $x = 1$
9. No es continua en $x = 0$

10. No es continua en $x = -2$; es continua en $x = 2$
11. Es continua en $x = 1$; no es continua en $x = 2$
12. Es continua en $x = \pi$ y $x = \frac{3}{2}\pi$
13. No es continua en $x = -3$; es continua en $x = 3$
14. Continuidad removible en $x = 3$
15. Continuidad removible en $x = 1$
16. Continuidad removible en $x = -2$
17. Continuidad removible en $x = 8$
18. No es continua en $x = \frac{1}{2}$
19. $k = 1$
20. $k = 0$ o $k = 2$
21. $k = 1$ o $k = -\frac{2}{9}$
22. $a = -\frac{9}{4}$, $b = -7$
23. $a = -\frac{17}{2}$, $b = -2$
24. $a = 4$, $b = 2$

**EJERCICIO 26**

1. sí
2. no
3. sí
4. no
5. sí
6. sí
7. sí
8. no
9. no
10. sí

**EJERCICIO 27**

1. 2
2. 0
3. 4
4. $\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}$
5. 5
6. $-5$
7. 5
8. $\frac{2}{5}$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. 1

## CAPÍTULO 4

**EJERCICIO 28**

1. $y' = 3$
2. $y' = -b$
3. $y' = 2x$
4. $f'(x) = 6x - 5$
5. $y' = 2ax + b$
6. $y' = 3x^2$
7. $y' = 3x^2 - 2x$
8. $y' = 4$
9. $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$
10. $y' = 3x^2$
11. $f'(x) = -\frac{6}{x^3}$
12. $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$
13. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$
14. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
15. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$
16. $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$
17. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
18. $y' = \frac{-2}{3(x-1)\sqrt[3]{x-1}}$
19. $y' = \frac{2}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^{\frac{3}{2}}}$
20. $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

**EJERCICIO 29**

1. $y' = 0$
2. $y' = 0$
3. $f'(x) = 0$
4. $s'(t) = 0$
5. $y' = 6$
6. $y' = \frac{3}{4}$
7. $f'(x) = a$
8. $s'(t) = b^2$
9. $f'(x) = 5\sqrt{2}$
10. $y' = a\sqrt{b}$
11. $f'(x) = 5x^4$
12. $f'(x) = 12x^2$
13. $s'(t) = \frac{4}{5}t^3$
14. $y' = \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}$
15. $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$
16. $y' = 9x^{\frac{1}{2}}$
17. $f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$
18. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$
19. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
20. $s'(t) = \frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}$
21. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
22. $f'(x) = \frac{5x^4}{7}$
23. $f'(x) = \frac{4x^3}{9}$
24. $s'(t) = \frac{3t^2}{a}$
25. $f'(x) = -\frac{20}{x^5}$
26. $f'(x) = -\frac{12}{x^7}$
27. $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$
28. $s'(t) = \frac{1}{15\sqrt[3]{t^2}}$
29. $f'(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x}}$
30. $s'(t) = -\frac{5}{4t\sqrt[4]{t}}$

31. $f'(x) = -\frac{4}{3x\sqrt[3]{x}}$

32. $f'(x) = 21x^2 - 6x + 3$

33. $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 16x - 1$

34. $f'(x) = 10x + 4$

35. $f'(x) = 12ax^3 - 12ax^2 - 10bx + 7c$

36. $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{6x}{5} - \frac{4}{9}$

37. $s'(t) = \frac{5t^4}{6} - \frac{4t^3}{5} + \frac{3t^2}{4} - \frac{2t}{7} + \frac{1}{9}$

38. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{a}$

39. $s'(t) = -\frac{8}{t^3} + \frac{5}{t^2}$

40. $f'(x) = -\frac{20}{x^5} + \frac{18}{x^4} + \frac{14}{x^3} + \frac{3}{x^2}$

41. $s(t) = \frac{3t^2}{5} + \frac{4}{t^3} - \frac{6}{t^2}$

42. $f'(x) = \frac{1}{15\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

43. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 - \frac{2}{x^2}$

44. $f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{5}{4\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2\sqrt{x}}$

45. $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 6\sqrt{x}$

46. $f'(x) = anx^{n-1} + b(n-1)x^{n-2}$

47. $f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{7}$

48. $f'(x) = \frac{a}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}$

49. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{5\sqrt[4]{x}}{12}$

50. $f'(x) = -\frac{5}{2x^2\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 3$

51. $f'(x) = 14x + 15x^2$

52. $f'(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{5}{x^2} - 2$

53. $f'(x) = 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{8}{3x\sqrt[3]{x}}$

54. $y' = \frac{3}{x^2}$

55. $y' = 15(3x - 4)^4$

56. $y' = -12(2 - 4x)^2$

57. $y' = (72x^5 - 32x^3)(3x^6 - 2x^4)^3$

58. $y' = 12\sqrt{x}\,(2x - 1)^2(6x - 1)$

59. $y' = \frac{-3x}{\sqrt{5 - 3x^2}}$

60. $y' = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 2)^2}}$

61. $y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

62. $y' = \frac{4x + 6}{3\sqrt{2x^2 + 6x}}$

63. $y' = \left(1 + \frac{9}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x}{3} + 6\sqrt{x}\right)^2$

64. $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4 - 2)^3}}$

65. $f'(x) = (6x + 15)(x^2 + 5x - 3)^2$

66. $y' = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x - 3}}$

67. $y' = \frac{1}{(4x + 3)^{\frac{3}{4}}}$

68. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^2$

69. $y' = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

70. $f'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4}}$

71. $y' = \frac{2x^5 + 1}{\sqrt[3]{(x^6 + 3x)^2}}$

72. $y' = 108x^2 + 55x - 4$

73. $y' = 40x - 12 - \frac{9}{x^2}$

74. $y' = 12x^3 + 3x^2$

75. $f'(x) = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}$

76. $y' = \frac{1}{3}(2x+1)^2(8x+1)$

77. $y' = \frac{5x^2-4x}{2\sqrt{x-1}}$

78. $f'(x) = 12x(3x^2-5)^3(2x^2+1)^2(7x^2-3)$

79. $f'(\theta) = (6\theta^4 - 12\theta)(\theta^2+1)^2(2\theta^3+\theta-2)$

80. $s' = \frac{8-9t}{2\sqrt{4-3t}}$

81. $s'(t) = (2t+3)\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}\right) = 4 - \frac{9}{t^2}$

82. $f'(x) = \frac{6}{(1-2x)^2}$

83. $f'(t) = \frac{-bt}{a\sqrt{a^2-t^2}}$

84. $f'(r) = \frac{r^3-5r}{(r^2-4)^{\frac{3}{2}}}$

85. $f'(t) = \frac{63}{(5t+8)^2}$

86. $f'(z) = \frac{21}{(5-6z)^2}$

87. $f'(x) = -\frac{2ab}{(ax-b)^2}$

88. $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{3x}}$

89. $f'(t) = \frac{-2}{(1+2t)\sqrt{1-4t^2}}$

90. $f'(w) = \frac{10(w-3)}{(w+2)^3}$

91. $f'(\theta) = \frac{24\theta^3 - 54\theta^2 + 24}{(3-2\theta)^2}$

92. $f'(s) = \frac{-6s^2+4s-12}{(s^2-6s)^2}$

93. $f'(x) = \frac{10b^2x+5x^3}{2(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

94. $f'(t)\ \frac{(693-27t)(9t-6)^2}{(27-3t)^3}$

95. $f'(x) = \frac{2ab}{(a-3x)^2}$

96. $f'(x) = \frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

97. $y' = \frac{-4x^3}{(x^4-a^4)^{\frac{3}{2}}}$

98. $y' = \frac{7x^4+27x^2}{3(x^2+3)^{\frac{4}{3}}}$

99. $y' = \frac{8x^2+24x+9}{2\sqrt{x^2+3x}}$

100. $y' = \frac{x+2}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

101. $y' = \frac{3x-3}{2\sqrt{x-3}}$

102. $y' = \frac{-2x^2}{(x^6-1)^{\frac{2}{3}}(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}$

103. $y' = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)\sqrt{x^{2n}-1}}$

104. $y' = \frac{-n\sqrt[m]{x^{n-m}}}{m\left(\sqrt[m]{x^n}-1\right)^2}$

105. $y' = \frac{-20x^2+19x+8}{2(4-5x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x+1}}$

106. $y' = \frac{8x^6-8x^3-2}{\sqrt[3]{(4x^6-1)^2(2x^3-1)^2}}$

**EJERCICIO 30**

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2u}{x^2}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{u^2-1}(1+u)}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(6u^2-3)}{\sqrt{2u^3-3u}}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{u^3} - \frac{9}{u^4}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{(8+12x-3x^2)(u^2+1)}{(u^2-1)^2}$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{5u^3+3u}{\sqrt{u^3+u}}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{\sqrt{u}(x^3+1)^2}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{(u-1)^2(v-2)^2\sqrt{x^2-1}}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{v}{2\sqrt{x}\sqrt{u-1}(v^2-1)^2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x(x^2+3)}{(v+1)\sqrt{v^2-1}\sqrt{u^3}}$

11. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2u}{\sqrt{v}(x-1)^2}$

**EJERCICIO 31**

1. $y' = 8\cos 8x$
2. $f'(x) = -6x \operatorname{sen} 3x^2$
3. $f'(x) = 3x^2 \sec^2 x^3$
4. $s'(t) = 6\sec 6t \tan 6t$
5. $f'(x) = -12x^2 \csc^2 4x^3$
6. $f'(x) = -9\csc 9x \cot 9x$
7. $f'(x) = -a \operatorname{sen} ax$
8. $s'(t) = 2bt \sec^2 bt^2$
9. $f'(x) = 12x \sec x^2 \tan x^2$
10. $f'(x) = -\dfrac{1}{8}\csc\dfrac{x}{4}\cot\dfrac{x}{4}$
11. $f'(x) = -3a \operatorname{sen} 3x$
12. $f'(x) = -3\csc^2(3x-5)$
13. $f'(x) = \cos\dfrac{x}{2}$
14. $f'(x) = -5\operatorname{sen}\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
15. $s'(t) = a\sec^2(at+\pi)$
16. $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$
17. $s'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}$
18. $f'(x) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\csc^2\sqrt[3]{x}$
19. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$
20. $s'(t) = \dfrac{3}{t^4}\operatorname{sen}\dfrac{1}{t^3}$
21. $f'(x) = -\dfrac{\sec\dfrac{1}{\sqrt{x}}\tan\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$
22. $f'(x) = 3\sec^2 3x - 3 = 3\tan^2 3x$
23. $f'(x) = a - a\csc^2 ax = -a\cot^2 ax$
24. $f'(x) = 2(x-1)\cos(x-1)^2$
25. $f'(x) = -18t(3t^2+2)^2 \operatorname{sen}(3t^2+2)^3$
26. $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}\csc^2\sqrt{x-1}$
27. $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}\sec^2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
28. $f'(x) = -\dfrac{2ab}{(ax-b)^2}\sec\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right)\tan\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right)$
29. $f'(x) = 10\operatorname{sen} 5x\cos 5x = 5\operatorname{sen} 10x$
30. $f'(x) = -3b\cos^2 bx \operatorname{sen} bx$
31. $f'(x) = 24x\tan^3 3x^2 \sec^2 3x^2$
32. $f'(x) = \dfrac{2\cos 4x}{\sqrt{\operatorname{sen} 4x}} = 2\sqrt{\operatorname{sen} 4x}\ \cot 4x$
33. $f'(x) = 5x\tan 5x^2\sqrt{\sec 5x^2}$
34. $f'(x) = \dfrac{2x\sec^2 x^2}{\sqrt[3]{9\tan^2 x^2}}$
35. $f'(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$
36. $f'(x) = 2x\cos x^2 - 2x^3 \operatorname{sen} x^2$
37. $f'(x) = \dfrac{3x\cos 3x - \operatorname{sen} 3x}{x^2}$
38. $f'(x) = -\dfrac{10t^2\operatorname{sen} 5t^2 + 2\cos 5t^2}{t^3}$
39. $y' = 2ax\cos(ax^2)$
40. $y' = -3a\operatorname{sen}(3x)$
41. $y' = \dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
42. $y' = x\sec 3x^2\tan 3x^2$
43. $y' = -\dfrac{1}{3}\csc\dfrac{2x}{3}\cot\dfrac{2x}{3}$
44. $y' = 2x + 3 + \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
45. $y' = -6x\csc^2(1-x^2)$
46. $y' = \dfrac{-4}{3(x-1)^2}\cdot\cos\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
47. $y' = 2b\operatorname{sen} 4bx$
48. $y' = 24(2x-1)^2\tan^3(2x-1)^3\sec^2(2x-1)^3$
49. $y' = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}}$
50. $y' = \dfrac{2x\sec^2 x^2}{\sqrt[3]{9\tan^2 x^2}}$
51. $y' = \cos 4x(\cos^2 4x - 6x\operatorname{sen} 8x)$
52. $y' = x\csc ax(2 - ax\cot ax)$
53. $y' = (1 - x\cot 2x)\sqrt{\csc 2x}$

54. $y' = \dfrac{-m \text{ sen } nx \text{ sen } mx - n \cos nx \cos mx}{\text{sen}^2 nx}$

55. $y' = \dfrac{-\cos x}{(1+\text{sen } x)^2}$

56. $y' = -x \text{ sen } x$

57. $y' = \dfrac{\sec^2 x\,(\tan x - 1)}{\sqrt{(\tan^2 x - 1)^3}}$

58. $y' = (2x^2 - 6)\cos 2x + 10x \text{ sen } 2x$

59. $y' = -2\cos(2x - 1)$

60. $y' = x\sec(\pi - x)\cdot[2 - x\tan(\pi - x)]$

61. $y' = \dfrac{81x^2\text{sen}^2 x[3x^2\cos x + x\cos x + \text{sen } x]}{(3x+1)^4}$

62. $y' = \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}\text{ sen}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

63. $y' = \left(\dfrac{\sec x}{x}\right)^2(x \text{ sen } x - \cos x)$

64. $y' = -x \text{ sen } x + \cos x$

65. $y' = 2\cos 2x$

66. $y' = 2\sec^2 x \tan x$

67. $y' = -\dfrac{1}{2}\text{ sen}\dfrac{x}{2}$

68. $y' = -6 \text{ sen}(6x + 2)$

69. $y' = -\dfrac{x \text{ sen } x + 2\cos x}{x^3}$

70. $y' = (\text{sen } x + \cos x)(\tan^2 x - \tan x + 2)$

71. $y' = -\cos^3 x$

72. $y' = x^2 \text{ sen } x$

73. $y' = \text{sen}^4 2x$

**EJERCICIO 32**

1. $y' = \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

2. $f'(x) = \dfrac{-8x}{\sqrt{1-16x^4}}$

3. $f'(x) = \dfrac{3}{1+9x^2}$

4. $y' = -\dfrac{3x^2}{1+x^6}$

5. $f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

6. $f'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{9x^4-1}}$

7. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$

8. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

9. $f'(x) = \dfrac{a}{a^2+x^2}$

10. $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$

11. $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{-8+6x^2-x^4}}$

12. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $y' = \dfrac{x^2}{x^2+1} + 2x \text{ arc tan } x$

14. $y' = \text{arc sen } x$

15. $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

16. $y' = \text{arc csc}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

17. $y' = x \text{ arc tan } x$

18. $\varphi' = \dfrac{\theta}{(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-2}}$

19. $y' = \sqrt{1-4x^2}$

20. $y' = x^2 \text{ arc sen } x$

21. $f'(r) = \sqrt{\dfrac{b-r}{b+r}}$

22. $y' = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

23. $y' = \dfrac{3+6x^2}{(1+4x^2)(1+x^2)}$

24. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

25. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \text{arc cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

26. $y' = \dfrac{4a-8x}{\sqrt{1-(4ax-4x^2)^2}}$

27. $f'(r) = \dfrac{1}{\sqrt{-r^2 + 4r - 3}}$

28. $y' = \dfrac{1}{4x^2 + 4x + 5}$

29. $y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{4x - x^2}}$

30. $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}$

31. $y' = \sqrt{2x - x^2}$

32. $s'(t) = \dfrac{2 - 3t}{\sqrt{9 - t^2}}$

33. $y' = \sqrt{25 - 9x^2}$

34. $w' = \dfrac{\theta + 5}{(\theta + 4)\sqrt{\theta + 2}}$

35. $y' = \dfrac{1}{5 + 4\cos x}$

36. $y' = \dfrac{\cos x}{5 - 3\cos x}$

37. $y' = -\dfrac{1}{3}$

38. $y' = \text{arc cot}(\tan x) - x$

39. $y' = \dfrac{1}{(4x^2 - 1)}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4x \text{ arc sec } 2x}{\sqrt{4x^2 - 1}}\right)$

40. $y' = \dfrac{\sqrt{7 - 8\cos x + \cos^2 x}}{14 - 2\cos x}$

41. $y' = \dfrac{64}{(3x + 2)\sqrt{5x^2 + 28x - 12}}$

42. $s' = \dfrac{t^2}{\sqrt{2t - t^2}} + 2t \text{ arc cos}(1 - t) + 2$

43. $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - (a + x)^2}}$

**EJERCICIO 33**

1. $y' = \dfrac{3}{x}$

2. $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

3. $f'(x) = \dfrac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 2}$

4. $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$

5. $f'(x) = \dfrac{6 \log e}{x}$

6. $f'(x) = \dfrac{3 \log e}{x}$

7. $f'(x) = \dfrac{\log_3 e}{x}$

8. $f'(x) = \dfrac{\log_4 e}{3x}$

9. $f'(x) = \dfrac{4 \ln^3 x}{x}$

10. $f'(x) = \dfrac{3 \ln^2 5x}{x}$

11. $y' = x(1 + \ln x^2)$

12. $y' = 2(1 + \ln x)$

13. $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

14. $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x^2}{x^2}$

15. $y' = -\dfrac{a}{2(b - ax)} = \dfrac{a}{2(ax - b)}$

16. $f'(x) = \dfrac{9x^2 - 2}{x(3x^2 - 1)}$

17. $f'(x) = \dfrac{2ax^2 - b}{x(ax^2 - b)}$

18. $y' = \dfrac{13}{(3x - 5)(2x + 1)}$

19. $f'(x) = \dfrac{bc}{c^2x^2 - b^2}$

20. $y' = \cot x$

21. $y' = -5\tan 5x$

22. $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

23. $y' = \dfrac{3}{2(3x + 4)}$

24. $y' = \dfrac{12}{4x^2 - 9}$

25. $y' = \dfrac{x^2}{x^3 + 8}$

26. $y' = \dfrac{\ln x}{2x}$

27. $y' = \dfrac{27x^2+12x+6}{(3x+2)(3x^2+2)}$

28. $y' = \dfrac{2\log_3 e}{4x^2-1}$

29. $y' = \dfrac{\left(30\,bx^2\sqrt{x}-3\right)\log e}{10\,bx^3\sqrt{x}-6x}$

30. $y' = \tan x$

31. $y' = 2\cot x$

32. $y' = 1 + \ln x$

33. $y' = -2\tan 2x$

34. $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

35. $y' = \sec x$

36. $y' = -\dfrac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$

37. $y' = \dfrac{x+\tan x}{x\tan x}$

38. $y' = 2x^2(1 + \ln x^3)$

39. $y' = \dfrac{3\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\tan x} = \dfrac{3\sec\sqrt{x}\csc\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

40. $y' = \dfrac{\log e}{2x}$

41. $y' = 2^{x^2+5x}\cdot\ln 2\cdot(2x+5)$

42. $f'(x) = \dfrac{b^{\sqrt{x}}\ln b}{2\sqrt{x}}$

43. $y' = \dfrac{3^{\ln x}\ln 3}{x}$

44. $y' = (x\cos x + \operatorname{sen} x)\cdot 5^{x\operatorname{sen} x}\cdot\ln 5$

45. $y' = 2^{\ln x}(1 + \ln 2)$

46. $y' = 5^x(\ln 5^x + 1)$

47. $y' = 2xe^{x^2} = 2xy$

48. $y' = (6x-2)e^{3x^2-2x+1} = (6x-2)y$

49. $y' = \dfrac{3xe^{\sqrt{3x^2-1}}}{\sqrt{3x^2-1}} = \dfrac{3xy}{\sqrt{3x^2-1}}$

50. $y' = (x\sec^2 x + \tan x)y$

51. $y' = e^{\frac{2x}{b}} + e^{-\frac{2x}{b}}$

52. $y' = \dfrac{8}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}$

53. $f'(x) = 4e^{4x}$

54. $f'(x) = 10xe^{5x^2}$

55. $f'(x) = 3e^{3x-1}$

56. $f'(x) = \dfrac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}$

57. $f'(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{e^t}$

58. $f'(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt[4]{e^x}$

59. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}$

60. $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

61. $f'(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta\cdot e^{\operatorname{sen}^2\theta}$

62. $f(x) = -2\operatorname{sen} 2x\cdot e^{\cos 2x}$

63. $y' = (\operatorname{sen} x + \cos x)e^{x+e^x\operatorname{sen} x}$

64. $f'(x) = (3\ln 5)5^{3x}$

65. $f'(x) = (2\ln 7)7^{2x}$

66. $f'(x) = (2x\ln 5)5^{x^2}$

67. $y' = 2x^{2x}(1 + \ln x)$

68. $y' = x^{\cos x - 1}(\cos x - x\ln x^{\operatorname{sen} x})$

69. $y' = \dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x)$

70. $y' = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2} = \dfrac{y}{1+x^2}$

71. $y' = \dfrac{1+2x}{2x}$

72. $y' = 3e^{\ln x^2} = 3x^2$

73. $y' = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

74. $y' = \dfrac{e^x(x\ln x + \ln x - 1)}{2\ln^2 x}$

75. $y' = \dfrac{-1}{x(\ln x - 1)\sqrt{\ln^2 x - 1}}$

76. $y' = \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{(1-e^{\operatorname{sen} x})\sqrt{e^{2\operatorname{sen} x}-1}}$

77. $y' = \dfrac{2a\cot ax}{e^y}$

78. $y' = \dfrac{e^{\ln\sqrt{e^x\operatorname{sen} x}}(1+\cot x)}{2} = \dfrac{y(1+\cot x)}{2}$

79. $y' = xe^{\text{sen}\,x}(x\cos x + 2)$

80. $y' = \cot x$

81. $y' = \dfrac{3x^2 - 8}{x(x^2 - 4)}$

82. $y' = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 9}}$

83. $y' = \sec^3 2x$

84. $y' = \text{arc tan}\,x$

85. $y' = \sqrt{x^2 - 4}$

86. $y' = \text{arc sec}\,x$

87. $y' = \dfrac{1}{4x^2 - 9}$

88. $y' = \text{arc cot}\,x$

89. $y' = \text{arc csc}\,\dfrac{x}{2}$

**EJERCICIO 34**

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$

2. $y' = -\dfrac{y}{x}$

3. $y' = \dfrac{4}{y}$

4. $y' = -\dfrac{2x+5}{4y-2}$

5. $y' = -\dfrac{3x+y}{x-6y}$

6. $y' = \dfrac{x+1}{1-y}$

7. $y' = \dfrac{(x-y)^2 + 2y}{2x}$

8. $y' = \dfrac{b^2x}{a^2y}$

9. $y' = -\dfrac{y}{x}$

10. $y' = \dfrac{2y^2 + 3x^2y + 10xy^2}{3y^2 - 4xy - x^3 - 10x^2y + 1}$

11. $y' = \dfrac{4xy - 9x^2 - 5y - 3}{5x - 2x^2 - 1}$

12. $y' = \dfrac{2\sqrt{x+y} - y}{2x + 3y}$

13. $y' = \dfrac{2y\sqrt{x+y} - 1}{1 - 2x\sqrt{x+y}}$

14. $y' = \dfrac{2 - 4x - 3y}{3x + 3}$

15. $y' = \left(1 - 4\sqrt{x}\right)\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

16. $y' = \dfrac{y}{x\,(2y-1)}$

17. $y' = -\dfrac{y}{x}$

18. $y' = \dfrac{\tan e^y}{e^y}$

19. $y' = 3e^{x-y}$

20. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + 1}$

21. $y' = \dfrac{1 - x + y}{1 - y + x}$

22. $y' = \dfrac{x(1 - e^{x^2})}{y(e^{y^2} - 1)}$

23. $y' = -x$

24. $y' = -\dfrac{y}{x\ln x}$

25. $y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + x}$

26. $y' = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x\ln y - y}{y\ln x - x}\right)$

27. $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$

28. $y' = \dfrac{e^x(1+e^y)}{e^y} = (e^{-y} + 1)\ln(1 + e^y)$

29. $y' = \dfrac{y(x - \ln y)}{x\ln x}$

30. $y' = \dfrac{e^x}{1 + x\,e^y} = \dfrac{e^y}{1 - y}$

31. $y' = \dfrac{y^2}{e^{\ln y} - xy} = \dfrac{y}{1 - x}$

32. $y' = \dfrac{1}{e^{x+y}[\cos(e^{x+y}) - 1]} - 1$

33. $y' = \dfrac{e^{x\cos y}\cos y - 3}{x\,e^{x\cos y}\text{sen}\,y} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\tan y} - \dfrac{1}{x\,\text{sen}\,y}\right)$

34. $y' = -\dfrac{\cos(x+a)}{\operatorname{sen}(y-b)}$

35. $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y - 1} = -\dfrac{\operatorname{sen} x(\csc y + \cot y)}{\operatorname{sen} y}$

36. $y' = \dfrac{\operatorname{sen}(4x)\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2y)\cos(2y)} = \dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{\operatorname{sen}(8y)}$

37. $y' = -\dfrac{\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}}{\cos y(1+e^{\operatorname{sen} y})}$

38. $y' = \dfrac{2 - y\cos(xy)}{x\cos(xy)} = \dfrac{2\sec(xy) - y}{x}$

39. $y' = -\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} y}$

40. $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y \cdot e^{\cos y}}$

41. $y' = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} y - 1}{x\cos y}$

42. $y' = \left(\dfrac{y^2+1}{y^2+1-x}\right)\operatorname{arc\,tan} y$

43. $y' = \dfrac{\cot(x+y)}{1-\cot(x+y)}$

44. $y' = \dfrac{1}{2^y \ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2^x + \ln 8}$

45. $y' = -\dfrac{y}{e^{\operatorname{sen} y}\cos y + x - 2}$

46. $y' = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x\ln y - y}{y\ln x - x}\right) = \dfrac{y^2}{x^2}\left(\dfrac{1-\ln x}{1-\ln y}\right)$

47. $y' = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x+y)}{1-\operatorname{sen}(x+y)-\cos(x+y)}$

48. $y' = \dfrac{\tan^2(xy) + y^2\sec^2(xy)}{\tan(xy) - xy\sec^2(xy)}$

49. $y' = \dfrac{x^2+y+1}{(x^2+1)\operatorname{arc\,cot} x}$

50. $y' = \dfrac{y \cdot e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}(\operatorname{sen} y + \operatorname{arc\,cos}(e^x))}$

**EJERCICIO 35**

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = 24$

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{170}{(5x+3)^3}$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4ab^2}{(ax-b)^2}$

5. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 24a^3(ax+b)$

6. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \operatorname{sen} x + \cos x$

7. $y'' = -\csc^2 x$

8. $y''' = -\dfrac{72}{(x-1)^5}$

9. $y'' = e^x\sec^2 e^x(2e^x\tan e^x + 1) = e^x\sec^2 e^x(2e^x y + 1)$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{18y-6}{(2-3x)^2}$

11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{9}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{x^2+y^2}{y^3} = -\dfrac{16}{y^3}$

13. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{2}{x^3}$

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 x\cos y}{\operatorname{sen}^3 y} = -\csc y\left(\operatorname{sen} x + \dfrac{\cos^2 x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}\right)$

15. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -x^2\cos x - 6x\operatorname{sen} x + 6\cos x$

16. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{12}{(x+1)^4}$ ; $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{2\cdot n!\cdot(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+1}}$

17. $y'' = \dfrac{2y}{(x+1)^2}$

18. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -2\sec^2 x\tan x$

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\cos^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^3} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} = \dfrac{2-\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$

20. $y'' = \dfrac{-12}{(x+2y)^3}$ ; $y''' = \dfrac{-108x}{(x+2y)^5}$

**EJERCICIO 36**

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\text{ sen }2\theta + 3\cos 2\theta}{2\cos 2\theta - 3\text{ sen }2\theta}$

2. $\frac{dy}{dx} = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{5\text{ sen }\theta\cos 5\theta + \text{sen }5\theta\cos\theta}{5\cos\theta\cos 5\theta - \text{sen }5\theta\text{ sen }\theta}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\theta\text{ sen }\theta + \text{sen }2\theta\cos\theta}{\cos 2\theta\cos\theta - \text{sen }2\theta\text{ sen }\theta}$

5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2\theta + \cos\theta}{\text{sen }2\theta + \text{sen }\theta} = -\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right)$

6. $\frac{dy}{dx} = \csc\theta - \cot\theta$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{a\text{ sen }\theta + \cos\theta}{a\cos\theta - \text{sen }\theta}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen }\theta\tan\frac{\theta}{2} + \cos\theta}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2} - \text{sen }\theta}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\text{ sen }2\theta - 3\text{ sen }\theta}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen }\theta + 2\theta\cos\theta}{\cos\theta - 2\theta\text{ sen }\theta}$

11. $-1$

12. $2 + \sqrt{3}$

13. 3

14. $-a$

15. $-\frac{1}{4}$

**EJERCICIO 37**

1. $\frac{dy}{dx} = 4t\sqrt{t}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{36t^2}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{t^2 - t}}{2t - 1}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}\csc\theta$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{2t^2 - 3t^3}{2\sqrt{t-1}}$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta + 4\text{ sen }\theta}{5\cos\theta + \text{sen }\theta}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{(t-1)^2(1-2t-t^2)}{(t^2+1)}$

8. $\frac{dy}{dx} = \csc\frac{\theta}{2}(4 - 8\cos^2\theta)$

9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5t^4}$

10. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\cos\theta\cot^2\theta$

11. $\sqrt{3}$

12. $\frac{1}{4m^2}$

13. $-\frac{1}{3}$

14. $-\frac{1}{3}$

15. 1

16. $-\frac{1}{10}$

## CAPÍTULO 5

**EJERCICIO 38**

1. Sub-tangente = 1
   Sub-normal = 1
   Tangente = $\sqrt{2}$
   Normal = $-\sqrt{2}$

2. Sub-tangente = $-\frac{12}{7}$
   Sub-normal = $-84$
   Tangente = $-\frac{60}{7}\sqrt{2}$
   Normal = $-60\sqrt{2}$

3. Sub-tangente = $-\frac{12}{7}$
   Sub-normal = $-84$
   Tangente = $-\frac{60}{7}\sqrt{2}$
   Normal = $60\sqrt{2}$

4. Sub-tangente = $\frac{7}{4}$
   Sub-normal = 28
   Tangente = $\frac{7\sqrt{17}}{4}$
   Normal = $7\sqrt{17}$

5. Sub-tangente = $-\frac{3}{2}$
   Sub-normal = $-6$
   Tangente = $-\frac{3}{2}\sqrt{5}$
   Normal = $3\sqrt{5}$

6. Sub-tangente = $-18$
   Sub-normal = $-\frac{1}{2}$
   Tangente = $-3\sqrt{37}$
   Normal = $\frac{\sqrt{37}}{2}$

7. Sub-tangente $= 8$

   Sub-normal $= \frac{1}{2}$

   Tangente $= 2\sqrt{17}$

   Normal $= \frac{\sqrt{17}}{2}$

8. Sub-tangente $= -2$

   Sub-normal $= -\frac{1}{8}$

   Tangente $= -\frac{\sqrt{17}}{2}$

   Normal $= \frac{\sqrt{17}}{8}$

9. Sub-tangente $= -\frac{3}{2}$

   Sub-normal $= -6$

   Tangente $= -\frac{3\sqrt{5}}{2}$

   Normal $= -3\sqrt{5}$

10. Sub-tangente $= -\frac{3}{4}$

    Sub-normal$= -\frac{16}{27}$

    Tangente $= -\frac{\sqrt{145}}{12}$

    Normal $= \frac{2\sqrt{145}}{27}$

11. $T: 4x + y - 1 = 0$
    $N: x - 4y + 38 = 0$
12. $T: x + y - 1 = 0$
    $N: x - y + 1 = 0$
13. $T: y = 0$
    $N: 2x - 1 = 0$
14. $T: 8x - y - 12 = 0$
    $N: x + 8y - 34 = 0$
15. $T: 4x + y + 8 = 0$
    $N: x - 4y - 15 = 0$
16. $T: \sqrt{5}x + 2y - 9 = 0$
    $N: 2x - \sqrt{5}y = 0$
17. $T: x + 2y - 7 = 0$
    $N: 2x - y - 4 = 0$
18. $T: 2x + y - 2 = 0$
    $N: x - 2y + 4 = 0$
19. $T: y - 1 = 0$
    $N: 2x - \pi = 0$
20. $T: 3\sqrt{3}x + 6y - \left(3 + \sqrt{3}\pi\right) = 0$
    $N: 12x - 6\sqrt{3}y + \left(3\sqrt{3} - 4\pi\right) = 0$
21. $T: 4x - 2y + (6 - \pi) = 0$
    $N: 4x + 8y - (24 + \pi) = 0$
22. $T: 2x - y - 6 = 0$
    $N: x + 2y - 8 = 0$
23. $T: x + y - 2 = 0$
    $N: x - y = 0$
24. $T: 6x + 2y - 9 = 0$
    $N: 2x - 6y + 7 = 0$
25. $T: x - 2 = 0$
    $N: 2y - 1 = 0$
26. $T: 7x - y - 8 = 0$
    $N: x + 7y - 94 = 0$
27. $T: x - ey = 0$
    $N: ex + y - 1 - e^2 = 0$
28. $T: 8x + y - 7 = 0$
    $N: 2x - 16y + 47 = 0$

### EJERCICIO 39

1. Agudo 26° 33′, obtuso 153° 27′
2. Agudo 73° 42′, obtuso 106° 18′
3. Agudo 78° 41′, obtuso 101° 19′
4. Agudo 35° 15′, obtuso 144° 44′
5. Agudo 28° 23′, obtuso 151° 36′
6. Agudo 28° 4′, obtuso 151° 55′
7. Agudo 71° 33′, obtuso 104° 28′
8. 125° 32′
9. $\theta = 63° 26'$
10. $\theta = 18° 26'$
11. $\theta = 6° 54', 57° 25'$
12. $\theta = 33° 41'$
13. $\theta = 54° 44'$

### EJERCICIO 40

1. $r = \frac{5\sqrt{5}}{3}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{3\sqrt{5}}{25}$
2. $r = \frac{17\sqrt{17}}{8}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{8\sqrt{17}}{289}$
3. $r = 4\sqrt{2}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
4. $r = \frac{5\sqrt{10}}{3}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{3\sqrt{10}}{50}$
5. $r = 1, \frac{d\theta}{ds} = 1$

6. $r=\frac{17\sqrt{17}}{2}, \frac{d\theta}{ds}=\frac{2\sqrt{17}}{289}$

7. $r=\frac{1}{2}, \frac{d\theta}{ds}=2$

8. $r=\frac{\sqrt{11}}{4}, \frac{d\theta}{ds}=\frac{4\sqrt{11}}{11}$

9. $C(-2, 5)$

10. $C\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

11. $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

12. $C(-2, 3)$

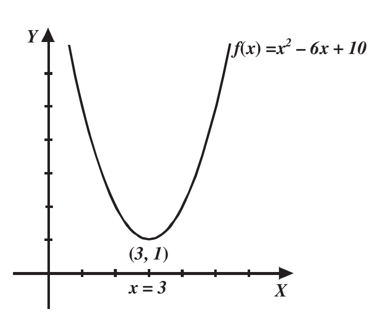
13. $C\left(\frac{23}{2}, -32\right)$

**EJERCICIO 41**

1. Punto mínimo $(3, -4)$
   Creciente en $(3, \infty)$
   Decreciente en $(-\infty, 3)$
2. Punto máximo $\left(\frac{5}{6}, -\frac{23}{12}\right)$
   Creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$
   Decreciente en $\left(\frac{5}{6}, \infty\right)$
3. Punto máximo $(-1, 2)$
   Punto mínimo $(1, -2)$
   Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
   Decreciente en $(-1, 1)$
4. Punto máximo $(0, 0)$
   Punto mínimo $(4, -32)$
   Creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
   Decreciente en $(0, 4)$
5. Punto máximo $(-1, 5)$
   Punto mínimo $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$
   Creciente en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
   Decreciente en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
6. Punto máximo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$
   Punto mínimo $\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{27}\right)$
   Creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
   Decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$
7. Punto máximo $(2, 15)$
   Punto mínimo $(-1, -12)$
   Creciente en $(-1, 2)$
   Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
8. Punto máximo $\left(-1, \frac{8}{3}\right)$
   Punto mínimo $(3, -8)$
   Creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$
   Decreciente en $(-1, 3)$
9. Punto máximo $\left(-2, \frac{34}{3}\right)$
   Punto mínimo $\left(3, -\frac{19}{2}\right)$
   Creciente en $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$
   Decreciente en $(-2, 3)$
10. Punto máximo $\left(1, \frac{17}{12}\right)$
    Punto mínimo $(0, 1)\left(3, -\frac{5}{4}\right)$
    Creciente en $(0, 1) \cup (3, \infty)$
    Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$
11. Punto máximo $(1, -3)$
    Creciente $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
    Decreciente $(1, 2) \cup (2, \infty)$
12. No tiene máximos y mínimos
    Decreciente en $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
13. Punto máximo $\left(2, \frac{1}{2}\right)$
    Punto mínimo $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$
    Creciente en $(-2, 2)$
    Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
14. Punto mínimo $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$
    Creciente en $(0, 2) \cup (2, \infty)$
    Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
15. Punto máximo $(-6, -12)$
    Punto mínimo $(0, 0)$
    Creciente en $(-\infty, -6) \cup (0, \infty)$
    Decreciente en $(-6, -3) \cup (-3, 0)$

**EJERCICIO 42**

1.



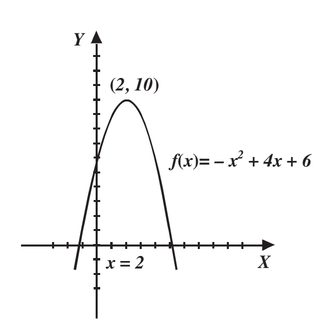

Punto mínimo (3, 1)

Crece (3, ∞)

Decrece (−∞, 3)

Concavidad hacia arriba (−∞, ∞)

2.



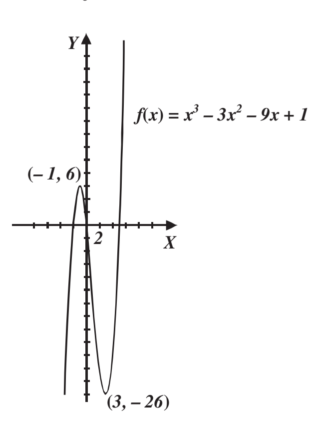

Punto máximo (2, 10)

Crece (−∞, 2)

Decrece (2, ∞)

Concavidad hacia abajo (−∞, ∞)

3.




Punto máximo (−1, 6), Punto mínimo (3, −26)

Crece (−∞, −1) ∪ (3, ∞)

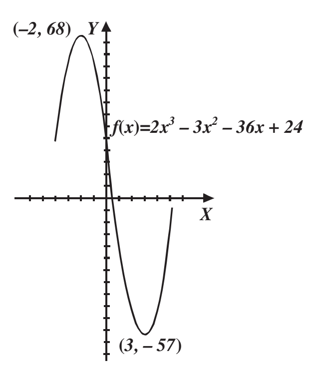
Decrece (−1, 3)

Concavidad hacia abajo (−∞, 1)

Concavidad hacia arriba (1, ∞)

Punto de inflexión (1, −10)

4.




Punto máximo (−2, 68)

Punto mínimo (3, −57)

Crece (−∞, −2) ∪ (3, ∞)

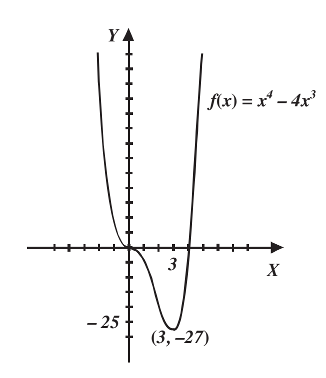
Decrece (−2, 3)

Concavidad hacia abajo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Punto de inflexión $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

5.




Punto mínimo (3, −27)

Puntos de inflexión (0, 0), (2, −16)

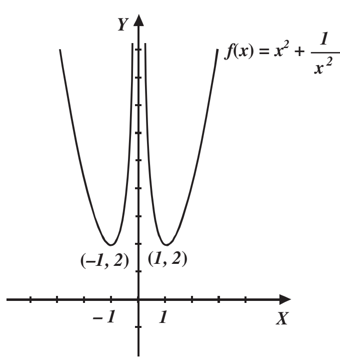
Crece (3, ∞)

Decrece (−∞, 0) ∪ (0, 3)

Concavidad hacia abajo (0, 2)

Concavidad hacia arriba (−∞, 0) ∪ (2, ∞)

6.



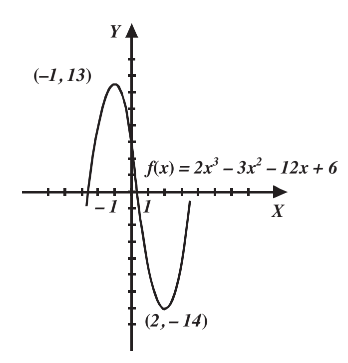

Puntos mínimos $(-1, 2)$, $(1, 2)$

Crece $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

Decrece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7.




Punto máximo $(-1, 13)$

Punto mínimo $(2, -14)$

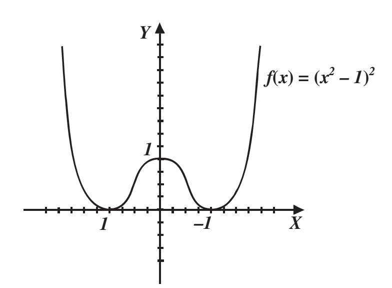
Crece $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

Decrece $(-1, 2)$

Concavidad hacia abajo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, Punto de inflexión $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

8.




Punto máximo $(0, 1)$

Puntos mínimos $(-1, 0)$, $(1, 0)$

Crece $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

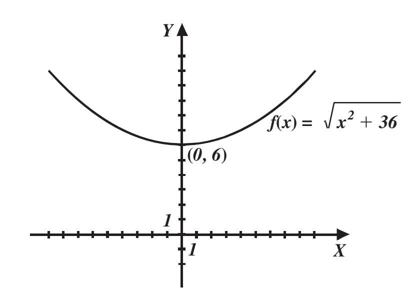
Decrece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Concavidad hacia abajo $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

Punto de inflexión $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$

9.



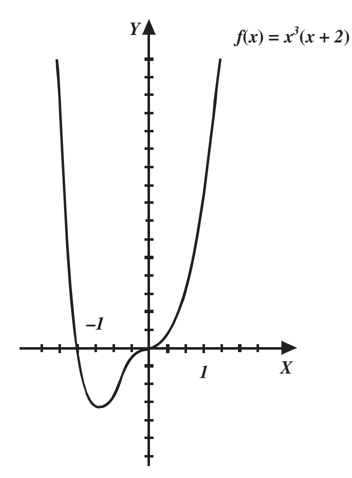

Punto mínimo $(0, 6)$

Crece $(0, \infty)$

Decrece $(-\infty, 0)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, \infty)$

10.




Punto mínimo $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$

Puntos de inflexión $(0, 0)$, $(-1, -1)$

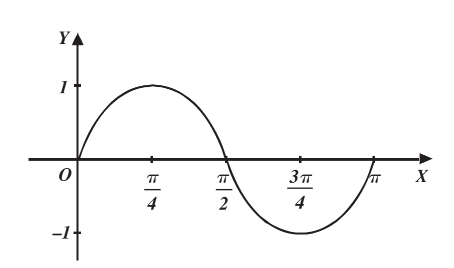
Crece $\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$

Decrece $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

Concavidad hacia abajo $(-1, 0)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

11.




Punto mínimo $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

Punto máximo $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

Punto de inflexión $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Decrece $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

Crece $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Concavidad hacia abajo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

## EJERCICIO 43

1. 20 y 20
2. $-25$ y 25
3. 2 pulgadas por lado y el volumen de 128 $\text{ln}^3$
4. $V = 6144\pi$ cm$^3$
5. $V = \frac{500\sqrt{6\pi}}{9\pi}$ in$^3$
6. $r = \sqrt[4]{\frac{100}{3}}$

   $h = \sqrt[4]{\frac{400}{3}}$
7. $A = 54$ cm$^2$
8. $A = 24u^2$
9. Número = 1
10. Base = $\sqrt{3}\, r$

    altura = $\frac{3}{2} r$
11. $(1, 1), (-1, -1)$
12. $A = \frac{32\sqrt{3}}{9}\, u^2$
13. Base = $2\sqrt{2}$

    altura = $\sqrt{2}$
14. $2\sqrt{6}$ y $2\sqrt{3}$ ft
15. $d = 2\sqrt{5}$
16. 8 y 8
17. $2\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ unidades
18. $A = 6u^2$
19. $h = 2$ cm
20. Cada lado mide $2u$
21. 20 y 20
22. $4\sqrt{2}$ y 8
23. $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
24. $A = 15u^2$
25. $A = 2ab\, u^2$
26. $4x + 3y - 24 = 0$
27. Radio $4\sqrt{2}$

    altura = $8\sqrt{2}$ pulgadas
28. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + k^2}, \frac{k}{2}\right)$
29. Números 4 y 4
30. $\frac{2P}{4 + \pi}$; $\frac{P}{4 + \pi}$
31. 400 m, 800 m
32. $\frac{100\sqrt{3}\pi}{9 + \sqrt{3}\pi}$ cm, $\frac{900}{9 + \sqrt{3}\pi}$ cm
33. $\frac{2000\sqrt{3}\pi}{27}$ cm$^3$
34. $25\sqrt{2}$ cm $\times$ $25\sqrt{2}$ cm
35. $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ in $= \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ in
36. $5\sqrt{5}$ m
37. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$
38. $P(2, 0)$,

    $P\left(-\frac{\sqrt{6} + 2}{2}, \sqrt{6} - \frac{3}{2}\right)$

## EJERCICIO 44

1. $6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{17}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
2. $0 < t < 4$ y $6 < t$
3. *a*) $s = 22$ si $t = 2$, $s = 18$ si $t = 4$

   $a = -6$ si $t = 2$, $a = 6$ si $t = 4$

   *b*) $s = 20$, $v = -3$ si $t = 3$

   *c*) "$s$" crece cuando $0 < t < 2$ o $t > 4$

   *d*) "$v$" crece cuando $0 < t < 2$ o $t > 4$
4. *a*) $t = 18$ s, $v = -54\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

   *b*) $t = 9$ s, $s = 243$ m
5. $v = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $s = 35$ m

## EJERCICIO 45

1. $\frac{5}{2}\sqrt{10}$ cm
2. $\frac{3}{5}\sqrt{449}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$
3. $\frac{360}{\sqrt{17}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
4. $\frac{4}{75}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ m$^3$
5. $-\frac{25}{12}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
6. $10\pi\,\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$
7. $-\frac{3}{49\pi}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$
8. $-\frac{405}{8\sqrt{14}}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

9. *a*) $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

*b*) $\frac{820}{\sqrt{73}}\frac{\text{km}}{\text{h}}$

10. $-\frac{4}{9\pi}\frac{\text{m}}{\text{min}}$

11. 90.58 km/h

12. $4.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

13. $\frac{7}{4\pi}\frac{\text{pies}}{\text{min}}$

14. $\frac{\sqrt[4]{27}}{5}\frac{\text{cm}}{\text{min}}$

15. $\frac{14}{3}\frac{u}{s}$

16. $\frac{7}{50}\sqrt{29}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

17. $1.95\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$.4342\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

## Ejercicio 46

1. *a*) $I = \$15\,275.00$, $U = \$8\,370.00$, $Q = \$47.90$
   *b*) $I = \$9\,424.00$, $U = \$7\,208.00$, $Q = \$26.93$
   $Q = \$16.00$ por artículo
2. Costo promedio mínimo = $14.80 por artículo
   Se deben producir 1 225 artículos para un costo mínimo
3. Ingreso real: $I(31) - I(30) = \$156.00$
   Ingreso aproximado: $160.00
4. 59 metros
5. $p(x) = 100 - \frac{1}{800}x$
   $50.00 por boleto

## Ejercicio 47

1. $\frac{15}{2}$
2. 2
3. $-1$
4. $\frac{1}{3}\ln 2$
5. 1
6. $-\frac{9}{4}$
7. 1
8. $\frac{1}{3}$
9. $e$
10. 0
11. 1
12. $-\frac{1}{2}$
13. $e^{-\frac{1}{2}}$
14. 0
15. $e$
16. $\infty$
17. $-1$
18. 1
19. 1
20. 0

## Ejercicio 48

1. $c = 0$
2. $c = \frac{3}{4}$
3. $c = \frac{5}{2}$
4. $c = \frac{3}{4}$
5. $c = \pm\sqrt{3}$
6. $c = 0.36$
7. $c = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$
8. $c = 0$
9. $c = 0$
10. $c = \pi$
11. No es continua en $x = 1$
12. $c = 1$

## Ejercicio 49

1. $c = \frac{3}{2}$
2. $c = \frac{1}{2}$
3. $c = \sqrt{3}$
4. $c = 0$
5. $c = 3$
6. $c = -1$
7. $c = 1.7613$
8. $c = 2.1750$
9. $c = 0.5413$
10. $c = 1.3204$

## Ejercicio 50

1. $dy = a\,dx$
2. $dy = (2ax + b)dx$
3. $df(x) = (3x^2 - 4x)dx$
4. $ds = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right)dt$
5. $dh(t) = -36t(5 - 3t^2)^5\,dt$
6. $dy = -\frac{6x}{(x^2-2)^5}$
7. $dy = -\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2x+3}\right)^2}\,dx$
8. $dy = \frac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$
9. $df(x) = (7x + 5)(x - 1)^2(x + 3)^3\,dx$
10. $dh(s) = \frac{8}{(2s+3)^2}\,ds$
11. $dg(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}\,dx$
12. $dy = \frac{x+8}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}\,dx$
13. $dy = \frac{-2abx}{(ax^2-b)\sqrt{a^2x^4-b^2}}\,dx$
14. $df(x) = (1 + 2\,\text{sen}\,2x)dx$
15. $df(t) = 6\tan^2 2t\sec^2 2t\,dt$
16. $dy = -2\tan x(\sec x - \sec^2 x)dx$
17. $dg(x) = \frac{-2\cos x}{(1+\text{sen}\,x)^2}\,dx$

18. $ds(t) = \dfrac{-t \operatorname{sen} t - 2\cos t}{2t^2\sqrt{\cos t}}\, dt$

19. $df(x) = \dfrac{\sec x}{\sec x + 1}\, dx = \dfrac{1}{1 + \cos x}\, dx$

20. $dy = \dfrac{2x}{x^2 + 5} \log e\, dx$

21. $dy = \dfrac{x}{x^2 - 3}\, dx$

22. $dy = \dfrac{3}{2x^2 x + 32x - 4}\, dx$

23. $dy = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} e^{\sqrt{x^3}}\, dx$

24. $dy = 2^{x^3 + 5}(3x^2 \ln 2)\, dx$

25. $dh(t) = -\dfrac{2}{(e^t - e^{-t})^2}\, dt$

26. $df(x) = x(\ln x^2 + 1)\, dx$

27. $df(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx$

28. $dy = -\dfrac{2}{x^2 + 4}\, dx$

29. $dy = \dfrac{1}{2x\sqrt{x - 1}}\, dx$

30. $dy = -\dfrac{3}{x\sqrt{9x^6 - 1}}\, dx$

## EJERCICIO 51

1. $\approx \dfrac{167}{18} = 9.277$

2. $\approx \dfrac{89}{27} = 3.296$

3. $\approx \dfrac{17}{8} = 2.125$

4. $\approx \dfrac{45 + 2\sqrt{3}\pi}{90} = 0.620$

5. $\approx \dfrac{108 + \sqrt{3}\pi}{36} = 3.151$

6. $\approx \dfrac{76 + 30\sqrt{3} + 2\pi}{15} = 8.949$

7. $\approx \dfrac{5489}{4} = 1372.25$

8. $\approx \dfrac{180\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \pi\left(7 + \sqrt{2}\right)}{360} = 0.8549$

9. $\approx \dfrac{45 - 3\pi}{720} = 0.054$

10. $\approx \dfrac{9 - \sqrt{3}\pi}{9\sqrt{3}} = 0.228$

11. $dA = 0.286 \text{ cm}^2$

12. $dA = 2.265 \text{ cm}^2$, $dV = 3.341 \text{ cm}^3$

13. $dV = 1.8\pi \text{ cm}^3$

14. Lado = 8 cm

15. Error relativo = $\dfrac{dA}{A} = 0.00249$,

    Error porcentual = 0.249%

    Error relativo = $\dfrac{dV}{V} = 0.00374$,

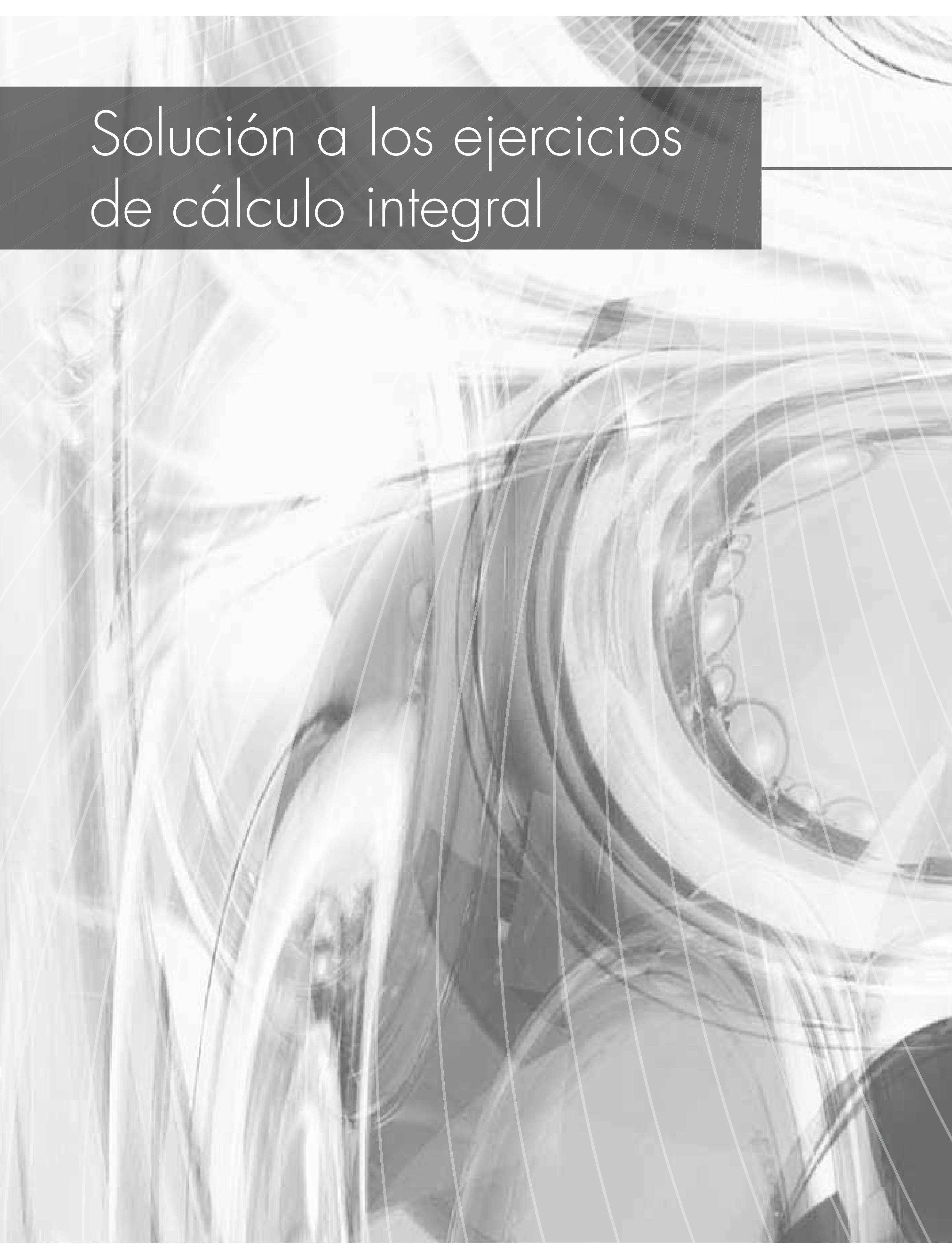
    Error porcentual = 0.374%

16. Lado = $\dfrac{1}{9}$ cm

17. $d\phi = 0.02$ cm

18. Error relativo = $\dfrac{dA}{A} = 0.00088$,

    Error porcentual = 0.088%



# Solución a los ejercicios de cálculo integral

## CAPÍTULO 1

### EJERCICIO 1

1. 354
2. $-40$
3. $-\frac{5}{4}$
4. $\frac{223}{70}$
5. 14 560
6. 17
7. $-\frac{322}{3}$
8. $3\left(1+\frac{b}{2a}\right)$
9. 63
10. $\frac{853}{70}$
11. 414
12. 81

### EJERCICIO 2

1. $57u^2$
2. $5u^2$
3. $\frac{32}{3}u^2$
4. $\frac{7}{2}u^2$
5. $\frac{10}{3}u^2$
6. $\frac{bh}{2}u^2$
7. $12u^2$
8. $2u^2$
9. $\frac{9}{4}u^2$
10. $242u^2$

## CAPÍTULO 2

### EJERCICIO 3

1. $\frac{x^7}{7}+C$
2. $x^5+C$
3. $\frac{bx^4}{4}+C$
4. $\frac{\sqrt{3}x^3}{3}+C$
5. $ax+C$
6. $\frac{3}{4}x+C$
7. $\frac{1}{3}x+C$
8. $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+C$
9. $4x\sqrt[4]{x}+C$
10. $-\frac{1}{2x^2}+C$
11. $-\frac{5}{3x^3}+C$
12. $4\ln x+C$
13. $\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}+C$
14. $9\sqrt[3]{x^2}+C$
15. $\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8}+C$
16. $3a\sqrt[3]{x}+C$
17. $\frac{5}{2}\ln x+C$
18. $\frac{2x\sqrt{bx}}{3}+C$
19. $\frac{15\sqrt[3]{x^2}}{2}-3x\sqrt[3]{x}+C$
20. $-\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{x}-6\ln x+C$
21. $\frac{3t\sqrt[3]{at}}{4}+C$
22. $\frac{2t\sqrt{6t}}{3}+C$
23. $\frac{4x^6}{3}-x^5-x^4-2x^3-x^2-3x+C$
24. $\frac{ax^4}{4}-\frac{bx^3}{3}-\frac{cx^2}{2}+dx+C$
25. $\frac{x^3}{3\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{3x^2}{2\sqrt{a}}-5\sqrt{bx}+C$
26. $\frac{x^4}{4}-2x^3-7x+C$
27. $5x^{\frac{3}{5}}-\frac{5x^{\frac{4}{5}}}{2}+C$
28. $6\sqrt[3]{x^2}-\frac{20\sqrt[4]{x^3}}{3}+C$
29. $\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{15y^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{8y^{\frac{5}{4}}}{5}-\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+C$
30. $\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{4}{3y^{\frac{3}{4}}}+C$
31. $\frac{3t^3\sqrt[3]{t}}{2}-\frac{9t^2\sqrt[3]{t}}{7}+\frac{3t\sqrt[3]{t}}{2}+C$
32. $\frac{3t\sqrt[3]{7t}}{4}+C$
33. $\frac{(3x+4)^7}{21}+C$
34. $\frac{(ax^2-b)^6}{12a}+C$
35. $\frac{(t^3-4)^3}{9}+C$
36. $-\frac{(a-by)^5}{5b}+C$
37. $\frac{t^5}{5}-4t^3+36t+C$
38. $\frac{x^4}{4}+\frac{8x^3}{3}+8x^2+C$
39. $\frac{x^6}{6}+\frac{3x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$
40. $\frac{2(m+ny)\sqrt{m+ny}}{3n}+C$
41. $\frac{2(5x-3)^{\frac{3}{2}}}{15}+C$
42. $\frac{1}{a}\sqrt{at^2+b}+C$

43. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{(9x-1)^2}+C$

44. $\frac{x^2}{2}-\frac{16x\sqrt{x}}{3}+16x+C$

45. $-\frac{1}{18(3x^2-4)^3}+C$

46. $-\frac{5}{3(3x-4)}+C$

47. $-\frac{2}{3(2x^2+5)^3}+C$

48. $\frac{2\left(\sqrt{x}-b\right)^3}{3}+C$

49. $\frac{1}{a}\ln(at+b)+C$

50. $\frac{1}{6}\ln|3x^2-4|+C$

51. $\ln|x+3|+C$

52. $\ln|x^2-3|+C$

53. $-\frac{1}{(x^2-3x+6)}+C$

54. $\frac{2(x^3-6x+3)^{\frac{3}{2}}}{9}+C$

55. $-\frac{1}{an(m-1)(ay^n+b)^{m-1}}+C\ \forall\, m\neq 1$

56. $-\frac{(1-e^{3x})^3}{9}+C$

57. $-\frac{(4-\ln|x+3|)^4}{4}+C$

58. $-\frac{(1-\text{sen}\,4x)^4}{16}+C$

59. $-\frac{2(3+\cot x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

60. $-\sqrt{1-\sec 2x}+C$

61. $-\frac{1}{a}\ln|1-\text{sen}\,ax|+C$

62. $\frac{4}{3}\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

63. $\frac{(2+\ln|\text{sen}\,x|)^2}{2}+C$

64. $-\frac{1}{2(1-\cos^2 x)^2}+C$

65. $\frac{1}{3b}\,\text{sen}^3\,bx+C$

66. $-\frac{\cot^2 mx}{2m}+C$

67. $-\frac{\cos^3 4x}{12}+C$

68. $\frac{2\sqrt{\text{sen}\,5x+4}}{5}+C$

69. $4x-\ln(x+2)^6+C$

70. $\frac{3x^2}{2}+3x+\ln|(x-1)^5|+C$

71. $-\frac{1}{\ln y}+C$

72. $\frac{1}{2}\ln|\ln 3x|+C$

73. $\frac{2(ax^{n+1}+b)^{\frac{3}{2}}}{3a(n+1)}+C$

74. $\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^3}+C$

75. $-\frac{1}{3}\csc 3x+C$

76. $-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{x+1}+4\ln(x+1)+C$

77. $\ln\left|\frac{(x+2)^3}{(x+5)^4}\right|+C$

78. $\ln\left|(2x-1)^{\frac{3}{2}}(3x-4)^{\frac{5}{3}}\right|+C$

79. $-3\sqrt[3]{\cos x}+C$

80. $\frac{2}{5}\,\text{sen}^5\,x+C$

81. $2\sqrt{1-\cot w}+C$

82. $-\frac{3}{2}\sqrt{2\cos^2 y-1}+C$

83. $2\sqrt{1-\cos\alpha}+C$

84. $\frac{4}{7}\tan^{\frac{7}{4}} x+C$

**EJERCICIO 4**

1. $\frac{1}{4}e^{4x}+C$
2. $16\,e^{\frac{x}{2}}+C$
3. $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
4. $\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x}}+C$
5. $\frac{1}{3}e^{3x}+C$
6. $-\frac{1}{4}e^{\cos 4x}+C$
7. $\frac{2}{3}e^{x^3}+C$
8. $\frac{b^{4x}}{4\ln b}+C$
9. $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$
10. $\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C$
11. $3\sqrt[3]{e^x}+C$
12. $\frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}}+C$
13. $-\frac{1}{5^{4x}\ln 625}+C$
14. $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}+C$
15. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{e^{4x}}+C$
16. $x^3-\frac{1}{3}e^{x^3}+C$
17. $e^{x^2-3x+1}+C$
18. $-\frac{5}{2\sqrt[5]{e^{2t}}}+C$
19. $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{\sec 2x}}+C$
20. $-\frac{1}{8e^{2t^4}}+C$
21. $\frac{4^x\cdot e^{2x}}{2+\ln 4}+C$
22. $2\left(e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{4}}\right)+C$
23. $\frac{1}{6}e^{6x}-\frac{4}{3}e^{3x}+4x+C$
24. $\frac{5^{x^2}}{\ln 25}+C$
25. $\frac{1}{4}(e^{4x}-e^{-4x})-2x+C$
26. $\frac{1}{3}e^{\tan 3x}+C$
27. $\frac{5^{x^3}}{3\ln 5}+C$
28. $\frac{10^{3x}}{3\ln 10}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$
29. $n\left(e^{\frac{x}{n}}-\frac{1}{\ln a}a^{\frac{x}{n}}\right)+C$
30. $\frac{1}{2}(e^{2x}+5e^{-2x})+C$
31. $-\frac{1}{ae^{ax}}-x+C$
32. $-e^{\cos^2 x}+C$
33. $\frac{1}{2}e^{\text{arc sen } 2x}+C$
34. $e^{\text{arc tan } x}+C$
35. $\frac{3^{4x}(3\cdot 3^{4x}+8\cdot 3^{2x}+6)}{24\ln 3}+C$

**EJERCICIO 5**

1. $-\frac{1}{5}\cos 5x+C$
2. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x+C$
3. $-4\cos\frac{x}{4}+C$
4. $\frac{1}{b}\ln|\sec bx|+C$
5. $a\tan\frac{x}{a}+C$
6. $-\frac{1}{a}\cot ax+C$
7. $\frac{1}{b}\tan bx+C$
8. $\sec x+C$
9. $-4\csc\frac{t}{4}+C$
10. $-\frac{1}{8}\cos 4x^2+C$
11. $\frac{5}{3}\operatorname{sen}\frac{x^3}{5}+C$
12. $-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$
13. $\frac{1}{a}\sec ax+C$
14. $\frac{3}{8}\tan 4x^2+C$
15. $-\frac{1}{3}\cot(3x-1)+C$
16. $\frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen}(ax-b)|+C$
17. $\frac{1}{a}\ln|\sec ax+\tan ax|+C$
18. $\frac{1}{8}\ln|\csc 4x^2-\cot 4x^2|+C$
19. $-2\sqrt{\csc x}+C$
20. $\frac{1}{b}(\tan b\theta-\cot b\theta)+C$
21. $\frac{2}{3}(\csc 3x-\cot 3x)-x+C$
22. $\frac{2}{5}(\tan 5x+\sec 5x)-x+C$
23. $\frac{1}{2}[\operatorname{sen}^2 x-2\cos x]+C$
24. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2-x^2)+C$
25. $\ln|\csc x-\cot x|+\cos x+C$
26. $\operatorname{sen} x-\cos x+C$
27. $\ln|\cos x-1|+C$
28. $\cot\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$
29. $-\cot w+C$
30. $\frac{1}{2}(2\tan x-x)+C$
31. $-\frac{1}{3}\cot^3 x+C$
32. $\frac{2\sqrt{\operatorname{sen} x}(\cos^2 x+4)}{5}+C$
33. $\frac{1}{4}\ln|1-4\cot w|+C$
34. $\frac{-[x\cos x-2(\operatorname{sen} x-1)]}{\cos x}+C$
35. $-2\ln\left|\cot\left(\frac{y}{2}\right)\right|+C$
36. $\ln\sqrt{\sec 2\alpha}+C$
37. $2\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta+1}+C$
38. $-\frac{1}{2}\cos(e^{2x})+C$
39. $-\frac{1}{2}\cos(\ln x^2)+C$
40. $\frac{2}{3}\ln\left|\sec\sqrt{x}+\tan\sqrt{x}\right|+C$

**EJERCICIO 6**

1. $\frac{1}{9}\text{arc tan}\left(\frac{x}{9}\right) + C$
2. $\frac{1}{b^2}\text{arc tan}\left(\frac{y}{b}\right) + C$
3. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{y-4}{y+4}\right| + C$
4. $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right| + C$
5. $\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-4}{\sqrt{2}x+4}\right| + C$
6. $\frac{1}{72}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$
7. $\frac{1}{3}\text{arc sen}\frac{3x}{5} + C$
8. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-7}\right| + C$
9. $\frac{1}{3}\text{arc sec}\frac{2x}{3} + C$
10. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$
11. $\frac{4}{b^2m}\text{arc tan}\left(\frac{b^2x}{m}\right) + C$
12. $\frac{1}{2b^2}\ln\left|\frac{v^2-b^2}{v^2+b^2}\right| + C$
13. $\frac{1}{2}\text{arc tan}\left(\frac{\ln x}{2}\right) + C$
14. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right| + C$
15. $\frac{1}{2}\text{arc sen}\left(\frac{x^2}{3}\right) + C$
16. $\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ arc sen}(x) + C$
17. $2\ln\left(\sqrt{e^x}+\sqrt{e^x+4}\right) + C$
18. $\frac{1}{2}\text{arc sen}\left(\frac{2\sqrt{5}y}{5}\right) + C$
19. $\frac{1}{10a^2}\ln\left|\frac{5+ay}{5-ay}\right| + C$
20. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}t+\sqrt{3t^2+5}\right| + C$
21. $\frac{\sqrt{10}}{20}\ln\left|\frac{\sqrt{10}y+5}{\sqrt{10}y-5}\right| + C$
22. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+4}\right| + C$
23. $\frac{1}{b^2}\text{arc tan}\frac{x}{b^2} + C$
24. $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc sen}\frac{\sqrt{2}y}{2} + C$
25. $\frac{e^{2x}}{4}\sqrt{16-e^{4x}} + 4\text{ arc sen}\left(\frac{e^{2x}}{4}\right) + C$
26. $\frac{x}{2}\sqrt{1-2x^2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arc sen}\sqrt{2}x + C$
27. $\sqrt{5}\text{ arc sen}\left(\frac{\sqrt{10}\,m}{20}\right) + C$
28. $\left(\frac{2x+1}{4}\right)\sqrt{4x^2+4x+1-a^2} - \frac{a^2}{4}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+1-a^2}\right) + C$
29. $\left(\frac{\sqrt{7}x^m}{2m}\right)\sqrt{49x^{2m}+4} + \left(\frac{2\sqrt{7}}{7m}\right)\ln\left(7x^m+\sqrt{49x^{2m}+4}\right) + C$
30. $\frac{\sqrt{14}}{14}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{14}\,t}{7}\right) + C$
31. $\left(\frac{3}{5}\right)\sqrt{5x^2-16} + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\ln\left(\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2-16}\right) + C$
32. $-\frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+\cos 2t}{\sqrt{5}-\cos 2t}\right) + C$
33. $-\text{arc tan}(\cos x) + C$
34. $\frac{t\ln(3t)}{2}\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4} + 2\ln\left(t\ln(3t)+\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\right) + C$

**EJERCICIO 7**

1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right| + C$
2. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x}{x+8}\right| + C$
3. $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$
4. $\ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right| + C$
5. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+7}\right| + C$
6. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x+1}{x+4}\right| + C$
7. $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{ax+3}{ax+5}\right| + C$
8. $3\ln\left|\frac{e^x+4}{e^x+5}\right| + C$
9. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{2w-3}{w-5}\right| + C$
10. $\frac{1}{11}\ln\left|\frac{2\alpha-1}{\alpha-5}\right| + C$
11. $\frac{\sqrt{7}}{7}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{7}(x-1)}{7}\right) + C$
12. $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+3}\right| + C$
13. $\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\text{sen } x-3-\sqrt{3}}{\text{sen } x-3+\sqrt{3}}\right| + C$
14. $\frac{\sqrt{5}}{5}\text{arc sen}\left(\frac{5w-11}{9}\right) + C$
15. $\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right| + C$
16. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|3z+2+\sqrt{9z^2+12z}\right| + C$
17. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|4x+1+2\sqrt{4x^2+2x}\right| + C$
18. $\ln\left|2\ln x+7+2\sqrt{\ln^2 x+7\ln x+6}\right| + C$
19. $\ln\left|2w-9+2\sqrt{w^2-9w+5}\right| + C$
20. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-3} - \frac{7}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}\right| + C$
21. $\frac{41\sqrt{2}}{32}\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{41}(4x+3)}{41}\right) + \left(\frac{4x+3}{8}\right)\sqrt{4-3x-2x^2} + C$

22. $\left(\frac{2x-3}{4}\right)\sqrt{3x-x^2}+\frac{9}{8}\text{arc sen}\left(\frac{2x-3}{3}\right)+C$

23. $\frac{(3x-2)\sqrt{3x^2-4x}}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln\left|3x-2+\sqrt{9x^2-12x}\right|+C$

24. $\left(\frac{2x^2-1}{8}\right)\sqrt{x^4-x^2-20}-\frac{81}{16}\ln\left|2x^2-1+2\sqrt{x^4-x^2-20}\right|+C$

25. $\left(\frac{2x+5}{4}\right)\sqrt{24-5x-x^2}+\frac{121}{8}\text{arc sen}\left(\frac{2x+5}{11}\right)+C$

26. $\left(\frac{2x+3}{8}\right)\sqrt{x^2+3x+8}+\frac{23}{16}\ln\left|2x+3+2\sqrt{x^2+3x+8}\right|+C$

27. $2\ln\left|\sqrt{x}-2+\sqrt{x-4\sqrt{x}-21}\right|+C$

28. $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{e^{nx}-1}{2}\right)\sqrt{3+2e^{nx}-e^{2nx}}+2\text{ arc sen}\left(\frac{e^{nx}-1}{2}\right)\right]+C$

29. $\ln\left|2y+1+2\sqrt{y^2+y+1}\right|+C$

30. $\left(\frac{3x+2}{6}\right)\sqrt{3x^2+4x+1}-\frac{\sqrt{3}}{18}\ln\left|\sqrt{3\left(3x^2+4x+1\right)}+3x+2\right|+C$

31. $\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arc sen}\left(\frac{4w-5}{5}\right)+C$

32. $\frac{2\sqrt{a}}{a}\ln\left|2\sqrt{ax}+3+2\sqrt{ax+3\sqrt{ax}+2}\right|+C$

33. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}(6y+13)+6\sqrt{3y^2+13y-10}\right|+C$

34. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^{11}}{(3x+1)^7}\right|+C$

35. $-\frac{1}{6}\ln|(3-x)^5(3+x)^{13}|+C$

36. $-\frac{1}{9}\ln|(3x+4)^5(3x-4)^2|+C$

37. $\ln\left|\frac{e^x(x-\sqrt{3}-2)^{\frac{6\sqrt{3}+7}{2}}}{(x+\sqrt{3}-2)^{\frac{6\sqrt{3}-7}{2}}}\right|+C$

38. $\frac{\sqrt{73}}{438}\ln\left|(6x+5+\sqrt{73})^{\sqrt{73}+17}(6x+5-\sqrt{73})^{\sqrt{73}-17}\right|+C$

39. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{(x-6)^{11}}{(x-1)^6}\right|+C$

40. $\frac{1}{3}\ln\left|x^2+9x-5\right|+\frac{4\sqrt{101}}{101}\ln\left|\frac{2x+9-\sqrt{101}}{2x+9+\sqrt{101}}\right|+C$

41. $3\sqrt{x^2-4}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$

42. $-\frac{11}{3}\text{arc sen}\frac{3x}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{4-9x^2}+C$

43. $\frac{5}{4}\ln\left|4x+\sqrt{16x^2+25}\right|-\frac{1}{8}\sqrt{16x^2+25}+C$

44. $\frac{3}{2}\sqrt{7-2x^2}+2\sqrt{2}\text{ arc sen}\left(\frac{\sqrt{14}x}{7}\right)+C$

45. $\frac{\sqrt{129}}{2580}\ln\left|\frac{(10x+\sqrt{129}-7)^{67-\sqrt{129}}}{(10x-\sqrt{129-7})^{67+\sqrt{129}}}\right|+C$

46. $5\sqrt{x^2+3x-5}-\frac{37}{2}\ln\left|2x+3+2\sqrt{x^2+3x-5}\right|+C$

47. $\frac{13\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{4x+5+\sqrt{8\left(2x^2+5x-1\right)}}{e^{\frac{2\sqrt{4x^2+10x-2}}{13}}}\right|+C$

48. $-5\sqrt{4-2x-x^2}-4\text{ arc sen}\frac{\sqrt{5}(x+1)}{5}+C$

49. $\frac{7}{2}\ln\left|\frac{e^{\frac{(4x^2-2)\sqrt{x^2-3x+4}}{21}}}{(2x-3+\sqrt{x^2-3x+4})^{-1}}\right|+C$

50. $\frac{175}{16}\ln\left|\frac{e^{\frac{(16x^2+84x-2)\sqrt{x^2+7x+6}}{175}}}{(2x+7+2\sqrt{x^2+7x+6})^{-1}}\right|+C$

## CAPÍTULO 3

### EJERCICIO 8

1. $\frac{1}{16}\text{sen}^4 4x+C$

2. $-\frac{1}{18}\cos^6 3x+C$

3. $\frac{1}{3a}\cos^3 ax-\frac{1}{a}\cos ax+C$

4. $\frac{1}{15}\cos^3 5x-\frac{1}{5}\cos 5x+C$

5. $\frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{4}-4\cos\frac{x}{4}+C$

6. $\text{sen } x-\frac{\text{sen}^3 x}{3}+C$

7. $\frac{1}{a}\text{sen } ax-\frac{\text{sen}^3 ax}{3a}+C$

8. $\frac{1}{6}\text{sen } 6x - \frac{\text{sen}^3 6x}{18} + C$

9. $3\text{ sen }\frac{x}{3} - \text{sen}^3\frac{x}{3} + C$

10. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

11. $-\frac{1}{a}\cos ax + \frac{2}{3a}\cos^3 ax - \frac{1}{5a}\cos^5 ax + C$

12. $-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{6}\cos^3 4x - \frac{1}{20}\cos^5 4x + C$

13. $-2\cos\frac{x}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{2} - \frac{2}{5}\cos^5\frac{x}{2} + C$

14. $\text{sen } y - \frac{2}{3}\text{sen}^3 y + \frac{1}{5}\text{sen}^5 y + C$

15. $\frac{1}{b}\text{sen } bx - \frac{2}{3b}\text{sen}^3 bx + \frac{1}{5b}\text{sen}^5 bx + C$

16. $3\text{ sen}\frac{x}{3} - 2\text{ sen}^3\frac{x}{3} + \frac{3}{5}\text{sen}^5\frac{x}{3} + C$

17. $\frac{1}{7}\cos^7\theta - \frac{3}{5}\cos^5\theta + \cos^3\theta - \cos\theta + C$

18. $\frac{1}{21}\cos^7 3x - \frac{1}{5}\cos^5 3x + \frac{1}{3}\cos^3 3x - \frac{1}{3}\cos 3x + C$

19. $-\frac{1}{7}\text{sen}^7 y + \frac{3}{5}\text{sen}^5 y - \text{sen}^3 y + \text{sen } y + C$

20. $-\frac{1}{28}\text{sen}^7 4x + \frac{3}{20}\text{sen}^5 4x - \frac{1}{4}\text{sen}^3 4x + \frac{1}{4}\text{sen } 4x + C$

21. $-\frac{1}{24}\cos^6 4x + \frac{1}{32}\cos^8 4x + C$

22. $\frac{1}{6}\text{sen}^6 x - \frac{1}{8}\text{sen}^8 x + C$

23. $\sqrt{\text{sen } 2x}\left(1 - \frac{2\text{sen}^2 2x}{5} + \frac{\text{sen}^4 2x}{9}\right) + C$

**Ejercicio 9**

1. $\frac{1}{10}\tan^2 5x + \frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

2. $\tan^2\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$

3. $-\frac{1}{8}\cot^2 4x - \frac{1}{4}\ln|\text{sen } 4x| + C$

4. $-\frac{3}{2}\cot^2\frac{x}{3} - 3\ln\left|\text{sen}\frac{x}{3}\right| + C$

5. $-\frac{1}{6}\left(\frac{\cot^4 6x}{4} - \frac{\cot^2 6x}{2} - \ln|\text{sen } 6x|\right) + C$

6. $-4\left(\frac{1}{4}\cot^4\frac{y}{4} - \frac{1}{2}\cot^2\frac{y}{4} - \ln\left|\text{sen}\frac{y}{4}\right|\right) + C$

7. $\frac{1}{20}\tan^4 5x - \frac{1}{10}\tan^2 5x + \frac{1}{5}\ln|\sec 5x| + C$

8. $-\frac{1}{15}\cot^3 5x + \frac{1}{5}\cot 5x + x + C$

9. $\frac{1}{18}\tan^3 6x - \frac{1}{6}\tan 6x + x + C$

10. $\frac{1}{6}\tan^2 3x + \frac{1}{6}\cot^2 3x + \frac{4}{3}\ln|\text{sen } 3x| + \frac{4}{3}\ln|\cos 3x| + C =$

$\frac{1}{6}\tan^2 3x + \frac{1}{6}\cot^2 3x + \frac{4}{3}\ln|\text{sen } 6x| + C$

11. $\frac{1}{6}\tan^3 2y + C$

12. $-\frac{1}{9}\cot^3 3y + C$

**Ejercicio 10**

1. $\frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\tan^3 3x + C$

2. $\frac{1}{a}\tan ax + \frac{1}{3a}\tan^3 ax + C$

3. $6\tan\frac{x}{6} + 2\tan^3\frac{x}{6} + C$

4. $-\frac{1}{9}\cot 9x - \frac{1}{27}\cot^3 9x + C$

5. $-\frac{1}{b}\cot bx - \frac{1}{3b}\cot^3 bx + C$

6. $-7\cot\frac{x}{7} - \frac{7}{3}\cot^3\frac{x}{7} + C$

7. $\frac{3}{2}\tan\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}\tan^3\frac{2x}{3} + C$

8. $-\frac{4}{5}\cot\frac{5x}{4} - \frac{4}{15}\cot^3\frac{5x}{4} + C$

9. $\frac{1}{24}\tan^3 8x + \frac{1}{40}\tan^5 8x + C$

10. $\frac{1}{3a}\tan^3 ax + \frac{1}{5a}\tan^5 ax + C$

11. $\frac{7}{3}\tan^3\frac{x}{7} + \frac{7}{5}\tan^5\frac{x}{7} + C$

12. $\frac{1}{5}\tan^3\frac{5x}{3} + \frac{3}{25}\tan^5\frac{5x}{3} + C$

13. $\frac{1}{25}\sec^5 5x-\frac{1}{15}\sec^3 5x+C$

14. $\frac{1}{5b}\sec^5 bx-\frac{1}{3b}\sec^3 bx+C$

15. $\frac{6}{5}\sec^5\frac{x}{6}-2\sec^3\frac{x}{6}+C$

16. $\frac{7}{20}\sec^5\frac{4x}{7}-\frac{7}{12}\sec^3\frac{4x}{7}+C$

17. $-\frac{1}{5b}\csc^5 bx+\frac{1}{3b}\csc^3 bx+C$

18. $-\frac{1}{20}\csc^5 4x+\frac{1}{12}\csc^3 4x+C$

19. $2\tan\frac{x}{2}\left(1+\frac{2}{3}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{5}\tan^4\frac{x}{2}\right)+C$

20. $-\frac{2}{3}\left[\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{1}{3}\cot^3\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+C$

21. $\frac{2}{3}\left(\tan x^3+\frac{1}{3}\tan^3 x^3\right)+C$

22. $\tan x\left(1+\frac{2}{3}\tan^2 x+\frac{1}{5}\tan^4 x\right)+C$

23. $\tan\alpha-\frac{1}{5}\tan^5\alpha+C$

24. $\frac{1}{2}\tan 2t+\frac{1}{6}\tan^3 2t+C$

25. $-\frac{1}{3}\cot(3x-1)-\frac{1}{9}\cot^3(3x-1)+C$

26. $\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{2}{3}\sec^3 x+\sec x+C$

27. $\frac{1}{6}\sec^3 2x+C$

28. $-\frac{1}{7}\csc^7 x+\frac{2}{5}\csc^5 x-\frac{1}{3}\csc^3 x+C$

29. $\frac{1}{21}\sec^7 3x-\frac{2}{15}\sec^5 3x+\frac{1}{9}\sec^3 3x+C$

30. $2\sqrt{\tan x}\left(\frac{1}{9}\tan^4 x+\frac{2}{5}\tan^2 x+1\right)+C$

31. $\frac{1}{3}\tan 3t+2\cot\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{9}\tan^3 3t+\frac{2}{3}\cot^3\left(\frac{t}{2}\right)+C$

32. $-\frac{1}{2}\cot(2x-1)-\frac{1}{6}\cot^3(2x-1)+C$

33. $-\cot\left(\frac{\theta}{5}\right)\cdot\left[5+\frac{10}{3}\cot^2\left(\frac{\theta}{5}\right)+\cot^4\left(\frac{\theta}{5}\right)\right]+C$

34. $-\cot x\left(\frac{1}{7}\cot^6 x+\frac{3}{5}\cot^4 x+\cot^2 x+1\right)+C$

35. $\frac{1}{2}\tan x^2-\frac{1}{6}\tan^3 x^2+C$

**EJERCICIO 11**

1. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x+C$

2. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax+C$

3. $\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{5}x+C$

4. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{2}x+C$

5. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x+C$

6. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4b}\operatorname{sen} 2bx+C$

7. $\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{7}x+C$

8. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x+C$

9. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen} 16x+\frac{1}{256}\operatorname{sen} 32x+C$

10. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax+\frac{1}{32a}\operatorname{sen} 4ax+C$

11. $\frac{3}{8}x-\frac{7}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{7}x+\frac{7}{32}\operatorname{sen}\frac{4}{7}x+C$

12. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{2}x+\frac{1}{24}\operatorname{sen} 3x+C$

13. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{36}\operatorname{sen} 18x+\frac{1}{288}\operatorname{sen} 36x+C$

14. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4b}\operatorname{sen} 2bx+\frac{1}{32b}\operatorname{sen} 4bx+C$

15. $\frac{3}{8}x+\frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{3}x+\frac{3}{32}\operatorname{sen}\frac{4}{3}x+C$

16. $\frac{3}{8}x+\frac{3}{20}\operatorname{sen}\frac{10}{3}x+\frac{3}{160}\operatorname{sen}\frac{20}{3}x+C$

17. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x+C$

18. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x+\frac{3}{256}\operatorname{sen} 16x+\frac{1}{192}\operatorname{sen}^3 8x+C$

19. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4a}\operatorname{sen}2ax+\frac{3}{64a}\operatorname{sen}4ax+\frac{1}{48a}\operatorname{sen}^3 2ax+C$

20. $\frac{5}{16}x-\operatorname{sen}\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}\operatorname{sen}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}x+C$

21. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{10}\operatorname{sen}5x+\frac{3}{160}\operatorname{sen}10x+\frac{1}{120}\operatorname{sen}^3 5x+C$

22. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{3}{64}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x+C$

23. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}6x+\frac{1}{64}\operatorname{sen}12x-\frac{1}{144}\operatorname{sen}^3 6x+C$

24. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4b}\operatorname{sen}2bx+\frac{3}{64b}\operatorname{sen}4bx-\frac{1}{48b}\operatorname{sen}^3 2bx+C$

25. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{3}{32}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x+C$

26. $\frac{5}{16}x+\frac{5}{8}\operatorname{sen}\frac{4}{5}x+\frac{15}{128}\operatorname{sen}\frac{8}{5}x-\frac{5}{96}\operatorname{sen}^3\frac{4}{5}x+C$

27. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{3}{64}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x+C$

28. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{12}\operatorname{sen}6x+\frac{1}{96}\operatorname{sen}12x+C$

29. $\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2y+C=\frac{3}{8}y-\frac{1}{2}\operatorname{sen}y+\frac{1}{16}\operatorname{sen}2y+C$

30. $\frac{1}{2}(x-\operatorname{sen}x\cos x)+C$

31. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}6x+\frac{1}{96}\operatorname{sen}12x+C$

32. $x+\operatorname{sen}x+C$

33. $\frac{19}{2}\alpha-6\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\alpha+C$

34. $\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}\operatorname{sen}2x-4\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

35. $\frac{x}{8}-\frac{b}{32}\operatorname{sen}\left(\frac{4x}{b}\right)+C$

36. $\frac{\theta}{2}-\frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta}{3}\right)+4\cos^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\theta}{3}\right)+3\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)+C$

37. $\frac{35}{128}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{7}{128}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 2x+\frac{1}{1024}\operatorname{sen}8x+C$

### EJERCICIO 12

1. $\frac{1}{10}[5\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}5x]+C=\frac{\operatorname{sen}x}{2}-\frac{\operatorname{sen}5x}{10}+C$

2. $-\frac{1}{8}[\cos 4x-2\cos 2x]+C=-\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{4}+C$

3. $\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{12}\operatorname{sen}6x+C$

4. $\frac{1}{20}\operatorname{sen}10y+\frac{1}{8}\operatorname{sen}4y+C$

5. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$

6. $-\frac{3}{7}\cos\left(\frac{7\alpha}{6}\right)-3\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)+C$

7. $\frac{10}{17}\operatorname{sen}\left(\frac{17}{20}w\right)+\frac{10}{7}\operatorname{sen}\left(\frac{7}{20}w\right)+C$

8. $\frac{x\cos 2b}{2}-\frac{\operatorname{sen}2mx}{4m}+C$

9. $\frac{x\cos 8}{2}-\frac{\operatorname{sen}6x}{12}+C$

10. $\frac{1}{24}\cos 6w-\frac{1}{16}\cos 4w-\frac{1}{8}\cos 2w+C$

## CAPÍTULO 4

### EJERCICIO 13

1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+36}-6}{x}\right|+C$

2. $\frac{w}{5\sqrt{w^2+5}}+C$

3. $-\frac{y}{\sqrt{y^2+3}}+\ln\left(\sqrt{y^2+3}+y\right)+C$

4. $8\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}+C$

5. $-\frac{\sqrt{y^2+25}}{25y}+C$

6. $-\frac{\sqrt{(36-25x^2)^5}}{180x^5}+C$

7. $6\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)-\frac{(\alpha+6)\sqrt{4\alpha-\alpha^2}}{2}+C$

8. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{25x^2+16}-4}{5x}\right|+C$

9. $\frac{(x^2+32)\sqrt{x^2-16}}{3}+C$

10. $-\frac{\sqrt{5-\theta^2}}{\theta}-\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{5}\,\theta}{5}\right)+C$

11. $\sqrt{x^2+16}+4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}\right|+C$

12. $-\frac{\sqrt{7-x^2}}{7x}+C$

13. $\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}-\text{arc sen}\frac{y}{3}+C$

14. $\frac{1}{5}(3-y^2)^{\frac{5}{2}}-(3-y^2)^{\frac{3}{2}}+C$

15. $\frac{27}{2}\text{arc sen}\frac{x-3}{3}-\frac{(x+9)\sqrt{6x-x^2}}{2}+C$

16. $\frac{(w^2-14)\sqrt{w^2+7}}{3}+C$

17. $\frac{27}{8}\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{3}\right)-\left(\frac{2x^3+9x}{8}\right)\sqrt{3-x^2}+C$

18. $\frac{\sqrt{11}}{242}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{11x^2-121}}{11}\right)+\frac{\sqrt{x^2-11}}{22x^2}+C$

19. $\frac{(3x^2-8)(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{15}+C$

20. $2\text{ arc sen}\left[\frac{\sqrt{2}(\ln w-2)}{4}\right]-\sqrt{4+4\ln w-\ln^2 w}+C$

**EJERCICIO 14**

1. $\frac{1}{3}e^{3x}\left(x-\frac{1}{3}\right)+C$

2. $\frac{1}{a}e^{ax}\left(x-\frac{1}{a}\right)+C$

3. $3e^{\frac{x}{3}}(x-3)+C$

4. $-\frac{x}{5}\cos 5x+\frac{1}{25}\text{sen }5x+C$

5. $-\frac{x}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}\text{sen }ax+C$

6. $-4x\cos\frac{x}{4}+16\text{ sen}\frac{x}{4}+C$

7. $\frac{x}{4}\text{sen }4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C$

8. $\frac{x}{b}\text{sen }bx+\frac{1}{b^2}\cos bx+C$

9. $3x\text{ sen}\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+C$

10. $\frac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\frac{1}{3}\right)+C$

11. $x^2(\ln x^2-1)+C$

12. $\frac{x^6}{6}\left(\ln|x|-\frac{1}{6}\right)+C$

13. $\frac{x^5}{5}\left(\ln|5x|-\frac{1}{5}\right)+C$

14. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$

15. $e^x(x^2-2x+2)+C$

16. $\frac{e^{3y}}{3}\left(y^2-\frac{2}{3}y+\frac{2}{9}\right)+C$

17. $\frac{e^{4x}}{4}\left(x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\right)+C$

18. $-\frac{x^2}{3}\cos 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+\frac{2}{9}x\text{ sen }3x+C$

19. $-\frac{x^2}{b}\cos bx+\frac{2}{b^3}\cos bx+\frac{2}{b^2}x\text{ sen }bx+C$

20. $2x^3\text{sen}\frac{x}{2}+12x^2\cos\frac{x}{2}-96\cos\frac{x}{2}-48x\text{ sen}\frac{x}{2}+C$

21. $-\frac{1}{a}x\cot ax+\frac{1}{a^2}\ln|\text{sen }ax|+C$

22. $\frac{1}{m}y\tan my-\frac{1}{m^2}\ln|\sec my|+C$

23. $x\text{ arc cos }ax-\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}+C$

24. $x\text{ arc sen }bx+\frac{1}{b}\sqrt{1-b^2x^2}+C$

25. $x\text{ arc tan }ax-\frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)+C$

26. $x\text{ arc sen }mx-\frac{1}{m}\ln\left|mx+\sqrt{m^2x^2-1}\right|+C$

27. $x\text{ arc cot}\frac{x}{n}+\frac{n}{2}\ln\left|n^2+x^2\right|+C$

28. $\frac{1}{4}e^{2\theta}(\text{sen }2\theta-\cos 2\theta)+C$

29. $\frac{1}{25}e^{3x}(4\text{ sen }4x+3\cos 4x)+C$

30. $\frac{2(5t-6)\sqrt{5t+3}}{75}+C$

31. $-\frac{(3ax+b)}{6a^2(ax+b)^3}+C$

32. $-\frac{24x^2+8x+1}{96(2x+1)^4}+C$

33. $\ln y[\ln(\ln|y|)-1]+C$

34. $-\frac{3}{8}(2x^2-2x+1)e^{2x}+\frac{1}{2}x^3e^{2x}+C$

35. $2\sqrt{x}\,\text{arc cos}\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} + C$

36. $\frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\text{sen } x + C$

37. $y(\text{arc cos } y)^2 - 2(\text{arc cos } y)\sqrt{1-y^2} - 2y + C$

38. $-\frac{\text{arc cos } x}{x} - \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$

39. $-\frac{1}{2}w\sqrt{16-w^2} + 8\,\text{arc sen}\left(\frac{w}{4}\right) + C$

40. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x\cos 2(\ln x) - \frac{1}{5}x\,\text{sen } 2(\ln x) + C =$

$\frac{2}{5}x\cos(\ln x^2) + x\,\text{sen}^2(\ln|x|) - \frac{1}{5}x\,\text{sen}(\ln x^2) + C$

**EJERCICIO 15**

1. $\ln\frac{x^2(x+2)}{(x+1)^3} + C$

2. $\ln\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{x} + C$

3. $\ln\frac{(x-3)^4(x-2)^2}{x^5} + C$

4. $\ln\frac{(x-2)^3}{x^3(x+2)^2} + C$

5. $\ln\frac{x(x+3)}{(x-3)^2} + C$

6. $\ln x^2(x-1)(x+2)^4 + C$

7. $\ln x^5(2x-1)^2(x-3) + C$

8. $\ln\frac{(2x+3)^{\frac{5}{2}}}{(x+2)^3} - \frac{2}{x+2} + C$

9. $\ln(x-2)^2 - \frac{3}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2} + C$

10. $\ln(x-3)^2 - \frac{2}{(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + C$

11. $\ln\frac{(x+1)^2}{x} - \frac{1}{x+1} + C$

12. $\frac{1}{m-n}\ln\left|\frac{y-m}{y-n}\right| + C$

13. $w - 5\ln\left|\frac{w-4}{w-5}\right| + C$

14. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(y-3)(y-1)}{(y-2)^2}\right| + C$

15. $\frac{4}{x-3} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| + C$

16. $3\ln\left|\frac{\sqrt{w^2-1}}{w}\right| + C$

17. $\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)^6(2x+1)^5\right| + C$

18. $\frac{1}{4}\ln[(w-6)^3(w+6)] - \frac{3}{w-6} + C$

19. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(4x-1)^3}{3x-1}\right| + C$

20. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{1}{(x+4)^3(3x+2)^{\frac{1}{3}}}\right| - \frac{2}{x+4} + C$

21. $-5\ln\left|\frac{(x-3)^2}{(x-5)^3}\right| + C$

22. $\frac{x^3}{6} + \frac{27}{16}x^2 + \frac{211}{32}x + \frac{595}{128}\ln|4x-1| + C$

23. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x^2}{16-x^2}\right| + C$

24. $\frac{1}{30}\ln\left[\frac{x^{25}(2-x)^9}{(x+3)^{34}}\right] + C$

25. $\frac{1}{1-m} + \ln|1-m| + C$

26. $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{y-5}{y+5}\right| - \frac{1}{2(y+5)} + C$

27. $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right| - \frac{2}{3(x+6)} + C$

28. $\frac{1}{8}\ln|2x-1| - \frac{8x+1}{16(2x-1)^2} + C$

29. $\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{60x^2 - 105x + 49}{6(x-1)^3} + 10\ln|x-1| + C$

30. $\ln\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2x^2-18} + C$

31. $\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{7}{8(x-2)} + \frac{3}{16}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\right] + C$

**EJERCICIO 16**

1. $\ln\left|\frac{m+1}{m}\right| - \frac{1}{m} + C$

2. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{m^2}{m^2+1}\right| + C$

3. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^4}{(x^2-6)^{11}}\right| + C$

4. $2x + \frac{1}{3}\text{arc tan}\left(\frac{x}{3}\right) + \ln\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\right) - \frac{1}{2\left(x^2+9\right)} + C$

5. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| - \frac{1}{2}\text{arc tan}\left(\frac{y}{2}\right) + C$

6. $\frac{x^2}{2} + x - 4\ln\left|x^2+9\right| - \frac{8}{3}\text{arc tan}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

7. $2\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + 2\,\text{arc tan}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

8. $\frac{1}{2}\ln\left|\,y^2+1\,\right| - \frac{2}{y^2+1} + C$

9. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-2)^6(x+2)^2(x+1)^3}{(x-1)^5}\right| + C$

10. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}\right| - \frac{\sqrt{3}}{12}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}\right) + C$

11. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+y^2}{1-y^2}\right| - \frac{y^2}{2} + C$

12. $2\ln|x| + \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right) + C$

13. $\ln\left|(x^2+1)(x-1)^3\right| - \frac{1+2x}{2(x^2+1)} + C$

14. $\frac{9\sqrt{2}}{16}\ln\left(\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{3x+1}{x^2+2x-1}\right) + C$

15. $\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x-4)} + C$

16. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+4}\right| + \frac{5\sqrt{3}}{144}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}\right) + \frac{x+4}{24(x^2+2x+4)} + C$

17. $\frac{x-8}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\text{arc tan}\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\,\sqrt{x^2+4}\,(x+1)^3\right| + C$

18. $\frac{1}{2}\ln\left|x^4(x^2+5)\right| + \frac{\sqrt{5}}{5}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{5}\,x}{5}\right) + \frac{3}{2(x^2+5)} + C$

19. $-\frac{(3x^2+10)}{50x(x^2+5)} + \frac{3\sqrt{5}}{250}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{5}\,x}{5}\right) + C$

20. No se incluye solución por ser demostración.

**EJERCICIO 17**

1. $\frac{9}{2}\left[x^{\frac{2}{3}} - \ln\left|x^{\frac{2}{3}} + 1\right|\right] + C$

2. $\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - \frac{5}{3}\ln\left|x^{\frac{3}{5}} + 1\right| + C$

3. $\frac{(3x+1)^{\frac{5}{3}}}{15} - \frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{6} + C$

4. $\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{1}{5}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right) + 1\right] + C$

5. $6\left(x^{\frac{1}{6}} - \text{arc tan}\,x^{\frac{1}{6}}\right) + C$

6. $x^{\frac{5}{6}}\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+4} - 5x^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 6\right)\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+4} - 120\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + \sqrt{x^{\frac{1}{3}}+4}\right| + C$

7. $2\sqrt{x} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} - 1\right| + C$

8. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 18x^{\frac{1}{6}} + \ln\left|\frac{ce^{\frac{66\sqrt{7}}{7}\text{arc tan}\frac{2x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{7}}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} + 2\right)^3}\right| + C$

9. $2x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}} + 4\right) + 14\ln\left|x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} - 3\right| + 13\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{4}} - 3}{x^{\frac{1}{4}} + 1}\right| + C$

10. $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{10}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{1}{6}} + \frac{3\sqrt{2}}{16}\text{arc tan}\sqrt{2}x^{\frac{1}{6}} + C$

11. $4\sqrt{x} - 2\sqrt{5}\,\text{arc tan}\frac{\sqrt{5}\sqrt{x}}{5} + C$

12. $2(x-3)^{\frac{1}{2}} - 4(x-3)^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|(x-3)^{\frac{1}{4}} + 1\right| + C$

13. $2\sqrt{t+2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{t+2}+\sqrt{2}}\right| + C$

14 a 15. No se incluye solución por ser demostraciones.

**EJERCICIO 18**

1. $-\frac{4+3y^2}{3\sqrt{(2+y^2)^3}} + C$

2. $-\frac{1}{375}(15x^2+14)(7-5x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

3. $\frac{4}{9}\left[\frac{x^3+36}{\sqrt[4]{90+x^3}}\right] + C$

4. $\frac{3}{1280}(20x^2-9)(3+4x^2)^{\frac{5}{3}}+C$

5. $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|+C$

6. $2\ln\left|\left(\frac{\sqrt{4+3x^4}-2}{\sqrt{4+3x^4}+2}\right)e^{\frac{\sqrt{4+3x^4}(16+3x^4)}{12}}\right|+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^5+16}-2}{\sqrt[4]{x^5+16}+2}\right|+\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt[4]{x^5+16}}{2}\right)\right]+C$

8. $-\frac{(4-x^4)^{\frac{1}{4}}}{4x}+C$

9. $(3+x)^{\frac{8}{3}}\left[\frac{3}{14}(3+x)^2-\frac{18}{11}(3+x)+\frac{27}{8}\right]+C$

### EJERCICIO 19

1. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{\theta}{2}}{3-\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

3. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+8}\right|+C$

4. $\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1}\right|+C$

5. $-\frac{2\left[3\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+3\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\right]}{\left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+1\right]^3}+C$

6. $\ln\left|\frac{1}{1-\cot\frac{w}{2}}\right|+C$

7. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}+1}{1-2\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}}\right|+\frac{\theta}{2}+C$

8. $\frac{\sqrt{10}}{10}\ln\left|\frac{3-\sqrt{10}+\tan\frac{\theta}{2}}{3+\sqrt{10}+\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left|1+2\tan\theta\right|+C$

10. $\frac{8}{15}\sqrt{15}\,\text{arc tan}\left[\frac{\sqrt{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3}\right]-\theta+C$

11. $\frac{2\sqrt{11}}{11}\text{arc tan}\left[\frac{\sqrt{11}\left(2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)-3\right)}{11}\right]+C$

12. $\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{5}\tan\frac{x}{2}}{5}\right)+C$

13. $\ln\left|\left[\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\cdot\left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sqrt{2}-1\right]\cdot\left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)-\sqrt{2}-1\right]\right|+C$

14. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}\right|+\frac{\theta}{2}+C$

15. $\ln\left|\frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+3\right]\left[3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right]}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|+C$

16. $\frac{\sqrt{21}}{21}\ln\left|\frac{2\tan w-\sqrt{21}-5}{2\tan w+\sqrt{21}-5}\right|+C$

## CAPÍTULO 5

### EJERCICIO 20

1. $2y = x^2 + 6x - 8$
2. $f(x) = \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$
3. $y = e^x(x-1) - e^3$
4. $x\left(y+3\,\text{arc sen}\frac{3x}{2a}-3\pi\right)+\sqrt{4a^2-9x^2}=0$
5. $x = y^3 - 2y^2 - 2$
6. $x=\frac{3}{2-y}-\ln(2-y)(y+1)^2-3$

7. $y=\frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{62}{3}$

8. $16x=28-3\pi+6y-8\text{ sen }y+\text{sen }2y$

9. $y=\frac{4+3x}{2-x}$

10. $y=4e^{2(x-\text{arc tan }x)}$

11. $x^3+3\cot y-3=0$

12. $s(t)=11t-15$

13. $60\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

14. $10\frac{2}{3}\text{m}$

15. $T=64°-2t^2$

16. 176.4 m

17. 75.776 m; $39.36\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**EJERCICIO 21**

1. $-\frac{4}{3}$
2. 20
3. $\frac{88}{3}$
4. 6
5. $-\frac{1}{2}$
6. 6
7. $-\ln\sqrt[4]{7}$
8. $\ln 2-\frac{1}{2}$
9. $\sqrt{2}$
10. $\ln\sqrt{\frac{8}{5}}$
11. $\frac{2}{e}\left(e^{\frac{5}{2}}-1\right)$
12. $4e^5$
13. $-\frac{1}{4}$
14. $\ln\left(\frac{8}{5}\right)$
15. $\frac{\pi}{3}$
16. sen(2) − sen(1)
17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
18. ln(432)
19. $\frac{\pi+2}{8}$
20. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\ln(2)\right)$

**EJERCICIO 22**

1. $18\text{u}^2$
2. $9\text{u}^2$
3. $\frac{609}{4}\text{u}^2$
4. $18\text{u}^2$
5. $\frac{32}{3}\text{u}^2$
6. $9\text{u}^2$
7. $\frac{16}{3}\text{u}^2$
8. $18\text{u}^2$
9. $1\text{u}^2$
10. $\frac{16}{3}\text{u}^2$
11. $6\text{u}^2$
12. $\frac{14}{3}\text{u}^2$
13. $8\text{u}^2$
14. $36\text{u}^2$
15. $\ln(16)=2.77\text{u}^2$
16. $\frac{1}{2}\text{u}^2$
17. $\frac{8}{a}\text{u}^2$ con $a\neq 0$
18. $(2-\ln 3)\text{u}^2=0.901\text{u}^2$
19. $9\text{u}^2$
20. $1.388\text{u}^2$
21. $(\ln 256-3)\text{u}^2=2.54\text{u}^2$
22. $\frac{\pi}{12}=0.261\text{u}^2$
23. $2(3-\sqrt{5})\text{u}^2$
24. $6\text{u}^2$
25. $\frac{1}{2}(e-1)=0.859\text{u}^2$
26. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}=0.684\text{u}^2$
27. $2\pi\text{u}^2$
28. $\frac{\pi^2-8}{4}=0.467\text{u}^2$
29. $\ln\left(\frac{147}{25}\right)=1.77\text{u}^2$
30. $\ln\left(\frac{16}{3}\right)=1.673\text{u}^2$
31. $(3e^{-2}-1)\text{u}^2$
32. $\left(2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)=2.405\text{u}^2$
33. $3(e^2-e)\text{u}^2$
34. $(ab\pi)\text{u}^2$

**EJERCICIO 23**

1. $8.72\text{u}^2$
2. $10\text{u}^2$
3. $0.836\text{u}^2$
4. $2.413\text{u}^2$
5. $1.519\text{u}^2$
6. $2.6439\text{u}^2$
7. $685.0499\text{u}^2$

**EJERCICIO 24**

1. $1.139\text{u}^2$
2. $14.226\text{u}^2$
3. $3.5226\text{u}^2$
4. $3.2069\text{u}^2$
5. $1.2499\text{u}^2$

**EJERCICIO 25**

1. $\frac{9}{2}u^2$
2. $\frac{5}{12}u^2$
3. $\frac{8}{3}u^2$
4. $9u^2$
5. $\frac{103}{18}u^2$
6. $3\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)u^2$
7. $21.849u^2$
8. $13.33u^2$
9. $(8\pi - 16)u^2$
10. $\left[\frac{11}{4}-6\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]u^2$
11. $1.94u^2$
12. $\frac{4}{3}(3\pi-2)u^2$
13. $32u^2$

**EJERCICIO 26**

1. $8\pi u^3$
2. $\frac{81}{2}\pi u^3$
3. $\frac{243}{5}\pi u^3$
4. $\frac{32}{5}\pi u^3$
5. $\frac{96}{5}\pi u^3$
6. $128\pi u^3$
7. $8\pi u^3$
8. $\frac{512}{15}\pi u^3$
9. $\frac{28}{3}\pi u^3$
10. $\frac{51}{8}\pi u^3$
11. $60\pi u^3$
12. $\frac{3}{10}\pi u^3$
13. $\frac{3}{10}\pi u^3$
14. $\frac{384}{5}\pi u^3$
15. $\frac{108}{5}\pi u^3$
16. $\frac{81}{5}\pi u^3$
17. $6\pi^2 u^3$
18. $90\pi u^3$
19. $128\pi^2 u^3$
20. $4\pi^2 u^3$

**EJERCICIO 27**

1. 7.6337u
2. 1.4789u
3. 4.66u
4. 4.1493u
5. 4u
6. $\ln\left|\sqrt{2}+1\right| \approx .8813u$
7. $-\ln\left|2-\sqrt{3}\right| \approx 1.3169u$
8. 5.2563u
9. 1.2027u
10. $\frac{393}{20}$ u

**EJERCICIO 28**

1. *a*) $C(x) = 4 + 20x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$
   *b*) $49.83
2. $I(x) = x^3 - x^2 + 5x$
3. *a*) $C(x) = 800(1.00501)^x + 200$
   *b*) $9945.99
4. $\begin{cases} I(x) = 4x^3 - 18x^2 + 35x \\ p(x) = 4x^2 - 18x + 35 \end{cases}$
5. *a*) $C(x) = 5\sqrt{2x+1} + 8$
   *b*) $113.00
6. *a*) $P(t) = \frac{2720}{3t+2}$
   *b*) $160.00
7. $64.00

## CAPÍTULO 6

**EJERCICIO 29**

1. $3x^4 - 4y^3 = C$
2. $(1 - x^3)^2 = Ce^{-y^2}$
3. $y^3 - 6x^3 + 15y = C$
4. $\frac{(x-2)(y+2)}{(x+2)(y-2)} = C$, o $\frac{(x+2)(y-2)}{(x-2)(y+2)} = C$
5. $x(9 + y^2)^2 = C$
6. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = C - \ln[(y - 2)(x - 2)]^8$
7. $\sqrt{x^2-2} + \sqrt{y^2-2} = C$
8. $2 - 3e^{3y} = Ce^{-9x}$
9. $\tan y - \operatorname{sen} x \cdot \cos x = C$
10. $\frac{1}{\operatorname{sen}(x+y)} - \cot(x + y) = x + C$
11. $\left(\frac{x}{x-6}\right)^2\left(\frac{y-4}{y}\right)^3 = C$

12. $4x^4 - y^4 = C$
13. $y^4 + 4y = 4x^2 + 4x + C$
14. $y = Ce^{e^x}$
15. $x^3y^2 = C$
16. $3y + 12\ln y = x^3 - 3x + C$
17. $\sqrt{\csc 2y - \cot 2y} = Ce^{\frac{x^3}{3}}$
18. $2e^{3y} - 3e^{2x} = C$
19. $x = e^{\frac{c}{y}}$
20. $e^y(y - 1) + \ln(e^{-x} + 1) = \text{C}$

**EJERCICIO 30**

1. $Cx^2 - 2x - y = 0$
2. $y = \dfrac{2Cx^3}{1 - Cx^2}$
3. $Cx^4 - 2x^2 - y^2 = 0$
4. $y = \dfrac{x - Cx^{-\frac{1}{2}}}{3}$
5. $Cx^4 + 3x^2 - y^2 = 0$
6. $y = e^{\frac{2Cy^2 - x^2}{2y^2}}$
7. $\ln x - \dfrac{x}{y - 2x} = C$
8. $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\, x \tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln Cy\right) + \dfrac{x}{2}$
9. $y = x\tan\left(\ln C(y^2 + x^2)^4\right)$
10. $x^4 = Ce^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$
11. $y^2 - 2xy + 2x^2 = C$
12. $y = Cx^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$
13. $y^2 + 2xy - x^2 = C$
14. $\ln|x| + e^{-\frac{y}{x}} = C$
15. $x^2 - y^2 = C$
16. $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| + C$
17. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$
18. $x + 3y + 2\ln(2 - x - y) = C$
19. $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$

# Tabla de logaritmos

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4609 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | .6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

## Tabla de logaritmos (*cont…*)

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 7782 | 7780 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

# Tabla de antilogaritmos

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .00 | 1000 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| .04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| .05 | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| .06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| .07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| .08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .10 | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .12 | 1318 | 1321 | 1324 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| .13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .15 | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .18 | 1514 | 1517 | 1521 | 1524 | 1528 | 1431 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| .19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1478 | 1581 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .20 | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1607 | 1611 | 1614 | 1618 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| .23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 1722 | 1726 | 1730 | 1734 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| .24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| .25 | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| .26 | 1820 | 1824 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| .27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| .28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .30 | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| .34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .35 | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| .39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| .40 | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| .41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| .42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| .43 | 2692 | 2698 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| .44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| .45 | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| .46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2924 | 2931 | 2938 | 2944 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| .47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2979 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| .48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 3083 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| .49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

## Tabla de antilogaritmos (*cont…*)

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| .51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| .52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| .53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| .54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| .55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| .56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| .61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .64 | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| .67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| .71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| .72 | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| .73 | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| .74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| .75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| .76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| .77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| .78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| .79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| .80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6442 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| .81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| .82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| .83 | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| .84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| .85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| .86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| .87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| .88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| .89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7819 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| .90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| .91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| .92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| .93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| .94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| .95 | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| .96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| .97 | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| .98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| .99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

# Tabla de valores de las funciones trigonométricas

| Grados | Radianes | Sen | tan | Ctg | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° 00' | .0000 | .0000 | .0000 | | 1.0000 | 1.5708 | 90° 00' |
| 10' | .0029 | .0029 | .0029 | 343.77 | 1.0000 | 1.5679 | 50' |
| 20' | .0058 | .0058 | .0058 | 171.89 | 1.0000 | 1.5650 | 40' |
| 30' | .0087 | .0087 | .0087 | 114.59 | 1.0000 | 1.5621 | 30' |
| 40' | .0116 | .0116 | .0116 | 85.940 | .9999 | 1.5592 | 20' |
| 50' | .0145 | .0145 | .0145 | 68.750 | .9999 | 1.5563 | 10' |
| 1° 00' | .0175 | .0175 | .0175 | 57.290 | .9998 | 1.5533 | 89° 00' |
| 10' | .0204 | .0204 | .0204 | 49.104 | .9998 | 1.5504 | 50' |
| 20' | .0233 | .0233 | .0233 | 42.964 | .9997 | 1.5475 | 40' |
| 30' | .0262 | .0262 | .0262 | 38.188 | .9997 | 1.5446 | 30' |
| 40' | .0291 | .0291 | .0291 | 34.368 | .9996 | 1.5417 | 20' |
| 50' | .0320 | .0320 | .0320 | 31.242 | .9995 | 1.5388 | 10' |
| 2° 00' | .0349 | .0349 | .0349 | 28.636 | .9994 | 1.5359 | 88° 00' |
| 10' | .0378 | .0378 | .0378 | 26.432 | .9993 | 1.5330 | 50' |
| 20' | .0407 | .0407 | .0407 | 24.542 | .9992 | 1.5301 | 40' |
| 30' | .0436 | .0436 | .0437 | 22.904 | .9990 | 1.5272 | 30' |
| 40' | .0465 | .0465 | .0466 | 21.470 | .9989 | 1.5243 | 20' |
| 50' | .0495 | .0494 | .0495 | 20.206 | .9988 | 1.5213 | 10' |
| 3° 00' | .0524 | .0523 | .0524 | 19.081 | .9986 | 1.5184 | 87° 00' |
| 10' | .0553 | .0552 | .0553 | 18.075 | .9985 | 1.5155 | 50' |
| 20' | .0582 | .0581 | .0582 | 17.169 | .9983 | 1.5126 | 40' |
| 30' | .0611 | .0610 | .0612 | 16.350 | .9981 | 1.5097 | 30' |
| 40' | .0640 | .0640 | .0641 | 15.605 | .9980 | 1.5068 | 20' |
| 50' | .0669 | .0669 | .0670 | 14.924 | .9978 | 1.5039 | 10' |
| 4° 00' | .0698 | .0698 | .0699 | 14.301 | .9976 | 1.501 | 86° 00' |
| 10' | .0727 | .0727 | .0729 | 13.727 | .9974 | 1.4981 | 50' |
| 20' | .0756 | .0756 | .0758 | 13.197 | .9971 | 1.4952 | 40' |
| 30' | .0785 | .0785 | .0787 | 12.706 | .9969 | 1.4923 | 30' |
| 20' | .0814 | .0814 | .0816 | 12.251 | .9967 | 1.4893 | 20' |
| 50' | .0844 | .0843 | .0846 | 11.826 | .9964 | 1.4864 | 10' |
| 5° 00' | .0873 | .0872 | .0875 | 11.430 | .9962 | 1.4835 | 85° 00' |
| 10' | .0902 | .0901 | .0904 | 11.059 | .9959 | 1.4806 | 50' |
| 20' | .0931 | .0929 | .0934 | 10.712 | .9957 | 1.4777 | 40' |
| 30' | .0960 | .0958 | .0963 | 10.385 | .9954 | 1.4748 | 30' |
| 40' | .0989 | .0987 | .0992 | 10.078 | .9951 | 1.4719 | 20' |
| 50' | .1018 | .1016 | .1022 | 9.7882 | .9948 | 1.4690 | 10' |
| 6° 00' | .1047 | .1045 | .1051 | 9.5144 | .9945 | 1.4661 | 84° 00' |
| 10' | .1076 | .1074 | .1080 | 9.2553 | .9942 | 1.4632 | 50' |
| 20' | .1105 | .1103 | .1110 | 9.0098 | .9939 | 1.4603 | 40' |
| 30' | .1134 | .1132 | .1139 | 8.7769 | .9936 | 1.4573 | 30' |
| 40' | .1164 | .1161 | .1169 | 8.5555 | .9932 | 1.4544 | 20' |
| 50' | .1193 | .1190 | .1198 | 8.3450 | .9929 | 1.4515 | 10' |
| 7° 00' | .1222 | .1219 | .1228 | 8.1443 | .9925 | 1.4486 | 83° 00' |
| 10' | .1251 | .1248 | .1257 | 7.9530 | .9922 | 1.4457 | 50' |
| 20' | .1280 | .1276 | .1287 | 7.7704 | .9918 | 1.4428 | 40' |
| 30' | .1309 | .1305 | .1317 | 7.5958 | .9914 | 1.4399 | 30' |
| 40' | .1338 | .1334 | .1346 | 7.4287 | .9911 | 1.4370 | 20' |
| 50' | .1367 | .1363 | .1376 | 7.2687 | .9907 | 1.4341 | 10' |
| 8° 00' | .1396 | .1392 | .1405 | 7.1154 | .9903 | 1.4312 | 82° 00' |
| 10' | .1425 | .1421 | .1435 | 6.9682 | .9899 | 1.4283 | 50' |
| 20' | .1454 | .1449 | .1465 | 6.8269 | .9894 | 1.4254 | 40' |
| 30' | .1484 | .1478 | .1495 | 6.6912 | .9890 | 1.4224 | 30' |
| 40' | .1513 | .1507 | .1524 | 6.5606 | .9886 | 1.4195 | 20' |
| 50' | .1542 | .1536 | .1554 | 6.4348 | .9881 | 1.4166 | 10' |
| 9° 00' | .1571 | .1564 | .1584 | 6.3138 | .9877 | 1.4137 | 81° 00' |
| | | Cos | Ctg | tan | Sen | Radianes | Grados |

## Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont…*)

| Grados | Radianes | Sen | tan | Ctg | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9° 00' | .1571 | .1564 | .1584 | 6.3138 | .9877 | 1.4137 | 81° 00' |
| 10' | .1600 | .1593 | .1614 | 6.1970 | .9872 | 1.4108 | 50' |
| 20' | .1629 | .1622 | .1644 | 6.0844 | .9868 | 1.4079 | 40' |
| 30' | .1658 | .1650 | .1673 | 5.9758 | .9863 | 1.4050 | 30' |
| 40' | .1687 | .1679 | .1703 | 5.8708 | .9858 | 1.4021 | 20' |
| 50' | .1716 | .1708 | .1733 | 5.7694 | .9853 | 1.3992 | 10' |
| 10° 00' | .1745 | .1736 | .1763 | 5.6713 | .9848 | 1.3963 | 80° 00' |
| 10' | .1774 | .1765 | .1793 | 5.5764 | .9843 | 1.3934 | 50' |
| 20' | .1804 | .1794 | .1823 | 5.4845 | .9838 | 1.3904 | 40' |
| 30' | .1833 | .1822 | .1853 | 5.3955 | .9833 | 1.3875 | 30' |
| 40' | .1862 | .1851 | .1883 | 5.3093 | .9827 | 1.3846 | 20' |
| 50' | .1891 | .1880 | .1914 | 5.2257 | .9822 | 1.3817 | 10' |
| 11° 00' | .1920 | .1908 | .1944 | 5.1446 | .9816 | 1.3788 | 79° 00' |
| 10' | .1949 | .1937 | .1974 | 5.0658 | .9811 | 1.3759 | 50' |
| 20' | .1978 | .1965 | .2004 | 4.9894 | .9805 | 1.3730 | 40' |
| 30' | .2007 | .1994 | .2035 | 4.9152 | .9799 | 1.3701 | 30' |
| 40' | .2036 | .2022 | .2065 | 4.8430 | .9793 | 1.3672 | 20' |
| 50' | .2065 | .2051 | .2095 | 4.7729 | .9787 | 1.3643 | 10' |
| 12° 00' | .2094 | .2079 | .2126 | 4.7046 | .9781 | 1.3614 | 78° 00' |
| 10' | .2123 | .2108 | .2156 | 4.6382 | .9775 | 1.3584 | 50' |
| 20' | .2153 | .2136 | .2186 | 4.5736 | .9769 | 1.3555 | 40' |
| 30' | .2182 | .2164 | .2217 | 4.5107 | .9763 | 1.3526 | 30' |
| 40' | .2211 | .2193 | .2247 | 4.4494 | .9757 | 1.3497 | 20' |
| 50' | .2240 | .2221 | .2278 | 4.3897 | .9750 | 1.3468 | 10' |
| 13° 00' | .2269 | .2250 | .2309 | 4.3315 | .9744 | 1.3439 | 77° 00' |
| 10' | .2298 | .2278 | .2339 | 4.2747 | .9737 | 1.3410 | 50' |
| 20' | .2327 | .2306 | .2370 | 4.2193 | .9730 | 1.3381 | 40' |
| 30' | .2356 | .2334 | .2401 | 4.1653 | .9724 | 1.3352 | 30' |
| 40' | .2385 | .2363 | .2432 | 4.1126 | .9717 | 1.3323 | 20' |
| 50' | .2414 | .2391 | .2462 | 4.0611 | .9710 | 1.3294 | 10' |
| 14° 00' | .2443 | .2419 | .2493 | 4.0108 | .9703 | 1.3265 | 76° 00' |
| 10' | .2473 | .2447 | .2424 | 3.9617 | .9696 | 1.3235 | 50' |
| 20' | .2502 | .2476 | .2555 | 3.9136 | .9689 | 1.3206 | 40' |
| 30' | .2531 | .2504 | .2586 | 3.8667 | .9681 | 1.3177 | 30' |
| 40' | .2560 | .2532 | .2617 | 3.8208 | .9674 | 1.3148 | 20' |
| 50' | .2589 | .2560 | .2648 | 3.7760 | .9667 | 1.3119 | 10' |
| 15° 00' | .2618 | .2588 | .2679 | 3.7321 | .9659 | 1.3090 | 75° 00' |
| 10' | .2647 | .2616 | .2711 | 3.6891 | .9652 | 1.3061 | 50' |
| 20' | .2676 | .2644 | .2742 | 3.6470 | .9644 | 1.3032 | 40' |
| 30' | .2705 | .2672 | .2773 | 3.6059 | .9636 | 1.3003 | 30' |
| 40' | .2734 | .2700 | .2805 | 3.5656 | .9628 | 1.2974 | 20' |
| 50' | .2763 | .2728 | .2836 | 3.5261 | .9621 | 1.2945 | 10' |
| 16° 00' | .2793 | .2756 | .2867 | 3.4874 | .9613 | 1.2915 | 74° 00' |
| 10' | .2822 | .2784 | .2899 | 3.4495 | .9605 | 1.2886 | 50' |
| 20' | .2851 | .2812 | .2931 | 3.4124 | .9596 | 1.2857 | 40' |
| 30' | .2880 | .2840 | .2962 | 3.3759 | .9588 | 1.2828 | 30' |
| 40' | .2909 | .2868 | .2994 | 3.3402 | .9580 | 1.2799 | 20' |
| 50' | .2938 | .2896 | .3026 | 3.3052 | .9572 | 1.2770 | 10' |
| 17° 00' | .2967 | .2924 | .3057 | 3.2709 | .9563 | 1.2741 | 73° 00' |
| 10' | .2996 | .2952 | .3089 | 3.2371 | .9555 | 1.2712 | 50' |
| 20' | .3025 | .2979 | .3121 | 3.2041 | .9546 | 1.2683 | 40' |
| 30' | .3054 | .3007 | .3153 | 3.1716 | .9537 | 1.2654 | 30' |
| 40' | .3083 | .3035 | .3185 | 3.1397 | .9528 | 1.2625 | 20' |
| 50' | .3113 | .3062 | .3217 | 3.1084 | .9520 | 1.2595 | 10' |
| 18° 00' | .3142 | .3090 | .3249 | 3.0777 | .9511 | 1.2566 | 72° 00' |
| | | Cos | Ctg | tan | Sen | Radianes | Grados |

## Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont…*)

| Grados | Radianes | Sen | tan | Ctg | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18° 00' | .3142 | .3090 | .3249 | 3.0777 | .9511 | 1.2566 | 72° 00' |
| 10' | .3171 | .3118 | .3281 | 3.0475 | .9502 | 1.2537 | 50' |
| 20' | .3200 | .3145 | .3314 | 3.0178 | .9492 | 1.2508 | 40' |
| 30' | .3229 | .3173 | .3346 | 2.9887 | .9483 | 1.2479 | 30' |
| 40' | .3258 | .3201 | .3378 | 2.9600 | .9474 | 1.2450 | 20' |
| 50' | .3287 | .3228 | .3411 | 2.9319 | .9465 | 1.2421 | 10' |
| 19° 00' | .3316 | .3256 | .3443 | 2.9042 | .9455 | 1.2392 | 71° 00' |
| 10' | .3345 | .3283 | .3476 | 2.8770 | .9446 | 1.2363 | 50' |
| 20' | .3374 | .3311 | .3508 | 2.8502 | .9436 | 1.2334 | 40' |
| 30' | .3403 | .3338 | .3541 | 2.8239 | .9426 | 1.2305 | 30' |
| 40' | .3432 | .3365 | .3574 | 2.7980 | .9417 | 1.2275 | 20' |
| 50' | .3462 | .3393 | .3607 | 2.7725 | .9407 | 1.2246 | 10' |
| 20° 00' | .3491 | .3420 | .3640 | 2.7475 | .9397 | 1.2217 | 70° 00' |
| 10' | .3520 | .3448 | .3673 | 2.7228 | .9387 | 1.2188 | 50' |
| 20' | .3549 | .3475 | .3706 | 2.6985 | .9377 | 1.2159 | 40' |
| 30' | .3578 | .3502 | .3739 | 2.6746 | .9367 | 1.2130 | 30' |
| 40' | .3607 | .3529 | .3772 | 2.6511 | .9356 | 1.2101 | 20' |
| 50' | .3636 | .3557 | .3805 | 2.6279 | .9346 | 1.2072 | 10' |
| 21° 00' | .3665 | .3584 | .3839 | 2.6051 | .9336 | 1.2043 | 69° 00' |
| 10' | .3694 | .3611 | .3872 | 2.5826 | .9325 | 1.2014 | 50' |
| 20' | .3723 | .3638 | .3906 | 2.5605 | .9315 | 1.1985 | 40' |
| 30' | .3752 | .3665 | .3939 | 2.5386 | .9304 | 1.1956 | 30' |
| 40' | .3782 | .3692 | .3973 | 2.5172 | .9293 | 1.1926 | 20' |
| 50' | .3811 | .3719 | .4006 | 2.4960 | .9283 | 1.1897 | 10' |
| 22° 00' | .3840 | .3746 | .4040 | 2.4751 | .9272 | 1.1868 | 68° 00' |
| 10' | .3869 | .3773 | .4074 | 2.4545 | .9261 | 1.1839 | 50' |
| 20' | .3898 | .3800 | .4108 | 2.4342 | .9250 | 1.1810 | 40' |
| 30' | .3927 | .3827 | .4142 | 2.4142 | .9239 | 1.1781 | 30' |
| 40' | .3956 | .3854 | .4176 | 2.3945 | .9228 | 1.1752 | 20' |
| 50' | .3985 | .3881 | .4210 | 2.3750 | .9216 | 1.1723 | 10' |
| 23° 00' | .4014 | .3907 | .4245 | 2.3559 | .9205 | 1.1694 | 67° 00' |
| 10' | .4043 | .3934 | .4279 | 2.3369 | .9194 | 1.1665 | 50' |
| 20' | .4072 | .3961 | .4314 | 2.3183 | .9182 | 1.1636 | 40' |
| 30' | .4102 | .3987 | .4348 | 2.2998 | .9171 | 1.1606 | 30' |
| 40' | .4131 | .4014 | .4383 | 2.2817 | .9159 | 1.1577 | 20' |
| 50' | .4160 | .4041 | .4417 | 2.2637 | .9147 | 1.1548 | 10' |
| 24° 00' | .4189 | .4067 | .4452 | 2.2460 | .9135 | 1.1519 | 66° 00' |
| 10' | .4218 | .4094 | .4487 | 2.2286 | .9124 | 1.149 | 50' |
| 20' | .4247 | .4120 | .4522 | 2.2113 | .9112 | 1.1461 | 40' |
| 30' | .4276 | .4147 | .4557 | 2.1943 | .9100 | 1.1432 | 30' |
| 40' | .4305 | .4173 | .4592 | 2.1775 | .9088 | 1.1403 | 20' |
| 50' | .4334 | .4200 | .4628 | 2.1609 | .9075 | 1.1374 | 10' |
| 25° 00' | .4363 | .4226 | .4663 | 2.1445 | .9063 | 1.1345 | 65° 00' |
| 10' | .4392 | .4253 | .4699 | 2.1283 | .9051 | 1.1316 | 50' |
| 20' | .4422 | .4279 | .4734 | 2.1123 | .9038 | 1.1286 | 40' |
| 30' | .4451 | .4305 | .4770 | 2.0965 | .9026 | 1.1257 | 30' |
| 40' | .4480 | .4331 | .4806 | 2.0809 | .9013 | 1.1228 | 20' |
| 50' | .4509 | .4358 | .4841 | 2.0655 | .9001 | 1.1199 | 10' |
| 26° 00' | .4538 | .4384 | .4877 | 2.0503 | .8988 | 1.117 | 64° 00' |
| 10' | .4567 | .4410 | .4913 | 2.0353 | .8975 | 1.1141 | 50' |
| 20' | .4596 | .4436 | .4950 | 2.0204 | .8962 | 1.1112 | 40' |
| 30' | .4625 | .4462 | .4986 | 2.0057 | .8949 | 1.1083 | 30' |
| 40' | .4654 | .4488 | .5022 | 1.9912 | .8936 | 1.1054 | 20' |
| 50' | .4683 | .4514 | .5059 | 1.9768 | .8923 | 1.1025 | 10' |
| 27° 00' | .4712 | .4540 | .5095 | 1.9626 | .8910 | 1.0996 | 63° 00' |
| | | Cos | Ctg | tan | Sen | Radianes | Grados |

## Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont…*)

| Grados | Radianes | Sen | tan | Ctg | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27° 00' | .4712 | .4540 | .5095 | 1.9626 | .8910 | 1.0996 | 63° 00' |
| 10' | .4741 | .4566 | .5132 | 1.9486 | .8897 | 1.0966 | 50' |
| 20' | 4771 | .4592 | .5169 | 1.9347 | .8884 | 1.0937 | 40' |
| 30' | .4800 | .4617 | .5206 | 1.9210 | .8870 | 1.0908 | 30' |
| 40' | .4829 | .4643 | .5243 | 1.9074 | .8857 | 1.0879 | 20' |
| 50' | .4858 | .4669 | .5280 | 1.8940 | .8843 | 1.0850 | 10' |
| 28° 00' | .4887 | .4695 | .5317 | 1.8807 | .8829 | 1.0821 | 62° 00' |
| 10' | .4916 | .4720 | .5354 | 1.8676 | .8816 | 1.0792 | 50' |
| 20' | .4945 | .4746 | .5392 | 1.8546 | .8802 | 1.0763 | 40' |
| 30' | .4974 | .4772 | .5430 | 1.8418 | .8788 | 1.0734 | 30' |
| 40' | .5003 | .4797 | .5467 | 1.8291 | .8774 | 1.0705 | 20' |
| 50' | .5032 | .4823 | .5505 | 1.8165 | .8760 | 1.0676 | 10' |
| 29° 00' | .5061 | .4848 | .5543 | 1.8040 | .8746 | 1.0647 | 61° 00' |
| 10' | .5091 | .4874 | .5581 | 1.7917 | .8732 | 1.0617 | 50' |
| 20' | .5120 | .4899 | .5619 | 1.7796 | .8718 | 1.0588 | 40' |
| 30' | .5149 | .4924 | .5658 | 1.7675 | .8704 | 1.0559 | 30' |
| 40' | .5178 | .4950 | .5696 | 1.7556 | .8689 | 1.0530 | 20' |
| 50' | .5207 | .4975 | .5735 | 1.7437 | .8675 | 1.0501 | 10' |
| 30° 00' | .5236 | .5000 | .5774 | 1.7321 | .8660 | 1.0472 | 60° 00' |
| 10' | .5265 | .5025 | .5812 | 1.7205 | .8646 | 1.0443 | 50' |
| 20' | .5294 | .5050 | .5851 | 1.7090 | .8631 | 1.0414 | 40' |
| 30' | .5323 | .5075 | .5890 | 1.6977 | .8616 | 1.0385 | 30' |
| 40' | .5352 | .5100 | .5930 | 1.6864 | .8601 | 1.0356 | 20' |
| 50' | .5381 | .5125 | .5969 | 1.6753 | .8587 | 1.0327 | 10' |
| 31° 00' | .5411 | .5150 | .6009 | 1.6643 | .8572 | 1.0297 | 59° 00' |
| 10' | .5440 | .5175 | .6048 | 1.6534 | .8557 | 1.0268 | 50' |
| 20' | .5469 | .5200 | .6088 | 1.6426 | .8542 | 1.0239 | 40' |
| 30' | .5498 | .5225 | .6128 | 1.6319 | .8526 | 1.0210 | 30' |
| 40' | .5527 | .5250 | .6168 | 1.6212 | .8511 | 1.0181 | 20' |
| 50' | .5556 | .5275 | .6208 | 1.6107 | .8496 | 1.0152 | 10' |
| 32° 00' | .5585 | .5299 | .6249 | 1.6003 | .8480 | 1.0123 | 58° 00' |
| 10' | .5614 | .5324 | .6289 | 1.5900 | .8465 | 1.0094 | 50' |
| 20' | .5643 | .5348 | .6330 | 1.5798 | .8450 | 1.0065 | 40' |
| 30' | .5672 | .5373 | .6371 | 1.5697 | .8434 | 1.0036 | 30' |
| 40' | .5701 | .5398 | .6412 | 1.5597 | .8418 | 1.0007 | 20' |
| 50' | .5730 | .5422 | .6453 | 1.5497 | .8403 | .9977 | 10' |
| 33° 00' | .5760 | .5446 | .6494 | 1.5399 | .8387 | .9948 | 57° 00' |
| 10' | .5789 | .5471 | .6536 | 1.5301 | .8371 | .9919 | 50' |
| 20' | .5818 | .5459 | .6577 | 1.5204 | .8355 | .9890 | 40' |
| 30' | .5847 | .5519 | .6619 | 1.5108 | .8339 | .9861 | 30' |
| 40' | .5876 | .5544 | .6661 | 1.5013 | .8323 | .9832 | 20' |
| 50' | .5905 | .5568 | .6703 | 1.4919 | .8307 | .9803 | 10' |
| 34° 00' | .5934 | .5592 | .6745 | 1.4826 | .8290 | .9774 | 56° 00' |
| 10' | .5963 | .5616 | .6787 | 1.4733 | .8274 | .9745 | 50' |
| 20' | .5992 | .5640 | .6830 | 1.4641 | .8258 | .9716 | 40' |
| 30' | .6021 | .5664 | .6873 | 1.4550 | .8241 | .9687 | 30' |
| 40' | .6050 | .5688 | .6916 | 1.4460 | .8225 | .9657 | 20' |
| 50' | .6080 | .5712 | .6959 | 1.4370 | .8208 | .9628 | 10' |
| 35° 00' | .6109 | .5736 | .7002 | 1.4281 | .8192 | .9599 | 55° 00' |
| 10' | .6138 | .5760 | .7046 | 1.4193 | .8175 | .9570 | 50' |
| 20' | .6167 | .5783 | .7089 | 1.4106 | .8158 | .9541 | 40' |
| 30' | .6196 | .5807 | .7133 | 1.4019 | .8141 | .9512 | 30' |
| 40' | .6225 | .5831 | .7177 | 1.3934 | .8124 | .9483 | 20' |
| 50' | .6254 | .5854 | .7221 | 1.3848 | .8107 | .9454 | 10' |
| 36° 00' | .6283 | .5878 | .7265 | 1.3764 | .8090 | .9425 | 54° 00' |
| | | Cos | Ctg | tan | Sen | Radianes | Grados |

# Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont…*)

| Grados | Radianes | Sen | tan | Ctg | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36° 00' | .6283 | .5378 | .7265 | 1.3764 | .8090 | .9425 | 54° 00' |
| 10' | .6312 | .5901 | .7310 | 1.3680 | .8073 | .9396 | 50' |
| 20' | .6341 | .5925 | .7355 | 1.3597 | .8056 | .9367 | 40' |
| 30' | .6370 | .5948 | .7400 | 1.3514 | .8039 | .9338 | 30' |
| 40' | .6400 | .5972 | .7445 | 1.3432 | .8021 | .9308 | 20' |
| 50' | .6429 | .5995 | .7490 | 1.3351 | .8004 | .9279 | 10' |
| 37° 00' | .6458 | .6018 | .7536 | 1.3270 | .7986 | .9250 | 53° 00' |
| 10' | .6487 | .6041 | .7581 | 1.3190 | .7969 | .9221 | 50' |
| 20' | .6516 | .6065 | .7627 | 1.3111 | .7951 | .9192 | 40' |
| 30' | .6545 | .6088 | .7673 | 1.3032 | .7934 | .9163 | 30' |
| 40' | .6574 | .6111 | .7720 | 1.2954 | .7916 | .9134 | 20' |
| 50' | .6603 | .6134 | .7766 | 1.2876 | .7898 | .9105 | 10' |
| 38° 00' | .6632 | .6157 | .7813 | 1.2799 | .7880 | .9076 | 52° 00' |
| 10' | .6661 | .6180 | .7860 | 1.2723 | .7862 | .9047 | 50' |
| 20' | .6690 | .6202 | .7907 | 1.2647 | .7844 | .9018 | 40' |
| 30' | .6720 | .6225 | .7954 | 1.2572 | .7826 | .8988 | 30' |
| 40' | .6749 | .6248 | .8002 | 1.2497 | .7808 | .8959 | 20' |
| 50' | .6778 | .6271 | .8050 | 1.2423 | .7790 | .8930 | 10' |
| 39° 00' | .6807 | .6293 | .8098 | 1.2349 | .7771 | .8901 | 51° 00' |
| 10' | .6836 | .6316 | .8146 | 1.2276 | .7753 | .8872 | 50' |
| 20' | .6865 | .6338 | .8195 | 1.2203 | .7735 | .8843 | 40' |
| 30' | .6894 | .6361 | .8243 | 1.2131 | .7716 | .8814 | 30' |
| 40' | .6923 | .6383 | .8292 | 1.2059 | .7698 | .8785 | 20' |
| 50' | .6952 | .6406 | .8342 | 1.1988 | .7679 | .8756 | 10' |
| 40° 00' | .6981 | .6428 | .8391 | 1.1918 | .7660 | .8727 | 50° 00' |
| 10' | .7010 | .6450 | .8441 | 1.1847 | .7642 | .8698 | 50' |
| 20' | .7039 | .6472 | .8491 | 1.1778 | .7623 | .8668 | 40' |
| 30' | .7069 | .6494 | .8541 | 1.1708 | .7604 | .8639 | 30' |
| 40' | .7098 | .6517 | .8591 | 1.1640 | .7585 | .8610 | 20' |
| 50' | .7127 | .6539 | .8642 | 1.1571 | .7566 | .8581 | 10' |
| 41° 00' | .7156 | .6561 | .8693 | 1.1504 | .7547 | .8552 | 49° 00' |
| 10' | .7185 | .6583 | .8744 | 1.1436 | .7528 | .8523 | 50' |
| 20' | .7214 | .6604 | .8796 | 1.1369 | .7509 | .8494 | 40' |
| 30' | .7243 | .6626 | .8847 | 1.1303 | .7490 | .8465 | 30' |
| 40' | .7272 | .6648 | .8899 | 1.1237 | .7470 | .8436 | 20' |
| 50' | .7301 | .6670 | .8952 | 1.1171 | .7451 | .8407 | 10' |
| 42° 00' | .7330 | .6691 | .9004 | 1.1106 | .7431 | .8378 | 48° 00' |
| 10' | .7359 | .6713 | .9057 | 1.1041 | .7412 | .8348 | 50' |
| 20' | .7289 | .6734 | .9110 | 1.0977 | .7392 | .8319 | 40' |
| 30' | .7418 | .6756 | .9163 | 1.0913 | .7373 | .8290 | 30' |
| 40' | .7447 | .6777 | .9217 | 1.0850 | .7353 | .8261 | 20' |
| 50' | .7476 | .6799 | .9271 | 1.0786 | .7333 | .8232 | 10' |
| 43° 00' | .7505 | .6820 | .9325 | 1.0724 | .7314 | .8203 | 47° 00' |
| 10' | .7534 | .6841 | .9380 | 1.0661 | .7294 | .8174 | 50' |
| 20' | .7536 | .6862 | .9435 | 1.0599 | .7274 | .8145 | 40' |
| 30' | .7592 | .6884 | .9490 | 1.0538 | .7254 | .8116 | 30' |
| 40' | .7621 | .6905 | .9545 | 1.0477 | .7234 | .8087 | 20' |
| 50' | .7650 | .6926 | .9601 | 1.0416 | .7214 | .8058 | 10' |
| 44° 00' | .7679 | .6947 | .9657 | 1.0355 | .7193 | .8029 | 46° 00' |
| 10' | .7709 | .6967 | .9713 | 1.0295 | .7173 | .7999 | 50' |
| 20' | .7738 | .6988 | .9770 | 1.0235 | .7153 | .7970 | 40' |
| 30' | .7767 | .7009 | .9827 | 1.0176 | .7133 | .7941 | 30' |
| 40' | .7796 | .7030 | .9884 | 1.0117 | .7112 | .7912 | 20' |
| 50' | .7825 | .7050 | .9942 | 1.0058 | .7092 | .7883 | 10' |
| 45° 00' | .7854 | .7071 | 1.0000 | 1.0000 | .7071 | .7854 | 45° 00' |
| | | Cos | Ctg | tan | Sen | Radianes | Grados |

# Bibliografía

Agustín Anfossi, *Geometría analítica*, Ed. Progreso, S.A., México, 1968.

Álvaro Pinzón, *Cálculo diferencial*, Colección Harper, Ed. Harla, México, 1977.

Anfossi Agustín, Flores Meyer, *Álgebra*, Vigesimosegunda edición, Ed. Progreso, S.A., México, 1988.

Baldor, Aurelio, *Aritmética teórico-práctica*, Cultural, México, 1988.

Barnett, Rich, *Geometría plana con coordenadas*, McGraw-Hill, México, 1971.

Bohuslov, *Geometría Analítica, Introducción al precálculo*, Hispano-Americano, S.A. de C.V., México, 1983.

Bosch Guerra, Hernández Oteyza, *Cálculo diferencial e integral*, Publicaciones Culturales, México, 1999.

Charles H. Lehmann, *Geometría analítica*, Hispano-Americano, S.A. de C.V., México, 1972.

Claudio Pita Ruiz, *Cálculo de una variable*, Prentice Hall, México, 1998.

Earl W. Swokowski, *Cálculo con geometría analítica*, Grupo editores Iberoamericana, México, 1989.

Edwards Penney, Pearson, *Cálculo con geometría analítica*, Prentice Hall, México, 1996.

Gordón Fuller, Dalto Tarwater, Addison-Wesley, *Geometría analítica*, Iberoamericana, México, 1988.

Guerra Tejeda, Figueroa Campos, *Geometría analítica para bachillerato*, McGraw-Hill, México, 1999.

Gustafson David R., *Álgebra intermedia*, International Thomson Editores, México, 1995.

H. Lehmann Charles, *Álgebra*, Editorial Limusa, México, 1999.

Harcourt Brace Jovanovich, *Cálculo*, Ed. SITESA, Sistemas técnicos, México, 1990.

Harcourt, Jovanovich Brace, *Teoría y práctica trigonometría*, Ed. SITESA, México, 1990.

James Stewart, *Cálculo Diferencial e Integral*, International Thomson Editores, México, 1999.

Joseph H. Kindle, *Geometría analítica*, McGraw-Hill, México, 1994.

Leithold Louis, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, Ed. Harla, México, 1995.

Leithold Louis, *Álgebra*, Oxford University Press, México, 2000.

Leithold Louis, *El cálculo*, Oxford University Press, México, 1989.

N. Piskunov, *Cálculo diferencial e integral*, 5a. ed., traducción al español, Ed. Mir, Moscú, 1980.

Pedro Lezama y Noriega, *Geometría Analítica Bidimensional*, CECSA, México, 1970.

Pérez Seguí, María Luisa, *Teoría de números*, Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2004.

Purcell, Jorberg, *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall, México, 1992.

R. A. Kalnin, *Álgebra y funciones elementales*, traducción al español, Ed. Mir, Moscú, 1973.

Silva Juan Manuel, *Fundamentos de matemáticas*, Limusa Noriega Editores, México, 2000.

Swokowski, Earl W, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, 10a. ed., International Thomson Editores, México, 2002.

V. B. Lidski, *Problemas de matemáticas elementales*, 1a. ed., traducción al español, Ed. Mir, Moscú, 1978.

V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para resolver problemas matemáticos*, traducción al español, Ed. Mir, Moscú, 1989.

Vinogradov, Iván, *Fundamentos de la teoría de los números*, traducción al español, Ed. Mir, Moscú, 1977.

Viñals, Jaime, *Ayúdame con la tarea de matemáticas*, Ed. Lexus, Barcelona, 1999.

W. Swokowski Earl, *Álgebra universitaria*, Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1998.

W. Swokowski Earl, Cole Jeffery A., *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, 10a. ed., International Thomson, México, 2004.

William Anthony Granville, *Cálculo diferencial e integral*, Noriega Editores Limusa, México, 2001.